

Anni Immonen ja Roosa Kaivoluoto

# **MATEMAATTINEN KÄSITE ”SUHDE” ALAKOULUN MATEMATIIKASSA**

Tutkimus oppimateriaaleista ja oppilaiden ymmärryksestä

# TIIVISTELMÄ

Anni Immonen ja Roosa Kaivoluo: Matemaattinen käsite ”suhde” alakoulun matematiikassa – Tutkimus oppimateriaaleista ja oppilaiden ymmärryksestä  
Pro gradu -tutkielma  
Tampereen yliopisto  
Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta, Luokanopettajakoulutus  
Huhtikuu 2023

---

Suhde on yksi merkittävistä käsitteistä matematiikassa. Se esiintyy useissa eri yhteyksissä ja luo pohjaa monille muille tärkeille käsitteille. Suhdetta ei kuitenkaan tuoda esille juuri lainkaan matematiikan oppimateriaaleissa tai valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa. Suhteen käsitteestä ei myöskään ole paljoa aiempaa tutkimusta.

Tämän kvalitatiivisen tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten matemaattista suhdetta käsitellään matematiikan oppimateriaaleissa ja kuinka 6.-luokkalaiset ymmärtävät kyseisen käsitteen. Tutkimuskysymykset olivat: ”Miten matematiikan oppimateriaalit esittävät suhde-käsitteen?” ja ”Miten 6.-luokkalaiset oppilaat ymmärtävät suhde-käsitteen?”. Tutkimuksessa päätettiin hyödyntää kahta eri aineistoa kokonaisvaltaisemman kuvan saamiseksi aiheesta. Tutkimus toteutettiin tarkastelemalla Sanoma Pron, Otavan ja Edukustannuksen matematiikan oppimateriaaleja vuosiluokilta 4–6 sekä keräämällä sähköisellä tehtävälomakkeella tietoa 6.-luokkalaisten ymmärryksestä matemaattisesta suhteesta. Tehtävälomake sisälsi kysymyksiä matemaattiseen suhteeseen liittyen. Oppimateriaaliaineisto analysoitiin teemoittelun avulla. Oppilailta kerätyn aineiston analyysissa käytettiin teoriaohjaavaa sisällönanalyysia.

Tulokset osoittivat, että matemaattinen suhde jäi oppimateriaaleissa melko vähälle huomiolle. Selkeästi suhteen käsitteeseen liittyvät tehtävät oli sijoitettu keskitetysti ja peräkkäin niissä harvoissa oppikirjoissa, joissa aihetta käsiteltiin. Tehtävät, joissa suhde-käsite oli enemmän ”piilossa”, olivat hajanaisesti ympäri oppimateriaaleja, eikä käsitteen käyttö ollut systemaattista. 6.-luokkalaisten ymmärrys suhde-käsitteestä näyttäytyi heikkona; osaaminen jäi yksittäisten tehtävien ratkomisen tasolle. 6.-luokkalaiset osasivat parhaiten sellaiset tehtävätyypit, jotka olivat oppikirjoista tuttuja. Käsitteiden kielentämistä ja soveltamista vaatineet tehtävät hallittiin huomattavasti heikommin.

Tulosten perusteella voidaan todeta, että oppilaiden osaaminen suhde-käsitteen kohdalla näyttää perustuvan lähinnä proseduraaliseen osaamiseen ja kirjan tehtävien tekemiseen. Oppikirjat eivät tue käsitteellisen osaamisen kehittymistä ja ohjaavat vain tietynlaisten tehtävätyyppien ratkaisemiseen. Tämä näyttäytyy siten, etteivät oppilaat kykene soveltamaan oppimaansa tietoa oppimateriaalista poikkeavassa kontekstissa tai selittämään käsitteen tarkoitusta.

Avainsanat: matemaattinen suhde, alakoulun matematiikka, oppimateriaalitutkimus, matemaattinen ymmärrys

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# ABSTRACT

Anni Immonen and Roosa Kaivoluoto: Ratio in Elementary School Mathematics – A Study of Learning Materials and Students' Understanding  
Master's Thesis  
Tampere University  
Faculty of Education and Culture, Teacher Education  
April 2023

---

Ratio is one of the significant concepts in mathematics. Ratio is not brought up much in elementary school mathematics learning materials or in the national curriculum. There are only some previous studies about ratio.

The purpose of this qualitative study was to find out how ratio is described in mathematics learning materials and how 6<sup>th</sup>-grade students understand this concept. The research questions were: "How do mathematics learning materials present the concept ratio?" and "How do 6<sup>th</sup>-grade students understand the concept of ratio?". Two different research data was used in this study. The study was conducted by examining three different series of mathematical learning materials and by collecting information on 6<sup>th</sup>-grade students' understanding of ratio through electronic questionnaire. The learning material was analysed using thematic analysis. The data collected from the students was analysed using theory-guided content analysis.

Our study confirmed earlier studies: ratio is a difficult concept. The mathematics textbooks don't cover ratio much. The 6<sup>th</sup>-grade students' understanding of ratio appeared weak. They performed best on task types that were familiar from the textbooks. Tasks that required languaging or application of concepts in a new context were performed significantly weaker.

The findings indicate that the students' understanding of ratio seem to be mainly based on procedural skills and solving textbook tasks. Textbooks do not support the development of conceptual understanding. Learning materials guide towards solving certain types of tasks. It seems that students are unable to apply their learning in a context different from the learning materials or explain the meaning of the concept ratio.

Keywords: ratio, elementary school mathematics, learning materials, mathematical understanding

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

# SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>JOHDANTO</b> .....	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>MATEMATIIKKA OPPIAINEENA</b> .....	<b>11</b>
2.1	Oppiaineen luonne .....	11
2.1.1	<i>Matemaattinen tieto ja matemaattinen osaaminen</i> .....	12
2.1.2	<i>Matematiikan oppimisen tavoitteena ymmärrys</i> .....	16
2.1.3	<i>Matemaattisen ajattelun ilmaisu</i> .....	18
2.2	Matematiikan oppimateriaalit .....	22
2.2.1	<i>Miksi oppimateriaalien tutkiminen on tärkeää?</i> .....	22
2.2.2	<i>Aiempia oppimateriaalitutkimuksia</i> .....	25
<b>3</b>	<b>SUHTEEN KÄSITE MATEMATIIKASSA</b> .....	<b>30</b>
3.1	Käsitteen määrittelyä .....	30
3.2	Matemaattiseen suhteeseen liittyviä tutkimuksia .....	34
3.3	Käsite ”suhde” perusopetuksen opetussuunnitelmassa .....	36
<b>4</b>	<b>TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN</b> .....	<b>39</b>
4.1	Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset .....	39
4.2	Oppimateriaalin tutkiminen .....	40
4.2.1	<i>Tutkittava aineisto</i> .....	40
4.2.2	<i>Oppimateriaalin analyysi</i> .....	42
4.3	Suhde–käsitteen ymmärtäminen .....	44
4.3.1	<i>Aineiston kerääminen</i> .....	44
4.3.2	<i>Oppilaiden vastausten analyysi</i> .....	49
<b>5</b>	<b>TUTKIMUSTULOKSET</b> .....	<b>52</b>
5.1	Suhde–käsite 4–6. –luokkien oppimateriaaleissa .....	52
5.2	Oppilaiden ymmärrys matemaattisesta käsitteestä suhde .....	67
<b>6</b>	<b>POHDINTA</b> .....	<b>92</b>
6.1	Johtopäätökset .....	92
6.2	Tutkimuksen luotettavuus .....	98
6.3	Tutkimuksen eettisyys .....	104
6.4	Jatkotutkimusehdotuksia .....	108
6.5	Lopuksi .....	109
<b>LÄHTEET</b> .....	<b>112</b>	
	Tutkimuksen oppimateriaalilähteet .....	125
<b>LIITTEET</b> .....	<b>127</b>	
	Liite 1: Tutkimuskysely .....	127
	Liite 2: Suhde–käsite oppimateriaaleissa .....	135
	Liite 3: Tutkimuslupapyyntö 1 .....	136
	Liite 4: Tutkimuslupapyyntö 2 .....	137
	Liite 5: Ohjeet tehtävälomakkeen täyttämistä .....	138

## TAULUKOT

TAULUKKO 1. SUHDE-KÄSITTEEN ILMENEMINEN MATEMAATTISESSA YHTEYDESSÄ PERUSOPETUKSEN OPETUSSUUNNITELMAN PERUSTEISSA (2014).....	37
TAULUKKO 2. TUTKITUT OPPIMATERIAALIT .....	41
TAULUKKO 3. TEHTÄVÄLOMAKKEEN KYSYMYKSET (KS. LIITE 1).....	46
TAULUKKO 4. TEEMAT SUURENNOS, PIENENNÖS, YHDENMUOTOISUUS, MITTAKAAVA JA KARTAN MITTAKAAVA OPPIKIRJOISSA (X=ESIINTYY OPPIMATERIAALISSA) .....	59
TAULUKKO 5. SUORAAN VERRANNOLLISUUDEN SOVELLUKSIIN LIITTYVIEN TEHTÄVIEN ESIINTYVYYS OPPIMATERIAALEISSA (X=ESIINTYY OPPIMATERIAALISSA) 64	
TAULUKKO 6. TEEMAT YDINSISÄLTÖINEEN KOOTUSTI.....	66

## KUVIOT

KUVIO 1. MATEMAATTISEN OSAAMISEN VIISI TOISIINSA KIETOUTUNUTTA PIIRRETTÄ (KILPATRICK YM., 2001, S. 117).....	13
KUVIO 2. MATEMAATTISEN AJATTELUN ILMAISEMINEN NELJÄN KIELEN AVULLA (JOUTSENLAHTI & RÄTTYÄ, 2015, S. 52).....	18
KUVIO 3. MATEMATIIKAN HAVAINNOLLINEN JA SYMBOLINEN ESITYSTAPA AEBLIN (1991, S. 236) MUKAAN.....	19
KUVIO 4. ERILAISET MERKITYKSET MERKINNÄLLE "A/B" (PERKKILÄ & JOUTSENLAHTI, 2021, S. 173).....	31
KUVIO 5. SUHDE-KÄSITETTÄ POHJUSTAVAT ASIAT (SCHWOLS YM., 2013, S. 18) ...	32
KUVIO 6. TYYPILLINEN SUURENNOS/PIENENNÖS TEHTÄVÄ (NEEVIKKUU 6B, 2017, S. 90) 53	
KUVIO 7. RUUTUSUURENNOS (MILLI 5B OPEN OPAS, 2021, S. 92).....	53
KUVIO 8. YHDENMUOTOISTEN KOLMIOIDEN TUNNISTAMINEN (TUHATTAITURI 5B, 2017, S. 166) .....	55
KUVIO 9. MITTAKAAVAN JA SUHTEEN KÄSITTEET YHDISTETTYNÄ TOISIINSA (NEEVIKKUU 5A LISÄMATERIAALIVIHKO, 2017, S. 43).....	56
KUVIO 10. TYYPILLINEN MITTAKAAVATEHTÄVÄ (MILLI 6B OPEN OPAS, 2022, S. 80) 57	
KUVIO 11. TEHTÄVÄ MITTAKAAVAN SELVITTÄMISESTÄ (NEEVIKKUU 5A LISÄMATERIAALIVIHKO, 2017, S. 44).....	58
KUVIO 12. KARTAN MITTAKAAVAAN LIITTYVÄ TEHTÄVÄ (TUHATTAITURI 5B, 2017, S. 185) 60	
KUVIO 13. ESIMERKKI KARTAN MITTAKAAVAAN LIITTYVÄSTÄ TEHTÄVÄSTÄ, JOSSA EI KÄYTETÄ KÄSITETTÄ " KARTAN MITTAKAAVA" (MILLI 4A OPEN OPAS, 2021, S. 104) 61	
KUVIO 14. YMPYRÄN KEHÄN JA HALKAISIJAN PITUUKSIEN SUHTEEN TUTKIMINEN (MILLI 6A OPEN OPAS, 2021, S. 106) .....	62
KUVIO 15. ESIMERKKI SUORAAN VERRANNOLLISUUDEN SOVELLUKSESTA (NEEVIKKUU 4B, 2017, S. 137).....	63
KUVIO 16. ESIMERKKI MÄÄRIEN VÄLISEEN SUHTEESEEN LIITTYVÄSTÄ TEHTÄVÄSTÄ (NEEVIKKUU 5B, 2017, S. 95) .....	65

KUVIO 17. KYSYMYKSEN 2: "MITKÄ KAKSI SEURAAVISTA KUVIOISTA OVAT KESKENÄÄN YHDENMUOTOISIA? KIRJOITA YHDENMUOTOISTEN KUVIOIDEN KIRJAIMET VASTAUKSEKSI. (ESIMERKIKSI XY)" KUVIOT (KS. LIITE 1).....	68
KUVIO 18. KYSYMYKSEN 2: "YHDENMUOTOISET KUVIOT" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. KIRJAINYHDISTELMÄT KUVAAVAT OPPILAIDEN VALITSEMIA KUVIOPAREJA. ESIMERKIKSI DI TARKOITTAÄ, ETTÄ OPPILAS VASTANNUT KUVIOT D JA I. GRAAFIEN YLÄPUOLELLA VASTAUSTEN FREKVENS SIT. (N=78)	69
KUVIO 19. KYSYMYKSEN 3: "KOLMION SUURENNOS" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT A-D KUVAAVAT VASTAUSVAIHTOEHTOJEN ESIINTYMISEN MÄÄRÄÄ VASTAUKSIS SA. ESIMERKIKSI GRAAFI A FREKVENS SILLÄ 6 TARKOITTAÄ, ETTÄ 6 OPPILASTA ON VASTANNUT TEHTÄVÄSSÄ KOLMION A (N=78)	71
KUVIO 20. KYSYMYKSEN 4: "KOLMION SUURENNOKSEN MITTAKAAVA" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT KUVAAVAT VASTAUSVAIHTOEHTOJEN ESIINTYVYYTTÄ VASTAUKSIS SA. ESIMERKIKSI GRAAFI 1:1 KUVASTAA SITÄ, ETTÄ 1 VASTAAJA ON VALINNUT SEN SUURENNOKSEN MITTAKAAVAKSI. (N=78).....	73
KUVIO 21. KYSYMYKSEN 5 KUVIOT (KS. LIITE 1).....	75
KUVIO 22. KYSYMYKSEN 5: "MERKINTÄ 2:3 KUVIONA" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT A-D KUVAAVAT VASTAUSVAIHTOEHTOJEN ESIINTYVYYTTÄ VASTAUKSIS SA. ESIMERKIKSI GRAAFI A KUVASTAA SITÄ, ETTÄ VASTAAJISTA 14 ON VASTANNUT VAIHTOEHDON A. (N=78).....	76
KUVIO 23. KYSYMYKSEN 6: "MIKÄ MURTOLUKU VASTAA VALITTUA KUVIOTA?" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT KUVAAVAT VASTAUSVAIHTOEHTOJEN ESIINTYVYYTTÄ VASTAUKSIS SA. ESIMERKIKSI GRAAFI 1/4 ARVOLLA 0 TARKOITTAÄ, ETTÄ 0 VASTAAJAA VALITSI KYSEISEN MURTOLUVUN. (N=78)	77
KUVIO 24. KYSYMYKSEN 7: "MEHUTIIVISTEEN MÄÄRÄ LITROINA" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT KUVAAVAT VASTAUSVAIHTOEHTOJEN ESIINTYVYYTTÄ VASTAUKSIS SA. ESIMERKIKSI GRAAFI 75 L ARVOLLA 5 TARKOITTAÄ, ETTÄ VIIS OPPILASTA VALITSI VASTAUSVAIHTOEHDOKSI 75 LITRAA. (N=78).....	79
KUVIO 25. KYSYMYKSEN 8: "MEHUTIIVISTEEN MÄÄRÄ MURTOLUKUNA" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT MURTOLUVUISTA KUVAAVAT VASTAUSVAIHTOEHTOJEN ESIINTYVYYTTÄ VASTAUKSIS SA. ESIMERKIKSI GRAAFI 3/4 ARVOLLA 13 TARKOITTAÄ, ETTÄ 13 VASTAAJAA VALITSI VAIHTOEHDON 3/4. (N=78).	81
KUVIO 26. KYSYMYKSEN 9: "SUHDE-KÄSITTEEN KIELENTÄMINEN" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. VASTAUKSET LUOKITELTU RYHMIIN A JA B. TUMMANSINIS ET GRAAFIT KUVASTAVAT KOKO RYHMÄN VASTAUKSIA FREKVENS SINÄ JA VAALEANSINIS ET PALKIT RYHMIEN A JA B ALARYHMIIN JAETTUJEN VASTAUSTEN FREKVENS SEJÄ. ESIMERKIKSI TUMMANSININEN GRAAFI ARVOLLA 64 KUVASTAA SITÄ, ETTÄ YHTEENS Ä 64 VASTAAJAA ON ILMAISSUT VASTAUKSESSAAN, ETTEI TIEDÄ, MITÄ SUHDE-KÄSITE TARKOITTAÄ (N=78).....	83
KUVIO 27. KYSYMYKSEN 10: "KARKKIEN HINTA" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. (N=78).....	85
KUVIO 28. KYSYMYKSEN 12: "MITTAKAAVA-KÄSITTEEN KIELENTÄMINEN" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA. GRAAFIT KUVASTAVAT VASTAUSTEN ESIINTYMI STÄ. ESIMERKIKSI GRAAFI "EN TIEDÄ" KUVASTAA SITÄ, ETTÄ 37 OPPILASTA ILMAISSUT VASTAUKSESSAAN JOLLAKIN TAVALLA, ETTEI TIEDÄ, MITÄ MITTAKAAVA TARKOITTAÄ. (N=78).....	88
KUVIO 29. KYSYMYKSEN 13: "RATKAISIKO OPPILAS TEHTÄVÄN OIKEIN?" (KS. LIITE 1) VASTAUKSET FREKVENS SIGRAAFEINA (N=78). TUMMANSINIS ET GRAAFIT KUVASTAVAT KOKO RYHMÄN VASTAUKSIA FREKVENS SINÄ JA VAALEANSINIS ET PALKIT RYHMIEN ALARYHMIIN JAETTUJEN VASTAUSTEN FREKVENS SEJÄ. ....	90

# 1 JOHDANTO

*”Ruusu on piirretty mittakaavassa 1:10. Mikä on ruusun todellinen pituus, kun kuvassa se on 3,5 cm?”* (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 175). Edellä mainittu tehtävänanto on tyypiesimerkki matemaattisen *suhteen* ympärille luodusta tehtävästä alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa. Käsite suhde (*ratio*) löytyy alakoulun oppimateriaaleista, mutta se ikään kuin jää ”tärkeämpien” aihealueiden ja kaavojen hallinnan varjoon (Hihnala, 2011; Langrall & Swafford, 2000). Matemaattista suhdetta ei käsitellä oppimateriaaleissa samanlaisella systemaattisella jatkumolla, kuten esimerkiksi murtolukuja tai prosentteja, joiden ympärille laaditut jaksot toistuvat vuosittain oppimateriaaleissa.

Tutkimuksemme käsittelee suhde–käsitettä alakoulun matematiikassa. Tutkimme käsitteen ilmenemistä matematiikan oppimateriaaleissa ja 6.-luokkalaisten ymmärrystä aiheesta. Suhteesta johdettuja käsitteitä ovat muun muassa suurennos, pienennös, verrannollisuus ja mittakaava (Ks. esim. Hihnala, 2010; Schwols ym., 2013). Hyödynnämmekin näitä käsitteitä osana tutkimustamme, sillä suhde–käsite ei esiinny eksplisiittisesti matematiikan oppimateriaaleissa (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021). Suhde on matemaattisena käsitteenä merkittävä, sillä se liittyy olennaisesti useaan muuhun matematiikan käsitteeseen (Hihnala, 2011). Matematiikassa käsitteiden hallinta osana konseptuaalista osaamista on tärkeää, sillä muutoin on vaarana, että oppiminen jää proseduurien toistamisen tasolle (Haapasalo, 2011). Matematiikan kumulatiivisen luonteen vuoksi käsitteitä tulisi opetella systemaattisesti; uuden

tiedon omaksuminen vaatii aiemmin opitun sisäistämistä (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021). Syvempi ymmärrys oppimisessa ei synny pelkästään ulkoa opittuja kaavoja toistamalla (Ikäheimo, 2021). Suhde-käsitteestä voi syntyä sirpaleinen kuva ja parempi osaaminen saattaa jäädä puuttumaan, sillä sen käsittely tapahtuu prototyypimäisten esimerkkitehtävien avulla (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021). Useat oppilaat eivät hallitse suhteellisuuden periaatetta vielä yläasteen päättyessäkään, vaikka suhteen käsite tulee vastaan jo alakoulun oppimateriaaleissa (Johnson & Lauten, 2000). Tämän vuoksi koemme tärkeäksi tutkia sekä oppimateriaaleja että oppilaiden ymmärrystä suhde-käsitteestä.

Oppimateriaalitutkimuksessamme tarkastelemme sitä, missä asiayhteyksissä suhde ilmenee ja millaisia tehtäviä sen ympärille on rakennettu. Oppikirjojen tutkiminen on merkityksellistä, sillä oppikirjat ovat oikeastaan ainoita kirjoja, joita jokaisen peruskoululaisen on ainakin silmäiltävä (Ruuska, 2015a). Suuren lukijakunnan vuoksi on tarkasteltava, mitä oppimateriaalit pitävät sisällään. Kouluarjessa oppikirjat ovat saavuttaneet vahvan aseman ja näyttäytyvätkin oppilaille tärkeinä tiedonlähteinä (Tossavainen, 2015). Myös opettajat vaikuttavat luottavan paljon oppimateriaaleihin. Suomalainen matematiikan opetus on erittäin oppikirjasidonnaista ja opettajat pitävät oppikirjoja tärkeänä omassa matematiikan opetuksessaan (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010). Oppikirjasidonnaisessa matematiikan opetuksessa oppilailta jää helposti puuttumaan syvempi ymmärrys aiheista, sillä oppikirjat ohjaavat enimmäkseen proseduraaliseen ajatteluun ja matemaattisten "temppeujen" opetteluun (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Oppimateriaalitutkimus on tarpeellista myös sen vuoksi, että oppimateriaaleja ei tarkasteta, vaan kustantajat ja oppikirjojen tekijät saavat melko vapaasti päättää oppikirjojen sisällöstä

(Perkkilä ym., 2018). Oppikirjojen tulisi vastata valtakunnallista opetussuunnitelmaa, mutta oppikirjoilijoilla on vapaus tulkita sitä haluamallaan tavalla – eri tekijöiden tulkinnat voivat luoda kirjoihin hyvinkin erilaisia sisältöjä (Hiidenmaa ym., 2017).

Matematiikan käsitettä suhde on tutkittu aiemmin luokanopettajaopiskelijoiden näkökulmasta (Ks. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019; 2021). Aiemman tutkimuksen perusteella *suhde* näyttäytyy vaikeana käsitteenä. Alakoulun oppilaiden osalta kyseisen käsitteen ymmärryksestä ei ole vielä juurikaan tutkimusta, mutta vähäiset tutkimukset kuvaavat matemaattisen suhteen osaamisen melko heikoksi (Ks. Hihnala, 2005; Weinberg, 2002). Halusimme lähteä kartoittamaan, miten kuudesluokkalaiset hahmottavat kyseisen käsitteen, sillä heillä on taustalla alakoulun matematiikan oppimäärä ja oppimateriaalitutkimuksemme mukaan suhde–käsitteeseen liittyvät tehtävät painottuvat vuosiluokille 4–6. Kuudesluokkalaiset sopivat tutkimuksemme kohteeksi myös sen vuoksi, että he osaavat kielentää matemaattista ajatteluaan nuorempia oppilaita paremmin.

Aluksi esittelemme tutkimuksemme teoriapohjaa: käymme läpi matematiikkaa oppiaineena ja pohdimme matematiikan ymmärrykseen vaikuttavia tekijöitä. Teemme katsauksen matematiikan oppimateriaaleihin ja niiden tutkimukseen ja selvennämme, miksi oppimateriaalitutkimus on tärkeää. Tarkastelemme myös suhde–käsitettä sekä siihen liittyvää tutkimusta. Neljännessä luvussa esittelemme tutkimustehtävän ja tutkimuskysymykset. Kuvaamme tutkimuksemme kahta aineistoa ja analyysimenetelmää omina kokonaisuuksinaan. Ensin kerromme oppimateriaaliaineistosta ja sen analyysimenetelmästä, teemoittelusta. Tämän jälkeen tarkastelemme oppilaiden

vastauksista koostuvaa aineistoa ja teoriaohjaavaa sisällönanalyysia. Luvussa viisi raportoimme tutkimuksemme tuloksista, aluksi oppimateriaalianalyysin ja sitten oppilaiden vastausten osalta. Viimeisessä luvussa esittelemme tekemiämme johtopäätöksiä ja peilaamme saamiamme tuloksia teorian valossa. Lisäksi pohdimme tutkimuksemme luotettavuutta ja eettisyyttä. Lopuksi esitämme jatkotutkimusehdotuksia.

## 2 MATEMATIIKKA OPPIAINEENA

### 2.1 *Oppiaineen luonne*

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa kuvataan matematiikan oppiaineen tehtäväksi oppilaiden loogisen, täsmällisen ja luovan matemaattisen ajattelun kehittäminen (Opetushallitus, 2014). Tällä tavoin määriteltynä matematiikan oppiaineen tehtävä kuulostaa melko haastavalta. Oppilaiden tulisi löytää matematiikasta sen loogisuus, mutta samalla toteuttaa matemaattista ajatteluaan luovasti ja ilmaista itseään täsmällisesti matematiikan ”sääntöjen” puitteissa. Tämä voi olla osalle jo melko vaikeaa, ellei oppilaita siihen ohjata. Matematiikan oppiaineen merkitystä ei kuitenkaan tule väheksyä, sillä matematiikka on iso osa jokapäiväistä elämäämme. Tämän vuoksi tarkastelemme seuraavaksi sitä, millaisia asioita matematiikan oppiaineeseen liittyy.

Matematiikan oppiaineen luonne on varsin hierarkkinen: uusi tieto perustuu aina aiemmin opittuun (Ks. Opetushallitus, 2014; Ikäheimo, 2021). Tätä voisi verrata tiilitalon rakentamiseen, jossa perustusten on oltava kunnossa ennen kuin taloa voi rakentaa korkeammaksi (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021). On siis tärkeää, että aiemmin opitut asiat ovat hallussa, jotta uusien oppiminen on mahdollista. Koska matematiikan sisällöt vaikeutuvat luokka luokalta, voi oppiminen muuttua hyvinkin hankalaksi, ellei aiempia asioita ole sisäistetty (Ikäheimo, 2021). Opetussuunnitelma kuvaileekin matematiikan opetuksen etenevän systemaattisesti sen kumulatiivisen luonteen vuoksi (Opetushallitus, 2014).

Tämä tarkoittaa sitä, että asiat tulisi opetella ”järjestyksessä”, eli esimerkiksi yhteenlaskut ennen kertolaskuja ja kertolaskut ennen jakolaskuja.

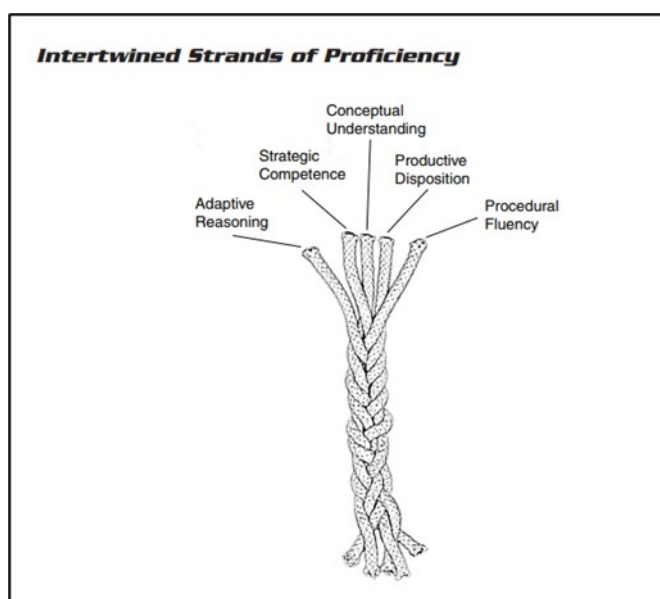
### 2.1.1 Matemaattinen tieto ja matemaattinen osaaminen

Matemaattinen tieto voidaan jakaa kahteen osaan: proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon (Hiebert & Lefevre, 1986; Kettunen ym., 2022). Näiden perusominaisuudet voidaan jaotella hyvinkin monella tavalla (Ks. tarkemmin Haapasalo, 2003, s. 2–3). Yksinkertaistettuna ensimmäisellä tarkoitetaan kuitenkin sitä, että yksilöllä on kyky seurata tiettyjä sääntöjä, algoritmeja ja proseduureja – siis suorittaa matematiikan laskutoimituksia (Haapasalo, 2011; Eronen & Haapasalo, 2006). Tämän lisäksi proseduraaliseen osaamiseen kuuluu matematiikan formaalin kielen eli symbolijärjestelmän hallinta (Hiebert & Lefevre, 1986). Konseptuaalinen, eli käsitteellinen tieto puolestaan sisältää ymmärryksen matematiikan sisällöistä ja niiden välisistä yhteyksistä (Hiebert & Lefevre, 1986). Konseptuaalisesta tiedosta voidaan puhua silloin, kun yksilö pystyy linkittämään uuden informaation johonkin olemassa olevaan tietorakenteeseen tai yhdistämään oppimiaan tietoja keskenään (Joutsenlahti, 2005). Tämä tarkoittaa tietoverkon tuntemista ja sen osaavaa ”ajoa” eli vaikkapa tietyn proseduurin ja käsitteen yhdistämistä toisiinsa (Eronen & Haapasalo, 2006). Tietojen yhdistämisen ei tarvitse perustua objektiiviseen tietoon, vaan uusi tieto voi liittyä johonkin yksilön henkilökohtaiseen tietämykseen (Haapasalo, 2011). Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto eivät kuitenkaan kata kaikkea tietoa; esimerkiksi ongelmanratkaisussa käytettävät strategiat ovat tällaista tietoa (Hiebert & Lefevre, 1986). Joutsenlahti (2005) puhuu strategiatiedoista, joissa

strategioihin kuuluvat perusoperaatioiden lisäksi niiden säätelyä johtavat metakognitiot.

Matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*) tarkoittaa niitä asioita, joita tarvitaan onnistuneeseen matematiikan oppimiseen (Kilpatrick ym., 2001). Kilpatrick kollegoineen (2001, s. 116) esittää matemaattisen osaamisen viitenä toisiinsa kietoutuneena piirteenä (Ks. Kuvio 1):

- konseptuaalinen ymmärtäminen (*conceptual understanding*)
- proseduraalinen sujuvuus (*procedural fluency*)
- strateginen kompetenssi (*strategic competence*)
- adaptiivinen päättely (*adaptive reasoning*)
- taipumus tuotteliaisuuteen (*productive disposition*)



**KUVIO 1.** Matemaattisen osaamisen viisi toisiinsa kietoutunutta piirrettä (Kilpatrick ym., 2001, s. 117)

**Konseptuaalisella ymmärtämisellä** Kilpatrick ja muut (2001) tarkoittavat sitä, että yksilö ymmärtää enemmän kuin vain toisistaan irrallisia faktoja ja menetelmiä. Oleellista on se, että yksilö osaa esittää matemaattisia tilanteita eri

tavoin ja tietää, kuinka hyödyntää eri tapoja erilaisissa tilanteissa (Kilpatrick ym., 2011). Konseptuaalinen ymmärtäminen tarkoittaa siis samaa asiaa kuin *konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto* (Joutsenlahti, 2005). Käsitteellinen tieto on merkityksellistä matematiikassa, sillä matematiikan kumulatiivisen luonteen vuoksi eri matemaattiset käsitteet ovat aina jollakin tavalla sidoksissa toisiinsa (Hiebert & Lefevre, 1986; Sfard, 1991). Tossavainen (2015, s. 130) kuvaileekin matematiikkaa seuraavasti:

”Matematiikan perusolemuksen on Eukleideen ajoista alkaen kuulunut ihanne, että koko tietorakenne johdetaan yksittäisistä käsitteistä ja niitä koskevista aksioomista eli käsitteiden välisiä suhteita kuvaavista sopimuksista loogisen päättelyn avulla.”

Käsitteet ovat matematiikassa merkittävässä roolissa ja niiden avulla matemaattista ajattelua pystytään ilmaisemaan täsmällisesti (Leinonen, 2018).

**Proseduraalinen sujuvuus** on tietoa erilaisista proseduureista sekä niiden oikeanlaisista käyttötavoista ja suorittamisesta tarkasti ja tehokkaasti (Kilpatrick ym., 2001). Tämä vastaa *proseduraalista tietoa* (Joutsenlahti, 2005). Proseduraalisesti taitava oppilas pystyy suorittamaan laskutoimituksia oppimallaan ”kaavalla” jopa virheettömästi. Esimerkiksi murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa oppilas tietää, että nimittäjät täytyy ensin laventaa samannimisiksi ja sen jälkeen suorittaa laskutoimitus osoittajien välillä ja lopuksi tarvittaessa supistaa saatu tulos. Proseduraalista sujuvuutta harjoittavat tehtävät ovat tyypillisiä suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa, joissa korostuvat oikein suoritettavat proseduurit ja vähäinen vaihtelu tehtävätyyppien välillä (Perkkilä, 2002; Perkkilä ym., 2018). Konseptuaalinen tieto puolestaan jää matematiikan oppikirjoissa vähemmälle ja usein esimerkiksi vain opettajan kertoman varaan (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007).

Joutsenlahden (2005) mukaan strategisella kompetenssilla voidaan tarkoittaa *strategiatietoja* sekä niiden käyttämistä. Kilpatrick ja kollegat (2001) kuvailevatkin **strategisen kompetenssin** kyvyksi muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Tätä tarvitaan esimerkiksi silloin, kun yksilöllä on vaikeuksia selvittää, mikä ratkaistava ongelma oikeastaan on ja kuinka sen voi ratkaista (Kilpatrick ym., 2001). Koulumaailmassa ongelmat muotoillaan pääsääntöisesti valmiiksi (oppikirjojen tehtävät), mutta koulukontekstin ulkopuolella matemaattiset ongelmat eivät välttämättä ole niin selviä, ja ne on kyettävä muotoilemaan itse ennen ratkaisuprosessia (Kilpatrick ym., 2001).

**Adaptiivinen päättely** viittaa kykyyn ajatella loogisesti käsitteiden ja tilanteiden välisiä suhteita (Kilpatrick ym., 2001). Joutsenlahti (2005) nimittää tätä *mukautuvaksi päättelyksi* ja hänen mukaansa siinä on piirteitä konseptuaalisesta tiedosta ja strategiatiedosta. Adaptiivista päättelyä voidaan pitää kaikkea yhdistävänä tekijänä, joka ohjaa oppimista (Kilpatrick ym., 2001).

Viimeinen Kilpatrickin ja kollegoiden (2001) viidestä piirteestä on **taipumus tuotteliaisuuteen**, jolla he tarkoittavat sitä, että matematiikka koetaan hyödyllisenä ja siinä nähdään järkeä. Joutsenlahti (2005) kuvailee piirrettä osuvasti *yritteliäisyydeksi*: yksilö kokee matematiikan opiskelun kannattavaksi ja pitää itseään taitavana matematiikan hyödyntäjänä. Nämä viisi piirrettä kietoutuvat toisiinsa ja ovat toisistaan riippuvaisia matemaattisen taidon kehittämisessä – matemaattista osaamista ei ole mahdollista saavuttaa keskittymällä vain osaan piirteistä (Kilpatrick ym., 2001).

### 2.1.2 Matematiikan oppimisen tavoitteena ymmärrys

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa oppiminen määritellään yksilön sisäiseksi prosessiksi, jossa yksilö on aktiivinen toimija (Opetushallitus, 2014). Tällaisessa konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä yksilöä ei nähdä vain passiivisena tiedon vastaanottajana, vaan aktiivisena tiedon muodostajana varhaisempien kokemustensa pohjalta (Patrikainen, 2012). Toisin sanoen oppijan omat aiemmat tiedot ja ennakkokäsitykset vaikuttavat uuden tiedon tulkitsemiseen ja rakentamiseen. ”Matematiikan tiilitalon” rakentamisen kannalta on äärimmäisen tärkeää, että aiemmat tiedot on omaksuttu ennen uuden asian opettelua. Tämä edellyttää sitä, että aiemmin opittu perustuu ymmärrykseen eikä ulkoa oppimiseen (Ikäheimo, 2021). Stewartin (2005) mielestä matematiikassa ymmärrys syntyy sekä proseduraalisen että konseptuaalisen tiedon hyödyntämisestä oppimisessa. Ajatus on samansuuntainen Kilpatrickin ja kollegoiden (2001) näkemyksen kanssa siitä, että jokaista viittä matemaattisen osaamisen piirrettä tulee kehittää yhdessä oppimisen edetessä. Stewart (2005) kuvailee matematiikan opetuksen päätavoitteeksi ymmärtävän oppimisen.

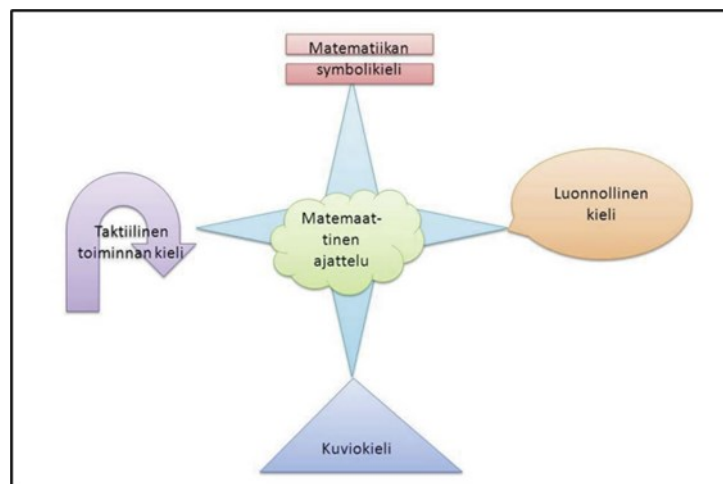
Opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksen tulisi luoda pohja ”matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle” (Opetushallitus, 2014, s. 234). Matematiikan oppikirjojen tehtävien mekaaninen laskeminen ei kuitenkaan luo vielä ymmärrystä, vaan ainoastaan proseduurien muistamista (Ikäheimo, 2021). Oppilaat voivat ottaa oppikirjojen esittämät esimerkit ratkaisuproseduureista vastaan sellaisinaan eivätkä ymmärrä ajattelua mallin taustalla (Joutsenlahti, 2009). Vaikka matematiikan opiskelussa keskiössä ovatkin matematiikan perustiedot ja -taidot, myös käsitteillä on tarkoituksensa (Patrikainen, 2012). Käsitteiden opettamista ei tulisikaan unohtaa laskutaitojen

rinnalla. Usein matematiikassa käsitteiden oppimiselle ei kuitenkaan anneta tarpeeksi aikaa, vaan kuvitellaan, että ne ovat opittavissa hyvinkin nopeasti (Haapasalo, 2011).

Mikäli käsitteellinen tieto ja proseduraaliset taidot eivät kulje käsi kädessä, voidaan olla tilanteessa, jossa oppilaalla on tunne, että hän ymmärtää matematiikkaa, muttei osaa ratkaista tehtäviä, tai vastaavasti hän saa oikean vastauksen, muttei ymmärrä mihin se perustuu (Hiebert & Lefevre, 1986). Ymmärtävän oppimisen edellytyksenä onkin se, että oppilas pohtii ”tiedätkö, miten tiedän?” (Haapasalo, 2011, s. 59). Konseptuaalinen ymmärrys yhdessä proseduraalisen sujuvuuden kanssa tekee oppimisesta ja uuden tiedon soveltamisesta helpompaa ja muistijäljestä pysyvämpää, mikä puolestaan johtaa uudenlaiseen ymmärrykseen matemaattisista yhteyksistä (Kilpatrick ym., 2001). Käsitteiden ymmärtäminen on merkittävä osa sitä prosessia, jossa uutta tietoa omaksutaan, opitaan ja vahvistetaan (Ikäheimo, 2021). Vaikka matemaattiset käsitteet ovatkin sellaisinaan vaikeasti ymmärrettäviä abstraktioita, voivat oppilaat kuitenkin käsittää niitä konkreettisten lähestymistapojen avulla (Yrjönsuuri, 1998). Ikäheimon (2021) mukaan piirtäminen, laskujen ratkaiseminen välineillä ja ääneen selittäminen auttavat oppilaita hahmottamaan matemaattisia käsitteitä ja toiminnallisuus puolestaan vahvistaa muistijälkeä. Matemaattisen käsitteen kielentäminen on osa käsitteiden konstruointiprosessia: kielentämällä kirjallisesti tai suullisesti ajatuksiaan käsitteestä oppilas pohtii, mitkä ovat käsitteen keskeiset piirteet ja jäsentää samalla matemaattista ajatteluaan (Joutsenlahti, 2003; Joutsenlahti & Tossavainen, 2018).

### 2.1.3 Matemaattisen ajattelun ilmaisu

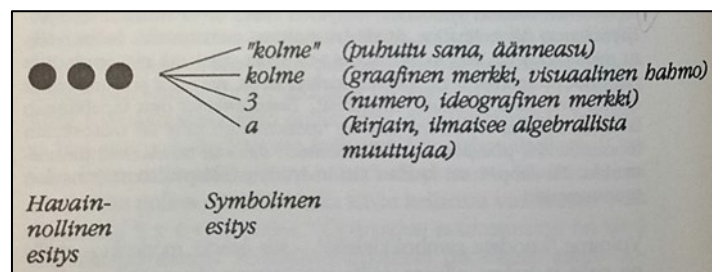
Matemaattinen ajattelu ja sen ilmaisu liittyvät olennaisesti matemaattisen ymmärryksen kehittymiseen. Bruner (1966) on todennut kielen olevan ajattelun väline ja tiedon jäsentyvän hierarkkisesti kolmen eri vaiheen kautta: aktiivinen, ikoninen ja toiminnallinen taso. Aktiivinen taso sisältää toimintaa ja tekemistä, ikoninen taso muun muassa kuvia ja symbolinen taso symbolisia systeemejä, kuten sanoja (Bruner, 1966; vrt. Perkkilä ym., 2018). Matemaattisen ajattelun ilmaisussa hyödynnetään kielentämistä matematiikan neljän eri kielen avulla (Ks. Kuvio 2) (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Multisemioottisessa lähestymistavassa hyödynnetään näitä kieliä käsitteiden välisten merkityksien rakentamisessa (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019).



**KUVIO 2.** Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen neljän kielen avulla (Joutsenlahti & Rättyä, 2015, s. 52)

Joutsenlahti ja Rättyä (2015) puhuvat neljästä eri kielestä matemaattisessa ajattelussa: luonnollinen kieli, kuviokieli, matematiikan symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli. Luonnollisella kielellä tarkoitetaan yleensä äidinkieltä ja matematiikan symbolikielellä matemaattisia merkintöjä, kuten laskutoimituksia

(Joutsenlahti & Kulju, 2010). Kuviokieli käsittää muun muassa geometriset kuviot ja taktiilinen toiminnan kieli puolestaan toiminnallista matematiikkaa (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Taktiilinen toiminnan kieli voidaan laajentaa myös tarkoittamaan kehon kieltä, jolloin se sisältää kaiken fyysisen viestinnän, kuten eleet, ilmeet ja liikkeen (Lehtonen ym., 2023). Nämä neljä kieltä liittyvät toisiinsa esimerkiksi seuraavalla tavalla: numero "5" on matematiikan symbolikielen merkki, joka yhdistyy luonnollisessa kielessä sanaan "viisi". Kuviokielessä tätä voi kuvata vaikkapa nopan silmäluku viisi ja taktiilisessa toiminnan kielessä voidaan jakaa esineitä viiden ryhmiin. Kaikissa kielissä luvulle viisi löytyy erilainen esitystapa, mutta ne kuitenkin tarkoittavat samaa asiaa. Hieman samantapaisen jaon on tehnyt Aebli (1991), joka puhuu matematiikan havainnollisesta ja symbolisesta esitystavasta (Ks. Kuvio 3, vrt. Kuvio 2).



**KUVIO 3.** Matematiikan havainnollinen ja symbolinen esitystapa Aeblin (1991, s. 236) mukaan

Matematiikan kielistä luonnollinen kieli on se, jolla oppilas ajattelee ja kuvailee ajatteluaan (Joutsenlahti, 2003). Oppilas esimerkiksi kysyy apua tai kertoo laskusta luonnollisen kielen avulla eli oppilaalla on tarve käyttää luonnollista kieltä. Matematiikan oppikirjat kuitenkin ohjaavat lähinnä symbolikielen käyttöön (Joutsenlahti, 2009). Tämä on ongelmallista sen vuoksi, että lausekkeiden ja

laskujen toistaminen ainoastaan matematiikan symbolikielellä ei kehitä oppilaan ymmärrystä aiheesta (Joutsenlahti, 2010). Matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta olisi olennaista hyödyntää kaikkia neljää matematiikan kieltä ja tämä onnistuu kielentämisen avulla (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Tällaisen multimodaalisen kielten käytön on havaittu auttavan oppilaiden matematiikan oppimista (Lehtonen ym., 2023).

Kielentäminen tarkoittaa yksinkertaistettuna oman matemaattisen ajattelun ilmaisua (Joutsenlahti & Kulju, 2010). Kielentämisessä hyödynnetään yhtä tai useampaa matematiikan kieltä ajattelun tukena (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Luonnollisella kielellä kielentämisessä ajattelua ilmaistaan tyypillisesti suullisesti tai kirjallisesti, esimerkiksi kirjoittamalla tai selittämällä mitä on laskenut (Kulju & Joutsenlahti, 2010). Luonnollisella kielellä toimiminen on oppilaalle luonteva tapa ilmaista itseään ja siksi se olisi tärkeää myös matematiikassa (Joutsenlahti, 2003). Taktiillisessa toiminnan kielessä puolestaan hyödynnetään toimintamateriaaleja asioiden havainnollistamiseen ja kuviokielen avulla on mahdollista löytää yhteyksiä käsitteiden välille (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Symbolikieli on yleisin matematiikan oppimateriaaleissa (Joutsenlahti, 2009). Kielentämisessä se on hyvä apu siinä vaiheessa, kun pitää kirjoittaa esimerkiksi matemaattisia lausekkeitä luonnollisella kielellä selitetyn tekstin rinnalle.

Kielentämisestä voi olla paljon hyötyä matemaattisen osaamisen kehittymisessä. Tämä on noteerattu myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa, joissa matematiikan oppimisen arviointia kuvataan seuraavalla tavalla: "Oppilailta edellytetään aiempaa enemmän matemaattisen ajattelunsa esilletuomista puheen, välineiden, piirtämisen ja kirjallisen työskentelyn avulla."

(Opetushallitus, 2014, s. 237). Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan kielentämisen hyötyjä voidaan tiivistää kolmeen näkökulmaan: oppilaan oman ajattelun jäsentäminen ja ymmärryksen laajentaminen, muiden oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittyminen kielennettäessä vuorovaikutuksessa sekä oppilaiden matemaattisen ajattelun tulo näkyväksi ja tämän myötä vaikutus opettajan arviointi- ja suunnittelutyöhön. Kielentämisen ensisijainen tavoite on kuitenkin auttaa oppilasta itseään (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018).

Luonnollisen kielen käyttö matematiikan symbolikielen rinnalla voi olla usealle oppilaalle hyvä tapa toimia (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Tähän tulisikin tarjota mahdollisuus, mikäli oppilas haluaa käyttää luonnollista kieltä yhdessä symbolikielen kanssa (Joutsenlahti, 2010). Kirjallinen kielentäminen, toisin sanoen, luonnollisen kielen hyödyntäminen kirjoitettuna tehtävien ratkaisussa, auttaa oppilaita hahmottamaan ratkaisujaan ja jäsentämään ajatteluaan itselleen (Joutsenlahti, 2003). Luonnollisen kielen käyttö kirjoitettuna on hyödyllistä sen takia, että kirjoittaminen selkeyttää ajattelua ja kirjalliseen ratkaisuun voi palata myös tarvittaessa uudelleen (Joutsenlahti, 2009). Kirjoittaessaan vastausta oppilas joutuu miettimään enemmän kuin sanoessaan sen ääneen (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Kirjallisen kielentämisen onkin tutkittu selkeyttävän oman ajattelun jäsentämistä (Ks. tarkemmin Joutsenlahti, 2010).

Luonnollisella kielellä asiasta omin sanoin kertominen voi auttaa oppilasta ymmärtämään paremmin esimerkiksi matemaattisia käsitteitä, sillä kielentäessään niitä oppilaan tulee pohtia niiden tärkeimpiä piirteitä ja reflektoida omaa ajatteluaan muille (Joutsenlahti, 2003). Suullinen kielentäminen edesauttaa etenkin oppilaan omaa ymmärrystä (Joutsenlahti & Tossavainen,

2018). Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan ulkoisen puheen avulla jäsennelty ajattelu auttaa mahdollisesti myös tuottamaan uusia merkityksiä.

## *2.2 Matematiikan oppimateriaalit*

### 2.2.1 Miksi oppimateriaalien tutkiminen on tärkeää?

Oppimateriaalilla tarkoitetaan sellaista materiaalia, joka on tehty opetustarkoitukseen (Heinonen, 2005). Heinonen (2005) kuvailee tällaiseksi materiaaliksi oppi- ja/tai tehtäväkirjat, opettajan materiaalit sekä muut oheismateriaalit, kuten verkkopohjaiset oppimisympäristöt ja oheislukemistot. Oppimateriaalin sisällön, eli esimerkiksi tehtävien, tarkoitus on muuttaa tiedot taidoiksi (Ruuska, 2015b). Tässä tutkimuksessa matematiikan oppimateriaaleilla tarkoitetaan erityisesti matematiikan oppikirjoja ja opettajan oppaita sekä muita oheismateriaaleja.

Oppikirjojen tulisi tähdätä sekä perusasioiden oppimiseen että asioiden ymmärtämiseen (Ruuska, 2015a). Matematiikan oppikirjat kuitenkin kannustavat enemmän proseduraaliseen ajatteluun kuin käsitteelliseen ymmärtämiseen (Ks. tarkemmin luku 2.2.2). Tämä näkyy esimerkiksi siten, että kirjojen tehtävissä oikeaan vastaukseen päästään suoraviivaisesti jotakin laskutoimitusta soveltamalla (Perkkilä, 2002). Peruslaskutoimituksissa – siis opittua kaavaa toistamalla – voi sekä opettajalle että oppilaalle itselleen syntyä vaikutelma asian hyvästä osaamisesta; tämä kuvitelma kuitenkin romuttuu soveltavissa tehtävissä, joissa opittuja malleja ei enää voikaan toistaa sellaisinaan, vaan vaadittaisiin asian ymmärtämistä (Aebli, 1991). Tämä on ongelmallista, sillä saman asian toistaminen samassa kontekstissa ei valmista tiedon soveltamiseen (Hihnala,

2005). Oppikirja onnistuukin ehkä täyttämään tehtävistään vain ensimmäisen: perusasioiden tunnistamisen ja toistamisen.

Toki oppikirja kirjoitetaan – tai on ainakin kirjoitettu – sillä periaatteella, että se vastaa tietosanakirjaa, eli asioista kerrotaan perustiedot, jotka sillä hetkellä tiedetään (Ruuska, 2015a). Tietosanakirjaperiaatteesta ei voi olla enää kuitenkaan niin varma, sillä oppikirjojen systemaattinen tarkastus lopetettiin vuonna 1992 (Perkkilä ym., 2018). Nykyisin oppimateriaalin sisällöstä vastaavat oppikirjailijat ja kustantajat. On syytä huomioida, että kustantamot ovat voittoa tavoittelevia yhtiöitä. Suomessa oppikirjakustannus on hyvin keskittynyttä, jos verrataan esimerkiksi muihin pohjoismaihin (Vahtola, 2015). Arvioiden mukaan Sanoma Pron kustantamo hallitsee suvereenisti oppikirjamarkkinoita 60 %:n osuudellaan Otavan seuratessa perässä 35 %:n osuudella (Pietiäinen, 2015). Suomessa on siis kaksi suurta kustantamoaa, joiden oppikirjojen yhteenlaskettu osuus on 95 % oppikirjamarkkinoista. Näin keskittyneessä oppimateriaalituotannossa voi muodostua ongelmaksi se, etteivät kustantamot halua lähteä uudistamaan oppimateriaalejaan herkästi; kustantamot havittelevat hyvää tulosta ja lukujen valossa oppimateriaalit ovat sitä tuottaneet, joten kynnys kasvaa toimivaksi havaitun muuttamiseen (Vahtola, 2015).

Alakoulussa matematiikan opetuksesta vastaavat pääsääntöisesti luokanopettajat. Opetustuntimäärän perusteella luokanopettajien voidaan ajatella olevan päävastuussa oikeastaan koko peruskoulun matematiikan opetuksesta, sillä luokanopettajien vuosiviikkotuntimäärä on yli kaksinkertainen aineenopettajien vuosiviikkotunteihin (Hihnala, 2011). Luokanopettajien oma matematiikan osaaminen ennen luokanopettajan opintoja pohjautuu yleensä lukion pitkään tai lyhyeen matematiikkaan tai ammattikoulun matematiikkaan.

Luokanopettajaopinnoissa matematiikkaa on muutaman kurssin verran, ellei opiskelija valitse sitä sivuaineekseen. Hihnalan (2011) mukaan luokanopettajalla ei välttämättä olekaan riittävästi tietoa opettaa matematiikan oppisisältöjä ja rakentaa niiden välisiä yhteyksiä. Luonnollisesti opettajan tulisi tietää aiheesta enemmän, kuin mitä opettaa. On kuitenkin täysin mahdollista, että opettajan täytyy opettaa jotakin sellaista, mitä ei edes itse ole koskaan oppinut (Hihnala, 2011). Jos opettajalla itsellään on kovin kapea kuva matematiikasta, hän näkee sen vain sääntöinä ja ulkoa opeteltavina kaavoina (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019). Tällöin hän oikeastaan toisintaa oppimateriaaleista tuttua proseduraalista ajattelua, jossa tärkeämpää on päästä oikeaan ratkaisuun kuin ymmärtää tekemäänsä.

Opettaja voi tietenkin aina tarttua opettajan oppaaseen ja ottaa sen avukseen – tutkimusten perusteella opettajat ovat näin tehneetkin (Ks. luku 2.2.2). Opetuksen ollessa kovin oppikirjasidonnaista vaarana on kuitenkin se, että opettajat tyytyvät noudattamaan esimerkiksi opettajan oppaan antamia didaktisia vihjeitä tai seuraavat sisältöä sitä kyseenalaistamatta (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019; Perkkilä, 2002). Opettajat tuntuvatkin nojautuvan liiaksi oppimateriaaleihin (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010). Tämä johtuu osittain varmasti siitä, että he mieltävät oppikirjat asiantuntijoiden laatimiksi ja uskovat niiden noudattavan opetussuunnitelmaa (Perkkilä ym., 2018). Opettajat saattavat siis ajatella toteuttavansa opetussuunnitelmaa, kun opettavat asiat suoraan kirjasta. Todellisuudessa näin toimimalla oppitunnin rakenteen sanelevat oppikirjan tekijät (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010). Opettajan tulisikin aina arvioida oppikirjaa suhteessa opetussuunnitelmaan ja mukauttaa opetuksensa sen mukaiseksi – olipa oppimateriaali miten laadukasta tahansa (Perkkilä ym.,

2018). Laadukkaastakaan oppimateriaalista ei ole hyötyä, mikäli opettaja käyttää sitä yksipuolisesti (Haapasalo, 2011). Oppilaiden ymmärrys opeteltavista aiheista ja niiden välisistä yhteyksistä on kuitenkin opettajan vastuulla (Perkkilä, 2002). Opettajan pitäisikin ohjata sellaiseen ajatteluun, jota oppikirja ei välttämättä tue.

Koska oppikirjan asema on hyvin keskeinen suomalaisessa matematiikan opetuksessa, on oppimateriaalitutkimus äärimmäisen tärkeää (Perkkilä ym., 2018). Kun matematiikan oppikirjojen konseptuaalinen tieto jää vähäiseksi eivätkä opettajatkaan välttämättä osaa tätä tukea, syntyy haasteita siinä vaiheessa, kun oppilaan tarvitsisi soveltaa oppimaansa tietoa. Kustantamot puolestaan tekevät päätökset siitä, millaisia kirjoja markkinoille päätyy (Ahtineva, 2000). Keskittyneen alan vuoksi uudenlaisia materiaaleja voi olla hankala saada markkinoille. Oppimateriaalin kehittämisen kannalta olisi tärkeää, että nykyisten oppikirjojen ongelmat huomattaisiin ja niitä lähdettäisiin kehittämään. Opettajat tulevat luultavasti aina turvautumaan oppikirjoihin ja pitävät sitä tärkeänä välineenä työssään, joten myös sen vuoksi on tärkeää antaa arvoa oppimateriaalitutkimukselle.

### 2.2.2 Aiempia oppimateriaalitutkimuksia

Suomalainen oppimateriaalitutkimus käsittää kaksi aktiivista aikakautta: vuodet 1960–1980 ja 1990-luvun lopusta tähän päivään (Hiidenmaa, 2015). Hiidenmaan (2015) mukaan ensimmäisellä aikakaudella tutkijoita innosti peruskoulu-uudistus, toisella puolestaan kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien kehittyminen ja monipuolistuminen, sillä suuri osa oppimateriaalitutkimuksista on toteutettu laadullisin menetelmin. Kahdesta aktiivisesta tutkimusaikakaudesta huolimatta suomalainen oppimateriaalitutkimus ei ole kovin järjestelmällistä. Oppikirjoja on

tutkittu ahkerasti esimerkiksi kasvatustieteilijöiden ja muiden opinnäytetöitä tekevien toimesta, mutta muu tutkimus on vähäisempää (Ruuska, 2015b). Ainoastaan 5 % oppimateriaalitutkimuksesta on muuta kuin opinnäytetöihin liittyvää (Hiidenmaa, 2015). Perkkilä kollegoineen (2018) kertoo, että julkaistuissa tutkimuksissa on käsitelty muun muassa oppikirjojen käsite- ja tehtävärakenteita, oppimiskäsitystä sekä käyttötapoja. Myös saman oppiaineen eri kirjasarjoja on vertailtu keskenään sekä tarkasteltu oppikirjojen ja opetussuunnitelman välistä yhteyttä (Perkkilä ym., 2018).

Matematiikan osalta suomalaista oppimateriaalitutkimusta on vielä verrattain vähän (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Ulkomailla tutkimusta on kuitenkin tehty. Esimerkiksi Haggarty ja Pepin (2001; 2002) ovat tutkineet matematiikan oppikirjojen käyttöä, niiden kulttuurisia eroja sekä oppimismahdollisuuksia Saksassa, Ranskassa ja Englannissa. Tuloksista oli havaittavissa, että kaikissa kolmessa maassa opettajat olivat hyvin oppikirjasidonnaisia matematiikan opetuksessaan (Ks. tarkemmin Haggarty & Pepin, 2001; 2002). Samankaltaisia havaintoja ovat saaneet Leung ja Park (2006), Hong kollegoineen (2018) sekä Lepik kollegoineen (2015), joiden kaikkien tutkimuksissa matematiikan oppikirja nousi vahvaan asemaan niin oppitunneilla kuin opettajan suunnittelutyössäkin (Ks. Hong ym., 2018; Lepik ym., 2015; Leung & Park, 2006).

Suomessa matematiikan oppimateriaalitutkimus on kohdistunut etenkin siihen, millaisia sisältöjä oppikirjoista löytyy ja mikä on oppikirjojen merkitys opetuksessa. Jonkin verran tutkimustuloksia on myös eri matematiikan oppikirjasarjojen vertailusta. Oppikirjojen sisällöllisiä eroja vertailleet Joutsenlahti ja Vainionpää (2007; 2008) eivät havainneet merkittäviä eroja oppikirjasarjojen

välillä. Törnroos (2004) on kuitenkin esittänyt väitöskirjassaan, että oppilaiden oppimismahdollisuudet vaihtelevat osittain hyvinkin paljon riippuen siitä, mitä matematiikan oppikirjaa he ovat käyttäneet. Samanlaisia havaintoja on tehnyt myös Niemi (2001; 2004), jonka tutkimuksissa oppikirjan vaikutus oppimistuloksiin näytti olevan keskeinen.

Ehkä kuitenkin merkittävimpana tuloksena suomalaisesta matematiikan oppikirjatutkimuksesta voisi nostaa esille sen, että matematiikan opetus on varsin oppikirjasidonnaista (Ks. esim. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019; Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Perkkilä, 2002). Aiempien tutkimusten perusteella opettajat ympäri maailman tukeutuvat melko paljon oppikirjaan, eikä Suomi ole poikkeus tässä asiassa. Joutsenlahti ja Vainionpää (2010) saivat tutkimuksessaan hurjalta kuulostavia lukuja: heidän mukaansa opettajista jopa 97 % piti matematiikan oppikirjaa ja 88 % opettajan opasta melko tärkeänä tai erittäin tärkeänä omassa matematiikan opetuksessaan. Muissa tutkimuksissa on havaittu, että matematiikan oppikirja ohjaa opetusta paljon ja sitä pidetään tärkeimpänä oppimateriaalina – jopa niin tärkeänä, että se nousee koulun oman opetussuunnitelman ohi tärkeysjärjestyksessä (Ks. tarkemmin Niemi, 2008; Niemi, 2004; Perkkilä, 2002). Ei siis liene liioiteltua sanoa, että oppikirjoilla on äärimmäisen suuri merkitys suomalaisessa matematiikan opetuksessa – etenkin opettajille.

Opettajien lisäksi oppikirja on tärkeä työväline tietenkin oppilaille. Suomessa oppilaille on pääsääntöisesti oma matematiikan oppikirja ja vaikuttaa siltä, että sitä täytetään ahkerasti. Oppituntien ajankäyttöä selvittäneessä tutkimuksessa huomattiin, että oppilaista yli 85 % käytti oppikirjaa yli puolet oppituntien ajasta (Tossavainen, 2015). Matematiikan oppitunneilla onkin

havaittavissa maine ”kirjantäyttötunteina” – oppilaat ovat urautuneet opiskelemaan asiaa laskemalla sitä kirjaan (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Kirjantäyttötunnin ominaisuutta heijastelee myös suomalaisen matematiikan oppikirjan rakenne. Tyypillisen matematiikan oppikirjan aukeama rakentuu seuraavasti: opetuslaatikko + esimerkit opeteltavasta aiheesta + aiheeseen liittyvät tehtävät + mahdolliset lisätehtävät nopeille laskijoille (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019). Tällainen kirjojen rakenne ohjaa helposti oppilaita vain täyttämään kirjaa ja etsimään oikeita vastauksia sen syvällisemmin aihetta pohtimatta (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010). Matematiikan oppikirjoja vertailtaessa on huomattu, että edellä kuvattu kaavamainen rakenne ja asioiden jaksottaminen toistuu joka vuosiluokalla, mutta myös eri kirjasarjojen ja kustantajien välillä (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007).

Kirjojen rakenteen ohella suomalaisessa matematiikan oppikirjatutkimuksessa on keskitytty siihen, millä tavalla opeteltavat asiat kirjoissa käsitellään. Jonkin verran tutkimustietoa on myös siitä, mitä nämä opeteltavat asiat ovat (Ks. Törnroos, 2004). Joutsenlahden ja Vainionpään (2007; 2008) luotsaamassa MOT-projektissa arvioitiin matematiikan oppimateriaaleja muun muassa harjoitustehtävien kautta. Tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että suomalaiset matematiikan oppikirjat suosivat tehtäviä, joihin on yksi oikea vastaus ja siihen päästään yksinkertaisten strategioiden avulla (Ks. Joutsenlahti & Vainionpää 2007; Joutsenlahti & Vainionpää, 2008).

Ehkä juuri tällaiset tehtävät ovat omiaan lietsomaan ajatusta matematiikan ”kirjantäyttötunneista”. Oppikirjat tukevat proseduraalista ajattelua ja ohjaavat pinnallisiin ratkaisustrategioihin (Perkkilä, 2002). Kun tehtävissä korostuvat proseduurit käsitteellisen ymmärtämisen sijasta, on oppilaiden mahdollista

ratkaista laskut opittua operaatiota toistamalla, mutta tehtävien taustalla olevat käsitteet tai niiden väliset yhteydet jäävät toissijaisiksi (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Törnroos (2004) havaitsi tutkimuksessaan, että matematiikan kirjojen yleisimmät suoritusodotukset olivat ne, että muistettiin matemaattisia ominaisuuksia, käytettiin rutiinilaskutoimituksia ja -menetelmiä sekä ratkaistiin sanallisia ongelmia. Edellä mainittujen tutkimusten perusteella vaikuttaa siis siltä, että matematiikan oppikirjat kannustavat enemmän täyttämään kirjaa kuin todella ymmärtämään asiaa.

# 3 SUHTEEN KÄSITE MATEMATIIKASSA

## 3.1 Käsitteen määrittelyä

Käsitettä *suhde* voidaan käyttää matematiikassa useassa eri tarkoituksessa. Tätä kuvastaa hyvin se, ettei käsitteelle ole löydettävissä yksimielistä määrittelyä (Smith III, 2002). Koulumatematiikassa suhteella tarkoitetaan laajassa merkityksessä relaatiota (*relation*), joka voidaan kuvata esimerkiksi suuruusvertailuna kahden erisuuruisen luvun välillä (Hihnala, 2005; Wu, 2011). Suppeammassa merkityksessä suhde (*ratio*) kuvastaa kahden luvun tai suureen välistä osamäärää (Hihnala, 2005). Tässä tutkimuksessa tarkastelemme suhde-käsitettä jälkimmäisenä mainitusta näkökulmasta. Suhde-käsitteen avulla voidaan ilmaista lukujen välistä suhdetta: jos luokassa on 17 poikaa ja 13 tyttöä, on poikien suhde tyttöihin 17:13, eli ”seitsemäntoista suhde kolmeentoista” (Wu, 2011). Suhdetta voidaan käyttää matematiikassa monin eri tavoin, joista edellä mainittu on vain yksi esimerkki (Ben-Chaim ym., 2012).

Matematiikassa suhteen arvo lasketaan jakamalla tai kertomalla yksi määrä toisella ja sen avulla voidaan päätellä moninkertaisia suhteita kahden arvon välillä (Ben-Chaim ym., 2012). Väisälä (1970, s. 22) määrittelee suhteen seuraavasti Algebran oppi- ja esimerkkikirjassaan: ”Kahden luvun suhteella tarkoitetaan sellaista lukua, että kun sillä kerrotaan jälkimmäinen luku, niin saadaan tuloksi edellinen.” Näin määriteltynä suhteen ymmärtäminen voi olla hankalaa, mutta käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos  $a:b=c$  (luvun  $a$  suhde

lukuun  $b$  on  $c$ ), niin  $b \cdot c = a$ . Eli siis kuinka monta kertaa  $a$  on  $b$ :n suuruinen (Matematiikkalehti Solmu, 2023). Äsken käytetty merkintätapa " $a:b$ " on yleinen suhdetta ilmoittaessa – toinen tapa merkitä suhdetta on " $a/b$ " (Ben-Chaim ym., 2012). Joutsenlahden ja Perkkilän (2021) mukaan tällainen merkintätapa on käytössä myös suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa. Näissä suhde kuvataan yleensä kahden lukumäärän väliseksi suhteeksi (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021).

Merkintä " $a/b$ " voidaan tulkita myös murtoluvun merkinnäksi ja suhde onkin usein lähellä murtolukua. Gardiner (2016) kuvaileekin suhteen linkittyvän työskentelyyn murtolukujen kanssa. Suhteen voi ajatella murtolukuna, jos se liittyy murto-osan ja kokonaisen väliseen suhteeseen; kaikki suhteet eivät kuitenkaan ole murtolukuja (Stewart, 2005). Perkkilä ja Joutsenlahti (2021) ovat tarkastelleet merkinnän " $a/b$ " erilaisia tulkintatapoja (Ks. Kuvio 4).

Approach to " $a/b$ "	Fraction	Rational number	Division	Ratio	Others
<i>Mathematical and historical approach</i> (Klein 1968; Park et al. 2013)	part-whole, set-theoretical	measurement	division	ratio	
<i>Pedagogical approach A</i> (Kieren 1976; Stewart 2005; Pantziara and Philippou 2012)	part-whole, set-operator	measurement	quotient	ratio	
<i>Pedagogical approach B</i> (Joutsenlahti et al. 2017)	part out of a sum of parts, a fraction of given whole	rational number	division	ratio	probability

**KUVIO 4.** Erilaiset merkitykset merkinnälle " $a/b$ " (Perkkilä & Joutsenlahti, 2021, s. 173)

Merkintää " $a/b$ " voidaan lähestyä kahdesta eri näkökulmasta: matemaattisesta ja historiallisesta sekä pedagogisesta (Perkkilä & Joutsenlahti, 2021). Ensimmäisellä näkökulmalla Perkkilä ja Joutsenlahti (2021) tarkoittavat sitä, kuinka merkintää on kuvailtu matemaattisessa merkityksessä ja se ottaa

huomioon myös murtolukujen merkityksen historiallisen kehityksen. Pedagoginen lähestymistapa puolestaan perustuu analyysiin murtoluvun käsitteestä ja etenkin siihen, kuinka se näyttäytyy oppikirjoissa (Perkkilä & Joutsenlahti, 2021). Taulukosta on nähtävissä, että murtoluvun, rationaaliluvun ja jakolaskun kohdalla merkinnälle "a/b" annetaan hieman erilaisia merkityksiä lähestymistavan mukaan, mutta suhteen kontekstissa "a/b" tarkoittaa aina suhdetta näkökulmasta riippumatta.

Murtoluvun lisäksi suhde-käsitteelle voidaan löytää muita lähikäsitteitä. Schwols kollegoineen (2013) kuvaa niitä asioita, joiden oppiminen edesauttaa suhteen käsitteen ymmärrystä myöhemmässä vaiheessa (Ks. Kuvio 5).

Figure 2.2   <b>Ratios and Proportional Relationships: Conceptual Pathway to Middle School</b>	
<b>Grade Level</b>	<b>Concepts</b>
Grade 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grouping of equal objects</li> <li>• Partitioning shapes</li> <li>• Fractional terms</li> </ul>
Grades 3 and 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplication and division of whole numbers</li> <li>• Comparison, addition, and subtraction of fractions with the same denominator</li> <li>• Multiplication of fractions by a whole number</li> </ul>
Grade 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplication of fractions and division of unit fractions</li> <li>• Addition and subtraction of fractions with different denominators</li> </ul>

**KUVIO 5.** Suhde-käsitettä pohjustavat asiat (Schwols ym., 2013, s. 18)

Esimerkiksi samanlaisten tavaroiden ryhmittelyn ja murtolukujen laskutoimitusten hallitseminen helpottavat myöhemmin opeteltavaa suhdetta (Schwols ym., 2013). Tutkimuksissa onkin havaittu, että suhde-käsitteen esiasteet saattavat löytyä jo

melko varhaisessa vaiheessa lasten ajattelusta: esikoululaisilla oli intuitiivisia käsityksiä mittakaavasta (Smith III, 2002).

Verrannollisuus (*proportionality*) on tärkeä suhteeseen liittyvä lähikäsite, joka tulisi oppia ala-asteella (Hihnala, 2010). Verrannollisuutta voi soveltaa monissa tosielämän ongelmissa (Gardiner, 2016; Schwols ym., 2013). Esimerkiksi suoraan verrannollisuuden avulla on mahdollista laskea yksikköhintoja. Suhde ja verrannollisuus luovat pohjaa algebralle, joten näiden osaamisella on merkitystä myöhemmälle matematiikan oppimiselle (Slovin, 2000). Matematiikassa useat käsitteet liittyvät läheisesti toisiinsa ja matematiikan kumulatiivisen luonteen vuoksi jonkin käsitteen oppimattomuus voi hankaloittaa seuraavan sisäistämistä merkittävästi. Suhde-käsite on tästä hyvä esimerkki: muun muassa mittakaavan soveltaminen ja sisältöjako pohjautuvat suhteellisuuteen, mutta suhde-käsitettä ei tuoda systemaattisesti esiin näitä aihealueita käsitellessä. Alakoulun opettajakaan ei välttämättä huomaa suhde-käsitteen olevan kyseisten laskutoimitusten taustalla, sillä suhteeseen läheisesti liittyvä verrannon käsite mainitaan matematiikan opetussuunnitelmassakin vasta yläkoulun kohdalla (Hihnala, 2010) – suhdetta ei sen sijaan sielläkään. Myös verrantojen käsittely jää koulumatematiikassa ohueksi, sillä monissa oppikirjoissa keskitytään enemmän ratkaisumenetelmien opetteluun kuin käsitteiden ymmärtämiseen (Langrall & Swafford, 2000). Tutkimusten mukaan ajattelumalli ”nopea reitti oikeaan ratkaisuun” on siinä mielessä ongelmallinen, ettei se kehitä oppilaiden kykyä ymmärtää suhdetta (Smith III, 2002).

### 3.2 Matemaattiseen suhteeseen liittyviä tutkimuksia

Matematiikkaan liittyvää suhteen käsitettä (*ratio*) ei ole tutkittu juuri lainkaan. Suhteeseen läheisesti liittyvästä murtoluvusta löytyy huomattavasti enemmän tutkimuksia (Ks. esim. Pantziara & Philippou, 2011; Stewart, 2005), mutta suhde ei vaikuta kiinnostaneen tutkijoita. Tämä on mielenkiintoista siinä mielessä, että suhdetta pidetään murtolukujen ja verrannollisuuden ohessa vaikeimpana ja monimutkaisempaan alakoulussa opetettavana asiana (Smith III, 2002).

Suhteeseen tai sen lähikäsitteisiin liittyvät tutkimukset esittävät melko yhteneviä tuloksia: aihe näyttäytyy monelle vaikeana. Eräässä tutkimuksessa havaittiin, että vain 23 % oppilaista osasi ratkaista suoraan verrannollisuuteen liittyvän tehtävän (Ks. tarkemmin Weinberg, 2002). Samansuuntaisia tuloksia on saanut Hihnala (2005), jonka selvityksen mukaan noin puolet 6.–9.-luokkalaisista ratkaisi suoraan verrannollisuuteen perustuvia tehtäviä oikein. Kääntäen verrannollisuus näyttäytyi kuitenkin samassa tutkimuksessa huomattavasti haastavampana: ainoastaan 0,2 % vastaajista vastasi siihen oikein (Hihnala, 2005). Oppimateriaalit puolestaan näyttävät korostavan proseduraalista osaamista suhteellisuuteen liittyvissä tehtävissä; oppilaat osaavat ratkoa verrantotehtäviä kertomalla ristiin, mutta tämä ei kerro juurikaan suhteen ymmärryksestä (Slovin, 2000).

Joutsenlahti ja Perkkilä (2021; 2019) ovat tutkineet luokanopettajaopiskelijoiden käsityksiä merkinnästä " $\frac{2}{3}$ ". Ensimmäisessä tutkimuksessaan Joutsenlahti ja Perkkilä (2019) halusivat selvittää, miten luokanopettajaopiskelijat ymmärtävät merkinnän " $\frac{2}{3}$ " erilaiset tarkoitukset, sillä merkintätapa esiintyy koulumatematiikassa eri yhteyksissä: murtolukuna, rationaalilukuna, suhteena, jakolaskuna ja todennäköisyytenä. Murtoluvut

koetaan yhdeksi vaikeimmista aiheista koulumatematiikassa ja tutkimuksessa pyrittiin ymmärtämään hankaluuksia niiden oppimisessa, jotta luokanopettajakoulutusta voitaisiin kehittää (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019). Joutsenlahden ja Perkkilän (2019) tulosten perusteella merkintä " $\frac{2}{3}$ " ymmärrettiin tyypillisesti murtoluvuksi, mutta rationaaliluvuksi, todennäköisyydeksi tai suhteeksi se ymmärrettiin huomattavasti harvemmin.

Perkkilä ja Joutsenlahti (2021) ovat tarkastelleet yhteistyöhön perustuvaa matemaattista ajattelua tutkimuksessaan, jossa luokanopettajaopiskelijoiden piti jälleen pohtia käsityksiään merkinnästä " $\frac{2}{3}$ ", mutta tällä kertaa yhdessä parin kanssa. Pareittain työskennelleet opiskelijat keksivät merkinnälle enemmän merkityksiä kuin yksin työskennelleet (Perkkilä & Joutsenlahti, 2021). Tässä tutkimuksessa kuitenkin suhde ja todennäköisyys saivat vähemmän mainintoja kuin edellisessä tutkimuksessa (Perkkilä & Joutsenlahti, 2021).

Myös luokanopettajaopiskelijoita tutkinut Hihnala (2010) selvitti tutkimuksessaan ymmärrystä suhteellisuudesta. Luokanopettajaopiskelijoiden tuli vastata kysymyksiin muun muassa yksikköhintoihin ja sisältöjakoon liittyen (Hihnala, 2010). Saatujen tulosten mukaan suhteellisuuden osaaminen näyttäytyi heikompana kuin matematiikan osaaminen muuten: hieman yli puolet osallistujista suoriutui kysymyksistä hyvin tiedoin (Hihnala, 2010).

Joutsenlahti ja Perkkilä (2021) ovat tutkineet, miten merkintä " $a/b$ " esiintyy Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa ja matematiikan oppimateriaaleissa. Merkintään liittyvä termi "murtoluku" esiintyi opetussuunnitelmassa joitakin kertoja, mutta termiä "suhde" ei mainittu kertaakaan – siihen läheisesti liittyviä käsitteitä, kuten "mittakaava" ja "verranto" kuitenkin löytyi. (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021). Joutsenlahden ja Perkkilän

(2021) mukaan merkintä "a/b" matematiikan oppikirjoissa liittyy yleensä murtolukuihin, mutta sen avulla voidaan kuvata myös suhdetta. Näiden kahden yhteyttä ei kuitenkaan tuoda oppikirjoissa esille ja näistä murtolukua käsitellään huomattavasti enemmän suhteen jäädessä verrantojen ja mehun sekoitussuhteiden tasolle (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021).

Tutkimuskatsauksen mukaan vaikuttaa siltä, että matemaattinen käsite suhde on jäänyt taka-alalle niin oppimateriaaleissa, opetussuunnitelmassa kuin ymmärryksessäkin. Saadun tutkimustiedon perusteella suhde näyttäytyy melko vaikeasti ymmärrettävänä. Parhaimmillaan vain noin puolet eri tutkimuksiin osallistujista ovat selvittäneet onnistuneesti suhteeseen tai sen lähikäsitteisiin liittyviä tehtäviä. Suhteen havaitseminen tai tunnistaminen vaikuttaa olevan hankalaa jopa luokanopettajaopiskelijoille, oppilaista puhumattakaan.

### *3.3 Käsite "suhde" perusopetuksen opetussuunnitelmassa*

Suhde-käsite jää perusopetuksen opetussuunnitelman matematiikan oppiaineen sisällöissä ja tavoitteissa taka-alalle: sanaa "suhde" ei mainita suoraan siellä kertaakaan (Opetushallitus, 2014). "Suhde" käsitteenä löytyy perusopetuksen opetussuunnitelmasta matemaattisessa merkityksessä vain maantiedon oppisisällöistä vuosiluokilta 7–9: "Oppilas osaa mitata sekä jana- että suhdelukumittakaavan avulla etäisyyksiä kartalla --" (Opetushallitus, 2014, s. 388). Tämä kuvastaa hyvin suhde-käsitteen taka-alalle jäämistä perusopetuksen matematiikan oppisisällöissä.

Vaikka käsitettä "suhde" ei Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa juuri mainita, on sieltä kuitenkin löydettävissä siihen liittyviä lähikäsitteitä (Ks. Taulukko 1). Tällaisia suhteesta johdettuja "keinotekoisia"

käsitteitä ovat mittakaava, suurennos, pienennös, verranto ja yhdenmuotoisuus, ja ne tulevat esille matematiikan oppiaineen sisällöissä.

**TAULUKKO 1.** Suhde-käsitteen ilmeneminen matemaattisessa yhteydessä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014)

Vuosiluokka/Oppiaine	Matematiikka	Maantieto
Vuosiluokat 3–6	mittakaava	
	suurennos	
	pienennös	
	kartan mittakaava	
Vuosiluokat 7–9	verranto	suhdelukumittakaava kartalla
	suoraan verrannollisuus	
	kääntäen verrannollisuus	
	yhdenmuotoisuus	

Mittakaava, suurennos ja pienennös löytyvät vuosiluokkien 3–6 matematiikan sisältöalueesta *S4 Geometria ja mittaaminen*: ”Tutustutaan mittakaavan käsitteeseen ja käytetään sitä suurennoksissa ja pienennöksissä. Ohjataan oppilaita hyödyntämään mittakaavaa kartan käytössä” (Opetushallitus, 2014, s. 236). Verranto ja yhdenmuotoisuus puolestaan esitetään opetussuunnitelmassa vasta vuosiluokkien 7–9 matematiikan sisältöalueissa. Verranto mainitaan sisältöalueessa *S3 Algebra*, jonka mukaan ”käytetään verrantoa tehtävien ratkaisussa” sekä sisältöalueessa *S4 Funktiot*, missä vuosiluokilla 7–9 funktioiden sisältöalueessa ”tutustutaan suoraan ja kääntäen verrannollisuuteen” (Opetushallitus, 2014, s. 375–376). Yhdenmuotoisuus mainitaan sisältöalueessa *S5 Geometria*: ”vahvistetaan yhdenmuotoisuuden ja yhtenevyyden käsitteiden ymmärtämistä” (Opetushallitus, 2014, s. 376).

Kuudennen luokan matematiikan päättöarvioinnin hyvää osaamista (arvosana 8) kuvastavissa arviointikriteereissä suhteeseen liittyviä kriteereitä on

vain yksi, joka sijoittuu geometrian sisältöihin: ”Oppilas osaa käyttää mittakaavaa sekä tunnistaa suoran ja pisteen suhteen symmetrisiä kuvioita” (Opetushallitus, 2014, s. 238). Alakoulun päättyessä ja yläkouluun siirryttäessä suhde–käsitteen hallinnaksi näyttääkin riittävän, että oppilas osaa hyödyntää mittakaavaa, ainakin jos Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita katsotaan. Suhde-käsitteeseen perehtyminen on kuitenkin osoittanut sen, että käsite liittyy olennaisesti moniin oppisisältöihin, jolloin olisi tärkeää, että myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa kiinnitettäisiin huomiota tämän käsitteen käsittelyyn.

# 4 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

## 4.1 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Kvalitatiivisen tutkimuksemme tarkoituksena on kartoittaa sitä, miten valitsemamme matematiikan oppimateriaalit luokka-asteilta 4–6 esittävät matemaattisen käsitteen *suhde*. Suhteella tarkoitamme tässä yhteydessä kahden luvun tai suureen välisiä suhteita, kuten mittakaavaa ja verrantoa. Meitä kiinnostaa se, missä yhteydessä suhde esiintyy matematiikan oppimateriaaleissa: käsitelläänkö suhdetta omana käsitteenään, millaisiin asioihin se yhdistetään vai mainitaanko suhdetta juuri lainkaan? Tämän lisäksi haluamme selvittää, miten kuudennen luokan oppilaat ymmärtävät kyseisen käsitteen.

Tutkimuskysymyksemme ovat:

1. Miten matematiikan oppimateriaalit esittävät *suhde*-käsitteen?
  - a. Millaisissa tehtävissä suhde-käsite esiintyy?
  - b. Millaisiin aihealueisiin suhde-käsitteeseen liittyvät tehtävät on sijoitettu oppimateriaaleissa?
2. Miten 6.-luokkalaiset oppilaat ymmärtävät *suhde*-käsitteen?

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen pyrimme saamaan vastauksia oppimateriaalitutkimuksestamme teemoittelun avulla. Toisen tutkimuskysymyksen kohdalla keskitymme oppilailta kerättyyn aineistoon, josta keräämme tuloksia teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä hyödyntäen. Seuraavaksi esittelemme tutkimusaineistojemme keruuta sekä analyysimenetelmiämme.

Käymme aineistot läpi yksi kerrallaan: aluksi kerromme oppimateriaaliaineistosta ja sen analyysistä ja tämän jälkeen oppilaiden ymmärryksen tutkimisesta.

## *4.2 Oppimateriaalin tutkiminen*

### 4.2.1 Tutkittava aineisto

Ensimmäinen tutkimuskysymyksemme koskee matematiikan oppimateriaaleja ja niihin liittyvä aineisto kerättiin pääsääntöisesti marras-joulukuussa 2022. Päädyimme tutkimaan oppimateriaaleja kolmelta eri luokka-asteelta ja kustantajalta (Ks. Taulukko 2). Valitsimme kustantamoiksi Sanoma Pron, Otavan sekä Edukustannuksen. Sanoma Pro:ta tutkimme Milli-sarjan opettajanoppaita, jotka sisälsivät oppilaiden oppikirjan aukeamien lisäksi muun muassa didaktisia opetusvihjeitä, pulmatehtäviä ja päässälaskuja. Otavalta tarkastelimme oppilaan kirjoja sarjasta Tuhattaituri ja Edukustannukselta NeeViiKuu-sarjan oppilaan oppikirjoja sekä oppikirjaan kuuluvaa lisämateriaalivihkosta. Kaksi ensimmäisenä mainittua oppikirjasarjaa valikoituivat etenkin sen vuoksi, että Sanoma Pro ja Otava ovat valtakunnallisesti suurimmat kustantamot, joten koimme tärkeäksi tutkia heidän oppimateriaalejaan. NeeViiKuu-sarjan oppikirjat valitsimme tutkittavaksi siksi, että ne rakentuvat hieman eri tavalla kuin Sanoma Pron ja Otavan kustantamat oppikirjat.

## TAULUKKO 2. Tutkitut oppimateriaalit

Kustantaja	Oppimateriaali
Sanoma Pro	Milli 4A Open opas (2021)
	Milli 4B Open opas (2021)
	Milli 5A Open opas (2021)
	Milli 5B Open opas (2021)
	Milli 6A Open opas (2021)
	Milli 6B Open opas (2022)
Otava	Tuhattaituri 4a oppilaan kirja (2016)
	Tuhattaituri 4b oppilaan kirja (2016)
	Tuhattaituri 5a oppilaan kirja (2016)
	Tuhattaituri 5b oppilaan kirja (2017)
	Tuhattaituri 6a oppilaan kirja (2017)
	Tuhattaituri 6b oppilaan kirja (2018)
Edukustannus	NeeViiKuu 4A oppilaan kirja (2014) + lisämateriaalivihko
	NeeViiKuu 4B oppilaan kirja (2017) + lisämateriaalivihko
	NeeViiKuu 5A oppilaan kirja (2017) + lisämateriaalivihko
	NeeViiKuu 5B oppilaan kirja (2017) + lisämateriaalivihko
	NeeViiKuu 6A oppilaan kirja (2016) + lisämateriaalivihko
	NeeViiKuu 6B oppilaan kirja (2017) + lisämateriaalivihko

Tutkimme kaikista kolmesta oppikirjasarjasta luokka-asteita 4–6. Pidimme tarpeellisena, että tarkastelemme ainakin 6. luokan oppimateriaaleja, koska toinen tutkimuskysymyksemme liittyy 6. luokan oppilaisiin. Halusimme kuitenkin suhde-käsitteen ilmenemisestä oppimateriaaleissa laajemman kuvan, joten valitsimme kirjoja myös muilta luokka-asteilta. Alun perin harkitsimme tutkivamme 3.–6. luokan oppikirjoja, sillä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa oppiaineet luokitellaan vuosiluokittain 1–2 ja 3–6. Tarkasteltuamme 3. luokan kirjoja havaitsimme kuitenkin, ettemme saisi niistä juurikaan lisäarvoa aineistoomme ja päädyimme rajaamaan oppikirjojen tarkastelun luokka-asteisiin 4–6.

#### 4.2.2 Oppimateriaalin analyysi

Valitsimme oppimateriaalin analyysitavaksi teemoittelun. Teemoittelu on menetelmä, jota käytetään mallien eli ”teemojen” tunnistamiseksi, analysoimiseksi ja tulkitsemiseksi kvalitatiivisesta aineistosta (Clarke & Braun, 2017). Sitä voidaan käyttää myös muiden laadullisten analyysitapojen apuna (Vaismoradi ym., 2013). Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan teemoittelussa aineistoa pilkotaan aihepiirien mukaan, mikä mahdollistaa myös eri teemojen aineistossa esiintymisen vertailun. Teemoittelun avulla saadaan kehys tutkijan havaintojen järjestämiselle ja raportoinnille (Clarke & Braun, 2017). Saaranen-Kauppinen ja Puusniekka (2006) toteavat teemoittelun olevan usein aineistolähtöistä: teemat ikään kuin löydetään aineistosta sen sisältöä analysoimalla. Tässä analyysitavassa onkin tärkeää, että teemat syntyvät nimenomaan analyysin tuloksena – tutkija ei voi päättää teemoja etukäteen ja sitten sijoittaa aineistonsa palasia sopivan teeman alle (Juhila, 2023).

Toteutimme oppimateriaalianalyysin juuri aineistolähtöisesti. Aluksi tutkimme oppikirjoja ja opettajan oppaita etsien niistä suhde–käsitteeseen liittyviä tehtäviä. Keräsimme tehtäviä ylös ja huomasimme, että monet niistä liittyvät samoihin aihealueisiin. Päädyimme luomaan tehtävistä teemoja ja valitsemaan analyysitavaksi teemoittelun. Teemoittelussa hyvä puoli on siinä, että se on varsin joustava analyysimenetelmä, jonka avulla on mahdollista saada paljon tietoa tutkimuskysymyksiin liittyen (Clarke & Braun, 2017). Teemoittelun avulla pystyimme analysoimaan tarkemmin sitä, millaisissa tehtävätyypeissä suhde–käsite esiintyy ja mihin aihealueisiin matematiikassa se liitetään.

Osa teemoista muodostui jo lyhyen oppimateriaalikatsauksen perusteella: suurennot ja pienennökset sekä yhdenmuotoisuuteen, mittakaavaan ja kartan

mittakaavaan liittyvät tehtävät olivat materiaalissa paljon esillä ja helposti yhdistettävissä suhde-käsitteeseen. Kaikki teemat eivät syntyneet heti, vaan muovautuivat sitä mukaa, mitä enemmän tarkastelimme oppimateriaalien tehtäviä. Monet oppimateriaalien tehtävistä olisi voinut sijoittaa useamman teeman alle. Analyysissa päädyimme kuitenkin siihen, että tehtävä sijoitetaan sen teeman alle, mikä on tehtävässä ”johtava” käsite eli millä tulokulmalla sitä tulisi ratkoa. Kaikkia tehtäviä emme onnistuneet sijoittamaan heti jonkin määrittelemämme teeman alle, vaan sijoitimme aluksi nämä tehtävät väliaikaisen ”muu suhde” -teeman alle.

Lopullisiksi teemoiksi valikoituivat seuraavat: suurennos, pienennös, yhdenmuotoisuus, mittakaava, kartan mittakaava, muu pituuksien suhde, suoraan verrannollisuuden sovellukset sekä määrien väliset suhteet. Teemoista viimeisenä mainittu myös muovautui jälkimmäisenä. Tehtävät, jotka olimme sijoittaneet ”muu suhde” -teeman alle, liittyivät jollakin tavalla eri määrien väliseen suhteeseen, joten nimesimme teeman tämän perusteella määrien väliseksi suhteeksi. Teema ”suoraan verrannollisuuden sovellukset” oli aluksi nimeltään ”verranto”, mutta päädyimme muuttamaan teeman nimen kuvaavammaksi, sillä tämän teeman alle laittamamme tehtävät liittyivät nimenomaan suoraan verrannollisuuteen eivätkä niinkään verrantoon yleisesti. Tässä teemassa rajasimme myös tarkasti sen, että tehtävät olivat nimenomaan suhteeseen liittyviä ja ne voitiin ratkaista suoraan verrannollisuuden avulla. Oppimateriaalissa oli paljon suoraan verrannollisuuteen liittyviä tehtäviä kerto- ja jakolaskujaksojen yhteydessä, mutta tällaiset tehtävät jätimme tutkimuksen ulkopuolelle, sillä ne eivät liittyneet suhteeseen. Kerromme luvussa 5.1 tarkemmin, millaisia tehtäviä

sijoitimme näiden kahdeksan teeman alle. Teemoittelulle tyypillisesti tulemme nostamaan esiin katkelmia aineistosta (Juhila, 2023).

### *4.3 Suhde-käsitteen ymmärtäminen*

#### 4.3.1 Aineiston kerääminen

Toinen tutkimuskysymyksemme koski sitä, miten 6.-luokkalaiset oppilaat ymmärtävät matemaattisen käsitteen suhde. Valitsimme vastaajiksi 6.-luokkalaisia, sillä halusimme tulevana luokanopettajina fokusoida tutkimuksemme alakouluun niin oppimateriaalien kuin oppilaidenkin osalta. Koimme, että 6.-luokkalaisilla on jo enemmän kykyä kielentää kirjallisesti omia vastauksiaan ja ajatuksiaan nuorempiin oppilaisiin verrattuna. Päädyimme käyttämään aineistonkeruumenetelmänä sähköistä tehtävälomaketta (Ks. Liite 1) erityisesti sen helppouden vuoksi. Sähköinen tehtävälomake mahdollisti sen, että tutkimukseen osallistuvien luokkien opettajat saivat itse määritellä luokalle sopivan ajankohdan täyttää lomakkeen eikä meidän tarvinnut olla paikalla tutkimukseen vastaamisen aikana. Sähköisen lomakkeen avulla vältimme mahdolliset käsialan tulkitsemisongelmat ja pystyimme ”pakottamaan” oppilaat vastaamaan edes jotakin jokaiseen kysymykseen – paperilla kaikki olisi ollut mahdollista jättää tyhjäksi. Lomakkeen avulla saimme myös vastaukset helposti analysoitavassa muodossa käyttöömme.

Hyödynsimme tehtävälomakkeella menetelmänä kirjallista kielentämistä (Ks. tarkemmin kielentämisestä luku 2.1.3). Kirjallisen kielentämisen avulla saimme tuotua oppilaiden matemaattista ajattelua paremmin ilmi myös itsellemme tehtävälomakkeen kautta ja pystyimme hahmottamaan, miten oppilas on päätenyt tehtäviensä ratkaisuihin.

Toteutimme aineistonkeruun tammikuussa 2023 viikolla 3. Lomake sisälsi kysymyksen oppilaan suostumuksesta luovuttaa vastauksensa tutkimuskäyttöön sekä 12 kysymystä suhde–käsitteeseen liittyen (Ks. Liite 1 ja Taulukko 3). Näistä kysymyksistä puolet olivat monivalintakysymyksiä ja puolet sanallisia kysymyksiä, joissa oppilaan tuli joko kertoa ratkaisu tehtävään tai kielentää omaa matemaattista ajatteluaan. Osa avoimista kysymyksistä oli johdettu edeltävästä tehtävästä, jolloin niissä pyydettiin kertomaan, miten oli ratkaissut edeltävän tehtävän. Päädyimme sisällyttämään tehtävälomakkeeseen sekä avoimia että suljettuja kysymyksiä, sillä Anttilan (2014) mukaan näin on helpompi arvioida vastausten yhdenmukaisuutta. Pyrimme pitämään lomakkeen myös melko lyhyenä, jotta vastaajat jaksaisivat keskittyä vastaamiseen mahdollisimman hyvin.

Loimme tehtävälomakkeen tehtävät sen pohjalta, millaisena suhde–käsite näyttäytyi oppimateriaalianalyysissa. Koska oppimateriaalianalyysia tehtiin ennen lomakkeen laatimista, hyödynsimme tehtävien teossa analyysista saatuja tuloksia. Niissä muodostui kahdeksan erilaista teemaa (Ks. tarkemmin luku 5.1), joita hyödyntämällä teimme tehtävälomakkeen tehtävät. Halusimme nostaa tehtävälomakkeeseen esille sellaisia asioita, joita käsitellään myös matematiikan oppikirjoissa. Tällaisia tehtäviä olivat muun muassa yhdenmuotoisuuteen, suurennokeeseen, pienennökeeseen ja kartan mittakaavaan liittyvät tehtävät. Osa tehtävälomakkeen tehtävistä oli hyvin perinteisen ”oppikirjamaisia”, osa taas tästä poikkeavia ja enemmän kielentämistä vaativia.

Seuraavaksi esittelemme tehtävälomakettamme sanallisesti. Puhumme lomakkeen tehtävistä niillä numeroilla, kuin ne lomakkeessa ovat (Ks. Liite 1 ja Taulukko 3).

### TAULUKKO 3. Tehtävälomakkeen kysymykset (Ks. Liite 1)

Kysymys
1. Annan luvan käyttää vastauksiani tutkimuksen tekemisessä.
2. Mitkä kaksi seuraavista kuvioista ovat keskenään yhdenmuotoisia? Kirjoita yhdenmuotoisten kuvioiden kirjaimet vastaukseksi. (Esimerkiksi XY)
3. Punainen kolmio on alkuperäinen kuva. Mikä sinisistä kolmioista on sen suurennos?
4. Missä mittakaavassa sininen yhdenmuotoinen kolmio on suurennettu?
5. Mikä seuraavista kuvioista kuvaa merkintää 2:3?
6. Mikä seuraavista murtoluvuista kuvaa edellisessä tehtävässä valitsemaasi ratkaisua? (Vaaleanpunaisen osuus valkoiseen)
7. Maija valmistaa juhliin sata litraa mehua. Hän sekoittaa mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1:4. Kuinka paljon hän tarvitsee tiivistettä?
8. Maija valmistaa juhliin sata litraa mehua. Hän sekoittaa mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1:4. Kuinka suuri osa Maijan valmistamasta mehusta on mehutiivistettä?
9. Kerro omin sanoin, mitä tarkoittaa matemaattinen käsite suhde.
10. Kaupassa 2 kg karkkia maksaa 8 €. Otto ostaa 3 kg karkkia. Kuinka paljon karkit maksavat? Kirjoita vastaus.
11. Miten päädyit edellisen tehtävän ratkaisuun? Kerro sanallisesti.
12. Kerro omin sanoin, mitä mittakaava tarkoittaa.
13. Oppilas piirtää karttaa koulumatkastaan. Kartan mittakaava on 1:10 000. Oppilaan koulumatka on todellisuudessa 2 km. Kuinka pitkä koulumatka on kartalla? Oppilas laskee matkan kartalla seuraavalla tavalla: "1:10 000 tarkoittaa, että 1 senttimetri kartalla vastaa 10 000 senttimetriä luonnossa. 10 000 cm = 1 km. 2·10 000 cm = 20 000 cm. 20 000 cm = 2 km. Siis 2 kilometriä luonnossa on 2 senttimetriä kartalla." Ratkaisiko oppilas tehtävän oikein? Mikäli ei, mitä korjaisit ratkaisussa?

Ensimmäisessä "tehtävässä" pyydettiin oppilaan suostumusta käyttää vastauksiaan osana tutkimusaineistoa. Suhde-käsitteen ymmärrykseen liittyvä osuus koostui seuraavanlaisista tehtävistä: toisessa tehtävässä oppilaan tuli löytää yhdeksän kuvion joukosta kaksi yhdenmuotoista kuviota. Kuviot olivat erilaisissa asennoissa ja eri muotoisia ja värisiä, paitsi kaksi kuviota, jotka jätettiin tarkoituksella samanvärisiksi. Tässä avoimessa kysymyksessä oppilaan tuli itse kirjoittaa vastauksensa. Kolmannessa tehtävässä oppilaan tuli tunnistaa neljän sinisen kolmion joukosta alkuperäisen punaisen kolmion suurennos annetuista vaihtoehdoista. Neljännessä tehtävässä puolestaan edelliseen viitaten oppilaan piti valita vaihtoehdoista, missä mittakaavassa sinisen kolmio oli suurennettu.

Viidennessä tehtävässä oppilaan tuli valita neljästä kuviosta se, joka vastasi heidän mielestään merkintää 2:3 (kahden suhde kolmeen). Kuudennessa tehtävässä oli valittava neljästä vaihtoehdosta murtoluku, joka kuvasi heidän valitsemaansa kuviota tai vaihtoehto ”Ei mikään näistä”. Tällä viidennellä vaihtoehdolla pyrittiin kartoittamaan sitä, onko oppilaan edeltävä vastaus ollut ennemminkin arvaus kuin tieto.

Seitsemännessä tehtävässä oppilaan tuli osata hyödyntää suhde–käsitettä mehunsekoitustehtävässä. Oppilaan oli valittava neljästä vaihtoehdosta oikea mehutiivisteiden määrä, kun mehutiivisteiden ja veden määrien suhde sekä valmiin mehun määrä oli kerrottu tehtävänannossa. Kahdeksannessa tehtävässä pyydettiin valitsemaan vaihtoehdoista edeltävän tehtävän mehutiivisteiden määrä murtolukuna koko mehun määrästä.

Yhdeksäs tehtävä oli käsitteenselitystehtävä, jossa oppilaan oli kielennettävä kirjallisesti ajatteluaan siitä, mitä tarkoittaa matemaattinen käsite suhde. Tämä tehtävä sijoitettiin tarkoituksellisesti edellä mainittujen tehtävien jälkeen, jotta ne toimisivat ajatusten herättelijöinä. Tehtävässä kymmenen oppilaan tuli hyödyntää verrannollisuutta ja osata laskea oikea kilohinta karkeille. Tehtävässä 11 oppilaalta kysyttiin, miten oli ratkaissut edellisen tehtävän ja hänen tuli kielentää vastauksensa. Tehtävässä 12 oppilaan tuli selittää omin sanoin, mitä tarkoittaa mittakaava ja tehtävässä 13 hyödyntää osaamista mittakaavan käsitteestä ja tarkistaa mittakaavaan liittyvä laskettu tehtävä ja tarvittaessa korjata sitä.

Pyrimme laatimaan lomakkeen tehtävänannot tarkkaan niin, että ne olisivat mahdollisimman yksitulkintaisia. Tällä tavoin pyrimme välttämään yhden suurimmista sähköisen lomakkeen ongelmista (Cohen ym., 2007).

Tehtävälomaketta testattiin muutaman vapaaehtoisen luokanopettajaopiskelijan avustuksella, jotka täyttivät lomakkeen ja kertoivat siihen kuluneen ajan. Luokanopettajaopiskelijat tekivät lomakkeen keskimäärin noin viidessätoista minuutissa, joten päätelimme tästä, että 6.-luokkalaiset pystyvät tekemään sen yhden oppitunnin aikana.

Keräsimme aineiston neljältä eri luokalta eri kouluista Tampereelta ja Hattulasta. Aineistonkeruun yhteydessä tiedustelimme opettajilta, montako oppilasta luokalla on ja mitä matematiikan oppikirjaa he käyttävät. Yhdellä kouluista oli käytössä Kymppi-sarja ja muilla Milli. Tutkimuspyyntö lähetettiin yhteensä 96 oppilaalle, joista 81 osallistui tutkimukseen ja 78 antoi luvan käyttää vastauksiaan tutkimuksessa (n=78). Ennen tutkimuksen tekemistä tutkimukseen lupautuneet opettajat saivat tietoa tutkimuksesta ja tutkimuslupapyynnön huoltajille lähetettäväksi. Tämän lisäksi lähetimme opettajille ohjeet, kuinka toimia tutkimustilanteessa, saatekirjeen oppilaille ja linkin tehtävälomakkeeseen. Opettajat saivat itse määritellä ajankohdan, jolloin oppilaat täyttivät lomakkeen. Ohjeistimme opettajia tarkasti, sillä emme itse olleet paikalla tehtävälomaketta täytettäessä.

Tutkimuksen aikana oppilaat saivat käyttää paperia ja laskinta niin halutessaan. Emme halunneet mitata oppilaiden laskutaitoa, joten sallimme laskimet laskuvirheiden välttämiseksi. Oppilaille selvennettiin, että tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja se tapahtuu täysin anonymisti. Lisäksi korostettiin sitä, ettei tutkimuksen vastaukset vaikuta arviointiin, eikä tutkimus ole koe. Tehtävälomakkeen saivat täyttää vain ne oppilaat, joilla oli lupa huoltajilta.

### 4.3.2 Oppilaiden vastausten analyysi

(Laadullinen) sisällönanalyysi on tutkimusmenetelmä, jonka avulla voidaan saada aikaan uutta tietoa, uusia näkökulmia tai tuoda esiin piileviä tosiasioita (Anttila, 2014). Schreierin (2012) mukaan laadullinen sisällönanalyysi on tutkimuksessa hyvä valinta silloin, kun aineisto ei ole ”itsestään selvää”. Ideana analyysissä on tutkia sitä, millaisia teemoja ja aiheita aineistosta nousee esiin (Vuori, 2023). Anttila (2014) kuvailee, että sisällönanalyysissä aineistoa tyypillisesti luokitellaan sekä käsitellään numeerisesti. Luokittelussa (sekä koko sisällönanalyysin teossa) on edettävä systemaattisesti: analyysissä tulee huomioida myös hypoteesien ulkopuolelle jäävä aineisto (Anttila, 2014). Analyysi itsessään kuitenkin perustuu siihen, että koodauksen avulla aineistosta tunnistetaan ja nimetään siitä esiin nousevia asioita (Vuori, 2023). Aineistoa ei siis pyritä kuvaamaan joka kantilta, vaan tutkimuskysymykset määrittävät tulokulman, jota analyysissä käytetään (Schreier, 2012).

Laadullinen sisällönanalyysi jaotellaan usein kahtia: induktiiviseen kategorioiden kehittämiseen sekä deduktiiviseen kategorioiden soveltamiseen (Mayring, 2000). Eskola (2018) puolestaan jakaa laadullisen sisällönanalyysin kolmeen eri analyysimuotoon sen mukaan, miten teorian rooli näyttäytyy tutkimuksessa: aineisto- ja teorialähtöiseen sekä teoriaohjaavaan sisällönanalyysiin. Jako on samansuuntainen Hsiehin ja Shannonin (2005) luokittelun kanssa, jossa puhutaan perinteisestä (*conventional approach*), ohjatusta (*directed approach*) ja summatiivisesta (*summative approach*) lähestymistavasta.

Oppilaiden vastausten analyysimenetelmäksi valikoitui teoriaohjaava sisällönanalyysi (vrt. *directed approach*), jossa Hsiehin ja Shannonin (2005)

mukaan testataan valmista teoriaa tai laajennetaan sitä käsitteellisesti. Tuomi ja Sarajärvi (2018) kuvaavat teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä analyysimenetelmänä, jossa teoreettiset käsitteet tuodaan tutkimukseen valmiina tietona, jonka pohjalta aineistoa lähdetään analysoimaan. Olennaista tässä mallissa on se, ettei analyysin ole tarkoitus pohjautua teoriaan, mutta siitä on löydettävissä kytkentöjä siihen (Eskola, 2018). Aineistosta esiin nousevia havaintoja siis ikään kuin peilataan tutkimuksen teoriapohjaa vasten; teoriaa käytetään analyysin apukeinona, ei sen lähtökohtana (Tuomi & Sarajärvi, 2018).

Valitsimme laadullisen sisällönanalyysin muodoista juuri teoriaohjaavan sen vuoksi, että se antaa meille tutkijoina mahdollisuuden tehdä keräämästämme aineistosta myös sellaisia havaintoja, jotka eivät täysin pohjautu teoriapohjaamme (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan teorian ja empirian välillä vuorottelemisen ei olekaan aina kovin helppoa ja tutkija saattaa joutua tekemään luoviakin ratkaisuja, mutta parhaimmillaan teoriaohjaavalla sisällönanalyysillä voidaan kuitenkin saada aikaan hienoja tuloksia empiriaa ja teoriaa yhdistäen. Suhde-käsitteeseen liittyvän tutkimuksen vähäisyyden vuoksi täysin teorialähtöinen analyysi olisi voinut olla hankalaa, joten tämän vuoksi koemme, että teoriaohjaavan sisällönanalyysin hyödyntäminen on perusteltua oppilailta saadun aineiston analysoinnissa.

Lähdimme toteuttamaan analyysia vasta kaikki vastaukset saatuaamme oppilaiden ja koulujen anonymiteetin säilyttääksemme. Aloitimme oppilaiden vastausten analysoinnin siirtämällä oppilaiden vastaukset taulukko-ohjelmaan ja poistaen aineistosta niiden oppilaiden vastaukset, jotka eivät antaneet lupaa käyttää vastauksiaan tutkimuskäytössä. Tämän jälkeen lähdimme tekemään kysymyskohtaisesti taulukoita oppilaiden vastauksista. Taulukoinnin jälkeen

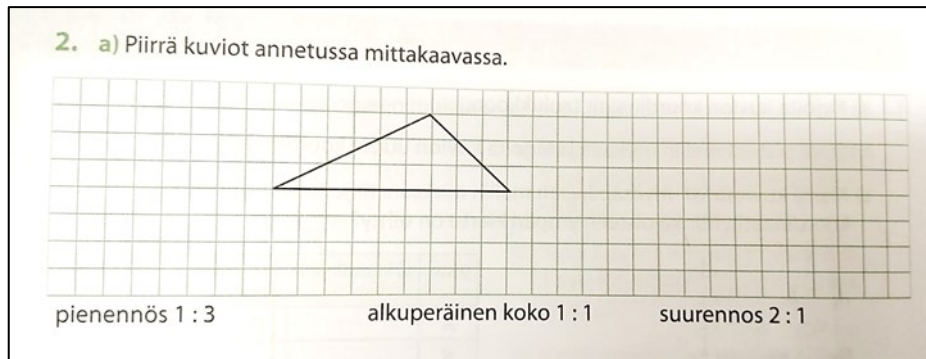
yhdistelimme kysymysparien vastauksia ja sen jälkeen kysymysten taustalla olevien teemojen mukaan oppilaiden vastauksia. Analysoidessamme saamiamme tuloksia hyödynsimme teoriaohjaavan sisällönanalyysin mukaan peilasimme niitä teoriapohjaamme vasten ja erityisesti pohdintaluvussa (Ks. luku 6.1) vertaamme analysoituja tuloksia aikaisempiin tutkimustuloksiin.

# 5 TUTKIMUSTULOKSET

## 5.1 Suhde-käsite 4–6. -luokkien oppimateriaaleissa

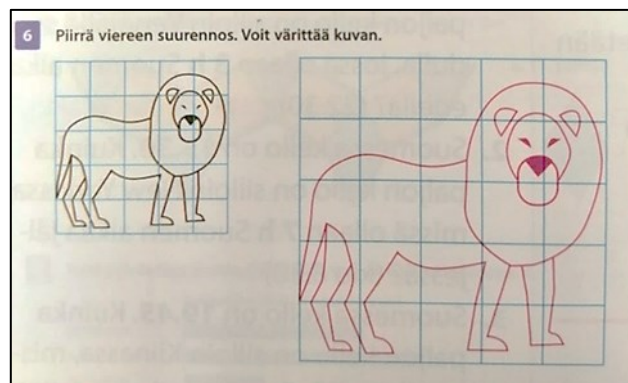
Teemoittelun avulla analysoimistamme oppikirjoista (Tuhattaituri ja NeeViiKuu) ja opettajan oppaista (Milli) päädyimme seuraaviin teemoihin: *suurennos*, *pienennös*, *yhdenmuotoisuus*, *mittakaava*, *kartan mittakaava*, *muu pituuksien suhde*, *suoraan verrannollisuuden sovellukset* sekä *määrien väliset suhteet* (Ks. tarkemmin luku 4.2.2). Kerromme jokaisesta teemasta ja siihen liittyvistä tehtävistä erikseen (Ks. myös Liite 2). Teemoista etenkin *suurennos*, *pienennös*, *yhdenmuotoisuus* ja *mittakaava* liittyivät usein toisiinsa tai esiintyivät yhdessä tehtävissä (Ks. Taulukko 4 ja Taulukko 6).

*Suurennos* ja *pienennös* -teemojen alle sijoitimme nimensä mukaisesti tehtävät, joissa oppilaan tuli suurentaa tai vastaavasti pienentää annettu kuva tai kuvio. Suurimmassa osassa tehtäviä kuviota piti suurentaa/pienentää annetussa mittakaavassa. Tyypillisesti kuviot olivat yksinkertaisia, kuten kolmioita, ja tehtävänannoissa oppilaita ohjattiin käyttämään mittakaavaa kuvion koon muuttamisessa (Ks. Kuvio 6) tai pohtimaan, missä mittakaavassa annetut kuviot ovat suhteessa toisiinsa. Tehtävänannot olivat yleensä seuraavanlaisia: ”Suurena kuva mittakaavassa 2:1” (Milli 6B Open opas, 2022, s. 80). Tehtävät sijoituivat oppikirjoissa jaksoihin, joissa käsiteltiin geometriaa ja/tai mittaamista.



**KUVIO 6.** Tyypillinen suurennos/pienennös tehtävä (NeeViiKuu 6B, 2017, s. 90)

Näiden geometrian/mittaamisen jaksoihin liittyvien suurennos- ja pienennöstehtävien lisäksi löysimme oppikirjoista toisenlaisia suurennoksiin ja pienennöksiin liittyviä tehtäviä. Näissä tehtävissä oli annettu jokin ruutupiirroskuva, joka oppilaan tuli toisintaa suurempaan tai pienempään ruudukkoon.



**KUVIO 7.** Ruutusuurennos (Milli 5B Open opas, 2021, s. 92)

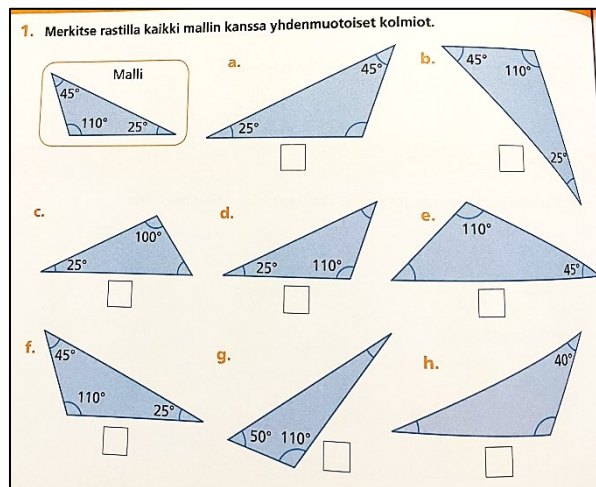
Tehtävissä ohjeena oli usein ”suurena kuva” tai ”pienennä kuva”. Käsitettä ”suurennos” käytettiin vain kolmessa lisätehtävässä: NeeViiKuu 5A:ssa, Tuhattaituri 5b:ssä ja Milli 5B Open oppaassa (Ks. Kuvio 7). Sen sijaan käsitteitä ”pienennös” tai ”mittakaava” ei käytetty. Nämä tehtävät olivat muissa paitsi

Tuhattaiturissa lisätehtäviä, jotka eivät suoranaisesti liittyneet kappaleen opeteltavaan asiaan. Toisin kuin mittakaavan kanssa suoritettavissa suurennoksissa/pienennöksissä, näissä tehtävissä ruutujen kokoa oli suurennettu/pienennetty. Mittakaavaan perustuvissa tehtävissä oppilaan tuli tehdä suurennos/pienennös ruudukkoon laskemalla ruutuja (vrt. kuvio 6 ja 7). Tällaisia ilman mittakaavaa suoritettavia tehtäviä löytyi Milli-sarjan kaikista tutkituista opettajan oppaista (4–6) sekä NeeViiKuu-sarjan 5A-kirjasta ja Tuhattaituri 5b-kirjasta (Ks. Taulukko 4).

*Yhdenmuotoisuus*-teema liittyi suurennoksiin ja pienennöksiin, mutta sitä käsiteltiin huomattavasti vähemmän. Yhdenmuotoisuutta käsiteltiin ainoastaan kahdessa oppikirjassa: Tuhattaituri 5b:ssä ja NeeViiKuu 5A:ssa. Aihe esiintyi Tuhattaituri 5b:ssä ja NeeViiKuu 5A:ssa geometrian jaksossa. Tuhattaituri 5b:ssä yhdenmuotoisuus yhdistettiin suurennokseen ja pienennökseen: ”Suurennoksessa ja pienennöksessä kuvion koko muuttuu, mutta muoto ei muutu.” (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 162). Tuhattaituri 5b:ssä tyypillisiä tehtäviä olivat sellaiset, joissa oppilaan tuli piirtää yhdenmuotoinen kuvio, joka oli suurempi/pienempi kuin mallikuva.

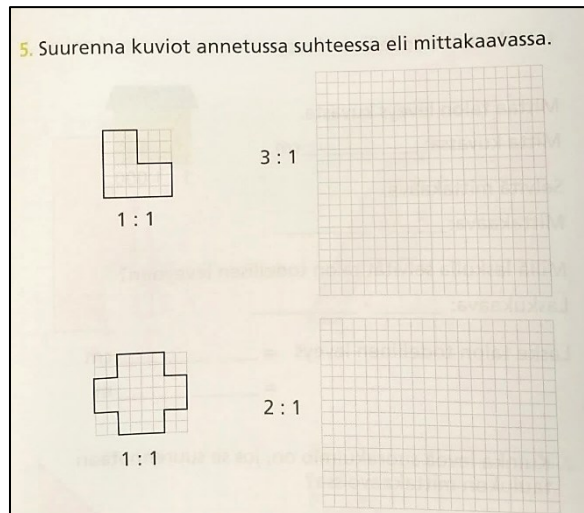
Huomionarvoista on se, että näiden tehtävien yhteydessä ei käytetty käsitteitä ”suurennos” ja ”pienennös”, vaan oppilasta ohjattiin piirtämään yhdenmuotoinen, mutta eri kokoinen kuvio: ”Piirrä yhdenmuotoinen kuvio, joka on pienempi kuin annettu kuvio.” (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 163). Käytännössä tehtävät olivat siis samanlaisia kuin edellä kuvatut mittakaavan mukaan toteutettavat suurennos- ja pienennöstehtävät, mutta Tuhattaiturissa asiaa lähestyttiin ensin yhdenmuotoisuuden käsitteen kautta. Yleisiä tehtäviä olivat myös sellaiset, joissa oppilaan piti valita monesta kuviosta ne kuviot, jotka olivat

mallikuvion kanssa yhdenmuotoisia tai yhdistää yhdenmuotoiset kolmiot toisiinsa (Ks. Kuvio 8).



**KUVIO 8.** Yhdenmuotoisten kolmioiden tunnistaminen (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 166)

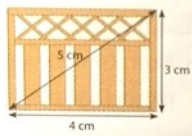
NeeViiKuu 5A:ssa puolestaan yhdenmuotoisuus liitettiin suurennoksen ja pienennöksen lisäksi suhde-käsitteeseen: ”Yhdenmuotoisten kuvioiden välinen kokosuhde voidaan ilmaista suhdeluvuilla.” (NeeViiKuu 5A, 2017, s. 183). Aiheeseen liittyvän kappaleen tehtävissä oppilasta ohjattiin piirtämään kuvioita annetussa suhteessa. Mielenkiintoista oli se, ettei kirjan kappaleen yhteydessä käytetty käsitettä ”mittakaava”, vaikka tehtävät olivat samantapaisia kuin aiemmin mainitut esimerkit suurennoksista ja pienennöksistä. Lisämateriaalivihossa mittakaavan käsitettä puolestaan käytettiin suhteen käsitteen yhteydessä (Ks. Kuvio 9). Tällainen ero käsitteiden käytössä voi johtua siitä, että lisämateriaali on voitu tarkoittaa ylöspäin eriyttäväksi, jolloin siinä on pyritty vahvistamaan käsitteiden välisiä yhteyksiä oppikirjaa voimakkaammin. Milli-sarjassa yhdenmuotoisuutta ei mainittu ollenkaan edes suurennoksen ja pienennöksen yhteydessä.



**KUVIO 9.** Mittakaavan ja suhteen käsitteet yhdistettynä toisiinsa (NeeViiKuu 5A lisämateriaalivihko, 2017, s. 43)

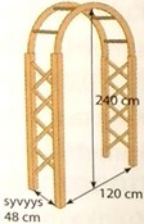
*Mittakaava*-teeman alle sijoitimme tehtävät, joissa oppilaan tuli hyödyntää mittakaavaa laskemisessa tai piirtämisen apuna. "Mittakaava kertoo, kuinka paljon alkuperäistä kuviota suurennetaan tai pienennetään." (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 170). Piirtäminen liittyi edellä kuvattuihin suurennoksiin ja pienennöksiin, joissa annettiin yksinkertainen mittakaava, jonka perusteella kuvion kokoa piti muuttaa. Laskutehtävissä mittakaava näyttäytyi tyypillisesti siten, että oppilaalle annettiin jokin kuva, esimerkiksi suurennos ötökästä, ja mittakaava, joiden avulla oppilaan piti laskea asian todellinen koko (Ks. Kuvio 10).

**2** Mallikuva portista suurennetaan eri mittakaavoissa. Laske suurennoksen mitat taulukkoon.



	a. mittakaava 3:1	b. mittakaava 5:1	c. mittakaava 20:1
leveys 4 cm	$3 \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$	$5 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$	$20 \cdot 4 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$
korkeus 3 cm	$3 \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$	$5 \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$	$20 \cdot 3 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$
lävistäjä 5 cm	$3 \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$	$5 \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$	$20 \cdot 5 \text{ cm} = 100 \text{ cm}$

**3** Puutarhakaaren mitat pienennetään eri mittakaavoissa. Laske pienennöksen mitat taulukkoon.



	a. mittakaava 1:2	b. mittakaava 1:4	c. mittakaava 1:6
leveys 120 cm	$\frac{120 \text{ cm}}{2} = 60 \text{ cm}$	$\frac{120 \text{ cm}}{4} = 30 \text{ cm}$	$\frac{120 \text{ cm}}{6} = 20 \text{ cm}$
korkeus 240 cm	$\frac{240 \text{ cm}}{2} = 120 \text{ cm}$	$\frac{240 \text{ cm}}{4} = 60 \text{ cm}$	$\frac{240 \text{ cm}}{6} = 40 \text{ cm}$
syvyys 48 cm	$\frac{48 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm}$	$\frac{48 \text{ cm}}{4} = 12 \text{ cm}$	$\frac{48 \text{ cm}}{6} = 8 \text{ cm}$

**KUVIO 10.** Tyypillinen mittakaavatehtävä (Milli 6B Open opas, 2022, s. 80)

Usein tehtäviin liittyi myös se, että oppilaan tuli mitata kuvassa oleva asia ja hyödyntää sitä yhdessä mittakaavan kanssa laskeakseen todellisen koon. Oppilasta ohjattiin kertomaan (pienennöksen yhteydessä) tai jakamaan (suurennoksen yhteydessä) kuvan mitattua kokoa annetulla mittakaavalla. Vain harvoissa tehtävissä pyydettiin selvittämään mittakaava annettujen tietojen perusteella – yleisempää oli se, että mittakaava oli annettu valmiina. Mittakaavaa pyydettiin selvittämään ainoastaan kahdessa tutkitussa oppimateriaalissa: Tuhattaituri 5 b:ssä ja NeeViiKuu 5A:n lisämateriaalivihossa (Ks. Kuvio 11).

1. Laske talon todellinen leveys.

Mittaa talon leveys kuvasta.

Mitta kuvassa: \_\_\_\_\_ cm.


Selvitä mittakaava.

Mittakaava: \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_

Millä laskulla selvität talon todellisen leveyden?

Laskukaava: \_\_\_\_\_ · \_\_\_\_\_

Laske talon todellinen leveys = \_\_\_\_\_ cm  
= \_\_\_\_\_ m



**KUVIO 11.** Tehtävä mittakaavan selvittämisestä (NeeViiKuu 5A lisämateriaalivihko, 2017, s. 44)

Mittakaavaan liittyvät tehtävät esiintyvät tarkastelemissamme oppimateriaaleissa geometrian ja/tai mittaamisen jaksoissa, joissa käsiteltiin yleensä suurennos, pienennös ja mahdollisesti yhdenmuotoisuus sekä tämän jälkeen mittakaava. Tuhattaituri 5b:ssä asiat käsiteltiin kappaleittain: ensin yhdenmuotoisuus (yhdistettynä suurennokseen ja pienennökseen) ja tämän jälkeen mittakaava. Myös NeeViiKuu 5A:ssa esiteltiin ensin suhde ja yhdenmuotoisuus ja tästä heti seuraavassa kappaleessa mittakaava. Sekä NeeViiKuu 6B:ssä että Milli 6B Open oppaassa pienennös, suurennos ja mittakaava puolestaan yhdistettiin samaan kappaleeseen. Tämä on kiinnostavaa siinä mielessä, että Milli-sarja oli ainoa, joka ei käsitellyt yhdenmuotoisuutta, mutta sen sijaan yhdisti suurennoksen, pienennöksen ja mittakaavan saman oppitunnin aiheeksi. NeeViiKuu 6B:ssä nämä luultavimmin yhdistettiin samaan kappaleeseen sen vuoksi, että yhdenmuotoisuus (sisältäen suurennoksen ja pienennöksen) ja mittakaava käsiteltiin myös viidennellä luokalla.

Mittakaava-teemasta erotimme omaksi osuudekseen vielä *kartan mittakaavan*, sillä tämän teeman alle liittyvät tehtävät erosivat muista

mittakaavatehtävistä. Kartan mittakaava -teeman tehtävissä oli kyse nimenomaan karttojen mittakaavoista. Yleisimmin kartan mittakaavasta puhuttiin geometria-/mittaamisjakson yhteydessä, jossa sitä käsiteltiin mittakaavaan tutustumisen jälkeen. Taulukossa 4 kuvaamme suurennoksen, pienennöksen, yhdenmuotoisuuden, mittakaavan ja kartan mittakaavan esiintymistä niissä materiaaleissa, joissa oli teemoihin liittyviä tehtäviä. Taulukosta voi havaita, että teemat toistuivat usein peräkkäin joitain yksittäisiä tehtäviä lukuun ottamatta.

**TAULUKKO 4.** Teemat suurennos, pienennös, yhdenmuotoisuus, mittakaava ja kartan mittakaava oppikirjoissa (x=esiintyy oppimateriaalissa)

Kirja	Suurennos	Pienennös	Yhdenmuotoisuus	Mittakaava	Kartan mittakaava
Milli 4A Open opas (2021)	x				x
Milli 4B Open opas (2021)	x	x			
Milli 5A Open opas (2021)	x	x			x
Milli 5B Open opas (2021)	x				
Milli 6A Open opas (2021)	x				
Milli 6B Open opas (2022)	x	x		x	x
Tuhattaituri 4a (2016)					x
Tuhattaituri 5a (2016)					x
Tuhattaituri 5b (2017)	x	x	x	x	x
Tuhattaituri 6a (2017)				x	
NeeViiKuu 5A (2017)	x	x	x	x	x
NeeViiKuu 6B (2017)	x	x		x	x

Kartan mittakaava -teeman alle sijoittamistamme tehtävistä suurin osa oli sellaisia, joissa oppilasta pyydettiin laskemaan todellinen matka, kun matka kartalla oli esimerkiksi 3 cm ja kartan mittakaava 1:20 000. Tehtäviin liittyi usein se, että oppilaan tuli mitata matka kartalta viivoittimella ja sitten hyödyntää kartan mittakaavaa todellisen matkan laskemiseksi: ”Mittaa etäisyydet kartalta ja laske

todellinen etäisyys.” (NeeViiKuu 6B, 2017, s. 126). Lähes poikkeuksetta tehtävissä tuli laskea todellista matkaa. Ainoastaan Tuhattaituri 5b:ssä, NeeViiKuu 5A:ssa ja NeeViiKuu 6B:ssä muutamassa osatehtävässä oppilaan tuli pohtia joko matkaa kartalla tai päätellä mittakaava annetun todellisen matkan ja kartan matkan perusteella (Ks. Kuvio 12).

7. Täydennä taulukko.

Välimatka kartalla	Todellinen välimatka	Mittakaava
10 cm		1:200
	60 m	1:2 000
3,5 cm		1:20 000
	12 km	1:200 000
5 cm	500 m	
8 cm	40 km	

**KUVIO 12.** Kartan mittakaavaan liittyvä tehtävä (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 185)

Tuhattaituri 5b -kirjassa kartan mittakaavaa kuvattiin seuraavalla tavalla: ”Kartan mittakaava kertoo, kuinka paljon todellista pituutta on pienennetty.” (Tuhattaituri 5b, 2017, s. 182). Milli 6B Open oppaan (2022) opetusvihjeessä neuvottiin kirjoittamaan ylös mittakaava 1:10 000 ja pohtimaan sen kautta, kuinka pitkä matka luonnossa on, kun kartalla matka on 1 cm. Tämän jälkeen tuli miettiä samaa pituuden ollessa kartalla 8,5 cm (Milli 6B Open opas, 2022). Tässä teemassa mielenkiintoista oli se, että teemaan liittyviä tehtäviä oli löydettävissä muualtakin kuin geometrian/mittaamisen jaksosta. Tehtävissä ei kuitenkaan välttämättä käytetty käsitettä ”kartan mittakaava”, vaikka juuri siitä tehtävissä olikin kyse (Ks. Kuvio 13). Tällaisia tehtäviä löytyi Milli 4A:n ja 5A:n sekä Tuhattaituri 4a:n ja 5a:n kirjoista.



**KUVIO 13.** Esimerkki kartan mittakaavaan liittyvästä tehtävästä, jossa ei käytetä käsitettä ”kartan mittakaava” (Milli 4A Open opas, 2021, s. 104)

*Muu pituuksien suhde* -teemaan sijoitimme tehtävät, joissa suhdetta käsiteltiin pituuksien kautta, mutta ilman mainintaa mittakaavasta. Näissä tehtävissä suhde tuli esille piilevästi, eikä käsitettä ”suhde” mainittu. Teemaan merkitsemämme tehtävät käsittelivät ympyrän sädettä, halkaisijaa ja kehää sekä näiden välisiä suhteita. Oppimateriaaleissa tuotiin esille sitä, miten ympyrän säde ja halkaisija liittyvät toisiinsa tai miten halkaisijan ja kehän pituudet näyttäytyvät suhteessa toisiinsa. Esimerkiksi Milli 5A Open oppaassa (2021, s. 87) ”Pohditaan, kuinka pitkä on ympyrän halkaisija. Huomataan, että halkaisijan pituus on kaksi kertaa säteen pituus.” Tuhattaituri 6b:ssä ympyrän halkaisijan ja säteen suhde kerrottiin lisätietona lisätehtävien joukossa: ”Kun ympyrän piiri jaetaan ympyrän halkaisijalla, saadaan aina sama tulos pii” (Tuhattaituri 6b, 2018, s. 168). Myös NeeViiKuu 6B:ssä samaa asiaa pohdittiin haastavammassa lisätehtävässä: ”Ympyrän kehä on aina noin 3,14 kertaa ympyrän halkaisijan pituus” (NeeViiKuu 6B, 2017, s. 73). Milli 6A Open oppaassa (Ks. Kuvio 14) puolestaan on esitelty projekti, jossa oppilaat voivat tutkia pyöreiden kappaleiden halkaisijoita ja kehien pituuksia mittaamalla. Opettajan oppaassa mainitaan näiden suhde: ”Projektissa tutkitaan mittaamalla ja laskemalla ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien

suhdetta.” (Milli 6A Open opas, 2021, s. 107). Suhde–käsitettä ei kuitenkaan käytetty tässä yhteydessä yhdenkään tutkimamme kirjasarjan oppilaan kirjassa, vaan ainoastaan Millin opettajan oppaassa.

**MITATKAA JA LASKEKAA**


- Mitatkaa erilaisia pyöreistä kappaleista (esimerkiksi roskakori, lautanen) ympyrän kehän pituus ja halkaisijan pituus.
- Käyttäkää laskinta: Jakakaa ympyrän kehän pituus halkaisijan pituudella. Pyöristäkää tulos kokonaisiksi. Mitä huomaatte?
- Mitatkaa vielä jonkin ympyrän halkaisija ja arvioikaa laskemalla ympyrän kehän pituus. Tarkistakaa mittaamalla.

Esine	Ympyrän kehän pituus	Ympyrän halkaisija	$\frac{\text{kehän pituus}}{\text{halkaisija}}$

**KUVIO 14.** Ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhteen tutkiminen (Milli 6A Open opas, 2021, s. 106)

Yhdeksi teemaksi valitsimme *suoraan verrannollisuuden sovellukset*. Ne liittyvät suhteen käsitteeseen, vaikka nopeasti mietittynä sitä ei välttämättä huomaakaan. Suoraan verrannollisuudella tarkoitetaan sitä, että suureet ovat suoraan verrannolliset, jos niiden suhde on vakio eli esimerkiksi toisen kaksinkertaistuessa toinenkin kaksinkertaistuu (Matematiikkalehti Solmu, 2023). Oppimateriaalissa verrantotehtävät liittyivät usein yksikköhinnan tai muun vastaavan laskemiseen (Ks. esim. NeeViiKuu 4B lisämateriaalivihko s. 11 ja Kuvio 15). Milli 4A Open oppaasta löytyi useita suoraan verrannollisuuteen liittyviä tehtäviä, osa oppilaan materiaalista ja osa opettajan oppaan pulmatehtävistä. Eräässä pulmassa suoraan verrannollisuutta lähestyttiin näin: ”Friida paistaa 3 vohvelia samassa ajassa, kun Jalo paistaa 2 vohvelia. Kuinka monta vohvelia Friida on paistanut, kun Jalo on paistanut 6 vohvelia?” (Milli 4A Open opas, 2021, s. 69).

Kaakaopuu kasvaa päiväntasaajan lähellä. Yksi kaakaopuun hedelmä painaa 200–1 000 g. Yhteen 250 gramman tummaan suklaalevyyn tarvitaan 5 hedelmää. Kaakaopavut kasvavat hedelmän sisällä riveittäin. Yhdessä rivissä on 35 papua.



3. Lue teksti ja täydennä taulukot.

hedelmien lukumäärä	tummaa suklaata	rivien lukumäärä	kaakaopapuja
5	250 g	1	35 kpl
10	_____	2	_____
15	_____	3	_____
20	_____	4	_____

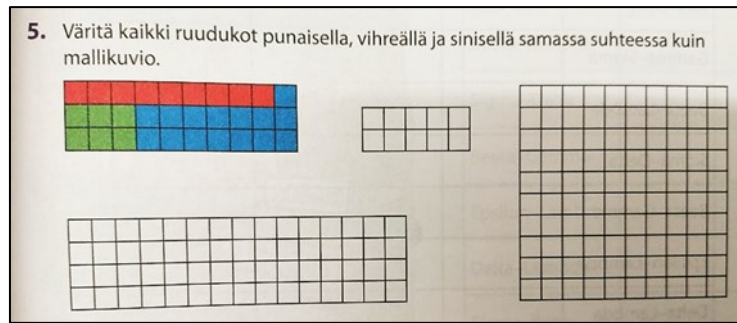
**KUVIO 15.** Esimerkki suoraan verrannollisuuden sovelluksesta (NeeViiKuu 4B, 2017, s. 137)

Suoraan verrannollisuuden sovellukset -teemaan liittyviä tehtäviä löytyi kaikista eniten, sillä yli puolet tutkimastamme materiaalista sisälsi niitä (Ks. Taulukko 5). Teeman tehtävät eivät liittyneet oppimateriaaleissa mihinkään tiettyyn jaksoon, vaan niitä löytyi ripoteltuna eri puolille oppimateriaaleja. Suoraan verrannollisuuden sovelluksia käsiteltiin eniten 4. luokan ja vähiten 5. luokan oppimateriaaleissa. Epäilemme runsaan verrantotehtävien määrän 4. luokalla johtuvan siitä, että silloin pyritään vielä vahvistamaan kerto- ja jakolaskun proseduureja. 6. luokan oppimateriaaleissa puolestaan halutaan mahdollisesti pohjustaa verrannon käsitettä, joka tulee esille yläasteella.

**TAULUKKO 5.** Suoraan verrannollisuuden sovelluksiin liittyvien tehtävien esiintyvyys oppimateriaaleissa (x=esiintyy oppimateriaalissa)

Kirja	Suoraan verrannollisuuden sovellus
Milli 4A Open opas (2021)	x
Milli 4B Open opas (2021)	x
Milli 5A Open opas (2021)	x
Milli 5B Open opas (2021)	
Milli 6A Open opas (2021)	x
Milli 6B Open opas (2022)	
Tuhattaituri 4a (2016)	
Tuhattaituri 4b (2016)	x
Tuhattaituri 5a (2016)	
Tuhattaituri 5b (2017)	
Tuhattaituri 6a (2017)	x
Tuhattaituri 6b (2018)	x
NeeViiKuu 4A (2014)	x
NeeViiKuu 4B (2017)	x
NeeViiKuu 5A (2017)	
NeeViiKuu 5B (2017)	
NeeViiKuu 6A (2016)	
NeeViiKuu 6B (2017)	x

Viimeiseksi teemaksi nimesimme *määrien väliset suhteet* ja sijoitimme sen alle kaikki loput suhteeseen liittyvät tehtävät, jotka eivät sopineet muihin teemoihin. Kaikki teeman tehtävät liittyivät jollakin tavalla määrien välisiin suhteisiin: mehun sekoittaminen ja ruudukon värittäminen tietyssä suhteessa. Tehtäviä löytyi kahdesta kirjasta: NeeViiKuu 5B:stä ja NeeViiKuu 6A:sta. NeeViiKuu 5B oli ainoa kirja, jossa käytettiin käsitettä ”suhde”. Tehtävässä oppilaan piti värittää ruudukkoa samassa suhteessa kuin mallikuviota (Ks. Kuvio 16).



**KUVIO 16.** Esimerkki määrien väliseen suhteeseen liittyvästä tehtävästä (NeeViiKuu 5B, 2017, s. 95)

NeeViiKuu 5B-kirjassa käsiteltiin myös mehun sekoittamista. Tällaista tehtävää on pidetty tyypillisenä suhde-käsitteeseen liittyvänä tehtävänä (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021), mutta tekemämme analyysin perusteella ne eivät ole oppimateriaalissa yleisiä. Tutkimastamme oppimateriaalista löytyi ainoastaan kaksi tämän tyyppistä tehtävää, joista molemmat olivat NeeViiKuu 5B-kirjassa. ”Mehutiivistettä on kolme desilitraa. Kun siitä sekoitetaan mehua, tarvitaan yksi osa mehua ja neljä osaa vettä. Kuinka monta litraa valmista mehua saadaan?” (NeeViiKuu 5B, 2017, s. 137).

## TAULUKKO 6. Teemat ydinsisältöineen kootusti

Teema	Ydinsisältö
Suurennos	Kuvion suurentaminen/pienentäminen mittakaavassa, ruutusuurennos/-pienennös
Pienennös	
Mittakaava	Kuvion suurentaminen/pienentäminen mittakaavassa, kuvasta todellisen koon laskeminen mittakaavan avulla
Yhdenmuotoisuus	Suuremman/pienemmän yhdenmuotoisen kuvion piirtäminen (suhdeluvun avulla), yhdenmuotoisten kuvioiden valitseminen
Kartan mittakaava	Todellisen matkan laskeminen kartan mittakaavan avulla, etäisyyden mittaaminen kartalla
Muu pituuksien suhde	Ympyrän säteen, halkaisijan ja kehän pituuksien suhde toisiinsa
Suoraan verrannollisuuden sovellukset	Yksikköhinnan tms. laskeminen
Määrien välinen suhde	Mehun sekoittaminen ja ruudukon värittäminen tietyssä suhteessa

Saamiemme tulosten perusteella huomasimme, että suhde-käsitteeseen liittyvät tehtävät voidaan teemojen lisäksi jakaa kahteen osaan sen perusteella, missä yhteydessä ne esiintyivät oppimateriaalissa. Suurin osa tehtävistä liittyi oppimateriaaleissa geometrian tai mittaamisen jaksoihin. Näissä tehtävissä suhde oli helpommin havaittavissa ja suhdetta ja sen lähikäsitteitä käytettiin systemaattisemmin tehtävien yhteydessä. Toinen osa tehtävistä oli sellaisia, joissa suhteen käsite oli enemmän piilossa. Esimerkiksi suoraan verrannollisuuden sovelluksissa voi olla vaikea huomata, että kilohinta ja -määrä ovat aina samassa suhteessa toisiinsa. Ruutusuurennoksissa puolestaan ei tule ajatelleeksi, että kuvaa suurennetaan samassa mittakaavassa, vaikka sitä ei mainitakaan. Näissä tehtävissä ei välttämättä puhuttu lainkaan suhteesta ja tehtäviä löytyi hajanaisesti ympäri oppimateriaaleja. Tässä oli selkeä ero siihen niihin suhteeseen liittyviin tehtäviin, jotka esiintyivät geometria- tai

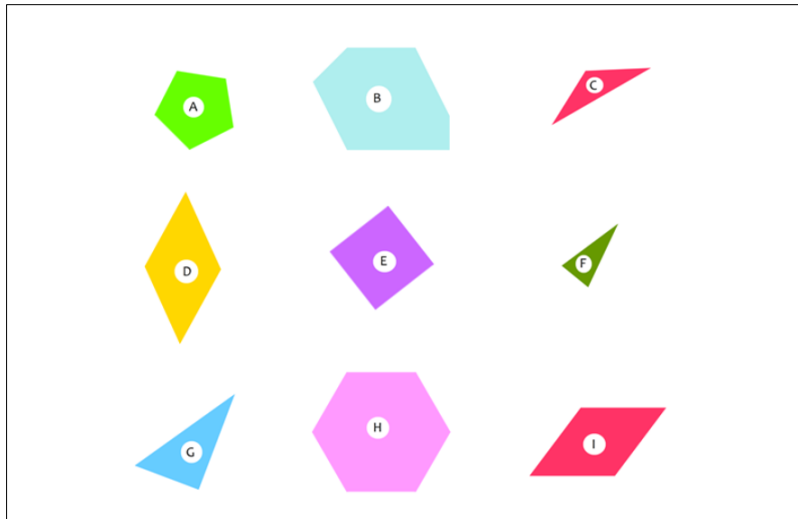
mittaamisjakson yhteydessä: nämä esiintyivät keskitetysti, peräkkäin ja liittyivät opeteltavaan aiheeseen. ”Piilosuhdetehtävät” puolestaan olivat hajallaan ympäri kirjaa eivätkä ne välttämättä liittyneet suoraan tai ollenkaan opeteltavaan aiheeseen.

## *5.2 Oppilaiden ymmärrys matemaattisesta käsitteestä suhde*

Ensimmäisessä tehtävälomakkeemme kysymyksessä kysyimme oppilailta lupaa vastausten käyttöön tutkimuksessa, joten varsinaisesti tehtävälomake alkoi kysymyksestä kaksi (Ks. Taulukko 3 ja Liite 1). Kerromme saamistamme tuloksista kysymyksittäin tehtävälomakkeesta tutusta järjestyksessä ja peilaamme myös oppilaiden ymmärrystä oppimateriaalitutkimuksesta saatuihin tuloksiin. Tulosten seuraamisen helpottamiseksi olemme tummentaneet jokaisen kysymyksen ja keränneet niiden alle niihin liittyvät keskeiset tulokset.

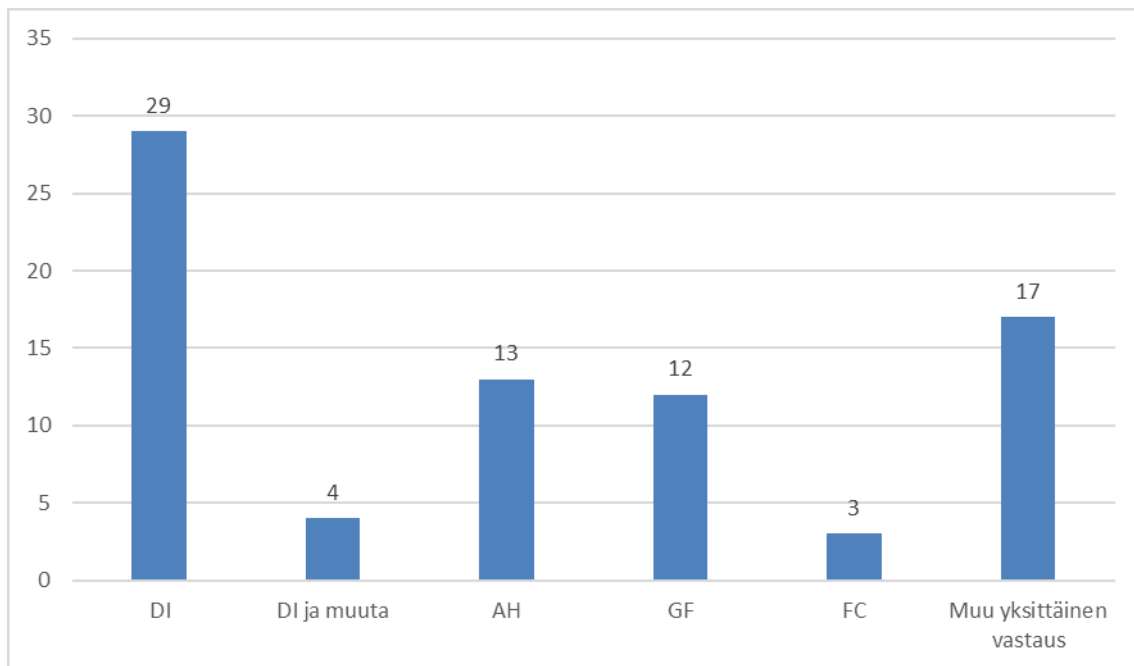
**Kysymys 2: ”Mitkä kaksi seuraavista kuvioista ovat keskenään yhdenmuotoisia? Kirjoita yhdenmuotoisten kuvioiden kirjaimet vastaukseksi. (Esimerkiksi XY)”**

Tässä kysymyksessä oppilaiden oli tarkoitus tunnistaa yhdeksän kuvion joukosta kaksi yhdenmuotoista kuviota, jotka olivat suunnikkaat D ja I (Ks. Kuvio 17).



**KUVIO 17.** Kysymyksen 2: "Mitkä kaksi seuraavista kuvioista ovat keskenään yhdenmuotoisia? Kirjoita yhdenmuotoisten kuvioiden kirjaimet vastaukseksi. (Esimerkiksi XY)" kuviot (Ks. Liite 1)

Kysymykseen saatiin täysin oikeita vastauksia (DI) 29 kappaletta. Vastauksia, joissa oli mainittu oikeat kuviot sekä lisäksi muita kuvioita, kuten vastaajan 41 vastaus "fg ja dl", saatiin 4 kappaletta. 13 vastaajaa oli valinnut yhdenmuotoisiksi kuviot A ja H. 12 vastaajaa vastasi kuviot G ja F ja 3 vastaajaa kuviot F ja C. Loput 17 vastausta olivat yksittäisiä vastauksia, kuten vastaajan 45 vastaus "c,g,f".



**KUVIO 18.** Kysymyksen 2: ”Yhdenmuotoiset kuviot” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Kirjainyhdistelmät kuvaavat oppilaiden valitsemaa kuviopareja. Esimerkiksi DI tarkoittaa, että oppilas vastannut kuviot D ja I. Graafien yläpuolella vastausten frekvenssit. (n=78)

Kysymyksen 2 vastausten frekvenssit muodostettiin siten, että jokainen vastaus kuului vain yhteen luokkaan. Esimerkiksi vastaajan 77 vastaus ”DI, AH, GF” sijoitettiin pelkästään luokkaan ”DI ja muuta” ja luokkaan ”DI” sijoitettiin vain ne vastaukset, joissa oppilas oli valinnut ainoastaan kyseiset kuviot.

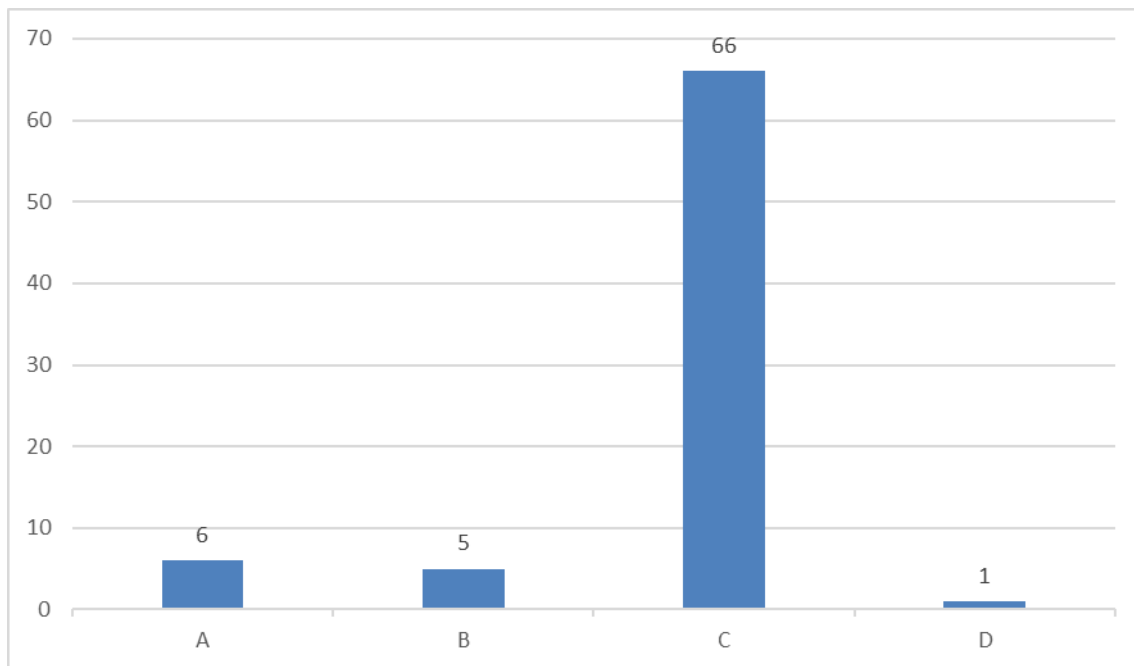
Suurin osa vastaajista (29+4) oli löytänyt kuvioiden joukosta yhdenmuotoiset kuviot D ja I. Toiseksi suurimman frekvenssin muodostivat muut yksittäiset vastaukset (n=17). Huomattavan moni (n=13) oli myös vastannut yhdenmuotoisiksi kuviot A ja H, jotka olivat viisi- ja kuusikulmio. Tämän valinnan taustalla on luultavimmin se, että kuviot näyttävät nopealla katsauksella erottuvan muiden kuvioiden joukosta, joten jos kuvioita ei ole tarkastellut sen tarkemmin, voi olla, että valinnan kohteeksi ovat päätyneet nämä kuviot. Laskemalla kyseisten kuvioiden kulmien määrät olisi selkeästi paljastunut, että ne eivät ole

yhdenmuotoisia. Kolmiot G ja F puolestaan olivat odotettavissa ollut virhe ja vastauksena lähes yhtä usealla oppilaalla (n=12) kuin viisi- ja kuusikulmio.

Jälkikäteen ajateltuna tehtävän kuvioiden taustalla olisi voinut olla ruudukko, jolloin kuvioiden sivujen mittoja olisi voinut helpommin verrata toisiinsa. Suunnikkaat D ja I olivat kuitenkin myös ilman ruudukkoa mahdollista tunnistaa yhdenmuotoisiksi toisten kuvioiden joukosta, etenkin kun tehtävänannossa pyydettiin valitsemaan kaksi yhdenmuotoista kuviota. Yhdenmuotoisuuteen liittyviä tehtäviä löytyi analysoimistamme oppimateriaaleista verrattain vähän: niitä oli vain oppikirjoissa Tuhattaituri 5b ja NeeViiKuu 5A. Oppikirjojen yhdenmuotoisuuteen liittyvien tehtävien vähyyks näkyy myös oppilaiden vastauksissa. Osa oppilaista osasi valita yhdenmuotoiset kuviot, mutta huomattavan suuri osa (42 %) vastaajista ei osannut valita oikeita kuvioita.

***Kysymys 3: ”Punainen kolmio on alkuperäinen kuva. Mikä sinisistä kolmioista on sen suurennos?”***

Kolmannessa kysymyksessä oppilaiden oli tarkoitus löytää neljän sinisen kolmion joukosta punaisen kolmion suurennos, joka oli mahdollista löytää silmämääräisesti, mutta myös varmistaa tämä laskemalla kolmion sivujen pituudet ruuduista. Oikeita vastauksia (kolmio C) saatiin 66 kappaletta. Vastaajista kuusi valitsi suurennokseksi kolmion A, viisi kolmion B ja yksi kolmion D.



**KUVIO 19.** Kysymyksen 3: "Kolmion suurennos" (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigrrafeina. Graafit A-D kuvaavat vastausvaihtoehtojen esiintymisen määrää vastauksissa. Esimerkiksi graafi A frekvenssillä 6 tarkoittaa, että 6 oppilasta on vastannut tehtävässä kolmion A (n=78)

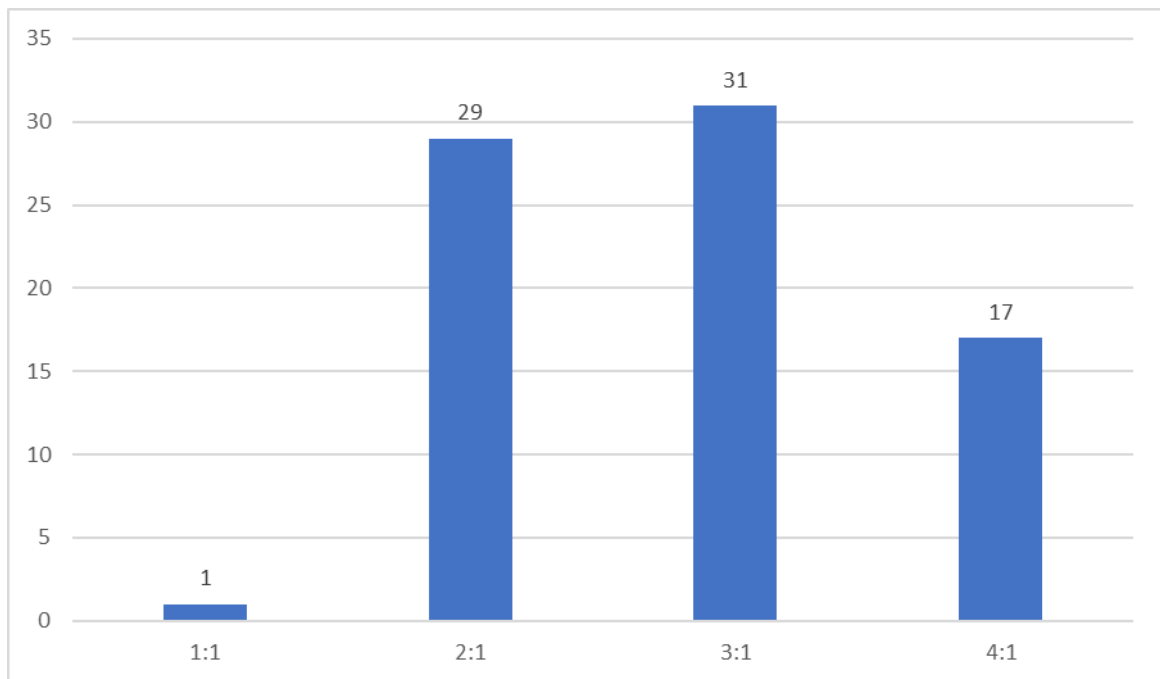
Suurin osa oppilaista, 85 % (66/78 vastaajaa), osasi valita oikean suurennoksen sinisten kolmioiden joukosta. Suurennoksiin ja pienennöksiin liittyviä tehtäviä löytyi lähes kaikista analysoimistamme oppimateriaaleista (Ks. Taulukko 4). Tämä tulos onkin linjassa oppilaiden vastausten kanssa: valtaosa oppilaista osasi valita oikean kolmion suurennokseksi. Tehtävässä kolmioiden taustalle oli jätetty ruudukko, jonka avulla oppilaat ovat pystyneet laskemaan ruutujen määriä varmistuakseen vastauksestaan.

Kysymyksessä 2 oppilaat, jotka olivat valinneet yhdenmuotoisiksi kuvioiksi D:n ja I:n olivat löytäneet oikean ratkaisun myös kysymykseen 3 yhtä vastaajaa lukuun ottamatta. Oppilaat, jotka hallitsivat yhdenmuotoiset kuviot, kykenivät siis myös löytämään kolmiolle oikean suurennoksen vaihtoehtojen joukosta. Tämä johtuu luultavimmin siitä, että yhdenmuotoisuus ja suurennos/pienennös -teemat

liittyvät vahvasti toisiinsa, myös oppimateriaaleissa. Huomionarvoista kuitenkin on, että toisinpäin samanlaista korrelaatiota vastauksissa ei näy: oikean suurennoksen (kolmio C) kysymyksessä 3 löytäneistä 52 % (34/66 vastaajaa) ei löytänyt yhdenmuotoisia kuvioita edeltävässä kysymyksessä. Tämä voisikin johtua siitä, että suurennoksen ja pienennöksen liittyviä tehtäviä löytyy huomattavasti enemmän tutkimistamme oppimateriaaleista. Oppilaat saanevat enemmän harjoitusta suurennos- ja pienennös -tehtävätyypeistä kuin esimerkiksi yhdenmuotoisuudesta (Ks. Taulukko 4). Suurennoksen ja pienennöksen liittyvät tehtävät olivat tutkimissamme oppimateriaaleissa usein tuottamistehtäviä, joten teettämämme tunnistustehtävä erosi näistä.

**Kysymys 4: ”Missä mittakaavassa sininen yhdenmuotoinen kolmio on suurennettu?”**

Edeltävään kysymykseen viittaavassa monivalintakysymyksessä 4 oppilaiden tuli valita vastaukseksi mittakaava, jossa edeltävän tehtävän sininen kolmio oli heidän mielestään suurennettu. Tehtävään saatiin vastauksia seuraavasti: vastaajista yksi valitsi vastaukseksi 1:1 ja 29 mittakaavan 2:1. 31 vastasi 3:1 ja 17 valitsi mittakaavan 4:1.



**KUVIO 20.** Kysymyksen 4: "Kolmion suurenoksen mittakaava" (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Graafit kuvaavat vastausvaihtoehtojen esiintyvyyttä vastauksissa. Esimerkiksi graafi 1:1 kuvastaa sitä, että 1 vastaaja on valinnut sen suurenoksen mittakaavaksi. (n=78)

Tehtävässämme suurenoksen mittakaava piti oppimateriaalien tehtävätyypeistä poiketen osata tunnistaa kuvioita vertaamalla, mikä näyttäytyi vastausten perusteella oppilaille haastavana. Suurin osa, 40 % (31/78 vastaajaa), oppilaista valitsi suurenoksen mittakaavaksi virheellisesti 3:1. Tämän valinnan taustalla voisi mahdollisesti olla virheellinen ajatus pinta-alojen suhteesta: "punainen kolmio mahtuu kolme kertaa kolmioon C". Mahdollisesti on myös voitu erehtyä esimerkiksi ajattelemaan väärin, että punaisen kolmion kannan ruutujen määrään (3) lisätään kolme ruutua lisää suurenoksessa, jolloin mittakaava olisi 3:1.

Toiseksi eniten, 37 % (29/78 vastaajaa), saimme oikeita vastauksia (mittakaava 2:1). Heistä 90 % (26/29 vastaajaa) oli löytänyt myös edeltävässä tehtävässä oikean suurenoksen. Muiden vastausten kohdalla samanlaista

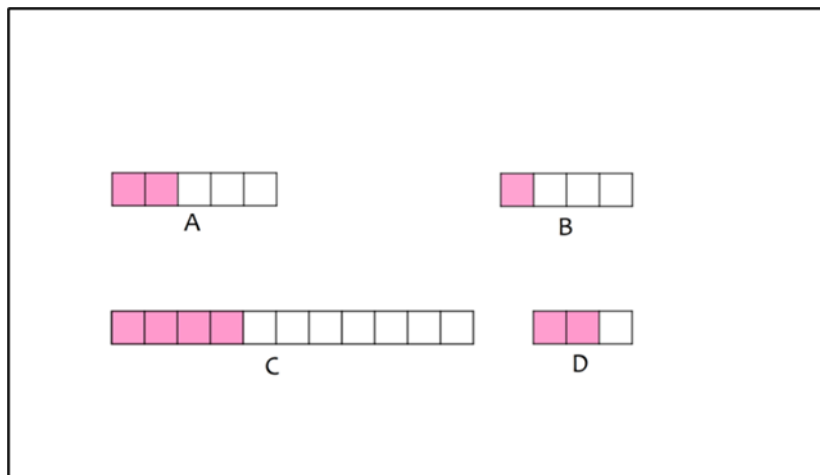
korrelaatiota mittakaavan kanssa ei näkynyt, mikä kertoo siitä, että vastaukset ovat olleet luultavimmin arvauksia. Mittakaavan ymmärtävät oppilaat hallitsevat suurennoksen ja pienennöksen käsitteet, mutta suurennoksen tunnistavat eivät välttämättä ymmärrä, mitä mittakaava tarkoittaa.

Kysymyksessä 3 oikean kolmion (kolmio C) löytäneiden vastaukset kysymykseen 4 eivät kuitenkaan olleet yhteneviä: vain 39 % kysymykseen 3 oikein vastanneista (26/66 vastaajaa) osasi kertoa, millä mittakaavalla kolmio oli suurennettu. Tälle havainnolle löytyy pohjaa oppikirjatutkimuksestamme: suurennoksesta ja pienennöksestä löytyi paljon tehtäviä 4.–6. -luokkien oppimateriaaleista, mutta mittakaavasta huomattavasti vähemmän: esimerkiksi Milli-kirjasarjassa mittakaavaan liittyviä tehtäviä löytyi ainoastaan 6B Open oppaasta (Ks. tarkemmin luku 5.1 ja Taulukko 4). Mittakaavaan liittyvät tehtävät keskittyivät useimmiten kartan mittakaavaan tai suurennokseen ja pienennökseen liittyviin tuottamistehtäviin, jolloin mittakaavan käsitteen soveltaminen muissa konteksteissa voi olla oppilaille haasteellista. Tehtävälomakkeessamme käyttämä tehtävätyyppi erosi oppimateriaalien tyypillisistä tehtävistä, joten tämä on saattanut lisätä haastavuutta oppilaiden näkökulmasta.

#### **Kysymys 5: ”Mikä seuraavista kuvioista kuvaa merkintää 2:3?”**

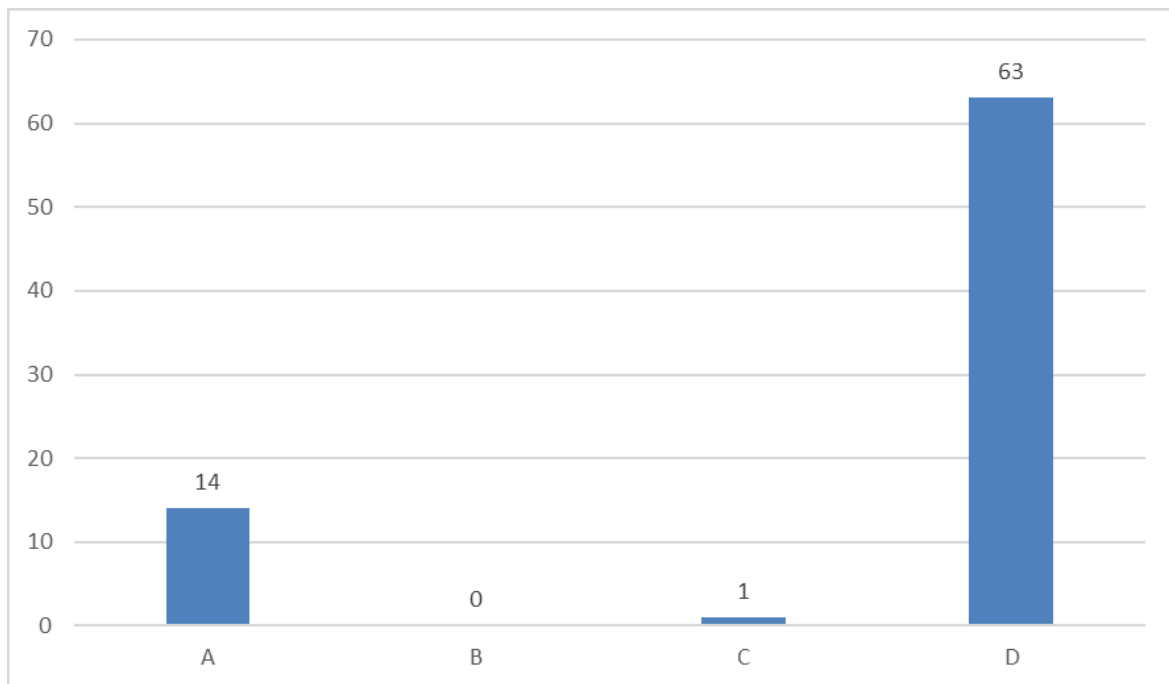
Kysymyksessä 5 oppilaiden tuli valita heidän mielestään merkintää 2:3 kuvastava kuvio neljän kuvion joukosta (Ks. Kuvio 21). Tehtävään hakemamme vastaus oli kuvio A (luetaan ”kahden suhde kolmeen”), joka kuvaa kahden vaaleanpunaisen osan suhdetta kolmeen valkoiseen osaan, mutta oppilaiden vastauksia tulkitessamme otimme huomioon oikeana vastauksena myös kuvion D (luetaan

”kaksi kolmasosaa”), jossa merkintä 2:3 näkyy kahden vaaleanpunaisen osan suhteena osien yhteismäärään.



**KUVIO 21.** Kysymyksen 5 kuviot (Ks. Liite 1)

Kuvion A valitsi 14 vastaajaa, kuvion C yksi vastaaja ja kuvion D 63 vastaajaa. Suurin osa vastaajista näki merkinnän 2:3 kuvaavan kuviota D, joka kuvastaa murtolukua  $2/3$ . He siis yhdistivät merkinnän jakolaskuun ja sitä myöten murtolukuun. Tämä selittyy sillä, että jakolaskua merkintätapana käytetään usein kaksoispistettä ja jakolasku voidaan merkitä jakoviivalla, jolloin merkinnän voidaan nähdä kuvastavan myös murtolukua.

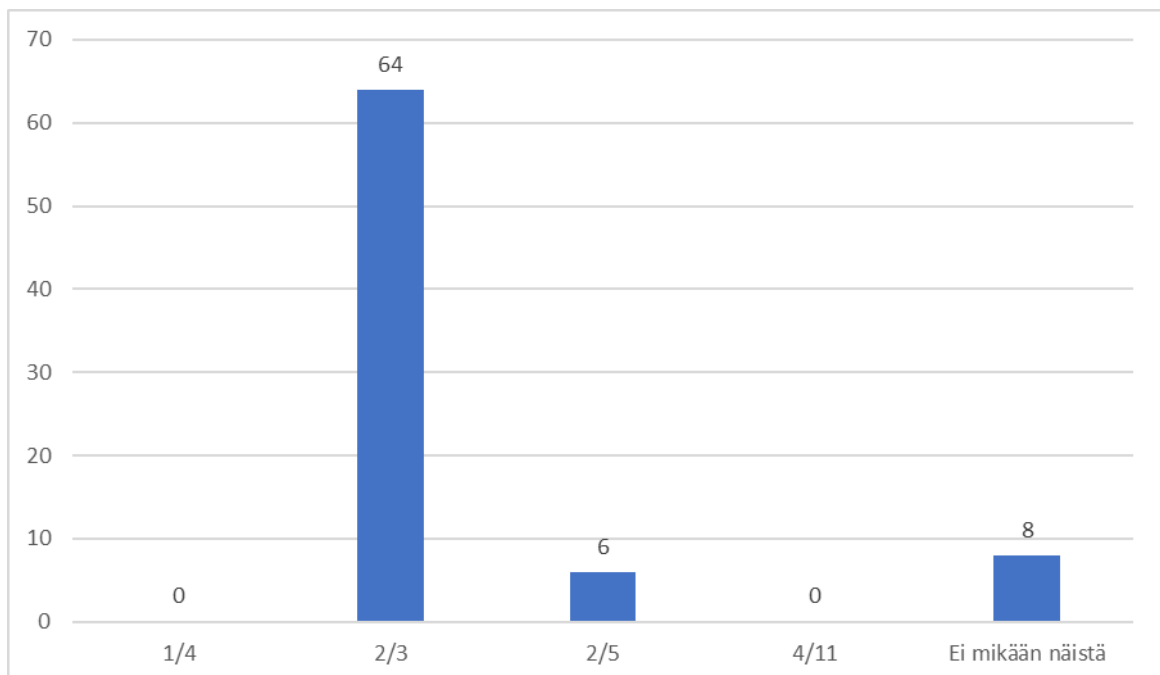


**KUVIO 22.** Kysymyksen 5: ”Merkintä 2:3 kuviona” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Graafit A-D kuvaavat vastausvaihtoehtojen esiintyvyyttä vastauksissa. Esimerkiksi graafi A kuvastaa sitä, että vastaajista 14 on vastannut vaihtoehdon A. (n=78)

Oppilaista suurin osa valitsi vastaukseksi kuvion D, joka kuvastaa kahden vaaleanpunaisen osan suhdetta osien kokonaismäärään. Verratessa vastauksia kysymykseen 6 nähdään, että kuvion D valinneista oppilaista 90 % (57/63 vastaajaa) oli osannut perustella valintansa kysymyksen 5 kohdalla oikealla murtoluvulla. Tämä kertoo siitä, että oppilaat ovat valinneet vaihtoehdon ajatuksella, sillä heidän valitsemansa kuvio on linjassa valitun murtoluvun kanssa. Loput kuvion D valinneet 6 vastaajaa olivat vastanneet kysymykseen ”ei mikään näistä”, jolloin heidän vastauksensa kysymykseen 5 on luultavimmin ollut arvaus.

**Kysymys 6: ”Mikä seuraavista murtoluvuista kuvaa edellisessä tehtävässä valitsemaasi ratkaisua? (Vaaleanpunaisen osuus valkoiseen)”**

Tässä kysymyksessä oppilaiden tuli valita neljästä murtoluvusta heidän vastaustaan kuvaava murtoluku. Vastaajista 64 valitsi murtoluvun  $\frac{2}{3}$  ja kuusi murtoluvun  $\frac{2}{5}$ . Yksikään vastaajista ei valinnut murtolukuja  $\frac{1}{4}$  tai  $\frac{4}{11}$ . Kahdeksan vastaajaa olivat sitä mieltä, ettei mikään annetuista murtoluvuista kuvannut heidän edellisessä tehtävässä valitsemaansa kuviota.



**KUVIO 23.** Kysymyksen 6: ”Mikä murtoluku vastaa valittua kuviota?” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Graafit kuvaavat vastausvaihtoehtojen esiintyvyyttä vastauksissa. Esimerkiksi graafi  $\frac{1}{4}$  arvolla 0 tarkoittaa, että 0 vastaajaa valitsi kyseisen murtoluvun. (n=78)

Kysymykseen 5 kuvion A ( $\frac{2}{5}$ ) valinneista vastaajista suurin osa perusteli kysymyksessä 6 vastaustaan murtoluvulla  $\frac{2}{3}$ , mutta vain 36 % valitsi murtoluvun  $\frac{2}{5}$ , joka oli oikea murtoluku kuvaamaan heidän valitsemaansa palkkikuviota. Kuvion D valinneista suurin osa, 90 %, oli osannut perustella vastauksensa murtoluvulla  $\frac{2}{3}$ , mikä kertoo luultavimmin siitä, että heidän vastauksensa ei ole

ollut arvaus, vaan he ovat ajatelleet merkinnän 2:3 kahden osan suhteena osien kokonaismäärään. Toisaalta merkintä 2:3 voi kuvastaa heille suhde-käsitteen sijaan myös jakolaskua "kaksi jaettuna kolmella", mikä puolestaan voitaisiin merkitä  $2/3$ .

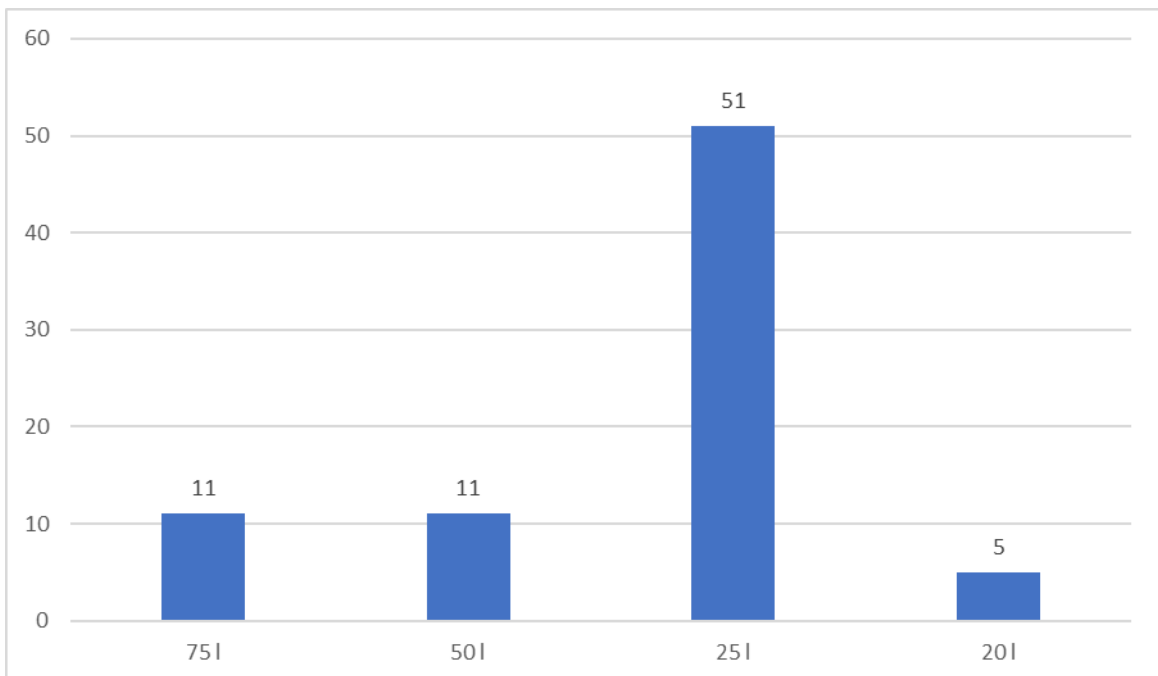
Kysymyksessä 5 vastaajista 18 % (14/78 vastaajaa) valitsi merkintää 2:3 esittäväksi kuvioksi kuvion A, joka kuvastaa merkintää "kahden punaisen osan suhteena kolmeen valkoiseen osaan". Heistä 36 % (5/14 vastaajaa) vastasi kysymyksessä 6 kuviota kuvaavaksi murtoluvuksi  $2/5$ . Oikean murtoluvun valinta kysymyksessä 6 kertoo siitä, että vastauksia voidaan pitää arvausta todennäköisemmin tietona. Tarkastellessa heidän vastauksiaan muiden kysymysten kohdalla voidaan kuitenkin huomata, että vastaukset ovat lähinnä arvauksia.

Suurin osa vastaajista, 81 % (63/78 vastaajaa), valitsi kysymyksessä 5 merkintää 2:3 vastaavaksi kuvioksi kuvion D, jonka voidaan nähdä kuvastavan merkintää "kahden punaisen osan suhteena kaikkiin osiin". Heistä 89 % (56/63 vastaajaa) osasi perustella vastauksensa kysymyksen 6 kohdalla valiten kuviota kuvaavaksi murtoluvuksi  $2/3$ . Myös tässä murtoluvun ja kuvion yhtenevyyttä voidaan pitää perusteena sille, että vastaaja on valinnut vaihtoehdon tiedon eikä arvauksen varassa. Tarkastellessa näiden 56 vastaajan vastauksia kysyttäessä, mitä suhde-käsite tarkoittaa, voidaan huomata, että merkintä 2:3 todella ymmärretään edellä mainitusti. Tästä hyvänä esimerkkinä on vastaajan 46 tulkinta:

"Suhde tarkoittaa sitä että jos on suhteessa 1:4 niin se 1 on kokonainen jokin ja se muuttuu neljään osaan koska se on suhteessa 4." (Vastaaja 46, kysymys 9)

**Kysymys 7: ”Maija valmistaa juhliin sata litraa mehua. Hän sekoittaa mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1:4. Kuinka paljon hän tarvitsee tiivistettä?”**

Kysymykseen 7 hakemamme oikea vastaus oli 20 litraa (vaihtoehto D), joka saadaan suhteella 1:4 sadasta litrasta, kun ”yksi osa on tiivistettä ja neljä osaa vettä”. Suurin osa vastaajista (n=51) vastasi vaihtoehdon C, 25 litraa. Vaihtoehdon A, 75 litraa valitsi 11 vastaajaa, samoin 11 vastasi vaihtoehdon B, 50 litraa. Viisi vastaajaa vastasi oikein vaihtoehdon D, 20 litraa.



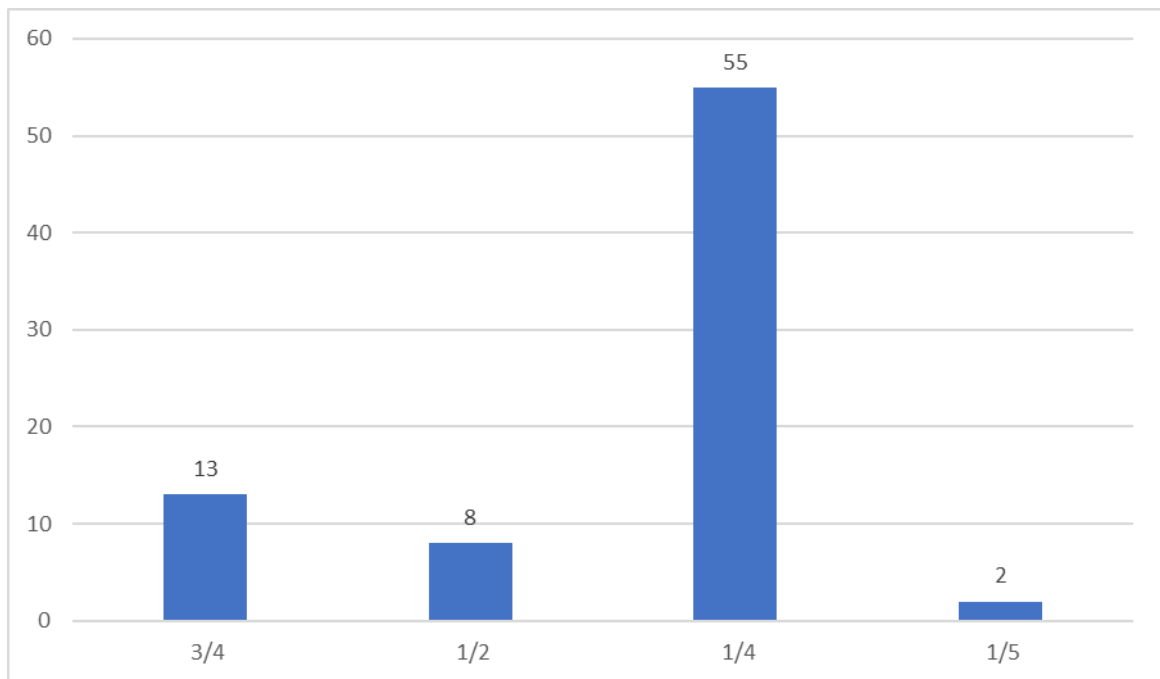
**KUVIO 24.** Kysymyksen 7: ”Mehutiivisteiden määrä litroina” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Graafit kuvaavat vastausvaihtoehtojen esiintyvyyttä vastauksissa. Esimerkiksi graafi 75 l arvolla 5 tarkoittaa, että viisi oppilasta valitsi vastausvaihtoehdoksi 75 litraa. (n=78)

Vastauksia tarkastellessa nähdään, että suurin osa vastasi mehutiivisteiden määräksi 25 litraa. Vastaajat ajattelevat siis tämänkin kysymyksen kohdalla suhteen 1:4 tarkoittavan, että ”yksi osa neljästä osasta on tiivistettä”. Samanlainen ajattelutapa suhde-käsitteestä näkyy kyseisen vaihtoehdon

valinneilla vastaajilla myös edeltävien tehtävien kohdalla, joten vastausta on luultavimmin pohdittu, eikä se ole ollut arvaus. Oikeita vastauksia saatiin huomattavan vähän: vain 6 % vastaajista (5/78 vastaajaa) vastasi mehutiivisteiden määräksi 20 litraa. 94 % vastaajista (73/78 vastaajaa) vastasi kysymykseen väärin. Tulos on linjassa oppimateriaalitutkimuksemme kanssa: mehunsekoitustehtäviä ei löydy oppimateriaaleista ja se luultavimmin näkyy myös oppilaiden osaamisen puutteena.

**Kysymys 8: ”Maija valmistaa juhliin sata litraa mehua. Hän sekoittaa mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1:4. Kuinka suuri osa Maijan valmistamasta mehusta on mehutiivistettä?”**

Vastauksia saatiin seuraavasti: vastaajista 13 valitsi vaihtoehdon 3/4 ja kahdeksan vaihtoehdon 1/2. Suurin osa, 55 vastaajaa, vastasi 1/4. Vaihtoehdon 1/5 valitsi vain kaksi vastaajaa.



**KUVIO 25.** Kysymyksen 8: "Mehutiivisten määrä murtolukuna" (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigrafeina. Graafit murtoluvuista kuvaavat vastausvaihtoehtojen esiintyvyyttä vastauksissa. Esimerkiksi graafi  $\frac{3}{4}$  arvolla 13 tarkoittaa, että 13 vastaajaa valitsi vaihtoehdon  $\frac{3}{4}$ . (n=78)

Vastaukset kysymykseen 8 ovat hyvin linjassa kysymyksen 7 vastausten kanssa. Oppilaat perustelevat vastauksiaan niitä vastaavilla murtoluvuilla, minkä voidaan nähdä kertovan siitä, että vastaukset ovat harkittuja ja niitä on mietitty arvaamisen sijaan. Viimeistään kysymyksen 8 vastausten myötä voimme pitää kysymyksestä 7 saamiamme tuloksia valideina. Verrattaessa oppilaiden vastauksia tämän kysymysparin kohdalla muihin suhde-käsitteen merkintään liitettyihin kysymyksiin, on selvää, että suurin osa oppilaista todella ymmärtää merkintätavan 1:4 väärin.

**Kysymys 9: ”Kerro omin sanoin, mitä tarkoittaa matemaattinen käsite *suhde*.”**

Suurimmassa osassa vastauksista (n=64) kysymykseen 9 kävi ilmi, ettei vastaaja tiedä, mitä käsite *suhde* tarkoittaa. Näistä 64 vastaajasta muodostui ryhmä A, joka jakautui kolmeen alaryhmään seuraavasti: ryhmän A1 (n=41) vastaajat ilmaisivat vastauksissaan suoraan sanallisesti, etteivät tiedä:

”emme ole käyneet sitä koulussa, niin en tiedä” (Vastaaja 67)

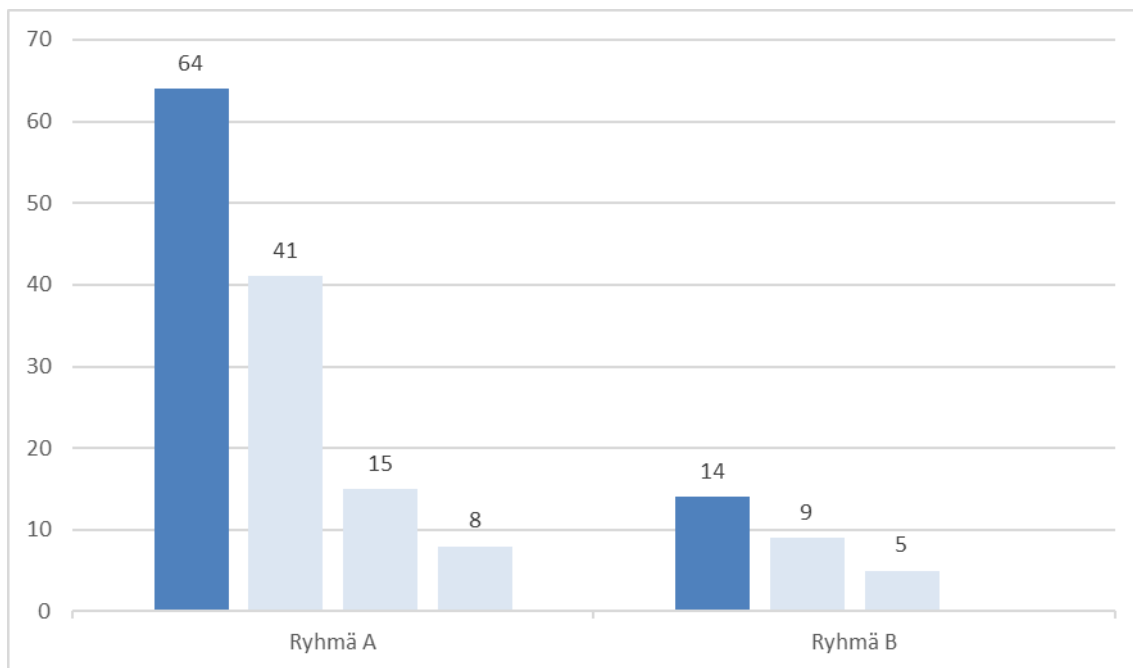
”ei mitään tietoa” (Vastaaja 69)

Ryhmän A2 (n=15) vastaajat vastasivat vain jotakin aiheeseen liittymätöntä, ilmeisesti siksi, koska kysymykseen oli pakko vastata jotakin, mutta heillä ei ollut tietoa käsitteen merkityksestä. Ryhmä A3 (n=8) puolestaan jätti vastaamatta kysymykseen kokonaan laittaen vastaukseksi esimerkiksi ”-” tai ”?”, mikä ilmentää hyvin myös heidän tietämättömyyttään aiheesta.

Ryhmä B (n=14) viittaa vastauksissaan suhteen liittyvän kahden asian tai luvun vertaamiseen tai suhteeseen näiden välillä. Ryhmän B vastaukset jakautuvat myös kahteen alaryhmään: B1-ryhmän (n=9) vastauksissa viitataan suhteen tarkoittavan kahden luvun tai suureen vertaamista keskenään. Ryhmän B2 (n=5) vastauksissa näkyy sama ajatus kuin B1-ryhmäläisillä, mutta vastausta on syvennetty esimerkillä.

”2 luvun tai suuren jakolaskua jonka tarkoitus on verrata kahta lukua tai suuretta” (Vastaaja 74, ryhmä B1)

”Suhde tarkoittaa sitä että jos on suhteessa 1:4 niin se 1 on kokonainen jokin ja se muuttuu neljään osaan koska se on suhteessa 4.” (Vastaaja 46, ryhmä B2)



**KUVIO 26.** Kysymyksen 9: ”Suhde-käsitteen kielentäminen” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Vastaukset luokiteltu ryhmiin A ja B. Tummansiniset graafit kuvastavat koko ryhmän vastauksia frekvenssinä ja vaaleansiniset palkit ryhmien A ja B alaryhmiin jaettujen vastausten frekvenssejä. Esimerkiksi tummansininen graafi arvolla 64 kuvastaa sitä, että yhteensä 64 vastaajaa on ilmaissut vastauksessaan, ettei tiedä, mitä suhde-käsite tarkoittaa (n=78)

Kysymyksen 9 vastauksista nähdään selkeästi, että suurimmalla osalla oppilaista ei ole tietoa siitä, mitä suhteen käsite tarkoittaa. Jopa 82 % (64/78 vastaajaa) ilmaisi vastauksessaan, ettei tiedä, mitä käsite tarkoittaa tai osaa selittää sitä. Kuudessa vastauksessa todettiin, ettei aihetta ole käsitelty koulussa.

” Öööö. Suhde on käsite joka tarkoittaa ööööö en osaa selittää. Ei olla koskaan käyty asiaa kunnolla” (Vastaaja 64)

”En tiedä ei olla käyty koulussa” (Vastaaja 70)

Tällaiset vastaukset johtuvat luultavimmin siitä, että suhde-käsitettä ei ole käsitelty systemaattisesti matematiikan opetuksessa, jolloin oppilaille ei ole välttämättä muodostunut selkeää kuvaa aiheesta ja heistä voi tuntua, ettei asiaa ole käyty kunnolla, saati ollenkaan.

Merkittävä tulos on, että vain 14 vastaajaa osaa yhdistää suhde-käsitteen jollakin tapaa kahden luvun vertaamiseen ja 5 heistä osaa esittää esimerkin vastauksessaan. Esimerkin sisältäneistä vastauksista neljässä avataan merkintätapaa 1:n ( $n$ =jokin luku). Jokaisessa vastauksessa, kuten seuraavassa Vastaajan 46 pohdinnassa, näkyy virheellinen ajattelutapa suhteen merkinnästä:

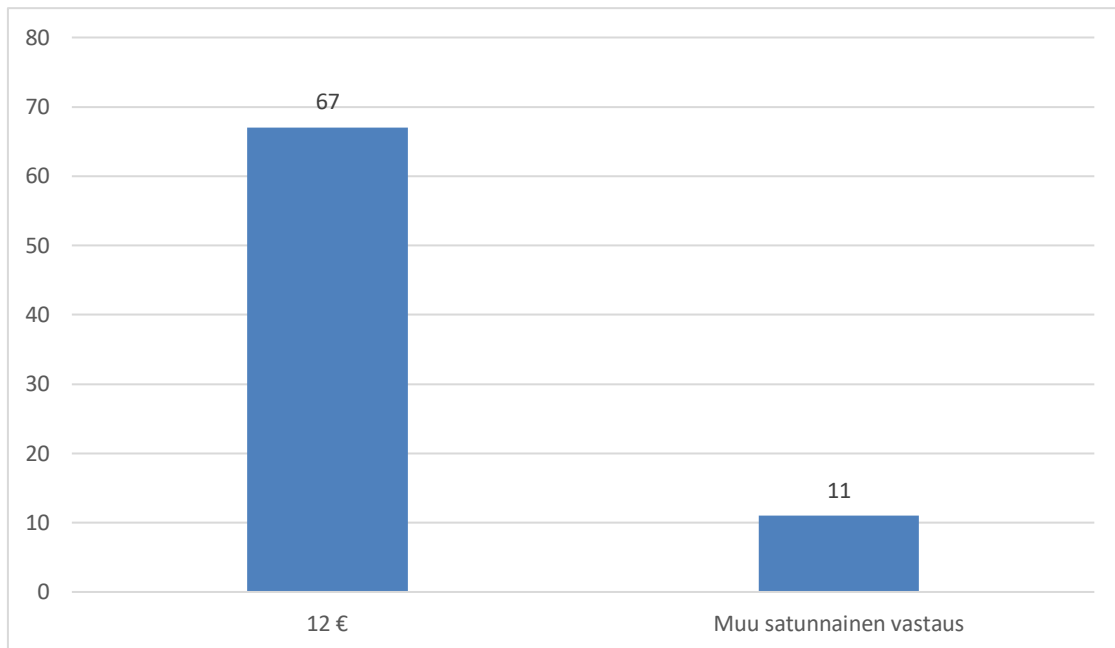
” Suhde tarkoittaa sitä että jos on suhteessa 1:4 niin se 1 on kokonainen jotain ja se muuttuu neljään osaan koska se on suhteessa 4.” (Vastaaja 46)

Suhde-käsitteen merkintätapa 1:4 nähdäänkin siis jakolaskuna tai murtolukuna, vaikka määritelmän mukaan 1:4 tarkoittaa, että osien kokonaismäärä on  $1+4=5$ .

**Kysymys 10: ”Kaupassa 2 kg karkkia maksaa 8 €. Otto ostaa 3 kg karkkia. Kuinka paljon karkit maksavat? Kirjoita vastaus.”**

Kysymyksessä 10 mitattiin suoraan verrannollisuuden hallintaa. Oppilaiden tuli osata ratkaista suoraan verrannollisuutta hyödyntäen karkkien hinta. Kysymykseen hakemamme oikea vastaus oli 12 €.

Saaduista vastauksista suurin osa, 67 vastausta, oli oikeita. Loput 11 vastaajaa olivat saaneet yksittäisiä ratkaisuja 8,5 euron ja 28 euron välillä. Väärien vastausten kohdalla ei siis näkynyt selkeää virheellisen ajattelun mallia, jolla oppilaat olisivat ratkaisseet tehtävää, vaan kyse on ollut luultavimmin laskuvirheistä.



**KUVIO 27.** Kysymyksen 10: ”Karkkien hinta” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. (n=78)

Kysymys 10 oli kysymyslomakkeemme ehkäpä oppikirjamaisin tehtävä, mikä näkyi odotetusti myös runsaana oikeiden vastausten määränä. Symbolikieltä hyödyntävä laskutehtävä osattiin hyvin: 86 % (67/78 vastaajaa) oppilaista ratkaisi tehtävän oikein.

**Kysymys 11: ”Miten päädyit edellisen tehtävän ratkaisuun? Kerro sanallisesti.”**

Tässä kysymyksessä oppilaan tuli selittää oma ratkaisutapansa edeltävään tehtävään. Suurin osa tehtävän 10 oikein ratkaisseista (n=60) kertoi selvittäneensä tehtävän laskemalla ensin hinnan yhdelle kilogrammalle ja sen avulla päässyt lopulliseen tulokseen. Vastaajat 64 ja 3 avaavat ratkaisujaan seuraavasti:

“Koska jos 2kg karkkia on 8 euroa niin yksi kilo karkkia on 4 euroa joten kun tähän 2kg eli 8 euroon lisätään vielä yksi kg eli 4 euroa niin siitä tulee 12” (Vastaja 64)

“Jos kaksi kiloa karkkia maksaa 8€ silloin 1 kilo maksaa 4€.” (Vastaja 3)

Loput edellisen tehtävän oikein saaneista (n=7) kertoivat päässeensä vastaukseen ”laskemalla”.

Ne 11 vastaajaa, jotka eivät olleet saaneet tulokseksi 12 € tehtävästä 10, jakautuivat kahteen ryhmään. Ensimmäisen ryhmän (n=6) vastaukset sisälsivät jonkin virheellisen laskutoimituksen. Toisen ryhmän (n=5) vastauksen olivat joko arvauksia tai ”en tiedä” -vastauksia.

### **Kysymys 12: ”Kerro omin sanoin, mitä mittakaava tarkoittaa.”**

Kysymyksessä 12 oppilaan tuli kielentää ajatteluaan mittakaavan käsitteestä. Vastajista suurin osa (n=37) ilmaisi tietämättömyyttään käsitteestä vastaten ”en tiedä” tai ”en muista”.

” en muista!!!!!!!!!!!!” (Vastaja 20)

”Olemme puhuneet siitä koulussa, mutta en oikein osaa selittää enkä tarkalleen muista.” (Vastaja 41)

” En tiedä ei olla käyty tätäkään koskaan kunnolla” (Vastaja 64)

” Ei muista tätä oikein.” (Vastaja 71)

Tähän ryhmään luokittelimme myös vastaukset, joissa oppilas oli vastannut pelkän viivan ”-”, pisteitä ”..” tai kysymysmerkin ”?”.

9 vastaajaa puolestaan vastasi mittakaavan liittyvän jollakin tavalla karttaan. Ryhmän vastauksissa oli suurta vaihtelua, mutta verrattuna muihin vastauksiin, karttaan liitetyissä vastauksissa päästiin lähimmäksi mittakaavan määritelmää.

” Kartan mitta” (Vastaja 14)

” Mittakaava kuvaa matkaa kartassa” (Vastaja 28)

” Tarkoittaa kuinka paljon 1cm kartassa on luonnossa” (Vastaja 30)

”Sitä että esim kartalla 1cm kuvaa 1 metriä” (Vastaja 72)

20 vastaajaa mainitsi vastauksessaan käsitteen liittyvän jollakin tavalla mittaamiseen.

” Joku kaava jolla mitataan” (Vastaja 19)

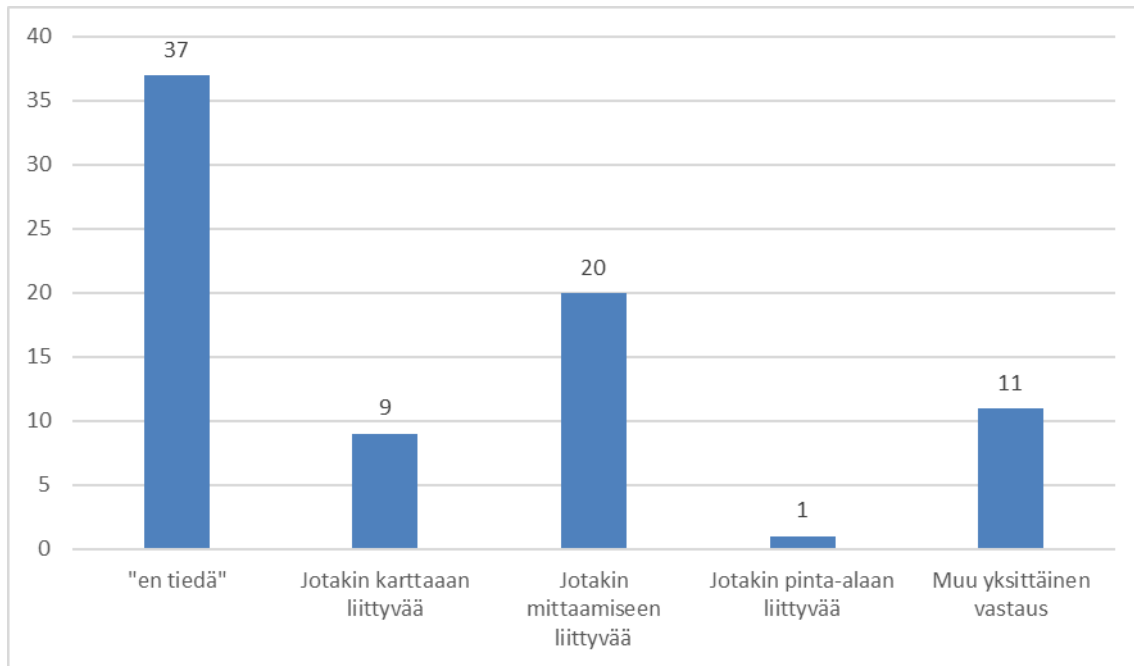
” Mittakaava on mitta jostain kuviosta.” (Vastaja 35)

” Kaava jolla mitataan.” (Vastaja 76)

1 vastaaja (Vastaja 2) vastasi mittakaavan tarkoittavan ”*pinta-alan laskemista*”.

Loput 11 vastausta olivat yksittäisiä vastauksia, kuten ”*aluetta*” (Vastaja 43) ja

”*vertausta*” (Vastaja 56).



**KUVIO 28.** Kysymyksen 12: "Mittakaava-käsitteen kielentäminen" (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina. Graafit kuvastavat vastausten esiintymistä. Esimerkiksi graafi "en tiedä" kuvastaa sitä, että 37 oppilasta ilmaissut vastauksessaan jollakin tavalla, ettei tiedä, mitä mittakaava tarkoittaa. (n=78)

Oppilaiden vastauksista on nähtävissä, että suurin osa oppilaista ei osaa kielentää mittakaavan käsitettä tai ei tiedä, mitä se tarkoittaa. Vastaajan 71 vastaus *"En muista tätä oikein."* kuulostaa siltä, että vastaajalla olisi voinut olla ajatusta mittakaavasta, mutta koska hän ei "muista määritelmää oikein", hän jättää vastaamatta. Tämä voi johtua siitä, että oppilaat ovat tottuneet matematiikan tehtävissä siihen, että on olemassa yksi oikea vastaus ja kun määritelmää ei osata tai muisteta, jätetään suosiolla vastaamatta.

Merkittävä tulos on myös se, että vain 9 oppilasta mainitsee mittakaavan liittyvän karttaan, mutta yksikään ei mainitse vastauksessaan suurennoksia tai pienennöksiä. Oppimateriaaleissa näitä käsitteitä esitetään kuitenkin usein mittakaavan yhteydessä ja kartan mittakaavaan liittyviä tehtäviä löytyi lähes jokaisesta tutkimastamme oppimateriaalista (Kts. Tarkemmin Taulukko 4).

### **Kysymys 13: ”Oppilas piirtää karttaa koulumatkastaan...” (Ks. Liite 1)**

Tässä kysymyksessä vastaajien tuli kertoa, oliko tehtävänannon oppilas ratkaissut mittakaavaan liittyvän tehtävän oikein ja korjata, mikäli ratkaisussa oli jotakin korjattavaa: tavoitteena oli löytää virhe kartan mittakaavan käytössä. Tehtävässämme oppilaan laskutoimituksesta virheellisen tekee se, että hän muuntanut 10 000 senttimetriä yhdeksi kilometriksi. Todellisuudessa 10 000 senttimetriä vastaa sataa metriä, eikä tuhatta, kuten oppilas oli laskenut.

Hieman alle puolet vastaajista (n=33) oli sitä mieltä, että tehtävä on ratkaistu oikein. Heistä pieni osa (n=5) ilmaisi suoraan tai epäsuorasti vastauksensa olevan veikkaus.

”joo koska en osais paremmin” (Vastaaja 22)

”Minä sanon oikein, sen takia koska minun aivot ei jaksaa matematiikkaa.”  
(Vastaaja 71)

Kolmasosa vastaajista (n=26) puolestaan ilmaisi vastauksessaan jollakin tavalla, ettei tiedä, onko tehtävä ratkaistu oikein, tai mitä siitä tulisi korjata, kuten vastaajat 70 ja 74:

”En ymmärrä tehtävää sillä meille ei ole opetettu sitä” (Vastaaja 70)

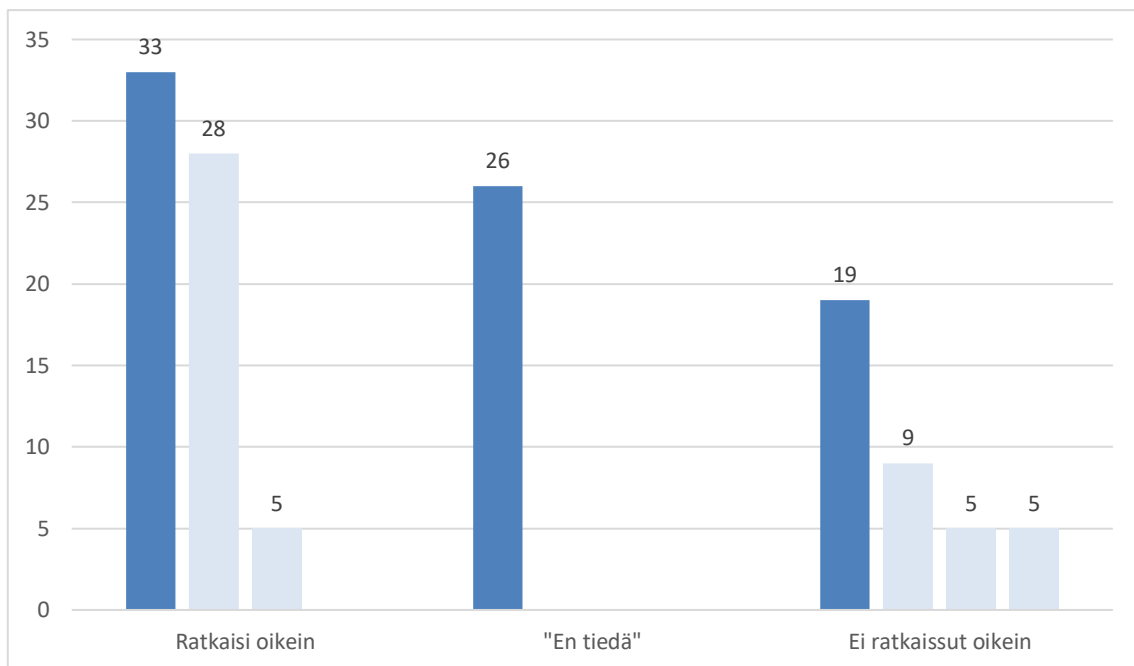
” Hä en tajua...” (Vastaaja 74)

19 vastaajaa kertoi, että oppilas ei ratkaissut tehtävää oikein. Heistä muodostui kolme ryhmää. Ryhmä A:n (n=9) vastaajat löysivät selkeästi jonkin virheen tehtävänannon laskutoimituksesta ja pyrkivät korjaamaan tämän vastauksessaan. Tässä vastaajien 30 ja 38 pohdintaa:

”ei ratkaissut oikein, koska  $10000\text{cm} = 100\text{m}$  eikä  $1\text{km}$ ” (Vastaaja 30)

” Että toi 10 00 cm sen vaihtais 1000 niin siitä tulis sitten 1km ja sama tossa 20 00 cm että siinä olis 2000 cm ja siitä sitten tulis 2km” (Vastaaja 38)

Ryhmä B:n (n=5) vastaajat kertoivat vastauksessaan jonkin luvun, joka olisi pitänyt heidän mielestään korjata laskutoimituksessa, mutta eivät perustelleet vastaustaan. Ryhmä C:n (n=5) vastaajat vastasivat vain ”ei” perustelematta vastaustaan, jolloin vastaus on voinut luultavimmin olla arvaus.



**KUVIO 29.** Kysymyksen 13: ”Ratkaisiko oppilas tehtävän oikein?” (Ks. Liite 1) vastaukset frekvenssigraafeina (n=78). Tummansiniset graafit kuvastavat koko ryhmän vastauksia frekvenssinä ja vaaleansiniset palkit ryhmien alaryhmiin jaettujen vastausten frekvenssejä.

Suurin osa oppilaista, 76 %, (59 vastaajaa) vastasi tehtävään väärin (33 vastaajaa) tai ei edes yrittänyt ratkaista tehtävää (26 vastaajaa). Tehtävän kysymyksenasettelu poikkesi oppikirjojen tehtävistä, mikä varmasti oli osasyynä oikeiden ratkaisujen vähäiseen määrään. Verratessa oppilaiden vastauksia muihin mittakaavaan liittyviin tehtäviin, voidaan nähdä, että mittakaavan käsite

on lähes kaikille vieras, vaikka siihen liittyviä tehtäviä osattaisiinkin ratkaista. Esimerkiksi kysymysten 12 ja 13 vastauksia tarkastellessa voidaan huomata, että vastaajat, jotka tehtävässä 13 löysivät virheen oppilaan ratkaisusta ja osasivat jopa korjata tätä, eivät olleet osanneet selittää mittakaavan käsitettä millään tavalla tehtävässä 12 lukuun ottamatta vastaajaa 30, joka vastasi seuraavasti:

”tarkoittaa kuinka paljon 1cm kartassa on luonnossa” (Vastaaja 30, tehtävä 11)

”ei ratkaissut oikein, koska  $10000\text{cm} = 100\text{m}$  eikä  $1\text{km}$ ” (Vastaaja 30, tehtävä 12)

Tämä voi johtua siitä, että matematiikan oppimateriaalit painottavat matematiikan symbolikielen käyttöä ja laskutehtävien ratkaisua (proseduraalinen sujuvuus), mutta eivät käsitteiden kielentämistä luonnollisella kielellä (Kts. Luku 2.1.3). Vaikka oppilaat osaavat ratkaista mittakaavaan liittyviä tehtäviä, he eivät ymmärrä, mitä mittakaava tarkoittaa, koska sitä ei ole heille suoranaisesti opetettu.

# 6 POHDINTA

## 6.1 Johtopäätökset

Seuraavaksi teemme johtopäätöksiä saamiemme tutkimustulosten perusteella. Tarkastelemme oppimateriaalitutkimuksen tuloksia ja oppilaiden ymmärrystä suhde-käsitteestä suhteessa toisiinsa sekä peilaamme tuloksiamme teoriaan ja aiempiin tutkimuksiin. Kerromme tärkeimmistä aineistosta esiin nousseista asioista ja pohdimme niitä.

Merkittävin havaintomme koskee 6.-luokkalaisten suoriutumista suhde-käsitteeseen liittyvistä tehtävistä. Aineistosta pystyy selkeästi havaitsemaan, että ”oppikirjamaiset” tehtävät, kuten 2, 3 ja 10 (Ks. Liite 1), osattiin muita tehtäviä paremmin. Näissä tehtävissä kysymyksenasettelu oli samanlainen kuin oppikirjoissa – oppilaat luultavasti pitivät tehtävänantoja matematiikan kirjasta tuttuina ja olivat harjaantuneet tekemään samankaltaisia tehtäviä. Tämä kieli siitä, että oppilaat ovat tottuneet matematiikassa varsin oppikirjalähtöiseen opiskeluun. Monet aiemmat tutkimukset (Ks. esim. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019; Tossavainen, 2015) ovat osoittaneet, että Suomessa matematiikan opetus on hyvin oppikirjasidonnaista ja oppikirjoja käytetään matematiikan tunneilla ahkerasti. Tutkimuksemme tulokset ovatkin siis tältä osin linjassa aikaisempien tutkimusten kanssa.

Oppikirjojen tehtäviin verrattuna ei-tyypilliset tehtävät osoittautuivat haastavammiksi 6.-luokkalaisille. Esimerkiksi tehtävässä 4 (Ks. Liite 1)

kysymyksenasettelu oli käännetty oppikirjoista poikkeavaksi; oppimateriaaliaineistomme mukaan tyypillisessä mittakaavatehtävässä tulee piirtää tai laskea jotakin annetun mittakaavan perusteella (Ks. luku 5.1). Tehtävälomakkeella vastaajia kuitenkin pyydettiin valitsemaan oikea mittakaava, jolla suurennos oli tehty. Saatujen vastausten perusteella suurin osa ei löytänyt suurennoksen oikeaa mittakaavaa, vaikka oikea suurennos osattiin valita edellisessä tehtävässä. Havaintomme viittaa siihen, että oppiminen perustuu oppikirjan tehtävien tekemiseen. Oppilaat ovat oppineet käyttämään tiettyjä ratkaisustrategioita tietyntyyppisissä tehtävissä, mutta kysymyksenasettelua muutettaessa opittua ei osatakaan enää soveltaa. Hihnala (2005) onkin pitänyt tätä kehityssuuntaa perusopetuksen matematiikassa vaarallisena: tehtävien runsas toisto samassa kontekstissa ei takaa kykyä soveltaa tietoa. Proseduraalinen sujuvuus ei yksin riitä (matemaattisen) ymmärryksen kehittymiseen (Ikäheimo, 2021; Kilpatrick ym., 2001). Oppikirjat kuitenkin ohjaavat ratkomaan tehtäviä aihetta sen tarkemmin miettimättä (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010). Oppilaan oma ajattelu ei saa tilaa oppikirjaa täyttäessä ja se voi näyttäytyä siten, että samaa asiaa ei osata soveltaa erilaisissa konteksteissa, kuten saamistamme tuloksista voi päätellä.

Ei-tyypilliset tehtävät näyttivät olevan 6.-luokkalaisille haastavia myös sen perusteella, että niitä ei välttämättä edes yritetty lähteä ratkomaan. Paras esimerkki tästä on tehtävälomakkeen viimeinen kysymys (Ks. Liite 1), joka ei ollut mitenkään tyypillinen tehtävä ratkottavaksi: tehtävässä tuli pohtia erään kuvitteellisen ratkaisun onnistuneisuutta ja perustella, mikäli ratkaisussa on jotakin korjattavaa. Tehtävä siis vaati strategista kompetenssia (Ks. Kilpatrick ym., 2001). Se, ettei tehtävää yritetty ratkoa, näyttäytyi siten, että suuri osa

vastaajista tyytyi vastaamaan ”en tiedä” tai jätti perustelematta vastauksensa, jolloin se on voinut olla puhdas arvaus. Oppilailta vaikutti puuttuvan luottamusta omaan osaamiseensa – Joutsenlahden (2005) mainitsema yritteliäisyys ei näkynyt tämänkaltaisissa vastauksissa.

Monet tehtävälomakkeen kysymykset vaativat oppilaalta sanallisia perusteluja ja kielentämistä. Myös nämä tehtävät näyttäytyivät usealle vastaajalle vaikeina. Oppilaat ovat tottuneet ratkomaan tehtäviä matematiikan symbolikielellä, mutta luonnollisella kielellä tämä ei välttämättä onnistukaan. Epäilemme, että oppilaat eivät ole harjoitelleet kielentämistä, vaan käyttäneet matematiikassa lähinnä symbolikieltä. Saamamme tulos on linjassa sen kanssa, että matematiikan oppikirjat eivät tue muita kieliä vaan ohjaavat lähinnä matematiikan symbolikielen käyttöön (Joutsenlahti, 2009).

Pyytäessämme oppilaita kielentämään käsitteitä, tulokset olivat varsin selkeitä: suurin osa oppilaista ei osannut kertoa, mitä käsitteet *suhde* ja *mittakaava* tarkoittavat. Tulos viittaa vahvasti siihen, että oppilaiden konseptuaalinen ymmärtäminen on heikkoa. Matematiikan käsitteet jäävät helposti abstraktille tasolle, kun tunneilla keskitytään oppikirjojen tehtävien suorittamiseen eikä asioiden välisten yhteyksien miettimiseen (Perkkilä ym., 2018). Kielentäminen tukisi oppilaiden syvempää ymmärrystä matematiikasta (Joutsenlahti & Rättyä, 2015) – saamiemme tulosten perusteella asioiden syvällisempi ymmärrys jää puuttumaan ja kielentäminen on vaikeaa.

Suhde-käsitteen heikko ymmärrys on helposti selitettävissä oppimateriaaleilla ja opetussuunnitelmalla. Tutkimamme oppimateriaalien perusteella suhteen käsitettä ei käytetä systemaattisesti, vaikka se esiintyykin useassa eri kontekstissa (Ks. Liite 2). Perusopetuksen opetussuunnitelman

perusteissa (2014) ei myöskään mainita suhdetta matematiikan oppiaineen yhteydessä (Ks. luku 3.3). Ei siis ole ihme, etteivät oppilaat osaa selittää, mitä *suhde* tarkoittaa. Suuri osa käsitettä selittäneistä oppilaista hahmotti suhteen kahden luvun välisenä suhteenä tai jakolaskuna. Suhteen merkintätapa, esimerkiksi 1:4, yhdistettiin suoraan jakolaskuun.

”Suhde tarkoittaa sitä että jos on suhteessa 1:4 niin se 1 on kokonainen jotain ja se muuttuu neljään osaan koska se on suhteessa 4.” (Vastaja 47)

Oppilaiden näkemyksen mukaan merkinnän 1:4 jälkimmäinen luku toimii jakajana, joka määrää ”kaikkien osien lukumäärän”. Virheellinen tulkinta suhde–käsitteestä kertoo siitä, ettei käsitteen merkintätapa ole kovinkaan tuttu eivätkä oppilaat ymmärrä, mitä käsitteellä ylipäätään tarkoitetaan. Oli odotettavissa, etteivät 6.-luokkalaiset ymmärrä suhteen käsitettä – se on haastavaa jopa luokanopettajaopiskelijoille (Joutsenlahti & Perkkilä, 2021; Joutsenlahti & Perkkilä, 2019).

Konkreettinen esimerkki suhde–käsitteen soveltamisesta arjessa on mehunsekoitus. Tehtävölkakkeen kysymykset 7 ja 8 käsittelivät tätä ja ne laadittiin Joutsenlahden ja Perkkilän (2021) mukaan jopa stereotyyppisenä pidetyiksi, suhteen käsitteen ympärille rakennetuiksi tehtäviksi. Tutkimistamme oppimateriaaleista tähän liittyviä tehtäviä ei yhtä poikkeusta lukuun ottamatta löytynyt (Ks. luku 5.1.) Puute tämäntyyppisten tehtävien kohdalla oppimateriaaleissa näkyi selkeästi myös oppilaiden ratkaisuisa: suurin osa oppilaista ei osannut ratkaista mehunsekoitustehtäviä. Oppilaiden ratkaisuisa voidaan päätellä, että suurin osa oppilaista mieltää tässäkin tapauksessa sekoitussuhteen 1:4 niin, että ”yksi kokonainen jaetaan neljään osaan”. Tämä paljastuu viimeistään verratessa heidän vastauksiaan tehtävien 7 ja 8 välillä.

Tehtävässä 7 vaihtoehdon 25 litraa vastanneet vastasivat muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta tehtävään 8 tiivisteiden osuuden olevan  $\frac{1}{4}$  koko mehusta. Vaikka siis mehunsekoitustehtäviä pidetään klassikkona, oppilaat eivät hallitse niitä. Tässäkin tuloksessa on havaittavissa se, että oppikirjasidonnainen matematiikan oppiminen ohjaa vain tietynlaisten tehtävien ratkaisemiseen, eikä tästä normista poikkeavien tehtävien teko välttämättä onnistu.

Mittakaavan käsitteen osalta moni vastaajista oli yllättäen sitä mieltä, etteivät he olleet käsitelleet asiaa koulussa ollenkaan. Oppimateriaalitutkimuksen perusteella mittakaavan ja kartan mittakaavan teemoihin liittyviä tehtäviä kuitenkin löytyi ja nämä käsitteet mainittiin myös opetussuunnitelmassa (Ks. Taulukko 1 ja Taulukko 4). Muutamit vastaajista selittivät mittakaavasta jotakin kartan mittakaavaan liittyvää, mutta yksikään ei käsitellyt vastauksessaan esimerkiksi suurennosta tai pienennöstä. Tämä kuvastaa hyvin sitä, kuinka yksipuoleista oppilaiden käsitteiden ymmärrys on: mittakaavaa käytetään oppimateriaaleissa toki karttojen, mutta myös suurennosten, pienennösten ja yhdenmuotoisuuden yhteydessä. Tämä jää kuitenkin oppilailta helposti huomaamatta, mikäli oppikirjaa edetään kappale kerrallaan – oppikirjat esittävät asiat tyypillisesti aukeama kerrallaan (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019). Tällöin linkki eri kappaleiden asioiden välille jää muodostumatta eikä oppilas välttämättä käsitä, että kartan mittakaava ja suurennoksen mittakaava ovat oikeastaan sama asia.

Oppimateriaaliaineistossa mittakaavaan ja kartan mittakaavaan liittyvät tehtävät painottivat tuottamista, kuten annetun kuvion suurennoksen piirtämistä tietyssä mittakaavassa tai matkan pituuden laskemista kartan mittakaavan mukaan. Aiheeseen liittyvät tehtävälomakkeen kysymykset (4, 12 ja 13)

poikkesivat oppimateriaalien tehtävistä, mikä korosti oppilaiden vaikeuksia ratkaista niitä. Oppilaat, jotka vastasivat oikein kysymykseen 4, eivät osanneet kielentää, mitä mittakaava tarkoittaa ja heistä vain kaksi osasi vastata kysymykseen 13 korjaten oppilaan ratkaisua. Mittakaavaan liittyvistä kysymyksistä juuri kysymys 4 oli kuitenkin lähimpänä oppimateriaalien tehtävätyyppejä ja siihen saimmekin näistä kolmesta eniten oikeita ratkaisuja, joita oli kuitenkin suhteellisen vähän, 37 % (29/78 vastaajaa).

Tutkimustulostemme mukaan parhaiten osatut tehtävät käsittelivät yhdenmuotoisuutta, suurennosta ja suoraan verrannollisuutta. Ei ollut yllättävää, että oppilaat osasivat hyvin juuri näitä asioita: oppimateriaalitutkimuksemme perusteella suoraan verrannollisuuden sovelluksia sekä suurennoksia ja pienennöksiä käsiteltiin teemoista eniten. Yhdenmuotoisuus puolestaan jäi oppimateriaaleissa varsin pieneen rooliin, joten onkin huomionarvoista, että käsitteeseen liittyvä tehtävä oli oppilailla kuitenkin hallussa. Toisaalta nämä tehtävät olivat oppikirjoille tyypillisiä suljettuja tehtäviä (Joutsenlahti & Vainionpää, 2008), joten se selittänee osaltaan oppilaiden osaamista niissä.

Yhteenvetona tutkimustuloksistamme voimme todeta, että suhde-käsitteen ymmärtäminen on melko heikkoa. 6.-luokkalaiset hahmottavat parhaiten sellaiset tehtävät, jotka ovat oppikirjoista tuttuja symbolikielen käyttöön ohjaavia tehtäviä. Jos tätä asetelmaa muuttaa hiemankin, ei tehtävään välttämättä osata enää vastata. Monia asioita ”ei ole opetettu koulussa” oppilaiden mielestä, sillä oppikirja ei käy niitä systemaattisesti läpi tai selvennä käsitteitä. Oppimateriaalit esittävät suhde-käsitteen kapeasti tietynlaisissa tehtävätyypeissä, eikä sen lähikäsitteitä linkitetä toisiinsa; oppilaille mittakaava liittyy vain kartan mittakaavaan. Suhteen merkintätapa näyttäytyy hämäränä, eikä sitä osata

soveltaa erilaisissa konteksteissa. Käsite jää irralliseksi. Sitä käsitellään oppikirjoissa tiiviisti muutaman kappaleen ajan, mutta muutoin käsite ilmaantuu milloin missäkin yhteydessä – tosin ilman sanaa *suhde*.

## 6.2 Tutkimuksen luotettavuus

Hyvään tutkimuskäytäntöön kuuluu, että tutkimuksen luotettavuutta arvioidaan (Aaltio & Puusa, 2020). Tässä luvussa tarkastelemme sitä, millaiset asiat vaikuttavat tutkimuksen luotettavuuteen ja kuinka ne toteutuvat meidän tutkimuksessamme. Esitämme argumentteja tutkimuksemme luotettavuuden puolesta. Tutkimuksen luotettavuudesta kertominen lisää jo omalta osaltaan tutkimuksen luotettavuutta (Messner ym., 2017).

Tutkimuksen teossa triangulaation katsotaan yleisesti lisäävän luotettavuutta (Aaltio & Puusa, 2020). Omassa tutkimuksessamme pääsimme hyödyntämään sekä aineisto- että tutkijatriangulaatiota. Aineistotriangulaatio näyttäytyi tutkimuksessamme siten, että tutkimme kahta eri aineistoa: oppimateriaaleja ja oppilaiden ymmärrystä. Päädyimme tähän saadaksemme tutkittavasta aiheesta mahdollisimman kattavan kuvan. Mikäli olisimme tutkineet pelkästään oppilaiden ymmärrystä suhde–käsitteestä, tai vaihtoehtoisesti vain oppimateriaaleja, olisi tutkimuksen anti ollut suppeampaa. Oppimateriaalitutkimuksestamme saimme perusteluja havainnoillemme oppilaiden vastauksista. Koska toteutimme tutkimuksemme kahden tutkijan voimin, pääsimme hyödyntämään myös tutkijatriangulaatiota. Tämän ansiosta olemme esimerkiksi oppimateriaaleja tutkiessamme pystyneet pohtimaan yhdessä erilaisten tehtävien sijoittamista teemojen alle. Keskustelumahdollisuus toisen tutkijan kanssa on tuonut varmistusta havainnoillemme aineistosta sekä

mahdollistanut myös kriittisen pohdinnan erityisesti ollessamme eri mieltä asioista. Keskustelimme epäselvistä tilanteista yhdessä ja hyväksyimme molemmat saadut tulokset. Tämä lisäsi tutkimuksemme reliabeliutta (Aaltio & Puusa, 2020).

Tutkimuksessa on aina huomioitava tutkijoiden oma subjektiivisuus tutkimuksen teossa (Raatikainen, 2005). Tutkimuksessa tavoitellaan tietenkin objektiivisuutta, mutta täydelliseen objektiivisuuteen, jossa tutkija ei vaikuta tutkimuskohteeseen ja tuloksiin toiminnallaan, on oikeastaan mahdotonta päästä (Aaltio & Puusa, 2020). Tutkimuksen tekeminen tai tulokset eivät siis ole koskaan täysin objektiivisiä ja uskottavuuden lisäämiseksi tutkijan on hyvä pohtia subjektiivisuuttaan (Aaltio & Puusa, 2020; Saaranen-Kauppinen & Puusniekka, 2006). Kuvaamme seuraavaksi tutkimuksemme vaiheita ja pohdimme ohessa subjektiivisuuttamme sekä muita tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttavia tekijöitä.

Tutkimuksemme teossa olemme pyrkineet toimimaan teoreettisen viitekehyksen luomisesta pohdintaan saakka niin, että tutkimustamme voitaisiin pitää mahdollisimman luotettavana. Teoriaosuutta luodessamme perehdyimme kattavasti aiheeseemme liittyvään aikaisempaan tutkimukseen. Pidimme teoriaosuutta tärkeänä, sillä se ratkaisee tutkimuksen luotettavuuden yhdessä empiirisen tiedon kanssa (Messner ym., 2017). Tutkimuksen edetessä huolehdimme koko ajan siitä, että teoria vastaa tutkimuksemme tarkoitusta ja laajensimme teoriapohjaa tarvittaessa. Tällä tavoin pyrimme lisäämään luotettavuutta, sillä on tärkeää, että teoria ja empiria keskustelevat keskenään.

Koostimme tutkimuksemme aineiston oppimateriaaleista sekä oppilaiden vastauksista, jotka keräsimme sähköisellä tehtävälomakkeella. Tämä

valintamme aineistonkeruumenetelmäksi asettaa luotettavuuteen sekä hyviä että huonoja puolia. Ensinnäkin sähköinen lomake mahdollisti suuremman määrän datan keräämisen helposti analysoitavassa muodossa. Saimme 81 vastausta, joista meillä oli lupa käyttää 78:a tutkimuksemme, mikä on prosentuaalisesti kattava osuus (96 %). Vastaukset olivat laadultaan pääosin hyviä ja niistä oli havaittavissa, että oppilaat olivat pohtineet vastauksiaan. Yksittäisten oppilaiden vastauksia tarkastellessa oli nähtävissä, että vastaukset olivat myös lähtökohtaisesti linjassa keskenään, mikä kertoo siitä, että oppilaat eivät ole valinneet vaihtoehtoja sattumanvaraisesti arvaamalla, vaan todella vastanneet oman ymmärryksensä mukaisesti. Sähköinen tehtävälomake mahdollisti myös sen, että jokaiseen tehtävään tuli vastata jotakin, sillä muuten lomaketta ei voinut palauttaa. Tämän pystyi toki kiertämään vastaamalla esimerkiksi ”-”, mutta onneksemme suuri osa vastaajista oli pyrkinyt vastaamaan tehtäviin jotakin. Koemme, että paperisella tehtävälomakkeella olisi ollut helpompaa jättää vastaukset täysin tyhjiksi niin halutessaan. Tältä osin ajatteleme sähköisen tehtävälomakkeen lisänneen tutkimuksemme luotettavuutta.

Selkeä huono puoli sähköisessä lomakkeessa oli se, ettei sen avulla voinut teettää juuri tuottamistehtäviä muuten kuin kielentämisen osalta, vaan tehtävissä piti hyödyntää paljon monivalintaa. Luotettavuuden kannalta on olennaista miettiä, olisimmeko voineet saada oppilaiden ymmärryksestä enemmän irti, mikäli olisimme teettäneet kyselyn paperisena. Tällöin siihen olisi ollut mahdollista sisällyttää sellaisia tehtäviä, joissa oppilaiden olisi pitänyt tuottaa vastauksiinsa jotakin enemmän (esimerkiksi piirroksia tai pidempiä laskulausekkeita).

Emme itse olleet paikalla aineiston keräämisen hetkellä, missä siinäkin on luotettavuuden kannalta hyvää ja huonoa. Aineistonkeruu on ollut siltä osin objektiivista, että emme tutkijoina ole omalla läsnäolollamme vaikuttaneet tutkittaviin. Toisaalta emme voi varmoja siitä, että onko kaikilla tutkimukseen osallistuvilla olleet suurin piirtein samanlaiset olosuhteet täyttää tehtävälomaketta, vaikka tähän parhaamme mukaan pyrimmekin lähettämällä opettajille samanlaiset ohjeet siitä miten toimia (Ks. Liite 5). Koska emme olleet paikalla tehtävälomakkeen täytön aikana, emme voineet myöskään vastata mahdollisiin kysymyksiin tehtävistä. Tämän vuoksi pyrimme luomaan tehtävät mahdollisimman yksiselitteisiksi, jotta oppilaiden ymmärrys ei jäisi kiinni epäselvistä tehtävänannoista. Testasimme myös tehtävälomaketta luokanopettajaopiskelijoilla ja teimme siihen korjauksia testin perusteella. Näiden seikkojen koemme lisäävän luotettavuutta tehtävälomakkeen toimimisen osalta tutkimuksessamme.

Inhimillisen toiminnan, kuten meidän tutkimuksessamme oppilaiden matematiikkaan liittyvän tehtävälomakkeen täytön kohdalla, tulee ottaa huomioon, että olosuhteet vaikuttavat myös osaltaan tutkimustuloksiin (Raatikainen, 2005). Tutkimuksemme kohdalla tämä tarkoittaa muun muassa sitä, että oppilaiden vastauksiin on voinut vaikuttaa esimerkiksi väsymys tai levottomuus tunnilla. Oppilaat käyttivät tehtävälomakkeen täyttämiseen keskimäärin 10 minuuttia. Tämän vuoksi on syytä pohtia, onko osa vastauksista arvauksia, mikäli esimerkiksi keskittyminen on ollut heikkoa. Moni inhimillinen tai ulkoinen tekijä on voinut vaikuttaa oppilaiden työskentelyyn tehtävälomakkeemme parissa, mikä vaikuttaa tutkimuksemme luotettavuuteen.

Suurin osa vastaajista näytti kuitenkin yrittäneen vastata kysymyksiimme, jolloin saamiamme tuloksia voidaan pitää verrattain luotettavina.

Analyysin osalta luotettavuudessa keskeiseksi kysymykseksi nousee valikoivuus. Laadullinen tutkimus on valikoivaa siinä mielessä, että tutkijat saattavat poimia aineistosta sellaisia asioita, joita pitävät teorian valossa tarpeellisina (Messner ym., 2017). Tässä nousee esiin subjektiivisuutemme tutkijoina: meillä oli molemmilla ennakko-oletus siitä, että suhde-käsitteen käsittely oppikirjoissa ja oppilaiden ymmärrys siitä on heikkoa. Tämä on voinut vaikuttaa siihen, kuinka olemme poimineet tietoa tai analysoineet aineistoa, vaikka olemme pyrkineet nostamaan tekemämme havainnot suoraan aineistosta. Teoriaohjaavan sisällönanalyysin mukaan aineistoa tulkitaan valmiiden käsitteiden valossa (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Tiesimme, mitä suhde-käsite tarkoittaa ja vertasimme tätä oppilaiden vastauksiin. Analyysivaiheessa luotettavuutta lisää se, että tehdyt valinnat on perusteltu tarkasti ja analyysi on kuvattu perusteellisesti (Aaltio & Puusa, 2020). Tutkimuksessamme pyrimme juuri tähän ja kuvasimme luvuissa 4.2.2 ja 4.3.2 millä perustein valitsimme analyysimenetelmämme ja kuinka analyysi toteutettiin.

Tutkimustulosten esittäminen selkeästi ja kattavasti on iso osa tutkimuksen luotettavuutta (Messner ym., 2017). Yritimme kertoa saamistamme tuloksista mahdollisimman monipuolisesti ja tarkasti. Johtopäätöksissä peilasimme havaintojamme teoriapohjaamme ja tätä kautta varmistimme tutkimuksen luotettavuutta. Saamamme tulokset vaikuttivat olevan linjassa aiempien tutkimusten kanssa, joten tältä osin tutkimuksemme näyttäytyy luotettavana. Tutkimuksemme tarkoituksena ei ollut saada yleistettävää tietoa, vaan lisätä ymmärrystä tutkittavasta aiheesta, kuten laadullisessa tutkimuksessa tuleekin

(Eskola & Suoranta, 2014). Mielestämme onnistuimme tässä laadullisen tutkimuksen tehtävässä, sillä kerroimme tutkimuksesta ja sen eri vaiheista tarkasti ja raportoimme tuloksia, jotka ovat linjassa aiempien samankaltaisten tutkimusten kanssa. Tuloksemme kuitenkin lisäsivät uuden näkökulman, sillä tutkimme uudempia oppimateriaaleja kuin aiemmin ja veimme tutkimuksemme alakouluun. Tällä tavoin onnistuimme laajentamaan aiempaa tietoa aiheesta ja siten lisäämään tutkimuksemme luotettavuutta.

Reliabiliteetin ja validiteetin tarkastelu on osa tutkimuksen luotettavuusarviointia. Reliabiliteetin osalta on oleellista pohtia sitä, olisivatko saamamme tulokset toistettavissa (Anttila, 2014). Tutkimusaineistomme kattavuuden perusteella uskomme saamiemme tulosten toisinnettavuuteen. Mikäli samanlainen tehtävälomake teetetäisiin 6.-luokkalaisten jossakin muualla, olisivat tulokset suhde-käsitteen ymmärtämisestä todennäköisesti hyvin samankaltaisia. Samoin oppimateriaalin tarkastelu vastaisi luultavimmin saamiemme tuloksia.

Validiteetilla kuvataan tutkimuksen pätevyyttä (Saaranen-Kauppinen & Puusniekka, 2006). Tutkimuksessamme validiteettitarkastelu koskee etenkin sitä, ovatko saamamme tulokset oikeita ja vastaavatko ne tutkimuskysymyksiimme. Tärkeä osa tutkimustamme oli tehtävälomake, jonka avulla hankittiin tietoa 6.-luokkalaisten ymmärryksestä suhde-käsitteestä. Lomakkeen tehtävät luotiin oppimateriaalianalyysin perusteella, jotta ne käsittelisivät oppikirjoissa esiteltyjä asioita. Oppimateriaalianalyysi ei ollut täysin valmis siinä vaiheessa, kun tehtävälomake valmistui, joten onkin syytä pohtia, olisiko tehtävälomakkeeseen saanut jotakin lisää valmiista analyysistä. Tehtävälomakkeen kysymysteemat vastasivat kuitenkin hyvin oppimateriaaleista

esille nousseita teemoja, joten tältä osin lomakkeen voi ajatella tuottaneen oikeanlaista tietoa oppilaiden ymmärryksestä. Oppilaiden vastausten analyysin perusteella saimme kattavasti tietoa siitä, miten 6.-luokkalaiset ymmärtävän matemaattisen suhteen ja siihen liittyvät asiat. Tämä vastasi tutkimuskysymykseemme. Oppimateriaalianalyysissa tehty teemoittelu puolestaan antoi meille tietoa siitä, missä yhteydessä suhde-käsitettä käsitellään ja millaisia tehtäviä siihen liittyy. Tutkimuksesta saadut tulokset vastaavat mielestämme asettamiimme tutkimuskysymyksiin ja täten tuloksia voi pitää oikeina ja tutkimuksemme validiteettia hyvänä.

### *6.3 Tutkimuksen eettisyys*

Hyvä tutkimus on eettisesti sitoutunutta (Tuomi & Sarajärvi, 2018) ja noudattaa hyvää tieteellistä käytäntöä (Tutkimuseettinen neuvottelukunta [TENK], 2023). Olemmekin pyrkineet toimimaan eettisesti, hyvän tieteellisen käytännön mukaan jokaisessa tutkimuksen vaiheessa. Tällöin tutkimusta voidaan pitää eettisesti hyväksyttävänä ja luotettavana sekä tuloksia uskottavina (TENK, 2023). Hyvän tieteellisen käytännön keskeisiin periaatteisiin kuuluu tiedeyhteisön toimintatapojen, eli rehellisyyden ja yleisen huolellisuuden ja tarkkuuden noudattaminen tutkimuksen jokaisessa vaiheessa (TENK, 2023). Eettisyyden pohdinta alkaa tutkimuksen aihevalinnasta jatkuen teoriaosuuden laadintaan sekä siitä eteenpäin aina varsinaisen tutkimusaineiston keruuseen ja säilyttämiseen sekä tulosten raportointiin.

Tutkimuksen teon alussa valikoimme tutkimusaiheen siten, että aihe olisi tarpeeksi merkityksellinen ja tutkimuksesta saadaan aikaan enemmän hyötyä kuin haittaa. Kuulan (2011) mukaan tutkimuksen teon tärkeyden perustelu on

erityisen tärkeää, kun tutkimuksen kohteena ovat lapset. Alaikäisten, ja ylipäättään ihmisten, tutkimisessa tulee kiinnittää tarkasti huomiota eettisiin periaatteisiin (TENK, 2019). Tutkimuksemme aiheeksi valitsimme matemaattisen käsitteen *suhde*, sillä halusimme tuoda ilmi käsitteen tärkeyttä sekä puutteita sen käsittelyssä matematiikan oppiaineessa. Suhteen käsitettä tutkimalla voisimme mahdollistaa matematiikan opetuksen ja oppimateriaalien kehityksen eteenpäin.

Aiheen valinnan jälkeen teimme kattavan kirjallisuuskatsauksen ja loimme tutkimuksemme teoreettisen viitekehyksen. Teoriapohjan luominen on olennaista jokaisessa tutkimuksessa, mutta tutkimuksessamme sillä on erityinen merkitys myös analyysimenetelmämme, teoriaohjaavan sisällönanalyysin, kannalta. Teoriaohjaavaa sisällönanalyysia hyödynnettäessä teoreettisen viitekehyksen on oltava perusteellisesti laadittu, jotta analyysimenetelmää voidaan hyödyntää onnistuneesti (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Aikaisempiin tutkimuksiin viitattaessa olemme toimineet hyvän tieteellisen käytännön mukaan tehden lähdeviittaukset huolellisesti arvostaen toisten tutkijoiden työtä (TENK, 2023).

Suhde-käsitteeseen ja sen ymmärtämiseen liittyvää tutkimusta on olemassa melko vähän, minkä vuoksi tutkimuksemme teko on myös eettisestä näkökulmasta perusteltua. Kuulan (2011, s.105) mukaan ”aineistonkeruun portit” aukeavatkin tutkijalle helpommin, kun tutkittava aihe koetaan tärkeäksi ja tutkimuksen teon ei oleteta häiritsevän tutkittavan laitoksen (tässä tapauksessa koulun) normaalitoimintaa.

Tutkimusaiheemme tärkeyden lisäksi myös valitsemamme aineistonkeruumenetelmä on oletettavasti osaltaan vaikuttanut siihen, että tutkimuksen otokseksi valikoituneiden luokkien opettajat ovat antaneet tutkimuskyselyllemme aikaa muulta opetukselta. Sähköinen kyselylomake on

ollut sekä oppilaiden, opettajien että meidän tutkijoiden kannalta melko vaivaton aineistonkeruumenetelmä. Laadimme opettajille ja oppilaille selkeät ohjeistukset lomakkeen täyttöön (Ks. Liite 5) ja pyrimme läpinäkyvyyteen tutkimuksen teossa myös huolehtimalla koulun sekä huoltajien informoinnista (Ks. Liite 3 ja Liite 4) tutkimuksen suhteen. Hankimme samalla tutkimusluvut kouluilta ja oppilaiden huoltajilta. Sähköisen lomakkeen pääsivät ohjeistuksemme mukaan täyttämään vain ne oppilaat, joiden vanhemmat olivat antaneet luvan osallistua. Sähköisen kysymyslomakkeemme ensimmäisen kysymyksen kohdalla oppilaat saivat itse tehdä lopullisen päätöksen tutkimukseen osallistumisesta (Ks. Liite 1). Jätimme analyysin ulkopuolelle niiden oppilaiden vastaukset, jotka eivät antaneet lupaa vastaustensa käyttöön.

Pyrimme pitämään huolta oppilaiden anonymiteetistä luokkien ohjeistuksista alkaen aina vastausten analysointiin ja tulosten raportointiin saakka. Tässä sähköinen kyselylomake oli avainasemassa. Sähköisellä lomakkeella emme keränneet oppilaista tai heidän kouluistaan minkäänlaisia tunnistetietoja. Oppilaiden vastaukset tulivat analysoitaviksi juuri sellaisina kuin he olivat ne kirjoittaneet. Sähköisellä lomakkeella ei ollut käsialan tulkintavirheiden mahdollisuutta eikä anonymiteetin vaarantuminen ollut uhkana käsialan tunnistamisen vuoksi. Lomake mahdollisti myös sen, että emme olleet paikalla oppilaiden täyttäessä sitä. Emme siis tavanneet tutkimukseemme osallistuneita oppilaita, mikä on vahvistanut oppilaiden anonymiteettia tutkimuksessamme. Se, että emme tavanneet oppilaita on osaltaan myös auttanut meitä toimimaan objektiivisemmin tutkimustuloksia raportoidessa.

Annoimme tutkimukseen osallistuneiden luokkien opettajille mahdollisuuden ilmoittaa mahdollisista lomakkeen täytön aikana ilmenneistä

ongelmista anonymisti erillisellä sähköisellä lomakkeella. Tämä oli turvatoimenpide, jonka avulla varmistimme sen, että jokaisen tutkimukseen osallistuneen koulun oppilaiden vastaaminen onnistuisi ja jotta anonymiteetti myös koulujen osalta säilyisi, emmekä pystyisi yhdistämään saamiamme vastauksia tiettyyn kouluun. Pyysimme opettajilta taustatiedoksi luokkien oppilasmäärän sekä tiedon käytössä olevasta matematiikan kirjasarjasta, mutta emme tietoa siitä, moniko oppilas luokalta osallistuu tutkimukseen.

Aloitimme oppilailta saadun tutkimusaineiston analysoinnin vasta, kun olimme saaneet tutkimukseen osallistuvien luokkien oppilaiden yhteenlaskettua määrää lähellä olevan määrän vastauksia, eli vasta kun kaikki luokat olivat osallistuneet tutkimukseen. Oppimateriaaliaineiston analysoimme melkein kokonaan ennen oppilaiden vastausten analyysia, mutta pieni osa analyyseista tehtiin yhtä aikaa. Oppimateriaaliaineiston analyysin toteutimme teemoittelua käyttäen ja pyrimme analyysissä toimimaan eettisten periaatteiden mukaan pyrkien mahdollisimman objektiiviseen analyysiin ja toimien perusteellisesti oppimateriaaleja analysoidessa. Huolehdimme asianmukaisesta viittauskäytännöstä ja lähdetietojen merkitsemisestä analysoidun oppimateriaalin osalta. Oppilaiden vastausten analyysissä hyödynsimme teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä, jossa huolellisesti laaditulla ja tutkimuksen edetessä täydennetyllä teoreettisella viitekehyksellä oli merkittävä rooli (Tuomi & Sarajärvi, 2018).

Tuloksia raportoidessa oppilaisiin on viitattu vastaajina yksilöiden heidät numeroilla. Myös itse tutkimusaineistossamme vastaajia kuvaavat pelkät numerot, sillä minkäänlaisia tunnistetietoja ei kerätty. Sitaatteja vastauksista esittäessämme olemme huomioineet, ettei vastaajaa pystyisi tunnistamaan

vastauksista. Aiheemme ei ollut kovinkaan henkilökohtainen tai arkaluontoinen, joten vastaukset olivat neutraaleita ja olemme pystyneet esittämään sitaatteja aineistosta sellaisenaan muokkaamattomina.

Tutkimuksen tulokset olemme pyrkineet nostamaan suoraan aineistostamme teoriapohjaan peilaten ja verraten aikaisempaan tutkimukseen. Näin olemme varmistaneet tutkimuksen luotettavuutta toimien eettisten periaatteiden mukaisesti. Olemme säilyttäneet oppilaiden vastauksista koostuvaa tutkimusaineistoa asianmukaisesti ainoastaan meidän tutkijoiden saatavilla salasanojen takana ja tulemme hävittämään tutkimusaineiston opinnäytetyön hyväksymisen jälkeen.

#### *6.4 Jatkotutkimusehdotuksia*

Seuraavaksi esitämme mahdollisia jatkotutkimusehdotuksia, joita olemme pohtineet tutkimustamme tehdessä. Oppimateriaalikatsauksemme ja oppilaiden ymmärryksestä saatujen tulosten perusteella voisi olla aiheellista yhdistää nämä kaksi vielä tiiviimmin toisiinsa. Suhde-käsitteen ymmärrystä voisi tutkia vertaamalla eri oppikirjasarjoja käyttäneiden luokkien oppilaiden ymmärrystä keskenään. Näin saataisiin enemmän tietoa oppimateriaalin mahdollisesta vaikutuksesta; ymmärtävätkö tiettyä oppikirjasarjaa käyttävät selkeästi jotakin paremmin tai heikommin? Omassa tutkimuksessamme meillä oli taustatieto luokkien käyttämistä kirjoista, mutta tietoa ei yhdistetty vastauksiin, sillä se ei ollut tutkimuksemme kohteena. Tällaisessa vertailevassa tutkimuksessa otoksen tulisi tietenkin olla oman tutkimuksen otostamme suurempi, jotta vertailu olisi mahdollista ja tuloksia voitaisiin pitää luotettavina.

Suhde-käsitteen ympärille voisi kehittää myös kehitystutkimuksen. Voitaisiin esimerkiksi toteuttaa suhde-käsitteen opetukseen liittyvä opetuskokeilu ja sen päättymisen jälkeen tutkia, miten oppilaiden ymmärrys on kehittynyt tai vastaavasti verrata opetuskokeilussa mukana olleiden oppilaiden osaamista oppilaisiin, jotka eivät ole olleet mukana kokeilussa. Tällä tavalla olisi mahdollista saada tuloksia siitä, parantaako systemaattinen suhde-käsitteen tuominen esiin opetuksessa ymmärrystä käsitteestä ja jos parantaa, kuinka paljon.

Oleellista olisi myös tutkia lisää luokanopettajien ja matematiikan opettajien sekä näiden alojen opiskelijoiden ymmärrystä suhde-käsitteestä. Luokanopettajat vastaavat kuitenkin pääsääntöisesti koko ala-asteen matematiikan opetuksesta, jossa luodaan pohja suhteen ymmärtämiselle. Tämän vuoksi olisi tärkeää saada lisää tietoa siitä, kuinka hyvin luokanopettajat ja luokanopettajaopiskelijat ymmärtävät suhteen ja siihen liittyvät monet lähikäsitteet. Matematiikan opettajien tutkiminen puolestaan laajentaisi näkökulmaa siitä, onko suhteen käsitteen ymmärrys vaikeaa myös heille, jotka ovat opiskelleet matematiikkaa enemmän.

## *6.5 Lopuksi*

Syksyllä 2022 alkanut graduprosessi oli toisinaan erittäin mukaansatempaavaa ja toisinaan ei tuntunut etenevän ollenkaan. Graduaiheestamme olisimme voineet keskustella jatkuvasti – ja niin taisimme tehdäkin. Matemaattinen suhde alkoi näkyä jokapäiväisessä elämässä, milloin missäkin kontekstissa ja meille valkeni, kuinka moniulotteisesta käsitteestä oikeastaan onkaan kyse. Tutkimuksemme tulosten saaminen oli meille erittäin silmiä avaavaa: niissä

konkretisoitui se, mitä olimme aiheesta ennalta ajatelleetkin ja toisaalta opimme samalla myös paljon uutta.

Oppimateriaalien tutkiminen sai meidät innostumaan niiden kehittämisestä ja oppilaiden vastauksia lukiessa oli sanomattakin selvää, että oppikirjasidonnainen matematiikan opetus tai nykyiset matematiikan oppimateriaalit eivät edistä tarpeeksi oppilaiden ymmärrystä matemaattisista käsitteistä. Tulevina luokanopettajina ja matematiikan aineenopettajina tästä tutkimuksesta saatujen oppien kanssa olemme sitä mieltä, että matematiikan opetuksessa tulisi kiinnittää enemmän huomiota käsitteisiin ja niiden välisten yhteyksien opetteluun. Pelkkä oppikirjojen täyttäminen ja proseduraalisen osaamisen harjoittaminen eivät vielä kehitä matemaattista ajattelua tai ymmärrystä tarpeeksi. Matematiikan opetuksessa tulisikin lisätä kielentämistä ja kaikkien matematiikan kielten käyttöä – tällä tavoin on mahdollista tukea ymmärrystä. Opettajien tulisi huomioida, ettei matematiikan opetusta kannata perustaa ainoastaan oppikirjaan.

Myös oppimateriaaleja tulisi kehittää entistä paremmiksi siten, että niissä huomioitaisiin vahvemmin matematiikan eri kielet ja käsitteiden opiskelun tärkeys. Näiden asioiden huomioiminen oppimateriaalissa voisi auttaa opettajia käyttämään niitä enemmän omassa opetuksessaan. Oppikirjojen tehtävätyyppien monipuolistaminen mahdollisesti laajentaisi oppilaiden ymmärrystä aiheista ja tietojen soveltaminen helpottuisi. Tällainen muutos olisi huomioitava myös valtakunnallisen opetussuunnitelman tasolla, koska oppimateriaalit noudattanevat sitä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden laatijoiden on havahduttava siihen, että vahva matematiikan

osaaminen ei synny vain proseduureja toistamalla, vaan painoarvoa on annettava myös käsitteiden osaamiselle.

Viimeiseksi haluamme todeta, että matematiikalla ja sen ymmärtämisellä on iso merkitys elämässä. Matemaattiset käsitteet ja niiden soveltaminen näyttäytyvät arjessa monessa asiassa: ruuanlaitossa, rakentamisessa, hintojen laskemisessa, työelämässä ja niin edelleen. Korkeakoulujen hakuprosesseissakin painotetaan yhä enemmän matematiikan osaamista alasta riippumatta. Olisiko siis aika kehittää matematiikan oppimateriaaleja ja opetusta siten, että jo alakoulussa rakennetaan matematiikan tiilitalolle vahva pohja?

# LÄHTEET

- Aaltio, I. & Puusa, A. (2020). Mitä laadullisen tutkimuksen arvioinnissa tulisi ottaa huomioon? Teoksessa A. Puusa, P. Juuti & I. Aaltio (toim.), *Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät* (s. 169–180). Gaudeamus.
- Aebli, H. (1991). *Opetuksen perusmuodot*. WSOY.
- Ahtineva, A. (2000). Oppikirja – tiedon välittäjä ja opintojen innoittaja? Lukion kemian oppikirjan – Kemian maailma 1 – tiedonkäsitys ja käyttökokemukset (Annales Universitatis Turkuensis, C, 164) [väitöskirja, Turun yliopisto]. Painosalama OY.
- Anttila, P. (2014). *Tutkimisen taito ja tiedon hankinta*. Haettu 20.1.2023 osoitteesta <https://metodix.fi/2014/05/17/anttila-pirkko-tutkimisen-taito-ja-tiedon-hankinta/#9.2.2%20Sis%C3%A4ll%C3%B6analyysi>
- Ben-Chaim, D., Keret, Y. & Ilany, B-S. (2012). *Ratio and Proportion Research and Reaching in Mathematics Teachers' Education (Pre-and in-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Sense Publishers.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction* (Fourth printing). Harvard University Press.
- Clarke, V. & Braun, V. (2017). Thematic analysis. *The Journal of Positive Psychology*, 12(3), 297–298.  
<https://doi.org/10.1080/17439760.2016.1262613>

- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education: 6. ed.* Routledge.
- Eronen, L. & Haapasalo, L. (2006). Shifting from textbook tasks to mathematics making. Teoksessa T. Asunta & J. Viiri (toim.), *Pathways into research-based teaching and learning in mathematics and science education – Polkuja tutkimukselliseen opettamiseen ja oppimiseen matemaattisissa aineissa* (s. 75–92). Jyväskylän yliopistopaino.
- Eskola, J. (2018). Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen tutkimuksen analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa R. Valli (toim.), *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin* (5., uudistettu ja täydennetty painos) (s. 133–157). PS-kustannus.
- Eskola, J. & Suoranta, J. (2014). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen* (10. painos). Vastapaino.
- Gardiner, T. (2016). *Teaching Mathematics at Secondary Level*. Open Book Publishers.
- Haapasalo, L. (2003). The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.), *Towards Meaningful Mathematics and Science Education – Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association* (s.1-20). (Kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita 86). Joensuun yliopistopaino.
- Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu* (Kahdeksas päivitetty painos). Medusa-Software.

- Haggarty, L. & Pepin, B. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *ZDM*, 33(5), 158–175.
- Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567–590.
- Heinonen, J-P. (2005). Opetussuunnitelma vai oppimateriaalit - Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa (Tutkimuksia 257) [väitöskirja, Helsingin yliopisto]. Dork. <http://urn.fi/URN:ISBN:952-10-1995-6>
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1–27). Lawrence Erlbaum Ass.
- Hihnala, K. (2005). *Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä*. (Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 278) [väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. Jyväskylä University Printing House.
- Hihnala, K. (2010). Suhteellisuuden käsite tulevien luokanopettajien ja erityisopettajien matemaattisessa ajattelussa. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktikat: ainedidaktinen symposiumi 13.2.2009 Tampereella* (s. 49–64). Tampereen yliopisto.

- Hihnala, K. (2011). Miten opetussuunnitelmaa jäsentämällä voitaisiin parantaa matematiikan perusopetusta? Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (s. 83–93). (Tutkimuksia 328). Helsingin yliopistopaino.
- Hiidenmaa, P. (2015). Oppikirjojen tutkimus. Teoksessa H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 27–40). Suomen tietokirjailijat.
- Hiidenmaa, P., Löytönen, M. & Ruuska, H. (2017). Suomalaisen oppikirjallisuuden pitkät perinteet. Teoksessa P. Hiidenmaa, M. Löytönen & H. Ruuska (toim.), *Oppikirja Suomea rakentamassa* (s. 7–16). Otavan Kirjapaino Oy.
- Hong, D. S., Choi, K. M., Runnalls, C. & Hwang, J. (2018). The Initial Treatment of the Area Measurement in the Selected Elementary Mathematics Textbooks from US and Korea. Teoksessa T. E. Hodges, G. J. Roy & A. M. Tyminski (toim.), *Looking Back, Looking Ahead: Celebrating 40 Years. Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 80–87). North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Hsieh, H-F. & Shannon S.E. (2005) Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277-1288.  
<https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1049732305276687>
- Ikäheimo, H. (2021). *Matematiikan osaaminen vahvaksi*. Otavan Kirjapaino Oy.
- Johnson, A., & Lauten, A. D. (2000). The jurassic classroom. *Mathematics teacher*, 93(2), 102–110.

- Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.), *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta: ainedidaktinen symposium 7.2.2003* (s. 188–196). (Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72). Turun opettajankoulutuslaitos.
- Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä – 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä* (Acta Universitatis Tamperensis 1061) [väitöskirja, Tampereen yliopisto]. Tampereen yliopistopaino Oy – Juvenes Print.
- Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008* (s. 71–86). (Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9). Lapin yliopisto.
- Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen & K. Sormunen (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa* (s. 3–15). (Reports and Studies in Education, Humanities, and Theology 1). University of Eastern Finland.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009* (s. 77–89). (Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A, 31). Tampereen yliopisto.

- Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2019). Sustainability Development in Mathematics Education – A Case Study of What Kind of Meanings Do Prospective Class Teachers Find for the Mathematical Symbol “ $\frac{2}{3}$ ”? *Sustainability*, 11(2), Article 457. <https://doi.org/10.3390/su11020457>
- Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2021). Murtoluku vai suhde? *FMSERA Journal*, 4(1), 61–74.
- Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.), *Rajaton tulevaisuus – Kohti kokonaisvaltaista oppimista* (s. 45–62). Jyväskylän yliopistopaino.
- Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–431). Niilo Mäki Instituutti.
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2007). Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.), *Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet: ainedidaktinen symposium 9.2.2007* (s. 184–191). (Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisu B, 77). Turun yliopisto.
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2008). Oppikirja vai harjoituskirja? Perusopetuksen luokkien 1–6 matematiikan oppimateriaalin tarkastelua MOT-projektissa. Teoksessa A. Kalioniemi (toim.), *Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka: Ainedidaktinen symposiumi 8.2.2008 Helsingissä* (s. 547–

558). (Käyttätymistieteellinen tiedekunta, soveltavan kasvatustieteen laitos 299). Helsingin yliopisto.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (s. 137–148). Edita Prima Oy.

Juhila, K. (2023). Teemoittelu. Teoksessa J. Vuori (toim.), *Laadullisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Yhteiskuntatieteellinen tietoaarkisto, Tampereen yliopisto. Haettu 27.1.2023 osoitteesta <https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/kvali/analyysitavan-valinta-ja-yleiset-analyysitavat/teemoittelu/>

Kettunen, J., Viholainen, A. & Eronen, L. (2022). Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto sekä luova päättely lukion matematiikan ensimmäisen opintojakson harjoitustehtävissä. *FMSERA Journal*, (5)1, 3–17.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kulju, P. & Joutsenlahti, J. (2010). Mitä annettavaa äidinkielellä ja matematiikalla oppiaineina voisi olla toisilleen? Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg, & T. Soini (toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009* (s. 163–178). (Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisu A, 31). Tampereen yliopisto.

- Kuula, A. (2011). *Tutkimusetiikka. Aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys*.  
Vastapaino.
- Langrall, C.W. & Swafford, J. 2000. Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 254–261. <https://doi.org/10.5951/MTMS.6.4.0254>
- Lehtonen, D., Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2023). Multimodal Communication and Peer Interaction during Equation-Solving Sessions with and without Tangible Technologies. *Multimodal Technologies and Interaction*, 7(1), Article 6. <https://doi.org/10.3390/mti7010006>
- Leinonen, J. (2018). *Matematiikan ymmärtämisestä. Käsitteistä käytäntöön*. (Acta Universitatis Lapponiensis 371) [väitöskirja, Lapin yliopisto]. Lauda. <https://urn.fi/URN:ISBN:978-952-337-074-6>
- Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 129–156.
- Leung, K. S. F. & Park, K. (2006). A Comparative Study of the Mathematics Textbook of China, England, Japan, Korea, and the United States. Teoksessa F. K. S. Leung, K-D. Graf & F. J. Lopez-Real (toim.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions – A Comparative Study of East Asia and the West* (s. 227–238). Springer.
- Matematiikkalehti Solmu (2023). *Matematiikan verkkosanakirja*. Haettu 26.1.2023 osoitteesta <https://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/s.html>
- Mayring, P. 2000. Qualitative Content Analysis. *Forum: Qualitative Social Research*, 1(2), Article 20.

- Messner, M., Moll, J. & Strömsten T. (2017). Credibility and authenticity in qualitative accounting research. Teoksessa Z. Hoque, L. D. Parker, M. Coaleski & K. Haynes (toim.), *The Routledge companion to qualitative accounting research methods* (s. 432–443). Routledge.
- Niemi, E. K. (2001). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000*. Yliopistopaino.
- Niemi, E. K. (2004). *Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa* (Annales Universitatis Turkuensis, C, Tom. 216) [väitöskirja, Turun yliopisto]. Speedmaster Oy.
- Niemi, E. K. (2008). *Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007*. Yliopistopaino.
- Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*.  
[https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf)
- Pantziara, M. & Philippou, G. (2011). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61–83.
- Patrikainen, S. (2012). *Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa* (Tutkimuksia 342) [väitöskirja, Helsingin yliopisto]. Unigrafia.
- Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa* (Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195) [väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. JYX-julkaisuarkisto. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-5338-6>

- Perkkilä, P. & Joutsenlahti, J. (2021). Academic Literacy Supporting Sustainability for Mathematics Education – A Case: Collaborative Working as a Meaning Making for “2/3”? Teoksessa E. Jeronen (toim.), *Transitioning to Quality Education* (s. 163–188). MDPI - Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 344–367). Niilo Mäki Instituutti.
- Pietiäinen, J-P. (2015). Ahneita kustantajia vai laadun tekijöitä? Teoksessa H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 57–65). Suomen tietokirjailijat.
- Raatikainen, P. (2005). Ihmistieteet – tiedettä vai tulkintaa? Teoksessa A. Meurman-Solin & I. Pyysiäinen (toim.), *Ihmistieteet tänään*. Gaudeamus.
- Ruuska, H. (2015a) Mitä oppikirjailija osaa? Teoksessa H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 17–26). Suomen tietokirjailijat.
- Ruuska, H. (2015b). Opettajan ei tarvitse tehdä työvälaineitään. Teoksessa H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 41–46). Suomen tietokirjailijat.
- Saaranen-Kauppinen, A. & Puusniekka, A. (2006). *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto*. Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto, Tampereen yliopisto. Haettu 25.11.2022 osoitteesta <https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/>

- Schreier, M. (2012). *Qualitative Content Analysis in Practice*. SAGE Publications.
- Schwols, A., Dempsey, K. & Kendall, J. (2013). *Common Core Standards for Middle School Mathematics*. Association for Supervision & Curriculum Development.
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Slovin, H. (2000). Moving proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(1), 58–61.
- Smith III, J. P. (2002). The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios. Teoksessa B. Litwiller & G. Bright (toim.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions* (s. 3–17). National Council of Teachers of Mathematics.
- Stewart, V. (2005). *Making Sense of Students' Understanding of Fractions: An Exploratory Study of Sixth Graders' Construction of Fraction Concepts Through the Use of Physical Referents and Real World Representations* [väitöskirja, Floridan osavaltionyliopisto]. Haettu 13.1.2023 osoitteesta <https://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu:168517/datastream/PDF/view>
- Tutkimuseettinen neuvottelukunta [TENK]. (2019). *Ihmiseen kohdistuvan tutkimuksen periaatteet ja ihmistieteiden eettinen ennakoarviointi Suomessa. Tutkimuseettisen neuvottelukunnan ohje 2019*. Haettu 27.11.2022 osoitteesta

[https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/lhmistieteiden\\_eettisen\\_ennakkoarvioinnin\\_ohje\\_2019.pdf](https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/lhmistieteiden_eettisen_ennakkoarvioinnin_ohje_2019.pdf)

Tutkimuseettinen neuvottelukunta [TENK]. (2023). *Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. Tutkimuseettisen neuvottelukunnan HTK-ohje 2023*. Haettu 10.4.2023 osoitteesta [https://tenk.fi/sites/default/files/2023-03/HTK-ohje\\_2023.pdf](https://tenk.fi/sites/default/files/2023-03/HTK-ohje_2023.pdf)

Tossavainen, T. (2015). Uutta ja vanhaa lukion matematiikan opetuksessa. Teoksessa H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 129–140). Suomen tietokirjailijat.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. (Uudistettu laitos). Tammi.

Törnroos, J. (2004). *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännenn luokan matematiikan osaaminen arvioitavana* (Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13) [väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. Jyväskylän yliopistopaino. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-3226-8>

Vahtola, J. (2015). Mihin kustantajaa tarvitaan? Teoksessa H. Ruuska, M. Löytönen & A. Rutanen (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 177–185). Suomen tietokirjailijat.

Vaismoradi, M., Turunen, H. & Bondas, T. (2013). Content analysis and thematic analysis: Implications for conducting a qualitative descriptive study. *Nursing & Health Sciences*, 15(3), 398–405. <https://doi.org/10.1111/nhs.12048>

Vuori, J. (2023). Laadullinen sisällönanalyysi. Teoksessa J. Vuori (toim.) *Laadullisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Yhteiskuntatieteellinen

tietoarkisto, Tampereen yliopisto. Haettu 26.1.2023 osoitteesta

<https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/>

- Väisälä, K. (1970). *Algebran oppi- ja esimerkkikirja*. (Kuudennentoista painoksen muuttumaton lisäpainos). WSOY.
- Weinberg, S. L. (2002). Proportional Reasoning: One Problem, Many Solutions. Teoksessa B. Litwiler & G. Bright (toim.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions* (s. 138–144). National Council of Teachers of Mathematics.
- Wu, H-H. (2011). *Understanding numbers in elementary school mathematics*. American Mathematical Society.
- Yrjönsuuri, R. (1998). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 128–141). Niilo Mäki Instituutti.

## Tutkimuksen oppimateriaalilähteet

Milli 4A Open opas (2021). Tekijät: Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P. & Vallo, L. Sanoma Pro.

Milli 4B Open opas (2021). Tekijät: Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P. & Vallo, L. Sanoma Pro.

Milli 5A Open opas (2021). Tekijät: Häkkinen, K., Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P., Sohlman, L. & Vallo, L. Sanoma Pro.

Milli 5B Open opas (2021). Tekijät: Häkkinen, K., Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P., Sohlman, L. & Vallo, L. Sanoma Pro.

Milli 6A Open opas (2021). Tekijät: Häkkinen, K., Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P., Sohlman, L. & Vallo, L. Sanoma Pro.

Milli 6B Open opas (2022). Tekijät: Häkkinen, K., Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P., Sohlman, L. & Vallo, L. Sanoma Pro.

NeeViiKuu 4A (2014, 2. painos). Tekijät: Hartikainen, S., Häggblom, L., Nousiainen, P. & Silvander, Y. Edukustannus.

NeeViiKuu 4B (2017, 3. painos). Tekijät: Hartikainen, S., Häggblom, L., Nousiainen, P., Pykäläinen, M., Renlund, T. & Silvander, Y. Edukustannus.

NeeViiKuu 5A (2017, 3. painos). Tekijät: Nousiainen, P., Pykäläinen, M., Renlund, T. & Silvander, Y. Edukustannus.

NeeViiKuu 5B (2017, 2. painos). Tekijät: Nousiainen, P., Pykäläinen, M., Renlund, T. & Silvander, Y. Edukustannus.

NeeViiKuu 6A (2016). Tekijät: Nousiainen, P., Pykäläinen, M., Renlund, T. & Silvander, Y. Edukustannus.

- NeeViiKuu 6B (2017, 2. painos). Tekijät: Nousiainen, P., Pykäläinen, M.,  
Renlund, T. & Silvander, Y. Edukustannus.
- Tuhattaituri 4a (2016). Tekijät: Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka,  
P., Salminen, M. & Tapiainen, T. Otava.
- Tuhattaituri 4b (2016). Tekijät: Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka,  
P., Salminen, M. & Tapiainen, T. Otava.
- Tuhattaituri 5a (2016). Tekijät: Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka,  
P., Salminen, M. & Tapiainen, T. Otava.
- Tuhattaituri 5b (2017). Tekijät: Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka,  
P., Salminen, M. & Tapiainen, T. Otava.
- Tuhattaituri 6a (2017). Tekijät: Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka,  
P., Salminen, M. & Tapiainen, T. Otava.
- Tuhattaituri 6b (2018, 1.–5. painos). Tekijät: Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä,  
P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. Otava.

# LIITTEET

## *Liite 1: Tutkimuskysely*

### Tutkimuskysely

Osa 1

...

#### Tutkimuslupa

1

Annan luvan käyttää vastauksiani tutkimuksen tekemisessä. \*

Kyllä

Ei

## Tutkimuskysymykset

2

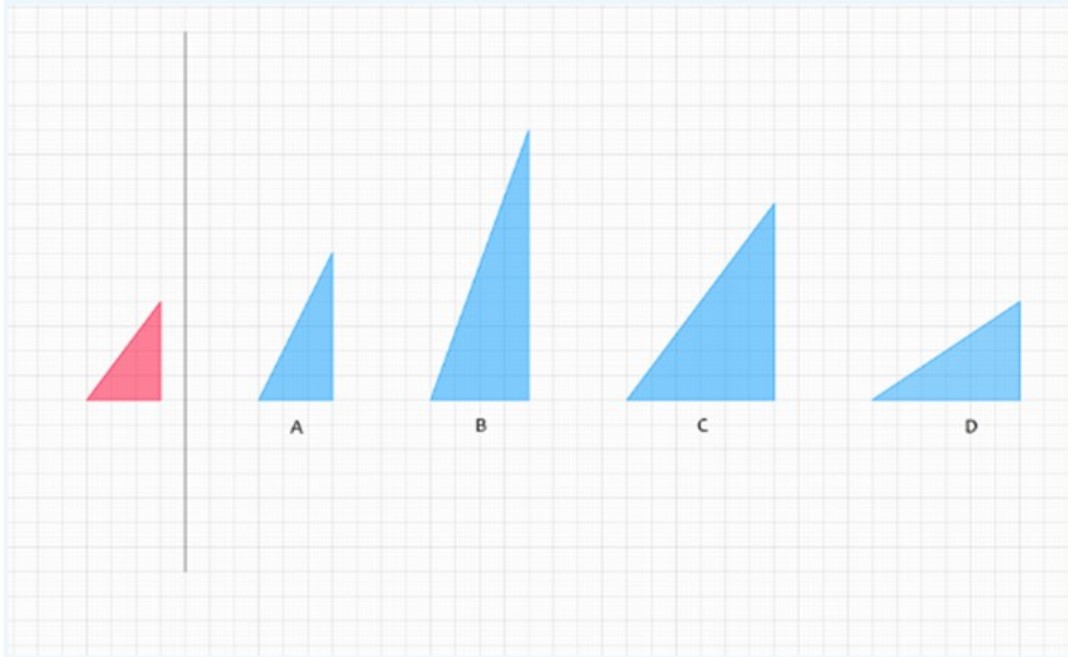
Mitkä **kaksi** seuraavista kuvioista ovat **keskenään yhdenmuotoisia**? Kirjoita yhdenmuotoisten kuvioiden kirjaimet vastaukseksi. (Esimerkiksi XY) \*



Kirjoita vastaus

3

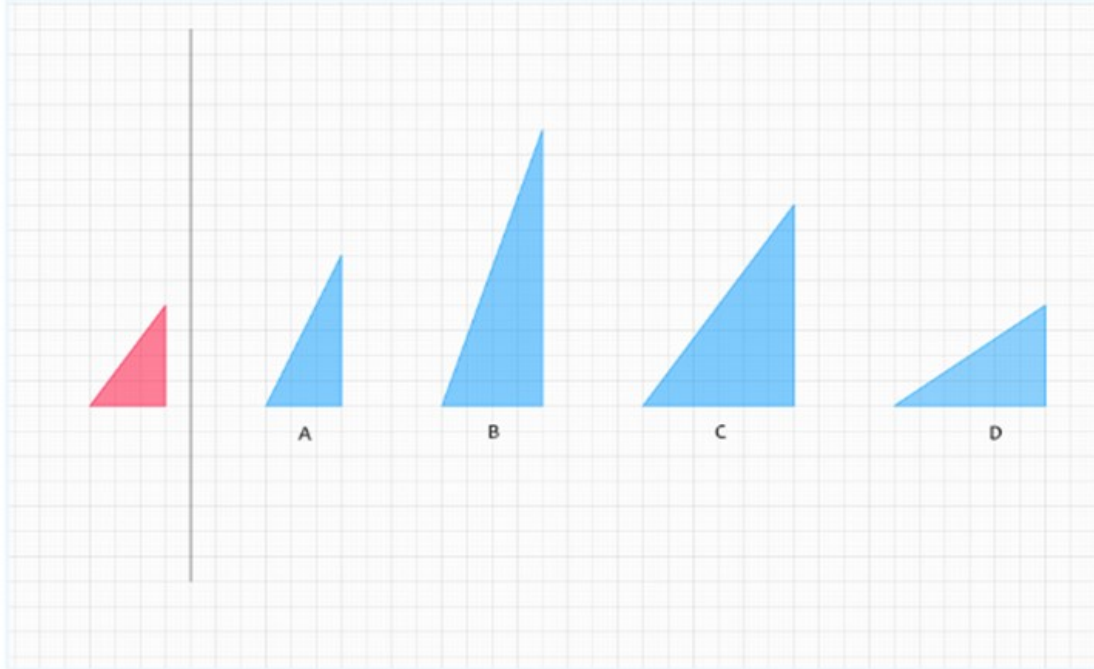
Punainen kolmio on alkuperäinen kuva. Mikä sinisistä kolmioista on sen suurennos? \*



- A
- B
- C
- D

4

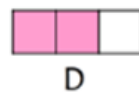
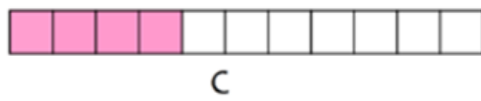
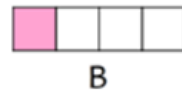
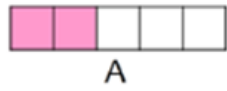
Missä mittakaavassa sininen yhdenmuotoinen kolmio on suurennettu? \*



- 4:1
- 3:1
- 2:1
- 1:1

5

Mikä seuraavista kuvioista kuvaa merkintää 2:3? \*



- A
- B
- C
- D

6

Mikä seuraavista murtoluvuista kuvaa edellisessä tehtävässä valitsemaasi ratkaisua?  
(Vaaleanpunaisen osuus valkoiseen) \*

- 1/4
- 2/3
- 2/5
- 4/11
- Ei mikään näistä

7

Maija valmistaa juhliin sata litraa mehua. Hän sekoittaa mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1:4.

**Kuinka paljon hän tarvitsee tiivistettä? \***

- 75 litraa
- 50 litraa
- 25 litraa
- 20 litraa

8

Maija valmistaa juhliin sata litraa mehua. Hän sekoittaa mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1:4.

**Kuinka suuri osa Maijan valmistamasta mehusta on mehutiivistettä? \***

- 3/4
- 1/2
- 1/4
- 1/5

9

Kerro omin sanoin, mitä tarkoittaa matemaattinen käsite *suhde*. \*

Kirjoita vastaus

10

Kaupassa 2 kg karkkia maksaa 8 €. Otto ostaa 3 kg karkkia.

**Kuinka paljon karkit maksavat? Kirjoita vastaus. \***

Kirjoita vastaus

11

Miten päädyit edellisen tehtävän ratkaisuun? Kerro sanallisesti. \*

Kirjoita vastaus

12

Kerro omin sanoin, mitä *mittakaava* tarkoittaa. \*

Kirjoita vastaus

13

Oppilas piirtää karttaa koulumatkastaan. Kartan mittakaava on 1:10 000. Oppilaan koulumatka on todellisuudessa 2 km. Kuinka pitkä koulumatka on kartalla?

Oppilas laskee matkan kartalla seuraavalla tavalla:

1:10 000 tarkoittaa, että 1 senttimetri kartalla vastaa 10 000 senttimetriä luonnossa.

10 000 cm = 1 km

2·10 000 cm = 20 000 cm

20 000 cm = 2 km

Siis 2 kilometriä luonnossa on 2 senttimetriä kartalla.

**Ratkaisiko oppilas tehtävän oikein? Mikäli ei, mitä korjaisit ratkaisussa?**

\*

Kirjoita vastaus

## Liite 2: Suhde-käsite oppimateriaaleissa

Kirja	Suurennos	Pienennös	Yhden- muotoisuus	Mittakaava	Kartan mittakaava	Muu pituuksien suhde	Suoraan verrannol- lisuuden sovellus	Määrien väliset suhteet
Milli 4A Open opas (2021)	x				x		x	
Milli 4B Open opas (2021)	x	x					x	
Milli 5A Open opas (2021)	x	x			x	x	x	
Milli 5B Open opas (2021)	x							
Milli 6A Open opas (2021)	x					x	x	
Milli 6B Open opas (2022)	x	x		x	x			
Tuhattaituri 4a (2016)					x			
Tuhattaituri 4b (2016)							x	
Tuhattaituri 5a (2016)					x	x		
Tuhattaituri 5b (2017)	x	x	x	x	x			
Tuhattaituri 6a (2017)				x			x	
Tuhattaituri 6b (2018)						x	x	
NeeViiKuu 4A (2014)							x	
NeeViiKuu 4B (2017)							x	
NeeViiKuu 5A (2017)	x	x	x	x	x	x		
NeeViiKuu 5B (2017)								x
NeeViiKuu 6A (2016)								x
NeeViiKuu 6B (2017)	x	x		x	x	x	x	

### *Liite 3: Tutkimuslupapyyntö 1*

Hei!

Olemme Anni ja Roosa, 5. vuosikurssin luokanopettajaopiskelijat Tampereen yliopistosta. Teemme parhaillamme Pro gradu –tutkielmaa aiheesta ”Matemaattinen käsite suhde alakoulun matematiikassa”. Tutkimme sitä, kuinka matematiikan suhde-käsite ilmenee alakoulun matematiikan oppimateriaalissa. Lisäksi meitä kiinnostaa se, miten kuudennen luokan oppilaat ymmärtävät kyseisen käsitteen.

**Tulemme toteuttamaan tutkimustamme Teidän huollettavanne luokalla, luokan oman opettajan suostumuksella.** Keräämme tutkimusaineistoa sähköisellä lomakkeella, jonka oppilaat täyttävät opettajan määrittelemän oppitunnin aikana viikolla 3 tai 4. Lomakkeessa oppilailta kysytään erilaisia asioita edellä kuvattuun aiheeseen liittyen. **Emme kerää oppilailta minkäänlaisia tunnistetietoja**, esimerkiksi nimeä, koulua tai sukupuolta, vaan vastaaminen tapahtuu täysin anonyymisti. Tutkimusaineistoa käsittelemme ainoastaan me, tutkimuksen toteuttajat. Luokan oma opettaja eivätkä muut ulkopuoliset näe kerättyä aineistoa. Aineistoa hyödynnetään Pro gradu –tutkielmassa, jonka valmistumisen jälkeen aineisto hävitetään asianmukaisesti.

Pyydämmekin nyt Teiltä lupaa huollettavanne osallistumisesta tutkimukseemme. Tutkimukseen osallistuminen on täysin vapaaehtoista. Pyytäisimme Teitä ilmoittamaan kirjallisesti luokan omalle opettajalle, mikäli **haluatte ehdottomasti kieltää** tutkimukseen osallistumisen. Muutoin tällä ilmoituksella hyväksytte sen, että huollettavanne osallistuu Pro gradu –tutkielmamme aineiston keräämiseen. Huollettavanne suostumusta kysytään sähköisen lomakkeen yhteydessä ja hän saa itse kieltää vastauksiensa käytön tutkimustarkoituksessa niin halutessaan.

Mikäli Teille herää jotakin kysymyksiä tutkimukseemme liittyen, voitte ottaa yhteyttä sähköpostilla. Vastaamme mielellämme lisäkysymyksiin!

Ystävällisin terveisin,

Anni Immonen  
anni.e.immonen(at)tuni.fi  
Roosa Kaivoluoto  
roosa.kaivoluoto(at)tuni.fi

Pro gradu –tutkielman ohjaaja  
Jorma Joutsenlahti  
jorma.joutsenlahti(at)tuni.fi

## Liite 4: Tutkimuslupapyyntö 2

Hei!

Olemme Anni ja Roosa, 5. vuosikurssin luokanopettajaopiskelijat Tampereen yliopistosta. Teemme parhaillamme Pro gradu –tutkielmaa aiheesta “Matemaattinen käsite suhde alakoulun matematiikassa”. Tutkimme sitä, kuinka matematiikan suhde-käsite ilmenee alakoulun matematiikan oppimateriaalissa. Lisäksi meitä kiinnostaa se, miten kuudennen luokan oppilaat ymmärtävät kyseisen käsitteen.

**Tulemme toteuttamaan tutkimustamme Teidän huollettavanne luokalla, luokan oman opettajan suostumuksella.** Keräämme tutkimusaineistoa sähköisellä lomakkeella, jonka oppilaat täyttävät opettajan määrittelemän oppitunnin aikana viikolla 3 tai 4. Lomakkeessa oppilailta kysytään erilaisia asioita edellä kuvattuun aiheeseen liittyen. **Emme kerää oppilailta minkäänlaisia tunnistetietoja**, esimerkiksi nimeä, koulua tai sukupuolta, vaan vastaaminen tapahtuu täysin anonyymisti. Tutkimusaineistoa käsittelemme ainoastaan me, tutkimuksen toteuttajat. Luokan oma opettaja eivätkä muut ulkopuoliset näe kerättyä aineistoa. Aineistoa hyödynnetään Pro gradu –tutkielmassa, jonka valmistumisen jälkeen aineisto hävitetään asianmukaisesti.

Pyydämmekin nyt Teiltä lupaa huollettavanne osallistumisesta tutkimukseemme. Tutkimukseen osallistuminen on täysin vapaaehtoista. Pyytäisimme Teitä ilmoittamaan kirjallisesti luokan omalle opettajalle, **saako huollettavanne osallistua tutkimukseen**. Mikäli annatte luvan huollettavanne osallistumiselle, hänen omaa suostumustaan kysytään vielä sähköisen lomakkeen yhteydessä. Huollettavanne saa halutessaan kieltää omien vastauksiensa käytön tutkimuksessa.

Mikäli Teille herää jotakin kysymyksiä tutkimukseemme liittyen, voitte ottaa yhteyttä sähköpostilla. Vastaamme mielellämme lisäkysymyksiin!

Ystävällisin terveisin,

Anni Immonen  
anni.e.immonen(at)tuni.fi  
Roosa Kaivoluoto  
roosa.kaivoluoto(at)tuni.fi

Pro gradu –tutkielman ohjaaja  
Jorma Joutsenlahti  
jorma.joutsenlahti(at)tuni.fi

## Liite 5: Ohjeet tehtävälomakkeen täyttämisestä

Ohje opettajalle:

**Huomioithan, että vain sellaiset oppilaat, joilla on huoltajien lupa osallistua tutkimukseen, voivat täyttää lomakkeen!**

Jaa jokaiselle tutkimukseen osallistuvalla oppilaalla suttupaperia, laskin ja tietokone/tabletti/muu laite valmiiksi.

Suosittellemme, että lomake täytetään joko tietokoneella tai tabletilla.

Jos oppilailla tulee jotakin kysyttävää lomakkeen täydentämisen aikana, voit vastata niihin oman harkintasi mukaan. Toivoisimme kuitenkin, ettet ohjaa oppilasta oikean vastauksen äärelle.

Mikäli sähköisen lomakkeen täyttämisen aikana tapahtuu jotakin poikkeavaa, siinä on ongelmia tai se keskeytyy, pyytäisimme ilmoittamaan tästä erillisellä ilmoituksella tämän linkin <https://forms.office.com/e/SScvfrGNdh> kautta. **Muutoin ei tarvitse ilmoittaa mitään. Tämä linkki on vain opettajalle, ei oppilaille!**

Lue ohjeistus oppilaille (alla).

Jaa oppilaille alla oleva linkki tai QR-koodi (seuraavalla sivulla) sähköiseen lomakkeeseen: <https://forms.office.com/e/FR4SXdh5f2> Linkin voi jakaa oppilaille esim. Wilman kautta tai QR-koodin heijastaa taululle.

Ohje oppilaalle:

Hei! Olemme Anni ja Roosa, luokanopettajaopiskelijat Tampereen yliopistosta. Teemme yhdessä opinnäytetutkimusta, johon sinäkin pääset nyt osallistumaan. Tavoitteenamme on kehittää matematiikan oppimateriaaleja ja siksi teemme tutkimusta.

Tähän tutkimukseen osallistuminen on täysin vapaaehtoista ja huoltajasi on antanut suostumuksen osallistumisellesi. Kun aloitat sähköisen lomakkeen täyttämisen, kysymme vielä sinun suostumuksesi. Toivomme, että annat käyttää vastauksiasi tutkimuksessamme, sillä siitä on iso apu meille. Tutkimuskysely sisältää erilaisia matematiikkaan liittyviä tehtäviä. Sinusta itsestäsi emme kuitenkaan tarvitse tietoja, kuten nimeä tai koulua. Älä siis kirjoita tällaisia asioita vastauksiisi.

Kohta tekemäsi tehtävät liittyvät ainoastaan tutkimuksen tekemiseen, ne eivät siis vaikuta matematiikan arviointiin millään tavalla. Tämä ei ole koe tai testi. Vastaa kysymyksiin omin sanoin siten, kuin ajattelet asian olevan.

Saat suttupaperia, mikäli tarvitset sitä joidenkin tehtävien hahmotteluun. Tämän lisäksi saat laskimen. Voit käyttää sitä vapaasti niin halutessasi. Osa tehtävistä on monivalintoja, osassa sinun tarvitsee itse selittää jotakin. Mikäli sinulle tulee jotakin kysyttävää, voit kysyä. Lue kysymykset huolellisesti ja vastaa tehtäviin rauhassa. Kaikkiin tehtäviin tulee vastata jotakin, mutta voit palata tarvittaessa edellisiin kysymyksiin ja muuttaa vastauksiasi.

Kiitos jo etukäteen tutkimukseen antamastasi panoksesta!

## Tutkimuskysely



<https://forms.office.com/e/FR4SXdh5f2>