Olli Vähtäri

KOMPLEKSISTEN POTENSSISARJOJEN TEORIAA

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Petteri Laakkonen
Huhtikuu 2023

TIIVISTELMÄ

Olli Vähtäri: Kompleksisten potenssisarjojen teoriaa
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Huhtikuu 2023

Potenssisarjat ovat hyödyllinen työkalu matematiikassa ja niillä on monia sovelluskohteita fysiikassa sekä insinööritieteissä. Yleisin sovelluskohde potenssisarjoille on funktion approksimointi pisteessä. Tämän lisäksi niitä hyödynnetään esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisussa sekä integraalien arvioimisessa. Potenssisarjat luovat myös pohjan kompleksianalyysille.

Tämä kandidaatintyö syventää lukijan tietämystä kompleksitermisten potenssisarjojen teoriasta. Lukijalta odotetaan entuudestaan kompleksianalyysin perusteiden, kuten kompleksiseen integraaliin liittyvien asioiden tuntemusta. Teoriaa käsitellään työssä matemaattisesti täsmällisesti, mutta sitä selvennetään esimerkein ja sovelluksin. Esimerkiksi tasaisen suppenemisen käsitteeseen perehdytään tarkasti, joten työ voikin täydentää aiheeseen liittyvän aineopintotasoisen kurssin sisältöjä.

Teoriaa lähestytään määrittelemällä aluksi tasaisen suppenemisen käsite funktiojonoille, jonka jälkeen se voidaan ottaa käyttöön myös funktiosarjoille. Tasainen suppeneminen on tavallista pisteittäistä suppenemista vahvempi ehto ja funktiosarjoille voidaan esittää hyödyllisiä tuloksia sen avulla. Funktiosarjan tasaisen suppenemisen tutkimista varten työssä esitellään Weierstrassin M-testi.

Kompleksitermisen potenssisarjan suppenemissäde määrää kompleksitasossa kiekon eli niin sanotun suppenemisalueen, jonka pisteissä potenssisarja suppenee. Työssä esiteltävä Cauchy-Hadamardin lause antaa kaavan suppenemissäteen määrittämiseksi ja todistaa sen olemassaolon.

Työssä osoitetaan derivoituvuuden määritelmää käyttäen, että potenssisarjaa esittävä funktio on analyyttinen suppenemisalueessaan. Näin saadun potenssisarjan derivaatan havaitaan olevan itsessään myös potenssisarja, jonka suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen. Todetaan, että induktiolla voidaan osoittaa potenssisarjan olevan äärettömän monta kertaa termeittäin derivoituva suppenemisalueessaan. Tuloksen avulla työssä johdetaan potenssisarjan kertoimille riippuvuus funktion derivaatoista.

Cauchyn integraalikaavan ja tasaisen suppenemisen avulla työssä osoitetaan, että analyyttinen funktio voidaan esittää yksikäsitteisen Taylorin sarjakehitelmän avulla. Lukijalle esitetään, miten Taylorin sarjakehitelmä voidaan muodostaa useilla eri tavoilla. Luonnollisesti määritelmän mukaan sarjan kertoimet saadaan funktion derivaattojen avulla, mutta lisäksi työssä tutustutaan Taylorin sarjan muodostamiseen geometrisen sarjan sekä jonkin entuudestaan tunnetun sarjan avulla. Tunnetun sarjan derivaattaa tai integraalia on myös mahdollista hyödyntää muodostamisessa. Työn lopuksi esitellään muutama sovelluskohde Taylorin sarjoille.

Avainsanat: potenssisarjat, kompleksitermiset potenssisarjat, tasainen suppeneminen, suppenemissäde, analyyttisyys, Taylorin sarja

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO

Potenssisarjat ovat monipuolinen työkalu matematiikassa, fysiikassa sekä insinööritieteissä. Niitä hyödynnetään monipuolisesti niin numeerisessa laskennassa kuin teoreettisissa tarkasteluissa. Siksi potenssisarjojen syvällisempi tuntemus on tärkeää.

Erityisen hyödyllisiä potenssisarjat ovat monimutkaisten funktioiden approksimoimisessa jossakin pisteessä. Tätä ominaisuutta hyödynnetään varsinkin tietokoneissa. Koska tietokoneet pystyvät laskemaan suuria määriä yksinkertaisia laskutoimituksia nopeasti, ne käsittelevät transkendenttisiä funktioita, kuten eksponenttifunktiota tai trigonometrisiä funktioita potenssisarjoina. Haluttuun normaalipituiseen lukematarkkuuteen päästyä sarjan laskeminen voidaan lopettaa, ja loput termit ajatella merkityksettöminä. Hyvin suurilla tarkkuuksilla käytetään yleensä jo muita algoritmeja. [5, s. 128] Potenssisarjojen avulla approksimointi on tuttua myös fysiikasta, jossa monimutkaisia funktioita yksinkertaistetaan käsittelemällä niiden Taylorin sarjojen muutamaa ensimmäistä termiä [10, s. 815].

Matematiikassa potenssisarjojen avulla voidaan esimerkiksi ratkaista differentiaaliyhtälöitä [9] sekä laskea hankalia integraaleja [10, s. 723]. Esimerkki potenssisarjojen soveltamisesta differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun fysiikan ongelmassa löytyy artikkelista [2]. Potenssisarjoilla on myös keskeinen osa kompleksianalyysissä, jossa funktion analyyttisyys ja siitä seuraavat tulokset pystytään määrittelemään kätevästi funktion kompleksitermisen potenssisarjaesityksen avulla [4].

Tämän tutkielman tarkoituksena on käsitellä kompleksitermisten potenssisarjojen teoriaa täsmällisemmin kuin niitä insinööriopinnoissa tavallisesti käsitellään. Aiheen käsittely aloitetaan tasaisen suppenemisen käsitteestä, joka yhdistää hyödyllisiä ominaisuuksia, kuten jatkuvuuden, funktiojonon raja-arvoon. Tasaisen suppenemisen avulla työssä pystytään todistamaan tuloksia potenssisarjoille, jotka tavallisesti kompleksianalyysin peruskursseilla sivuutetaan. Lauseiden todistukset on tehty mahdollisimman yksinkertaisiksi lukijaa ajatellen, ja niissä on käytetty esitietoluvun määritelmiä. Teorian ymmärtämisen helpottamiseksi tekstiin on otettu selkeyttäviä esimerkkejä.

Tutkielman lukijan oletetaan entuudestaan tutustuneen kompleksianalyysin perusteisiin jollakin yliopistotason kurssilla. Erityisesti kompleksisen integraalin tuntemus on hyväksi, sillä siihen ei työssä perehdytä. Vastaavat pohjatiedot löytyvät esimerkiksi kirjasta [1]. Tutkielman kannalta keskeiset lauseet, kuten Cauchyn integraalikaava kuitenkin esitellään lukemisen sujuvoittamiseksi. Tutkielman päälähteenä käytetään Hemant Kumar Pathakin kirjaa Complex Analysis and Applications [6]. Muita merkittäviä työssä käytettyjä lähteitä ovat Muirin sekä Ponnusamyn ja Silvermanin kirjat [4] ja [7].

Työn rakenne on seuraava. Luvussa 2 esitellään tarvittavat taustatiedot kompleksitermisten potenssisarjojen käsittelyyn. Keskeisimpinä asioina käsitellään tasaisen suppenemisen käsitettä ja sen seurauksia. Luvun lopuksi esitetään tasaisen suppenemisen tutkimiseen tarkoitettu Weierstrassin M-testi. Luvun 3 aluksi määritellään potenssisarja sekä tapa sen suppenemissäteen löytämiseksi. Lisäksi perehdytään potenssisarjan analyyttisyyteen. Luvussa 4 todistetaan Taylorin lause kompleksiarvoisille funktioille. Työn lopussa lukijalle esitetään runsaasti tapoja Taylorin sarjakehitelmän etsimiseen eri funktioille sekä muutamia sovelluskohteita niille.

2. ESITIETOJA

Tässä luvussa esitellään tarvittavia esitietoja kompleksitermisten potenssisarjojen käsittelyä varten. Aluksi määritellään reaalisille lukujonoille yläraja-arvo. Tämän jälkeen esitellään funktiojonojen pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen käsitteet sekä vertaillaan niiden eroja. Tasaisesti suppenevan funktiojonon rajafunktion jatkuvuus todistetaan. Toisessa alaluvussa määritellään funktiosarjojen tasainen suppeneminen ja esitellään Weierstrassin M-testi, jonka avulla voidaan osoittaa sarjan tasainen suppeneminen. Luvun lopussa esitellään lyhyesti Cauchyn integraalikaava, joka oletetaan lukijan taustatiedoksi.

2.1 Yläraja-arvo

Reaalisille lukujonoille voidaan määritellä ylä- ja alaraja-arvo. Jatkossa potenssisarjojen suppenemista tutkittaessa tarvitaan näistä vain yläraja-arvon käsitettä, joten määritellään se lähteen [3, s. 50] mukaan.

Määritelmä 2.1. Olkoon $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reaalinen lukujono. Tällöin

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (\sup\{a_n \mid n \geq k\}) \in [-\infty, \infty].$$

Luku $\limsup_{n\to\infty} a_n$ on jonon $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *yläraja-arvo*.

Koska $\sup\{a_n \mid n \geq k\}$ on vähenevä jono lukuja välillä $[-\infty, \infty]$, sillä on raja-arvo välillä $[-\infty, \infty]$, kun äärettömät raja-arvot sallitaan. Yläraja-arvon käsite on siis hyvin määritelty. Jatkossa käsitettä käytetään positiivitermisten lukujonojen yhteydessä. Ylhäältä rajoittamattoman lukujonon tapauksessa

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \infty.$$

Tällöin positiivitermisille lukujonoille $a_n \geq 0$ ja $\limsup_{k\to\infty} a_k \in [0, \infty]$.

Esimerkki 2.2. Lukujonolla $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, missä $a_n = 2 + (-1)^n$, ei ole raja-arvoa, sillä siinä vuorottelevat luvut 1 ja 3. Lukujonolla on kuitenkin yläraja-arvo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3.$$

Esimerkki 2.3. Asetetaan $a_n = \cos(n\pi/2)$ ja määritetään yläraja-arvo lukujonolle $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, missä $b_n = |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Koska $|a_n| \leq 1$, myös $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$. Toisaalta $a_n = \pm 1$ äärettömälle määrälle lukuja n, joten $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$. Siispä $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$.

2.2 Funktiojonojen tasainen suppeneminen

Ennen sarjojen tasaisen suppenemisen tarkastelua on perehdyttävä ensin funktiojonoihin ja niiden suppenemiseen. Merkintää $\{f_n(z)\}$ käytetään jatkossa päättymättömästä jonosta kompleksimuuttujan funktioita $\{f_n(z)\} = \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots\}$. Lukujonojen tapaan funktiojonoille voidaan määritellä suppeneminen, mutta suppenemiskäsitteitä on useampia erilaisia. Tämä alaluku mukailee Jerry R. Muirin kirjan [4] lukua 2.2. Määritellään aluksi pisteittäinen suppeneminen ja käydään läpi esimerkki siitä.

Määritelmä 2.4. Funktiojono $\{f_n(z)\} : D \to \mathbb{C}$ *suppenee pisteittäin* joukossa D kohti funktiota $f(z) : D \to \mathbb{C}$, jos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

kaikilla luvuilla $z \in D$.

Esimerkki 2.5. Olkoon funktiojono $\{f_n(z)\} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f_n(z) = \frac{2i}{2+nz}.$$

Funktiojono suppenee kompleksitasossa pisteittäin kohti funktiota

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{kun } z \neq 0 \\ i, & \text{kun } z = 0, \end{cases}$$

sillä $\lim_{n\to\infty} \frac{2i}{2+nz} = 0$, kun $z \neq 0$, ja $\lim_{n\to\infty} \frac{2i}{2+nz} = i$, kun $z = 0$.

Jos puhutaan vain funktiojonon suppenemisesta, tarkoitetaan yleensä juuri pisteittäistä suppenemista. Pisteittäinen suppeneminen on yksinkertaisin suppenemisen muoto, muttei työkaluna ole kovin hyödyllinen. Määritellään seuraavaksi hyödyllisempi tasaisen suppenemisen käsite.

Määritelmä 2.6. Funktiojono $\{f_n(z)\} : D \to \mathbb{C}$ *suppenee tasaisesti* joukossa D kohti funktiota $f(z) : D \to \mathbb{C}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

kaikilla $n \geq N$ ja kaikilla $z \in D$.

Funktiojonon pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen määritelmissä on pieni mutta merkittävä ero. Jos funktiojono $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin kohti funktiota f, on tällöin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ ja joukon D alkiota z kohti olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N_z, jolla $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, kun $n \geq N_z$. Luku N voi siis vaihdella riippuen muuttujan z arvosta. Tasaisessa suppenemisessa taas saman luvun N on toimittava kaikilla luvun z arvoilla. Tämä onkin pisteittäistä suppenemista vahvempi ehto. Jos funktiojono suppenee tasaisesti jollakin välillä D kohti funktiota f, se myös suppenee pisteittäin samalla välillä ja kohti samaa funktiota f. Pisteittäisestä suppenemisesta ei seuraa tasaista suppenemista, kuten seuraavassa esimerkissä osoitetaan. Mikäli kohti funktiota f pisteittäin suppeneva funktiojono kuitenkin suppenee tasaisesti, on funktion f oltava raja-arvo myös tasaisen suppenemisen mielessä.

Esimerkki 2.7. Olkoon funktiojono $\{f_n(z)\} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f_n(z) = \frac{z - 2n}{n - 3i}.$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{z}{n} - 2)}{n(1 - \frac{3i}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{z}{n} - 2}{1 - \frac{3i}{n}} = -2,$$

$f_n(z)$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $f(z) = -2$. Nyt kuitenkin $f_n(2n) - f(2n) = 2$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten sellaista positiivista kokonaislukua n ei ole, jolla $|f_n(z) - f(z)| < 2$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, eikä $f_n(z)$ siis suppene tasaisesti kompleksitasossa.

Rajafunktiolla tarkoitetaan funktiota, jota kohti funktiojono suppenee. Vaikka funktiojono koostuisi jatkuvista funktioista, ei rajafunktio välttämättä ole jatkuva. Pisteittäinen suppeneminen ei takaa rajafunktion jatkuvuutta, kuten esimerkistä 2.5 huomattiin. Tasainen suppeneminen tämän kuitenkin takaa, kuten seuraavassa lauseessa osoitetaan.

Lause 2.8. *Jos $D \subseteq \mathbb{C}$ ja $\{f_n(z)\} : D \to \mathbb{C}$ on jatkuvista funktioista koostuva funktiojono, joka suppenee tasaisesti joukossa D kohti rajafunktiota $f : D \to \mathbb{C}$, niin rajafunktio f on jatkuva.*

Todistus. Olkoot $a \in D$ ja $\varepsilon > 0$. Koska $f_n(z)$ suppenee tasaisesti, on olemassa sellainen $N \in \mathbb{Z}_+$, jolla

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.1}$$

kaikilla $n \geq N$ ja kaikilla $z \in D$. Kiinnitetään nyt $n \geq N$ ja käsitellään yhtä funktiota f_n. Koska funktio f_n on jatkuva pisteessä a, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|z - a| < \delta$, niin

$$|f_n(z) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Nyt jos $z \in D$ ja $|z - a| < \delta$, niin kolmioepäyhtälön sekä arvioiden (2.1) ja (2.2) nojalla

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis f on jatkuva pisteessä a. □

Rajafunktio voi olla jatkuva myös ilman tasaista suppenemista, eli se ei ole välttämätön ehto rajafunktion jatkuvuudelle. Tämä huomattiin esimerkissä 2.7, jossa funktiot $f_n = \frac{z-2n}{n-3i}$ ovat jatkuvia ja suppenevat pisteittäin, mutteivät suppene tasaisesti kohti jatkuvaa vakiofunktiota $f(z) = -2$.

2.3 Funktiosarjojen tasainen suppeneminen

Funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ voidaan ymmärtää sen osasummien muodostamien funktioiden $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ funktiojonona. Tasaisen suppenemisen käsite voidaan siis ottaa käyttöön myös funktiosarjoille seuraavaan määritelmän mukaisesti. [4, s. 36].

Määritelmä 2.9. Olkoon $\{f_n(z)\}$ joukossa $D \in \mathbb{C}$ määritellyistä funktioista koostuva funktiojono. Kompleksiterminen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

suppenee tasaisesti kohti funktiota $S : D \to \mathbb{C}$, jos sen osasummien

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$$

muodostama jono $\{S_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota S. Tällöin merkitään

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Samoin jos $\{S_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$ *suppenee pisteittäin* kohti funktiota S, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ suppenee pisteittäin kohti funktiota S.

Funktiojonojen ominaisuudet periytyvät funktiosarjoille. Jos funktiot f_n ovat jatkuvia, ovat osasummat S_N myös jatkuvia. Tällöin sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ supetessa tasaisesti, on rajafunktio S myös jatkuva lauseen 2.8 mukaisesti. Sarjojen tasaista suppenemista voidaan tutkia erilaisilla testeillä. Esitellään seuraavaksi Weierstrassin M-testi, jota voidaan soveltaa sarjan tasaisen suppenemisen osoittamiseen. [4, s. 36-37].

Lause 2.10 (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoot $D \subseteq \mathbb{C}$ ja $\{f_n(z)\} : D \to \mathbb{C}$ funktiojono joukossa D. Jos jokaista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellainen vakio $M_n \geq 0$, että $|f_n(z)| \leq M_n$ kaikilla $z \in D$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ suppenee tasaisesti.*

Todistus. Koska $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla kaikilla $z \in D$. Siis $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ suppenee itseisesti ja siten suppenee pisteittäin kaikilla $z \in D$. Määritellään $f(z) : D \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Olkoon $\{S_N(z)\}$ sarjan osasummien jono. Osoitetaan, että $\{S_N(z)\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(z)$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, on olemassa sellainen luku $K \in \mathbb{N}$, että

$$\left| \sum_{k=1}^{K} M_k - \sum_{k=1}^{\infty} M_k \right| = \sum_{k=K+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Tällöin kaikilla $N \geq K$ ja kaikilla $z \in D$

$$\begin{aligned} |S_N(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{N} f_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(z) \right| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis $\{S_n(z)\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(z)$. □

Esimerkki 2.11. Tutkitaan sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3i}{z^2 + 2^n}, \quad |z| < 1$$

tasaista suppenemista Weierstrassin M-testillä. Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $|z| < 1$ saadaan

$$\left| \frac{3i}{z^2 + 2^n} \right| \leq \frac{3}{|z|^2 + 2^n} \leq \frac{3}{2^n},$$

jolloin voidaan asettaa $M_n = \frac{3}{2^n}$. Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ suppenee geometrisena sarjana, joten alkuperäinen sarja suppenee tasaisesti kiekossa $|z| < 1$.

Perehdytään seuraavaksi integroinnin ja funktiojonon raja-arvon järjestyksen vaihtamiseen, joka vaatii myös funktiojonon tasaista suppenemista. Seuraava lause ja tämän seuraus mukailevat lähdettä [7, s. 254]. Lauseessa mainitulla Jordanin käyrällä tarkoitetaan tason käyrää, joka muodostaa suljetun silmukan eikä leikkaa itseään.

Lause 2.12. *Olkoon $\{f_n(z)\}$ jatkuvista funktioista koostuva funktiojono paloittain sileän Jordanin käyrän S rajaamassa suljetussa joukossa D. Jos $\{f_n(z)\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(z)$ joukossa D, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(z)\, dz = \int_S \lim_{n\to\infty} f_n(z)\, dz = \int_S f(z)\, dz.$$

Todistus. Lauseen 2.8 mukaan $f(z)$ on jatkuva tien S rajaamassa joukossa, joten integraali $\int_S f(z)\, dz$ on olemassa. Tasaisen suppenemisen määritelmän mukaan jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

kaikilla $n \geq N$ ja kaikilla $z \in \mathbb{C}$. ML-lauseen mukaisesti integraalin itseisarvo on korkeintaan funktion itseisarvon integroimistiellä saavuttama maksimi kertaa integroimistien pituus [6, s. 209].

Merkitään tien S pituutta kirjaimella L, jolloin

$$\begin{aligned}\left|\int_S f_n(z)\,dz - \int_S f(z)\,dz\right| &= \left|\int_S f_n(z) - f(z)\,dz\right| \\ &\leq \max_{z\in S}|f_n(z) - f(z)| \cdot L \\ &< \varepsilon L.\end{aligned}$$

Koska ε on mielivaltaisen pieni, jono $\int_S f_n(z)$ suppenee kohti raja-arvoa $\int_S f(z)$, joten lause on todistettu. □

Lauseen 2.12 avulla voidaan edetä nyt integraalin ja äärettömän summan järjestyksen vaihtamiseen. Tulokseen päästään jälleen käsittelemällä funktiosarjaa sen osasummien funktiojononа.

Seuraus 2.13. *Olkoon $\{f_n(z)\}$ jatkuvista funktioista koostuva funktiojono paloittain sileän Jordanin käyrän S rajaamassa suljetussa joukossa D. Jos $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ suppenee tasaisesti joukossa D, niin*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_S f_n(z)\,dz = \int_S \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz.$$

Todistus. Olkoon $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$. Tällöin

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_S f_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_S f_k(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_S S_n(z)\,dz.$$

Nyt lauseen 2.12 mukaan

$$\lim_{n\to\infty}\int_S S_n(z)\,dz = \int_S \lim_{n\to\infty} S_n(z)\,dz = \int_S \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz.$$

□

Tämä integraalin ja äärettömän summan järjestyksen vaihto on keskeinen osa luvussa 4 suoritettavaa Taylorin lauseen todistusta.

2.4 Cauchyn integraalikaava

Taylorin lauseen todistuksessa tarvitaan myös Cauchyn integraalikaavaa, joten se esitellään alla. Cauchyn integraalikaava on merkittävä tulos kompleksianalyysissä. Tässä tutkielmassa se oletetaan lukijan pohjatiedoiksi, eikä sitä sen erityisemmin käydä läpi. Aiheesta enemmän ja seuraavien lauseiden todistukset löytyvät esimerkiksi lähteistä [6, s. 234-243] sekä [7, s. 243-247].

Lause 2.14 (Cauchyn integraalikaava)**.** *Olkoon $f(z)$ analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa, joka sisältää paloittain sileän Jordanin käyrän S. Jos z_0 on piste tien S sisäpuolella, niin*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)}{(z - z_0)}dz.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Analyyttisen funktion derivaatoille saadaan Cauchyn integraalikaavan avulla johdettua seuraava lause.

Lause 2.15 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille)**.** *Olkoon $f(z)$ analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa, joka sisältää paloittain sileän Jordanin käyrän S. Tällöin funktiolla $f(z)$ on jokaisen kertaluvun derivaatat käyrän S sisäpuolella sijaitsevissa pisteissä z_0, ja*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

3. POTENSSISARJAT

Tässä luvussa siirrytään käsittelemään kompleksitermisiä potenssisarjoja. Luvun lähteenä toimii pääosin Hemant Kumar Pathakin kirjan [6] luku 2.9. Määritellään aluksi kompleksiterminen potenssisarja.

Määritelmä 3.1. *Potenssisarjaksi* kutsutaan muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{3.1}$$

olevaa sarjaa, jossa muuttujana on $z \in \mathbb{C}$, *kehityskeskuksena* $z_0 \in \mathbb{C}$, sekä *kertoimina* kompleksisen lukujonon $\{a_n\}$ termit.

Huomautus 3.2. Jatkossa potenssisarjoja voidaan tarkastella yksinkertaisemman muodon $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mukaisesti. Seuraavien lauseiden tulokset voidaan osoittaa tässä yksinkertaisemmasa muodossa, koska muuttujanvaihdolla $w = z - z_0$ yleinen muoto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ voidaan palauttaa muotoon $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$.

3.1 Potenssisarjan suppenemissäde

Potenssisarjan suppenemissäteellä tarkoitetaan suurinta mahdollista sädettä R, jonka määräämän ympyrän $|z - z_0| = R$ jokaisessa sisäpuolisessa pisteessä potenssisarja suppenee.

Määritelmä 3.3. Potenssisarjan (3.1) *suppenemissäteeksi* kutsutaan sellaista lukua R välillä $[0, \infty]$, että potenssisarja suppenee, kun $|z - z_0| < R$ ja hajaantuu, kun $|z - z_0| > R$. Suppenemissäteen määrittelemää avointa kiekkoa $|z - z_0| < R$ kutsutaan potenssisarjan *suppenemisalueeksi.*

Esitellään seuraavaksi Cauchy-Hadamardin lause, joka antaa keinon suppenemissäteen löytämiseksi määritelmän 2.1 yläraja-arvon avulla. Lauseessa yläraja-arvoa etsitään lukujonolle $|a_n|^{\frac{1}{n}}$, jossa luvut a_n ovat potenssisarjan kertoimia. Lukujonon $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ termit ovat siis välillä $[0, \infty]$, jolloin myös lukujonon yläraja-arvo on välillä $[0, \infty]$.

Lause 3.4 (Cauchy-Hadamardin lause)**.** *Liitetään potenssisarjaan* (3.1) *luku L välillä* $0 \leq L \leq \infty$*, asettamalla*

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.2}$$

Nyt potenssisarjan suppenemissäde voidaan löytää seuraavalla tavalla, jolloin se on aina olemassa:

$$R = \begin{cases} 1/L, & \textit{jos } 0 < L < \infty; \\ 0, & \textit{jos } L = \infty; \\ \infty, & \textit{jos } L = 0. \end{cases}$$

Tällöin potenssisarjan suppenemisesta tiedetään seuraavat kolme asiaa:

1. *Jos* $|z - z_0| < R$*, sarja suppenee itseisesti;*
2. *jos* $0 \leq r < R$*, sarja suppenee tasaisesti, kun* $|z - z_0| \leq r$*;*
3. *jos* $|z - z_0| > R$*, sarja hajaantuu.*

Todistus. Huomatuksen 3.2 vuoksi voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $z_0 = 0$ ja käsitellä sarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Olkoon R määritelty yhtälön (3.2) mukaisesti.

1. Olkoon $|z| < R$. Tällöin on olemassa sellainen luku ρ, että $|z| < \rho < R$, jolloin

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}.$$

Nyt yläraja-arvon määritelmän ja yhtälön (3.2) mukaan on olemassa sellainen luonnonllinen luku N, että

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$$

kaikilla $n \geq N$. Kerrotaan molemmat puolet termillä $|z^n|$, jolloin

$$|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$$

sellaisilla luvun n arvoilla, joille $n \geq N$. Huomataan, että sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $\frac{|z|}{\rho} < 1$, sillä $|z| < \rho$. Sarja siis suppenee. Tällöin majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ suppenee, jolloin potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenee itseisesti.

2. Olkoon $0 \leq r < R$ ja $|z| \leq r$. Valitaan sellainen luku $\rho > 0$, että $r < \rho < R$, jolloin

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}.$$

Kuten todistuksen ensimmäisessä kohdassa, nyt yläraja-arvon ja yhtälön (3.2) mukaan on olemassa sellainen luku $N \in \mathbb{N}$, että

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\rho}$$

kaikilla $n \geq N$. Nyt kertomalla yhtälön molemmat puolet termillä $|z|$ saadaan

$$|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n,$$

kaikilla $n \geq N$, sillä $|z| \leq r < \rho$. Huomataan, että sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ on suppeneva geometrinen sarja, sillä suhdeluku $\frac{r}{\rho}$ toteuttaa ehdon $\frac{r}{\rho} < 1$. Tällöin Weierstrassin M-testin perusteella potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ suppenee tasaisesti kaikilla $|z| \leq r < R$.

3. Olkoon $|z| > R$. Tällöin on olemassa sellainen luku ρ, että $|z| > \rho > R$, jolloin

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}.$$

Jälleen yläraja-arvon määritelmän ja yhtälön (3.2) mukaan on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\rho}, \text{ jolloin } |a_n z^n| > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$$

äärettömälle määrälle lukuja $n \geq N$. Nyt $\frac{|z|}{\rho} > 1$, joten potenssisarjalla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ on ääretön määrä termejä, jotka eivät suppene kohti nollaa. Sarja on siis rajoittamaton ja hajaantuu.

□

Lauseen 3.4 mukaan jokaisella potenssisarjalla on siis luku R, jonka määräämän z_0-keskisen kiekon sisäpuolella sarja suppenee itseisesti. Saman kiekon kompakteissa osajoukoissa, eli kiekon sisäpuolisissa suljetuissa kiekoissa sarja suppenee tasaisesti. Kaikkialla kiekon ulkopuolella potenssisarja taas hajaantuu. Lause ei kuitenkaan kerro mitään kiekon reunakäyrän pisteistä, joten niissä sarja voi joko hajaantua tai supeta. Jos $R = \infty$, potenssisarja suppenee kaikkialla kompleksitasossa. Suppenemissäteen $R = 0$ omaava potenssisarja suppenee vain pisteessä $z = z_0$. Seuraavan esimerkin tapauksessa potenssisarjan suppenemissäde on helppoa määrittää lauseen 3.4 antamalla laskukaavalla.

Esimerkki 3.5. Potenssisarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2 - i)^n}{(2 - 2i)^n}$$

on kehitetty pisteessä $z_0 = -2 + i$ ja sillä on kertoimet $a_n = 1/(2 + 2i)^n$. Nyt

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|2 + 2i|} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

joten lauseen 3.4 mukaisesti potenssisarjan suppenemissäteeksi saadaan $2\sqrt{2}$. Sarja siis suppenee itseisesti $-2 + i$-keskisessä ja $2\sqrt{2}$-säteisessä avoimessa kiekossa, sekä tasaisesti saman kiekon kompakteissa osajoukoissa.

Esimerkki 3.6. Etsitään suppenemissäde potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi/2)\, z^n.$$

Sarjan kertoimet ovat muotoa $a_n = \cos(n\pi/2)$. Nyt esimerkin 2.3 mukaan $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, joten lauseen 3.4 perusteella sarjan suppenemissäde on 1.

3.2 Potenssisarjan analyyttisyys

Tutkitaan seuraavaksi potenssisarjan analyyttisyyttä. Jos potenssisarja on derivoituva alueessa D, se on analyyttinen alueessa D. Potenssisarjan tiedetään suppenevan tasaisesti suppenemisalueessaan, joten sen on oltava myös jatkuva siellä. Analyyttisyyden osoittamiseksi on potenssisarjan oltava kompleksisesti derivoituva. Tätä varten on ensin osoitettava seuraava lause.

Lause 3.7. *Potenssisarjoilla $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ on yhtä suuret suppenemissäteet.*

Lauseen 3.7 todistusta varten tarvitaan seuraavassa apulauseessa laskettu raja-arvo.

Apulause 3.8. *Jos $a_n = n^{\frac{1}{n-1}}$, missä $n \in \mathbb{N}$, niin lukujonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo on* 1.

Todistus. Olkoon funktio $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$. Lasketaan funktion raja-arvo muuttamalla se ensin muotoon

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x-1}}.$$

Eksponenttifunktion jatkuvuuden nojalla voidaan L'Hôpitalin sääntöä käyttäen laskea ensin eksponentin raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

jolloin

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

Koska $a_n = n^{\frac{1}{n-1}} = f(n)$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. □

Apulauseen tuloksen avulla voidaan nyt todistaa lause 3.7.

Todistus lauseelle 3.7. Olkoon potenssisarjaan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ liitetty luku L lauseen 3.4 mukaisesti yhtälöllä

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

ja olkoon vastaavasti potenssisarjaan $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ liitetty luku L', joka saadaan yhtälöstä

$$L' = \limsup_{n\to\infty} |na_n|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Koska apulauseen 3.8 nojalla $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1$, saadaan

$$L' = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup_{n\to\infty} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = L,$$

joten lauseen 3.4 perusteella $R = R'$. □

Lauseen 3.7 mukaan siis potenssisarjoilla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ on yhtä suuret suppenemissäteet. Seuraavassa lauseessa osoitetaan derivoituvuuden määritelmää käyttäen, että jälkimmäinen potenssisarja on ensimmäisen potenssisarjan derivaatta. Tämän osoittamalla voidaan todistaa potenssisarjan analyyttisyys suppenemisalueessaan.

Lause 3.9. *Jos funktio $f(z)$ on potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ raja-arvo kiekossa $|z-z_0| < R$, on $f(z)$ analyyttinen kiekossa $|z-z_0| < R$ ja*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Lauseen 3.9 todistus mukailee lähteen [8] sivuja 15-16, ja sen keskeinen osa on seuraavassa apulauseessa esitelty epäyhtälö.

Apulause 3.10. *Kun $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ ja $r \in \mathbb{R}$ sekä $h \in \mathbb{C}$ on sellainen luku, että $0 < |h| \leq r$, niin*

$$|(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1}| \leq \left|\frac{h}{r}\right|^2 (|z|+r)^n.$$

Todistus. Binomikaavan avulla saadan ensin

$$\begin{aligned}
(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - z^n - hnz^{n-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\
&= \left\{ \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \right\} h^2,
\end{aligned}$$

joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
|(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-2} |h|^2 \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} r^{k-2} |h|^2 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} r^k \left|\frac{h}{r}\right|^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} r^k \left|\frac{h}{r}\right|^2 = (|z|+r)^n \left|\frac{h}{r}\right|^2.
\end{aligned}$$

□

Nyt lause 3.9 voidaan todistaa derivaatan määritelmän ja apulauseen 3.10 avulla.

Todistus lauseelle 3.9. Huomautuksen 3.2 nojalla voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $z_0 = 0$ ja käsitellä todistuksessa sarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Olkoon $R > 0$ potenssisarjan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde, jolloin

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Lauseen 3.7 mukaan R on myös sarjasta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ termeittäin derivoimalla saadun potenssisarjan $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ suppenemissäde. Olkoon z mielivaltainen suppenemisalueen piste, jolloin $|z| < R$. Olkoon r sellainen positiivinen luku, että $r < R - |z|$. Valitaan lisäksi luku h sellaiseksi, että $0 < |h| \leq r$. Tällöin apulauseen 3.10 avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \phi(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \frac{h}{h} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left((z+h)^n - z^n - h n z^{n-1} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{h}{r} \right|^2 (|z| + r)^n \\
&= \frac{|h|}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|z| + r)^n \to 0, \text{ kun } h \to 0,
\end{aligned}$$

sillä $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|z| + r)^n < \infty$, koska $|z| + r < R$. Nyt

$$\lim_{h \to \infty} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \phi(z),$$

eli funktiolla $f(z)$ on derivaatta $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, jonka sarjakehitelmän suppenemissäde on R. Funktio $f(z)$ on siis derivoituva ja täten analyyttinen alueessa $|z| < R$. □

Lauseessa 3.9 siis todettiin, että potenssisarjat ovat derivoituvia suppenemisalueessaan. Samalla huomataan, että potenssisarjan derivaatta

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

on itsessään myös potenssisarja, ja lauseen 3.7 mukaan sen suppenemissäde on myös R. Derivointia voidaan jatkaa edelleen, jolloin toiseksi derivaataksi saadaan

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

jonka suppenemissäde on edelleen R. Induktiolla voidaan osoittaa, että potenssisarjat ovat suppenemisalueessaan äärettömän monta kertaa termeittäin derivoituvia. Näin saadaan derivaatta

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \ldots (n-(k-1)) a_n z^{n-k} \\
&= k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} z^2 + \cdots. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Asettamalla $z = 0$, yhtälö (3.3) saadaan muotoon $f^{(k)}(0) = k! a_k$, josta voidaan ratkaista

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \qquad (3.4)$$

Potenssisarjan kertoimille a_n saadaan näin riippuvuuus funktiosta $f(z)$. Potenssisarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ osoitetut tulokset saadaan huomautuksen 3.2 mukaisesti laajennettua yleiselle sarjalle (3.1), jolloin yhtälö (3.4) voidaan muuttaa määritelmää vastaavaan muotoon

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \tag{3.5}$$

Funktio, joka on potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ raja-arvo kiekossa $|z - z_0| < R$, saadaan nyt esitettyä muodossa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{3.6}$$

Edellisistä tuloksista muodostetaan seuraava lause. [7, s. 182–183].

Lause 3.11. *Jos funktio $f(z)$ on potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ raja-arvo kiekossa $|z - z_0| < R$, on funktiolla kiekossa $|z - z_0| < R$ jokaisen kertaluvun derivaatat. Lisäksi potenssisarjan kertoimet ovat yhtälön* (3.5) *mukaisia.*

4. TAYLORIN SARJA

Lauseessa 3.9 osoitettiin, että potenssisarja määrittelee suppenemisalueessaan analyyttisen funktion. Luontaisesti seuraavaksi halutaan käänteisesti osoittaa, että analyyttinen funktio voidaan esittää potenssisarjana. Tulos osoitetaan Taylorin lauseessa.

4.1 Taylorin lause

Luvussa 2 esitettyjen Cauchyn integraalikaavan sekä tasaisen suppenemisen mahdollistaman integraalin ja summamerkinnän paikkojen vaihtamisen avulla pystytään nyt osoittamaan, että analyyttiset funktiot voidaan esittää Taylorin sarjakehitelmän avulla. Työssä esitetty todistus on kirjasta [7, s. 254-255]. Lause on mahdollista todistaa myös reaalisen Taylorin lauseen todistusta mukaillen, missä sarjan jäännöstermin osoitetaan lähestyvän nollaa. Tällainen todistus löytyy kirjasta [6, s. 271-272].

Lause 4.1 (Taylorin lause)**.** *Olkoon $f(z)$ analyyttinen kiekossa $|z - z_0| < R$. Tällöin*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{4.1}$$

aina, kun $|z - z_0| < R$.

Todistus. Olkoon z luku z_0-keskisen, R-säteisen ympyrän sisäpuolella ja olkoon S sellainen z_0-keskinen ja ρ-säteinen ympyrä, että $0 < |z| < \rho < R$. Tällöin luku z on myös ympyrän S sisäpuolella, ja Cauchyn integraalikaavan mukaan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(s)}{(s - z)} ds \tag{4.2}$$

Olkoon $|z - z_0| = r$. Tällöin $r = |z - z_0| < |s - z_0| = \rho$, kun $s \in S$ ja geometrisen sarjan summan kaavan avulla

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s - z_0}\left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}}\right) = \frac{1}{s - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (4.2), saadaan seurauksen 2.13 avulla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S f(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}} ds = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_S \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds\right)(z - z_0)^n,$$

jolloin lauseen 2.15 Cauchyn integraalikaavasta derivaatoille seuraa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

□

Pisteessä z_0 kehitetty funktion f Taylorin sarja on yksikäsitteinen. Taylorin lauseesta seuraa, että funktio on analyyttinen alueessa D, jos ja vain jos sillä on Taylorin sarjakehitelmä alueessa D. Analyyttisyys määritelläänkin usein tällä tavalla (ks. esim. [8, s. 16] ja [4, s. 87]).

4.2 Taylorin sarjan muodostaminen

Suppenemisalueessaan analyyttisille funktioille voidaan siis muodostaa Taylorin sarjakehitelmä. Käydään nyt lähdettä [7, s. 251-253] mukaillen läpi eri tapoja, miten Taylorin sarja voidaan löytää. Eksponenttifunktio on analyyttinen kaikkialla kompleksitasossa, joten sille voidaan muodostaa kaikkialla suppeneva Taylorin sarja.

Esimerkki 4.2. Muodostetaan funktion $f(z) = e^z$ Taylorin sarja pisteessä $z_0 = 0$. Koska $f^{(n)}(z_0) = f'(z_0) = e^0 = 1$, ovat kaikki sarjan kertoimet muotoa $a_n = \frac{1}{n!}$. Tällöin

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{4.3}$$

Sarjakehitelmän (4.3) avulla pystytään muodostamaan funktioita, joiden osana eksponenttifunktio on.

Esimerkki 4.3. Muodostetaan funktion $f(z) = z^5 e^{3z^4/2}$ Taylorin sarja origossa. Asetetaan $w = \frac{3z^4}{2}$, jolloin

$$e^{\frac{3z^4}{2}} = e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{z^{4n}}{n!},$$

jolloin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{z^{4n+5}}{n!}.$$

Funktio $f(z) = \sin(z)$ on analyyttinen koko kompleksitasossa, joten sille voidaan muodostaa Taylorin sarja missä tahansa pisteessä $z \in \mathbb{C}$. Sarja voidaan muodostaa käyttämällä hyödyksi eskponenttifunktion sarjakehitelmää origossa, mutta löytyy myös helposti määrittämällä sinin derivaattoja.

Esimerkki 4.4. Muodostetaan funktion $f(z) = \sin(z)$ Taylorin sarja origossa. Derivoimalla

$$f'(z) = \cos(z) = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right).$$

Derivointia jatkamalla n:s derivaatta saadaan muotoon

$$f^{(n)}(z) = \sin\left(z + n\frac{\pi}{2}\right),$$

jolloin origossa

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 2k \\ (-1)^n, & \text{kun } n = 2k+1, \end{cases} \qquad \text{missä } k \in \mathbb{N}.$$

Sijoittamalla tämä kertoimien a_n kaavaan Taylorin sarjaksi saadaan

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Geometrisen sarjan summan kaava on hyödyllinen työkalu Taylorin sarjoja muodostettaessa. Jos funktio saadaan esitettyä muodossa $1/(1-z)$, se voidaan esittää vastaavana sarjana $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Sarjan suppenemissäde tulee vain valita sellaiseksi, että sarja on analyyttinen ja suppeneva säteen määräämän kiekon sisäpuolella.

Esimerkki 4.5. Muodostetaan funktion $f(z) = 1/z$ Taylorin sarja pisteessä $z_0 \neq 0$. Funktio ei ole analyyttinen origossa, joten sarjan suppenemissäde voi korkeintaan olla kehityskeskuksen z_0 etäisyys origosta, eli $|z_0|$. Funktio saadaan muotoon

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0}\left(\frac{1}{1 - (-1)\cdot\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)}\right).$$

Geometrisen sarjan avulla voidaan kirjoittaa

$$f(z) = \frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0{}^n}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0{}^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Sarja suppenee, kun $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1$, eli $|z - z_0| < |z_0|$. Nyt suppenemissäde $R = |z_0|$, kuten aluksi todettiin. Muodostetaan sarja vielä pisteessä $z_0 = 2i$. Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-2i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+1}}(z-2i)^n, \quad |z - 2i| < 2.$$

Lauseessa 3.11 todettiin, että potenssisarjoilla on suppenemisalueessaan kaikkien kertalukujen derivaatat. Termeittäin derivointia voidaankin käyttää hyödyksi Taylorin sarjan löytämisessä, kun jonkin funktion sarjakehitelmä jo tunnetaan.

Esimerkki 4.6. Muodostetaan funktion $f(z) = 1/z^2$ Taylorin sarja pisteessä $z_0 \neq 0$. Huomataan, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}$, joten käytetään apuna esimerkin 4.5 tulosta

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{{z_0}^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Tällöin

$$\frac{1}{z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{{z_0}^{n+1}} n(z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{{z_0}^{n+2}} (n+1)(z - z_0)^n.$$

Lauseen 3.7 nojalla tämänkin sarjan suppenemissäde $R = |z_0|$.

Termeittäin derivoimalla löydetään helposti myös funktion $\cos(z)$ sarjakehitelmä sinifunktion Taylorin sarjan avulla.

Esimerkki 4.7. Koska $\cos(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(z)$, tällöin

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Koska potenssisarjat ovat äärettömän monta kertaa termeittäin derivoituva suppenemisalueessaan, on niillä vastaavasti ääretön määrä antiderivaattoja. Seurauksen 2.13 mukaan potenssisarjoja voidaan suppenemisalueessa myös integroida termeittäin. Tätäkin voidaan käyttää hyödyksi Taylorin sarjojen muodostamisessa.

Esimerkki 4.8. Muodostetaan funktion $f(z) = \mathrm{Log}(z+2)$ Taylorin sarja pisteessä $z_0 = -1$, kun $|z+1| < 1$. Funktion $f(z)$ derivaatalle löydetään helposti sarjakehitelmä

$$f'(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{1-(-1)(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^n.$$

Funktio $f(z)$ on analyyttinen kiekossa $|z+1| < 1$ ja logaritmifunktion päähaaralle $f(-1) = \mathrm{Log}(1) = 0$, joten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(z+2) = f(z) - f(-1) = \int_{-1}^{z} f'(s)\,ds &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{z} (-1)^n (z+1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} (z+1)^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z+1)^n
\end{aligned}$$

Jos käsitellään päähaaran sijaan yleistä logaritmin muotoa $\log(z+2)$, tulee huomioon ottaa kompleksisen logaritmin monikäsitteisyys. Tällöin $\log(1) = ik2\pi$, jolloin

$$\log(z+2) - ik2\pi = f(z) - f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z+1)^n$$

Siis

$$\log(z+2) = ik2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z+1)^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4.3 Taylorin sarjan sovelluksia

Tutkielman laajuuden puitteissa Taylorin sarjan sovelluksista annetaan vain muutama esimerkki. Muita esimerkkejä löytyy esimerkiksi lähteistä [10, s. 811-817] sekä [9]. Yleinen sovelluskohde Taylorin sarjalle on funktioiden approksimointi jossakin pisteessä.

Esimerkki 4.9. Arvioidaan lukua e^i funktion e^z origoon kehitetyn Taylorin sarjan kuudella ensimmäisellä termillä. Nyt

$$\begin{aligned} e^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} &= 1 + i + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \frac{i^4}{4!} + \frac{i^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + i - \frac{1}{2} - \frac{i}{6} + \frac{1}{24} + \frac{i}{120} + \cdots \\ &\approx \sum_{n=0}^{6} \frac{i^n}{n!} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) + i\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right) \\ &= 0,5417 + 0,8417i. \end{aligned}$$

Edellisen esimerkin tapauksessa vähälläkin termien määrällä reaali- ja imaginääriosat ovat kahden desimaalin tarkkuudella oikeat. Taylorin sarja on myös kätevä työkalu raja-arvon määrittämisessä, kun L'Hôpitalin sääntöä ei voida käyttää.

Esimerkki 4.10. Lasketaan raja-arvo $\lim_{z\to 0} = \dfrac{\sin(z^3) - z^3}{(z - \sin(z))^3}$. Osoittaja saadaan muotoon

$$\sin(z^3) - z^3 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{6n+3}\right) - z^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{6n+3}$$

ja nimittäjästä

$$z - \sin(z) = z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z^3) - z^3}{(z - \sin(z))^3} &= \lim_{z\to 0} -\frac{\left(-\frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \cdots\right)}{\left(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)^3} \\ &= \lim_{z\to 0} -\frac{z^9\left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{12}}{7!} + \cdots\right)}{z^9\left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots\right)^3} \\ &= -\frac{\frac{1}{3!}}{\frac{1}{(3!)^3}} = -36 \end{aligned}$$

5. YHTEENVETO

Tässä kandidaatintyössä perehdyttiin syvemmin kompleksisten potenssisarjojen teoriaan, jota on tärkeä ymmärtää potenssisarjojen monien sovelluskohteiden käytössä. Lauseita ja niiden todistuksia käytiin läpi matemaattisesti täsmällisesti selventävien esimerkkien avulla. Työssä esiteltiin myös muutamia sovelluskohteita potenssisarjoille.

Työn aluksi perehdyttiin tasaisen suppenemisen käsitteeseen ja verrattiin sitä tavalliseen pisteittäiseen suppenemiseen. Tasaisen suppenemisen havaittiin olevan pisteittäistä vahvempi ehto, joka takaa funktiosarjoille hyödyllisiä ominaisuuksia, kuten rajafunktion jatkuvuuden sekä summamerkinnän ja integraalin vaihdon. Potenssisarjojen suppenemissäteelle annettiin Cauchy-Hadamardin lauseessa laskukaava, joka kertoi samalla potenssisarjan tasaisesta suppenemisesta.

Potenssisarjan analyyttisyyttä osoittaessa huomattiin, että potenssisarjat ovat äärettömästi derivoituvia suppenemisalueessaan. Samalla potenssisarjan kertoimille saatiin riippuvuus potenssisarjaa esittävän funktion derivaatoista. Lopuksi osoitettiin Taylorin sarjakehitelemän olemassaolo analyyttisille funktioille ja esiteltiin erilaisia tapoja sarjakehitelmän muodostamiselle.

Potenssisarjojen sovelluskohteista esitettiin vain muutama laskuesimerkki työn teoriapainotteisuuden nojalla. Potenssisarjoja kuitenkin sovelletaan runsaasti monilla tekniikan eri osa-alueilla. Esimerkiksi kirjassa [9] perehdytään differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen potenssisarjoja käyttäen. Fysiikassa sarjoja käytetään paljon approksimointiin. Esimerkiksi kirjan [10] sivujen 815-817 esimerkeissä sarjoja käytetään suhteellisuusteorian sekä optiikan ongelmien ratkaisuun.

Kompleksianalyysiä opiskelleet tietävät, että sarjakehitelmiä on mahdollista muodostaa myös funktioille, jotka eivät ole analyyttisia kaikissa suppenemisalueen pisteissä. Luonnollinen jatkumo tälle työlle olisikin syvällisempi perehtyminen Laurentin sarjoihin. Mielenkiintoinen teoreettinen sovelluskohde potenssisarjoille on myös analyyttisen jatkeen muodostaminen, eli analyyttisen funktion määrittelyjoukon laajentaminen. Aiheesta enemmän löytyy kirjan [6] luvusta 10.

LÄHTEET

[1] R. P. Agarwal, K. Perera ja S. Pinelas. *Introduction to Complex Analysis*. 1. painos. Springer, 2011. ISBN: 1461401941.

[2] X. Cao, W. Niu, Z. Cheng ja J. Shi. Power Series Iterative Approximation Solution to the Temperature Field in Thermoelectric Generators Made of a Functionally Graded Temperature-Dependent Material. *Journal of electronic materials* 49.9 (2020), 5379–5390. ISSN: 0361-5235.

[3] B. Lafferriere, G. Lafferriere ja M. N. Nguyen. *Introduction to Mathematical Analysis I*. Second Edition. Portland State University Library, 2016. ISBN: 1365605523.

[4] J. R. Muir. *Complex Analysis: A Modern First Course in Function Theory*. Wiley, 2015. ISBN: 1-118-70527-0.

[5] J.-M. Muller. *Elementary Functions: Algorithms and Implementation*. Birkhäuser Boston, 2016. ISBN: 9781489979810.

[6] H. K. Pathak. *Complex Analysis and Applications*. Springer, 2019. ISBN: 9811397333.

[7] S. Ponnusamy ja H. Silverman. *Complex Variables with Applications*. Birkhäuser Boston, 2006. ISBN: 0-8176-4513-6.

[8] M. Rao, S. Fournais, J. Moller ja H. Stetkaer. *Complex Analysis: An Invitation (2nd Edition)*. World Scientific Publishing Company, 2015. ISBN: 9814579610.

[9] J. Sochacki ja A. Tongen. *Applying Power Series to Differential Equations: An Exploration through Questions and Projects*. Springer, 2023. ISBN: 3031245865.

[10] J. Stewart, D. K. Clegg, S. Watson ja L. Redlin. *Single Variable Calculus: Early Transcendentals*. 9. painos. Vol. 9E. Cengage Learning, 2020. ISBN: 9780357022269.