Tampereen yliopisto

Anniina Immonen

"MIKSE PITÄÄ TEHÄ, KUN VOI VAAN PÄÄTELLÄ?"

Ongelmanratkaisu ja kielentäminen 5E-mallilla toteutetussa matematiikan opetuksessa

Diplomityö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastajat: Terhi Kaarakka
Mika Koponen
Maaliskuu 2023

TIIVISTELMÄ

Anniina Immonen: "Mikse pitää tehä, kun voi vaan päätellä?"
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Matemaattisten aineiden DI-opettajankoulutus
Maaliskuu 2023

Ongelmanratkaisutaitojen tarve arkielämässä on ilmeistä ja siksi niitä tulisi opetella jo koulussa. Tulevaisuuteen katsominen opetusta suunnitellessa tarjoaisi oppilaille parhaat valmiudet tulevaisuuden työhön ja arkeen – ja oppiminen olisi muutakin kuin kaavojen muistamista ja toistamista. Tässä diplomityössä syvennytään yläkoulumatematiikkaan ongelmalähtöisen opetuksen kautta hyödyntämällä pedagogista 5E-mallia opetuksen runkona ja avaamalla kielentämisen näkökulmia opetuksessa. Ongelmanratkaisuprosessin tutkimiseksi ja 5E-mallin tarkastelua varten diplomityöhön tehtiin kolmen viikon opetuskokeilu seitsemäsluokkalaisten matematiikan tunneilla.

Opetuskokeilu koostui kolmesta 5E-syklistä, jotka suunniteltiin yhtälöaiheen ympärille vaakakäsitteen kautta. 5E-mallin vaiheita tarkasteltiin opettajan tunnin jälkeisten äänitteiden ja merkintöjen avulla vertaamalla teoreettiseen 5E-malliin. Lisäksi oppilaiden ryhmätöitä äänitettiin, ja muodostettiin niistä aineistolähtöisesti graafeja kuvaamaan ongelmanratkaisuprosessin etenemistä. Analyysissä eroteltiin ongelmanratkaisuprosessi seitsemään vaiheeseen, joista merkittäväksi nousi ongelman sanoittaminen ja opettajan avustus. Tuloksissa huomattu selkeä yhteys ongelman sanoittamisen ja oikean ratkaisun välillä vahvistaa kielentämisen hyötyä matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Ongelmalähtöinen opetus nosti esiin käsitteellisen ymmärryksen tärkeyttä kaavojen ja tehtävien toistamisen rinnalla. Tulokset antavat opettajille aiheita oppituntiensa suunnitteluun ja graafien havainnollistavat esitykset ongelmanratkaisuprosessista useita mahdollisuuksia tulevaisuuden tutkimukselle.

Avainsanat: 5E-malli, ongelmanratkaisu, kielentäminen, yhtälönratkaisu, käsitteellinen ymmärrys

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Anniina Immonen: "Why do it, if you can reason it?"
Master's thesis
Tampere University
Master's Programme in Science and Engineering
March 2023

The need for problem-solving skills is evident at home and at work. Why would it not be an essential part of education? Having a forward looking mindset when planning modern day school environment would offer our students the best possible future in work and everyday life – and something more than memorizing formulas and copying the teacher's notes. This thesis offers an insight into Finnish upper secondary school mathematics based on a problem-based teaching method that uses the 5E teaching model as a framework. To get a detailed look at seventh graders' problem-solving and the 5E model, a three week teaching study was conducted in a Finnish mathematics classroom.

The study comprised of three 5E cycles that revolved around equations through the idea behind a balance scale. The results for the 5E model were analyzed with the use of teachers' comments after each lesson and problem-solving more specifically with students' recorded attempts at solving balance scale problems. The problem-solving processes were divided into seven categories from which *wording the problem* and *teacher's help* were highlighted. The problem-solving processes were illustrated by the use of graphs, which visualized a relation between wording the problem and finding the correct solution. The results emphasize the role of *languaging* in mathematical problem-solving and importance of conceptual understanding in relation to learning by memorizing.

Keywords: 5E model, problem-solving, languaging, equation solving, conceptual understanding

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Aloitin tämän työn ajatuksen tasolla noin vuosi sitten. Tuossa vaiheessa tiesin vain, että aihe liittyy jotenkin matematiikan opetuksen kehittämiseen ja hyödynnän uutta matematiikan opettajan sijaisuuttani siinä jollain tavalla. Toiveeni toteutui, vaikka ei yhtä vauhdikkaasti, kuin alkujaan olin suunnitellut. Tästä huolimatta tämä työ opetti minulle valtavasti matematiikan opetuksesta, tutkimuksen tekemisestä ja ennen kaikkea armollisuutta itseäni kohtaan.

Tutkimuksestani voin olla ylpeä ohjaajieni Terhin ja Mikan ansiosta. Lähditte intohimoisesti mukaan hatariin ajatuksiini työn aiheesta, ja Mikan päämäärätietoisella johdattelulla aihe kääntyi ongelmalähtöisen opetuksen suuntaan. Teidän yhteistyöllä sain tarvitsemaani ohjausta, vaikka vuorotellen itkin ja nauroin tapaamisten aikana. Terhille iso kiitos koko projektin aikaisesta aikatauluttamisesta, lohduttavista sanoista ja yksityiskohtaisista kommenteista erityisesti matematiikkaosiossa. Mikalle annan erityiskiitoksen tsemppaamisesta ja uskosta tähän työhön sekä lukuisista perusteellisista kommenteista, joilla sain työn tähän muotoon. Kiitos teille.

Perheenäitinä tämän diplomityön kirjoittaminen on vaatinut itseni lisäksi uhrauksia läheisiltäni. Haluan kiittää Äitiä lastenhoitoavusta, Isiä eteenpäin kannustavista kommenteista ja Ainoa Latex-avusta ja kuuntelemisesta. Opintojeni aikana muodostin yhden opiskelukaverin. Kiitos Eedit tuesta ja ystävyydestä. Thank you Sändi for the support you gave me throughout my thesis-project, I did it! Anopin tuki, luottamus ja kannustus on ollut ensiarvoista – en edes pysty niistä tarpeeksi kiittämään.

Viimeisenä kiitoksen saa tyttöjen lisäksi mieheni Jere. Pitkään kestänyt työ on vaatinut aikaani ja uhrauksia enemmän, kuin aluksi ajattelimme. Olet kannustanut minua ja mahdollistanut työn valmistumisen useammalla mökkireissulla sen parissa. Kuuntelit avautumistani ja koitit etsiä ratkaisuja, vaikka aina en itsekään tiennyt, mitä tarvitsisin. Nyt tämä vaihe on päätöksessä ja voimme suunnata ajatuksiamme yhteisen tavoitteemme Ekovalkean suuntaan. Kiitos Urpo, oot rakas.

Tampereella, 12. maaliskuuta 2023

Anniina Immonen

SISÄLLYSLUETTELO

1. Koulu ja tulevaisuus . . . 1
2. Teoreettinen viitekehys . . . 3
   2.1 5E-malli opetuksen runkona . . . 3
   2.2 Tuloksia 5E-mallilla . . . 6
   2.3 Haasteita 5E-mallilla . . . 7
   2.4 Opettajankoulutuksella hyötyä 5E-mallin käytölle . . . 9
   2.5 Matematiikan opetus ja oppiminen . . . 10
3. Yhtälönratkaisusta nolla-avaruuteen . . . 13
4. Tutkimusmenetelmät . . . 21
   4.1 Konteksti: Opetuskokeilun yksityiskohtainen kuvaus . . . 22
   4.2 Kohderyhmä . . . 37
   4.3 Aineistonkeruu . . . 38
   4.4 Tutkimusetiikka . . . 38
   4.5 Aineistonanalyysi . . . 39
5. Tulokset . . . 41
   5.1 Kiinnostus . . . 41
   5.2 Tutkiminen . . . 43
   5.3 Selittäminen . . . 60
   5.4 Syventäminen . . . 63
   5.5 Arviointi . . . 66
   5.6 Yhteenveto . . . 70
6. Pohdinta . . . 73
   6.1 *Kirjoittakaa jotain siihen teiän paperiin* . . . 73
   6.2 *Mikse pitää tehä, kun voi vaan päätellä?* . . . 76
   6.3 Luotettavuustarkastelu . . . 81
   6.4 Jatkotutkimusideoita . . . 82

Lähteet . . . 83

Liite A: Tutkimuslupahakemus Ylöjärven opetuspäällikölle . . . 86

Liite B: Tutkimuslupakysely vanhemmille . . . 88

Liite C: Tutkimuslupakysely oppilaille . . . 89

SANASTO

5E-malli	SCIS-mallista laajennettu pedagoginen opetusmalli, jossa opetus rakentuu 5 vaiheen (kiinnostus, tutkiminen, selittäminen, syventäminen, arviointi) ympärille.
SCIS-malli	Kolmivaiheinen opetusmalli, engl. Science Curriculum Improvement Study
BSCS	engl. Biological Sciences Curriculum Study
CAMT	Matemaattisen luovuuden testi, engl. Creative Ability in Mathematics Test
MAT	Matemaattisen osaamisen testi, engl. Mathematics Achievement Test
MII	Luettelo matemaattisesta kiinnostuksesta, engl. Mathematics Interest Inventory
Polyan ongelmanratkaisumalli	Nelivaiheinen ongelmanratkaisumalli, jossa vaiheet ongelman ymmärtäminen, suunnitelman laatiminen, suunnittelman toteuttaminen ja arviointi.
Avoimen ongelmanratkaisun malli	Nelivaiheinen avoimille ongelmille kehitetty malli, jossa vaiheet ongelman rajaaminen, ratkaisun etsiminen, hypoteesin muodostaminen ja hypoteesin tarkasteleminen.
$N(A)$	Matriisin A nolla-avaruus
aR_m	Matriisin R rivi m kerrotaan luvulla a.
b	Vakiotermi
$\mathbf{b}$	Vektori
$\mathbb{R}$	Reaaliluvut
$T : V \to W$	Lineaarikuvaus
$ker(T)$	Lineaarikuvauksen ydin
x_1	Muuttuja

1. KOULU JA TULEVAISUUS

Ongelmia ratkaistaan kotona, töissä, harrastuksissa ja ihmissuhteissa. Voisiko niitä opetella ratkaisemaan jo matematiikan oppitunneilla? Peruskoulun ytimessä on tarve auttaa oppilasta menestymään muuttuvassa maailmassa. [36] Työelämän, arjen ja ympäröivän maailman muuttuminen viestii yksilötasolla myös ihmisen toiminnan muutoksen tarpeesta. Tämän päivän koulu kasvattaa niitä aikuisia, joita tulevaisuuden työelämässä tarvitaan.

Koulun muuttamiseen tarvitaan mielen toiminnan ymmärtämistä.[42] Niin opettajan kuin oppilaan tulisi oppia tiedostamaan oman mielensä toimintaa, eli vahvistamaan metakognitiivisia taitojaan. Opettajalle tärkeää on ymmärtää lisäksi oppilaan mielen toimintaa, ja sitä miten oppiminen ja oppimisprosessi tapahtuu. Oppimisprosessissa oppilaan toimintaa voidaaan rinnastaa erilaisten roolien kautta. [26] Oppilas *muistajana* on edelleen opetuksen kulmakivenä: tieto siirretään opettajalta oppilaalle huomioimatta oppilaan ennakkokäsityksiä. Muistajan rinnalla on oppilas *tekijänä*, jolloin oletuksena on oppilaan kyky kopioida opettajan toimintaa. Opettaja esittää kaavan ja tehtävän taululla, minkä jälkeen oppilas avaa tehtäväkirjan ja opettelee toistamaan samaa kaavaa ilman sen syvällistä ymmärrystä. Tämä ennakkokäsitysten merkityksestä vaikeneminen vie oppilaan uudenlaiseen ongelmanratkaisutilanteeseen asti, jolloin soveltamistaitoa ei löydykään. Tulevaisuuden työelämässä, ellei jo tällä hetkellä, kaavan muistajat ja toistajat korvataan tietokoneilla. [36] Opetuksen on muututtava maailman mukana.

Oppilaat oppivat koulussa pohjan, jota hyödyntävät tulevaisuuden työelämässä. Koulun toimintatavat, oppitunnit, opettajat ja tehtävät heijastavat sitä toimintaa, jonka oppilaat ottavat malliksi tulevaisuudessa. Vastustus uusille toimintatavoille, oppitunneille tai tehtäville on suurta, koska vanhat toimintatavat ovat tuttuja ja turvallisia. [37] Kysymykset, epävarmuuden sietäminen ja luovuus ovat oikean aivolohkon taitoja, jotka jäävät järkevän, loogisen ja analyyttisen ajattelun varjoon. Stressi, valtava tietomäärä ja itsevarmuuden puutos valtaavat mielen, eikä luovalle ajattelulle ole tilaa. Hyvät ideat ja luovuus tarvitsevat vapautta. Luova ajattelu vie tietokoneen edelle.

Ajattelu tarvitsee ymmärrystä ja tietoa ympäröivästä tilanteesta sekä taitoa yhdistää sitä aikaisempiin kokemuksiin. [42] Näin luodaan uutta tietoa ja muokataan omia ennakkokäsityksiä. Oppilaan rooleista *ajattelija* huomioi oppilaan olemassaolevat oletukset, tul-

kinnat ja näkökulmat. [26] Ajattelijan rooliin päästään vuorovaikutuksen ja yhteisöllisen oppimisen kautta, jolloin ymmärtäminen tulee oppimisen keskeiseksi tavoitteeksi ja samalla tunnistetaan myös mielen toiminta. Huomaamalla oppilaan omat teoriat autetaan oppilasta ymmärtämään uusi tieto syvällisesti, mikä kiteyttää itseensä konstruktivistisen oppimisteorian.

Neljäntenä oppilaan roolina on oppilas *asiantuntijana*, jolloin oppimisen ytimessä on osallistuminen tiedon rakentamiseen. [26] Työelämässä asiantuntijoiden ensisijaisena ajatuksena ei ole oppiminen, vaan edessä olevien *ongelmien ratkaiseminen* ja uusien ajatusten esittäminen. [42] Tietotyöläiselle tai luovalle tiedemiehelle kirjan muistamisen ja toistamisen sijaan kyky ongelmien keksimiseen, ratkaisemiseen ja soveltamiseen on olennainen. Hyvien kysymysten sisällyttäminen oppimiseen vaatii oppilailta päättelyä, tietojen linkittämistä ja soveltamista uusiin tilanteisin. [42] Hyvillä useamman eri vastauksen omaavilla kysymyksillä voidaan viedä oppilas tiedosta ymmärtämiseen ja sen soveltamiseen. Avoimet kysymykset ovat *ongelmalähtöisen oppimisen* ytimessä.

Ongelmatehtävät ovat avainosassa konstruktivistisessa tutkivassa oppimisessa. [28] Tutkiva oppiminen on laaja käsite, joka pitää sisällään niin projektioppimista kuin ongelmalähtöistä opetusta, mutta pääosassa ovat kysymykset ja aidot ongelmat, joita voidaan ratkaista. Ongelmalähtöisellä opetuksella voidaan siirtyä kohti oppilaan roolia asiantuntijana. Tässä muutoksessa opettajan rooli on merkittävä. Tässä työssä syvennytään ongelmalähtöiseen opetukseen, ja hyödynnetään pedagogista 5E-mallia opetuksen selkärankana. Tutustutaan matematiikan oppimisen kannalta merkittäviin piirteisiin, joista merkittävimpänä nostetaan esiin kielentämisen hyötyjä ongelmalähtöisen oppimisen tukena. Kiinnitetään huomio ongelmanratkaisuprosessin kannalta merkittäviin vaiheisiin ja tarkastellaan 5E-mallin toimivuutta ongelmanratkaisuprosessin tutkimisessa. Teoreettisen tarkastelun ja opetuskokeilun kautta pyritään löytämään vastauksia seuraaviin kysymyksiin:

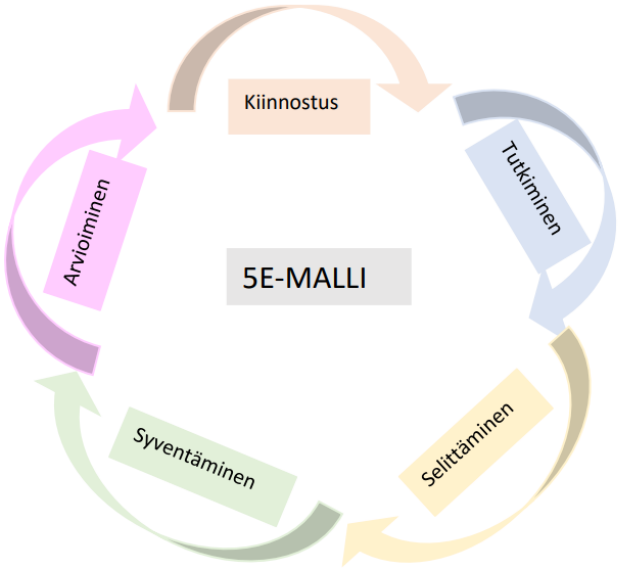
> **Millä tavoilla kielentäminen ja opettajan oikea-aikainen tuki vaikuttavat matemaattisen ongelman ratkaisemiseen?**
>
> **Millaisia matemaattisen ajattelun piirteitä 5E-malli tukee ongelmalähtöisessä matematiikan opetuksessa?**

2. TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Matematiikan opetus on moniulotteista – tulisi huomioida oppilaan ja opettajan ajattelua, matematiikan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä sekä suunnata opetusta niin, että oppilaan rooli muuttuu muistajasta ja toistajasta kohti asiantuntijaa ja tutkijaa. Lähtökohdat tutkimuskysymysten vastauksille muodostetaan syventymällä ongelmalähtöiseen matematiikan opetukseen 5E-mallin kautta. Tämän jälkeen perehdytään matematiikan opetuksen ja oppimisen tekijöihin, joista erityisesti kielentäminen korostuu tutkimusta varten teetetyssä opetuskokeilussa.

2.1 5E-malli opetuksen runkona

Teoreettiseksi opetusmalliksi kehitettiin 1980-luvun keskivaiheilla BSCS:n rahoittaman tutkimustyön tuloksena 5E-malli (*Biological Sciences Curriculum Study (BSCS) 5E Instructional model*) [3]. Aikaisemmin tuloksia tuottaneen SCIS-oppimissyklin (*Science Curriculum Improvement Study (SCIS) model*) pohjalta kehitetyssä 5E-mallissa oppimisen vaiheet ovat kuvan 2.1 mukaiset kiinnostus (*engagement*), tutkiminen (*exploration*), selittäminen (*explanation*), syventäminen (*elaboration*) ja arviointi (*evaluation*). 5E-mallin vaiheita voidaan soveltaa opetussuunnitelmaan vuositasolla, kurssitasolla tai yksittäisten oppituntien suunnittelemisessa. Vaiheiden mukaista opettajan ja oppilaan toimintaa kuvataan taulukoissa kunkin vaiheen kohdalla.



Kuva 2.1. *Kuvaus 5E-mallin vaiheista*

KIINNOSTUS

5E-mallin ensimmäisessä vaiheessa luodaan yhteydet aikaisempaan tietoon, eli suunnataan oppilaan rooli kohti ajattelijaa [26]. Mielenkiinnon aikaansaamiseksi voidaan käyttää erilaisia menetelmiä, kuten videota, sanomalehtiartikkelia tai mielenkiintoa herättäviä kysymyksiä.[35] Syklin aloittava vaihe ei kuitenkaan ole sidottu tunnin aloitukseen, vaan esimerkiksi palautettavan kotitehtävän avulla opettaja voi arvioida ennakkotietoja ja vaikuttaa seuraavien vaiheiden etenemiseen.

OPPILAS	OPETTAJA
Hämmentyy ongelmasta	Kertoo säännöt
Kysyy kysymyksiä	Herättää mielenkiinnon ja uteliaisuuden
Motivoituu	Käyttää kysymyksiä, ongelmia tai ristiriitoja
	Pyrkii selvittämään oppilaiden ennakkotietoja

Taulukko 2.1. *Kiinnostus: 5E-mallin mukainen toiminta*

TUTKIMINEN

5E-mallin toisessa vaiheessa päästään ajattelijan roolista tutkijan rooliin. Tutkivia tehtäviä käytetään jalustana aikaisempien virhekäsitysten ja taitojen muodostamiselle ja muokkaamiselle. Oppilaalla on mahdollisuus arvioida omaa ymmärrystään ongelmasta tai käsitteestä. [35] Tutkivat, konkreettiset ja käytännönläheiset tehtävät tukevat oppilaiden he-

rännyttä mielenkiintoa.

OPPILAS	OPETTAJA
Ajattelee ilman rajoituksia	Ohjaa toimintaa ja rohkaisee oppilaita yhteistyöhön
Tutkii ja kokeilee ennakko-oletuksia	Seuraa ja kuuntelee oppilaiden työskentelyä
Muodostaa uusia oletuksia ja kokeilee niitä	Antaa oppilaille tarpeeksi aikaa ongelmien ratkaisemiseen
Kirjaa havainnot ja ideat	Kysyy johdattelevia kysymyksiä tarvittaessa
Kysyy kysymyksiä aiheesta	Ei kerro onko ratkaisu oikein/väärin

Taulukko 2.2. *Tutkiminen: 5E-mallin mukainen toiminta*

SELITTÄMINEN

Kolmas vaihe on sekä oppilaan että opettajan aktiivista syventymistä tutkimisvaiheissa esiintyneisiin ongelmiin, ideoihin ja kysymyksiin. [35] Tutkimisvaiheen jälkeen oppilaat ovat valmiimpia antamaan omia selityksiään ja osallistumaan teorian esittämiseen, vaikka oppilaiden valmius selitysten tuottamiseen ja esittämiseen vaatiikin harjoittelua. [3] Edelleen opetuksessa painottuu oppilaan rooli ajattelijana, sillä selittämisvaiheessa pyritään luomaan ymmärrystä uusista käsitteistä ja tuomaan ne esille oppilaan ennakkokäsityksiä kuunnellen.

OPPILAS	OPETTAJA
Selittää havainnot ja vastaukset muille	Rohkaisee oppilaita selittämään käsitteitä ja havaintoja omin sanoin
Kuuntelee kriittisesti ja kyseenalaistaa muiden selitykset	Pyytää perusteluja selityksille
Kuuntelee ja pyrkii ymmärtämään opettajan tarjoaman selityksen	Esittää käsitteet suoraviivaisesti ja selkeästi
Viittaa aikaisempiin tehtäviin	Käyttää selityksien pohjana oppilaiden ennakkokäsityksiä
Käyttää kirjattuja havaintoja selityksessä	Käyttää selityksissä myös ohjelmia, videoita, tmv.
Arvioi omaa ymmärrystään	Arvioi oppilaiden muodostuvaa ymmärrystä

Taulukko 2.3. *Selittäminen: 5E-mallin mukainen toiminta*

SYVENTÄMINEN

Neljäntenä 5E-mallin vaiheena on syventäminen, jossa uusien kokemusten kautta luodaan syvempää ja laajempaa ymmärrystä käsitteistä, prosesseista ja taidoista. Näiden yleistäminen on syventämisvaiheen päätavoite. Tutkivan ja selittämisvaiheen jälkeen käsite on muodostettu oppilaiden kanssa, joten syventävässä vaiheessa voidaan keskittyä tehokkaaseen tehtävien tekemiseen ilman rutiininomaista kaavojen pyörittelyä. [20]

OPPILAS	OPETTAJA
Kokeilee ja soveltaa opittua uusissa vastaavissa tilanteissa	Olettaa oppilailta virallisia määritelmiä ja selityksiä
Käyttää aiempaa tietoa kysmysten, ratkaisujen ja päätösten muodostamiseen	Rohkaisee oppilaita soveltamaan käsitteitä ja taitoja uusissa tilanteissa
Toimii yhdessä muiden kanssa ja kysyy heidän ymmärrystään	Muistuttaa oppilaita vaihtoehtoisista selityksistä

Taulukko 2.4. *Syventäminen: 5E-mallin mukainen toiminta*

ARVIOINTI

Viimeisenä vaiheena 5E-mallissa on arviointi: mahdollisuus sekä oppilaalle, että opettajalle arvioida oppimisen tuloksia. Oppilaita rohkaistaan itse arvioimaan omaa ymmärrystään ja osaamistaan. Opettajat arvioivat oppilaiden oppimisprosessia ja tavoitteisiin pääsemistä myös muissa syklin vaiheissa. Molemmat tukevat opetussuunnitelman asettamia tavoitteita oppilaiden itsearvioinnin sekä työskentelyn arvioinnin merkityksestä eierillisenä osana opetusta. [30]

OPPILAS	OPETTAJA
Osoittaa ymmärrystä tai tietoa konseptista tai taidosta	Observoi oppilaiden soveltaessa uusia konsepteja
Arvioi osaamistaan ja kehittymistään	Arvioi oppilaiden tietoja ja taitoja
Kysyy jatkotutkimuksiin johdattelevia kysymyksiä	Kysyy avoimia kysymyksiä

Taulukko 2.5. *Arviointi: 5E-mallin mukainen toiminta*

2.2 Tuloksia 5E-mallilla

5E-malli on luonnontieteiden opetukseen painottuva, mutta sen käyttö matematiikan opetuksessa on laajentunut. 5E-mallin hyödyllisyyttä on tutkittu ja havaittu laajasti eri tutkimuksissa. Esimerkiksi matematiikan alalla huomattiin 5E-mallilla apua matemaattisen luovuuden lisääntymisessä, ja toisessa tutkimuksessa trigonometrian osaamisen kehittymisessä. [40, 1] Intiassa tehty tutkimus matemaattisen luovuuden lisääntymisestä vertasi

kahdeksasluokkalaisten matematiikan koetuloksia ja tulosten perusteella rohkaisi opettajia painottamaan oppilaille vain avoimia ongelmia sekä luomaan tilan ongelman ratkaisemiselle ja näin virittämään oppilaiden luovuutta. Kyseinen tutkimus toteutettiin Greenfieldin koulussa Kurukshetran kaupungissa, ja siihen osallistui yhteensä 32 oppilasta. Oppilaat jaettiin kontrolli- ja tutkimusryhmään, joista jälkimmäiselle annettiin 5E-mallin mukaista opetusta. Matemaattista luovuutta testattiin CAMT-testillä (*Creative Ability in Mathematics Test*) ja tuloksia analysoitiin *Mann-Whitney -testillä*. Tuloksissa tarkasteltiin 5E-mallin hyötyjä matemaattisen luovuuden lisäämisessä ja verrattiin kontrolliryhmään. Tutkimustulokset osoittavat 5E-mallin mukaan opetusta saaneiden matemaattisen luovuuden lisääntyneen selvästi kontrolliryhmään nähden. Tutkimuksessa ei syvennytä matemaattisen luovuuden sisältöön, eikä toisaalta pohdita syitä 5E-mallin hyötyihin sen lisäämisessä. [40]

Turkissa teettetty tutkimus keskittyi 5E-mallin hyötyihin oppilaiden trigonometrian osaamisen ja tiedon pysyvyyden saralla. [1] Tutkimus toteutettiin kahden ryhmän kesken, joista toisen ryhmän opettajana oli 5E-malliin perehtynyt tutkija, ja kontrolliryhmän opettaja toteutti opetuksen perinteisesti. Tutkimukseen osallistuneet 120 oppilasta suorittivat trigonometriaan liittyvän kokeen kolmesti: ennakkotietojen selvittämiseen, opetuksen jälkeisten tulosten analysoimiseen, sekä kuukauden jälkeen tiedon pysyvyyden mittaamiseen. Tuloksissa huomattiin positiivinen kehitys trigonometrian osaamisessa ja tiedon pysyvyydessä 5E-mallilla opetettujen oppilaiden kesken. Tutkimustyön tulosten pohjalta viitattiin siihen, kuinka oppilailla tulisi olla mahdollisuuksia tutkia, kokeilla, selittää ja löytää virheet tehtävistä, ja toisaalta jättää opettajan rooli enemmän oppilaan avustajaksi ja ohjaajaksi. [1]

2.3 Haasteita 5E-mallilla

Positiivisten tulosten ohella teoreettisen mallin mukaan opettaminen on tuonut myös haasteita. [15] Eräässä tutkimuksessa tarkasteltiin opettajien ja oppilaiden toimintaa 5E-mallin vaiheissa ala-asteen opetuksessa Turkissa. Tutkimusaineisto saatiin 15 opetusharjoittelijan videoiduista oppitunneista, jotka analysoitiin vaiheita vastaavien toimintojen esiintymisfrekvenssillä. Käytetyimmäksi osoittautuivat kiinnostus- ja selittämisvaiheet. Tutkimisvaiheessa huomattiin selkeästi opettajajohtoisuutta, eikä kyseisessä vaiheessa päästy merkittäviin tuloksiin tästä syystä. Syventävän vaiheen toimintaa ja arviointia havaittiin vähäisesti. Tutkimustyön merkittävänä havaintona oli opetusharjoittelijoiden haasteet 5E-mallin toteuttamisessa opetustilanteessa, vaikka teoreettista osaamista ja tuntisuunnittelua mallin mukaan oli harjoiteltu. Opetustilanteessa haasteita opetusharjoittelijoille tuottivat muun muassa luokanhallinnan haasteet.

Opettajien epävarmuus omasta roolistaan sai yhdysvaltalaisessa tutkimuksessa heidät palaamaan opettajajohtoisuuteen selittämisvaiheessa. [38] Tutkimukseen valittiin seitsemän yläkoulun matematiikan opettajaa, joille oli taattu pedagogista ja sisällöllistä tukea ra-

hoitetun tutkimustyön kautta. Opettajat olivat videoineet viisi oppituntiaan, jotka pisteytettiin yliopistohenkilökunnan toimesta. Opettajista saatiin kokonaiskuva matematiikan opettajien tasosta kyseisellä alueella. Tähän tutkimukseen valittujen opettajien videoiduista oppitunneista valittiin 14 tutkimuksen aineistoksi. Tutkimustuloksia analysoitiin 5E-mallia vastaavan opettajan toiminnan kautta. Taulukkoon kirjattiin jokaisen 5E-mallin vaiheen ja opettajan toiminnan kohdalle 1 (havaittu) tai 0 (ei havaittu), sekä vaiheen kokonaistulos 0-4. Seitsemän opettajan keskiarvot kunkin 5E-vaiheen kohdalla osoittivat parhaimmat tulokset kiinnostus- ja tutkimisvaiheessa, joissa keskiarvo opettajien kesken oli 2.6/4. Pienimmät tulokset matematiikan opettajien kesken saatiin selittämisvaiheessa, jossa keskiarvo oli 1.75/4. Opettajat eivät ohjanneet oppilaita itse selittämään tuloksiaan tutkimusvaiheen jälkeen, vaan tarjosivat itse tiedot ja käsitteet oppilailta kysymisen sijaan. 14 videoidussa matematiikan oppitunnissa ei huomattu lainkaan syventävän vaiheen toimintaa, vaan oppitunnit loppuivat yhden tai kahden aktiviteetin jälkeen. Tutkimustyön pohjalta todettiin, että opettajille tarjottu opettajankoulutus 5E-mallista voisi parantaa heidän mahdollisuuksiaan toteuttaa vastaavaa opetusta luokkahuoneessa.

Opettajien kokemat haasteet ulottuvat opettajan roolin lisäksi 5E-mallin vaiheiden mukaiseen aikatauluttamiseen ja tuntisuunnitteluun. [5] 55 alakouluun erikoistuvaa opetusharjoittelijaa pohjois-Texasin yliopistosta osallistuivat tutkimukseen. Opetusharjoittelijoilla tavoitteena oli opettaa alakoulun luonnontieteiden menetelmäkurssi, jossa keskityttiin ongelmalähtöisyyteen. Opetusharjoittelijoiden yliopistokurssi jaettiin kolmeen vaiheeseen: tuntisuunnittelua 5E-mallilla, opettajaopiskelijoiden opettaminen ja viimeisenä alakoulussa opettaminen 5E-mallilla. Opetusharjoittelijat vastasivat samaan haastattelukyselyyn ennen ja jälkeen kurssin, ja lisäksi 15 opetusharjoittelijaa haastateltiin toteutuksen jälkeen. Tutkimuksessa huomattiin, että erityisesti selittämisvaiheessa ei toteutettu opetusta suunnitelman mukaan, ja toisaalta opetusharjoittelijoilla oli vaikeuksia myös oppilaiden osaamisen arvioimisella. Lisäksi viidesosa harjoittelijoista koki syventävän vaiheen haastavaksi toteuttaa. Tutkimuksessa nostettiin esiin myös muita harjoittelijoiden kokemia haasteita. Tuntien suunnitteleminen ja aikatauluttaminen 5E-mallin vaiheiden mukaan tuotti vaikeuksia ja oli aikaa vievää. Haasteisiin esitettiin myös ratkaisuja, joista edellä kuvattuihin yhdistettiin tuntisuunnittelun harjoitteleminen ja useiden lähteiden käyttö tunteja suunnitellessa. Aikatauluttamiseen liitettiin suurena tekijänä opetusharjoittelijoiden vähäinen luokanhallinnan kokemus.

Suomessa 9. luokkalaisten biologian tunneilla [39] saadut tulokset viittaavaat samaan suuntaan. Tutkimuksessa tarkasteltiin 5E-vaiheiden toteutumista opettajien ja opetusharjoittelijoiden pitämillä biologian tunneilla. Tuloksissa verrattiin sekä opettajien ja opetusharjoittelijoiden toimintaa että oppilaiden ja opettajien näkemyksiä tuntien kulusta. Tulokset osoittivat opettajajohtoisuutta tutkimisvaiheessa eikä tietoja liitetty aiempiin kokemuksiin. Selittämisvaiheessa oppilaiden näkemykset kuvastivat tottumattomuutta avoimempaan keskusteluun ja omien ajatusten perustelulle. Tuntien aikaista arviointia havait-

tiin vähän – ainoastaan perinteisenä läksyjen kuulusteluna. Opettajohtoisuus huomattiin myös erityisesti opetusharjoittelijoiden tarpeesta viedä tuntia eteenpäin, jolloin keskeinen avoin keskustelu jäi vähemmälle. Kokeneemmat opettajat antoivat oppilaille enemmän tilaa miettiä virheellisiä ratkaisuja.

2.4 Opettajankoulutuksella hyötyä 5E-mallin käytölle

Mekaniikan opetuksessa tehty tutkimus tuotti selkeän tuloksen opettajien ja opetusharjoittelijoiden kokemuksista 5E-mallin käytössä. [25] Kolmesta eri lukiosta Nuamasheke districtissä Rwandassa valittiin yhteensä kuusi fysiikan opettajaa osallistumaan tutkimukseen. Tutkimuksessa seurattiin opettajien antamaan opetusta mekaniikan tunneilla ennen 5E-koulutusta sekä sen jälkeen, ja kerättiin molemmissa havaintoja kunkin opettajan kohdalla. Kerätyt havainnot analysoitiin 5E-mallia vastaaviksi asteikolla 1-5, missä 1 oli minimitulos ja 5 korkein, joka kertoi opettajan tehneen kaiken oletetusti 5E-mallin mukaan. Tuloksissa laskettiin keskiarvo ja keskihajonta tuloksista ennen 5E-mallin koulutusta ja sen jälkeen. Tutkimustyön tuloksissa huomattiin yleisesti, että ennen koulutusta keskiarvo oli matala (2,39/5), kun opettajien käymän 5E-mallikoulutuksen jälkeen keskiarvo nousi selkeästi (4,79/5). Positiivisia tuloksia vastasi opettajien koulutuksen jälkeiset parannukset erityisesti kiinnostus- ja arviointivaiheissa. Opettajat käyttivät tunnin alussa aikaa luovien ja kiinnostusta herättävien aktiviteettien ja kysymysten esittämiseen, ja toisaalta lopettivat tunnit arvioimalla oppilaita rakentavalla palautteella ja tätä kautta kannustamalla oppilaita omien kysymysten ja tulosten ilmaisemiseen.

5E-mallille saadulla opettajan koulutuksella todettiin merkittävä vaikutus opettajien mahdollisuuksille käyttää ja soveltaa sitä. [27, 38, 15] Opetuksen muuttuminen riippuu opettajien kyvystä tunnistaa ja haltuun ottaa 5E-mallin periaatteita. Ajatus vahvistuu Nigerialaisessa tutkimuksessa, jossa 5E-mallilla saadut positiiviset tulokset johtuivat selkeästi opettajien saamasta koulutuksesta, mutta myös opettajien rohkeudesta käyttää 5E-mallia opetuksessaan. [27] Tutkimukseen osallistui 172 n. 15-vuotiasta lukiolaista neljästä eri koulusta Nigerian Ibadanin Metropolista. Kahdesta koulusta tutkimukseen osallistuvien oppilaiden opettajat saivat 5E-mallikoulutuksen. Kahden muun koulun opettajat muodostivat kontrolliryhmän, jossa opettajat etenivät perinteisesti. Kontrolliryhmälle annettiin ohjenuoraksi kolme vaihetta: oppilaiden ennakkotietojen selvittäminen, uuteen aiheeseen johdattelu ja uuden aiheen esittäminen vähitellen. Tutkimuksessa oppilaat tekivät MAT (*Mathematic Achievement Test*) ja MII (*Mathematics Interest Inventory*) -kokeet ennen ja jälkeen opetuskokeilun. Tuloksissa taulukoitiin oppilaiden osaaminen ja kiinnostus matematiikan opiskeluun ennen ja jälkeen opetuskokeilun, ja huomattiin selkeä ero ryhmien välisissä tuloksissa. Oppilaita osallistettiin opetukseen selkeästi enemmän 5E-ryhmässä eri vaiheissa. Kiinnostus matematiikan opiskeluun kasvoi kyseisessä ryhmässä. Tutkimustyön tuloksissa pohdintaa heräsi 5E-mallin omaksumisesta ja opettajan uskallukses-

ta käyttää sitä opetuksen runkona.

Opettajille tarjottavan koulutuksen lisäksi tutkimuksessa kannustettiin tarjoamaan opettajaopiskelijoille opetusharjoittelua 5E-mallin mukaisella opetuksella, ja erityisesti painottaa opettajan roolin muuttumista informaation lähteestä opetuksen fasilitaattoriksi. Vaihtoehtoisesti kannustettiin opettajia ja opetusharjoittelijoita luomaan 5E-mallin mukaisia kurssimateriaaleja muiden opettajakollegoiden ymmärryksen ja opetuksen tueksi [3, 15]. Tarpeeseen vastataan myös Suomessa 5E-mallia käyttävällä matematiikan pedagogisia ja teoreettisia tietoja yhdistävällä kehittämistutkimuksella [22].

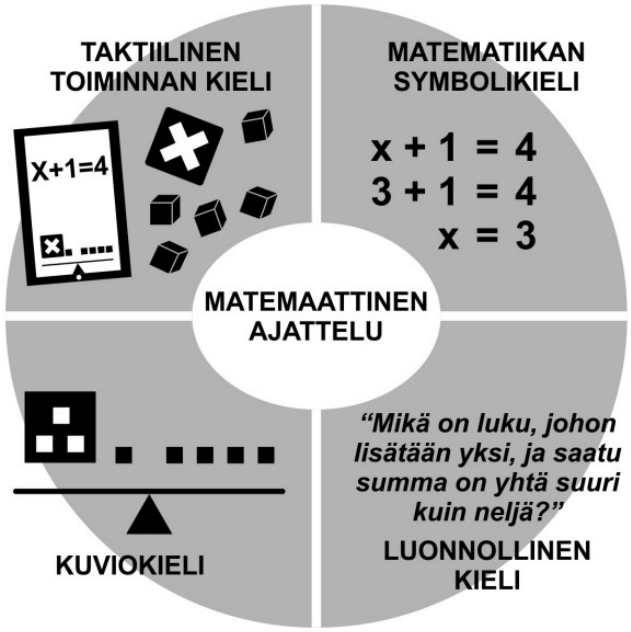
2.5 Matematiikan opetus ja oppiminen

Teoreettisen mallin käyttöönotossa ja yleisesti matematiikan opettamisessa tulisi huomioida matematiikan osaamiseen vaikuttavia tekijöitä. [20] Matematiikan tunneilla usein pääosassa oleva kirjan tehtävien toisto tukee vain yhtä neljästä osaamisen piirteestä. *Proseduraaliseksi sujuvuudeksi* kutsutaan oppilaan kykyä toistaa tehtäviä tehokkaasti, mutta saattaa johtaa yksittäisten toimintojen oppimiseen varsinaisen ymmärryksen sijaan. Matematiikan oppikirjoissa painotetaan usein tehtävien toistoa, jolloin käsitteellisen ymmärrys saattaa jäädä vajaaksi. Avaimena voisi olla osaamisen piirteisiin lukeutuvan *mukautuvan päättelyn* huomioiminen. Mukautuvaa päättelyä edistävät toiminnot vahvistavat kykyä selittää tehtävää ja tarjota perusteluja sille, miksi ratkaisu etenee esitetyllä tavalla. Mukautuva päättely pitää sisällään matematiikan *kielentämisen*.

Kielentämisen hyödyllisyys matematiikan tunneilla on merkittävä. [16] Käsitteen oppimisessa on kaksi puolta: sisältö ja sen ilmaisu. Sisällöllä viitataan konkreettiseen asiaan, päämäärään tai ajatukseen, ja ilmaisulla oppilaan kuvaukseen käsitteestä, tehtävästä tai ongelmasta oman ymmärryksen mukaisesti. Tämä mahdollistaa niin muiden oppilaiden kuin opettajan päästä käsiksi kyseisen oppilaan ymmärrykseen aiheesta. Ilmaisu on vapaamuotoinen, ja sitä muodostaessaan oppilas pohtii ja jäsentää käsitettä omien uskomusten ja ennakkotietojen kautta, ja samalla jäsentelee omaa matemaattista ajatteluaan.

Matemaattista ajattelua ja käsitteellistä ymmärrystä voidaan kehittää kielentämisen kautta. Matematiikan oppimista voidaan tukea eri kieliä hyödyntämällä: symbolikieli, luonnollinen kieli, kuviokieli ja etenkin alakoulussa käytössä ollut taktiilisen toiminnan kieli, jossa huomioidaan käsinkosketeltava oppimismateriaali. [17] Esimerkki kielten hyödyntämisestä yhtälön opettamisessa nähdään kuvasta 2.2. Myöhemmin tutustutaan samaa aihetta käsitteleviin esimerkkeihin opetuskokeilun yhteydessä. Kielten välillä voidaan siirtyä ja harjoitella matemaattisen käsitteen tai ongelman ilmaisemista eri tavalla. Tämä mahdollistaa oppilaalle käsitteen tai tehtävän selittämisen oman ymmärryksen mukaisesti.

Kielentämisen lisäksi matemaattista ajattelua kehittää kolmantena osaamisen piirteisiin sisältyvänä *strategista kompetenssia* lisäävät tehtävät. [20] Nämä viittaavat ongelman-



Kuva 2.2. *Yhtälönratkaisun oppiminen kielentämisen näkökulmasta, [18]*

ratkaisua vaativiin tehtäviin ja kykyyn hyödyntää aiempaa tietoa uusien ongelmanratkaisustrategioiden löytämisessä. Tunneilla usein vain edistyneemmät etenevät vaativampiin tehtäviin, joita on vähänlaisesti.

Eri kielten käyttöä voidaan hyödyntää myös strategisen kompetenssin kehittämisessä, erityisesti sanallisten tehtävien ymmärtämisessä. [14] Yhtenä sovelluksena on tarinankerronta, jossa yksinkertaisen laskun ympärille muodostetaan tarina ja siihen liittyvä kysymys, joka ratkaistaan konkreettisten välineiden ja piirrosten avulla. Lopuksi annetaan ratkaisu sekä sanallisella selityksellä, että symbolikielellä. Tarinankerronnassa käsite muodostetaan kaikkia kieliä hyödyntämällä. Taulukko 2.6 havainnollistaa 5E-mallin käyttöä yksittäisen tehtävän ratkaisemisessa. Tarinapaperiesimerkissä kuvataan esimerkin avulla vaihe vaiheelta symbolisen tehtävän ratkaisemista ja siinä käytettyjä matematiikan kieliä. Esimerkki tarjoaa laajemman ja kokonaisvaltaista ymmärrystä tuottavan ratkaisun yksinkertaiselle symboliselle tehtävälle. Tarinan keksimisen opettelu matemaattisen laskun ympärille kehittää ajatteluntaitoja, mahdollistaa erilaisten ongelmien ratkaisemisen ja auttaa oppilasta ymmärtämään käsitteen syvällisemmin. Symbolikieleen siirtyminen kannattaa vasta käsitteen ymmärtämisen jälkeen, kun asiaa on jo käsitelty konkreettisten välineiden, piirrosten ja sanallisten selitysten avulla. Taktiilisen toiminnan käyttö tukee oppilaita, jotka ymmärtävät paremmin käsinkosketeltavia aiheita, ja samalla opettaja pystyy arvioimaan oppilaan ymmärrystä ennen muihin kieliin siirtymistä. [14]

TARINAPAPERI: 5E-malli ja kielentäminen

	Esimerkkitehtävä: $5x = 15$	Käytetty kieli
KIINNOSTUS		
1. Kirjoita laskuun liittyvä tarina ja keksi laskuun liittyvä kysymys.	*"Viisi vihkoa maksaa viisitoista euroa. Kuinka monta euroa yksi vihko maksaa?"*	Luonnollinen kieli
TUTKIMINEN		
2. Ratkaise tarinaan liittyvä kysymys välineillä. Piirrä ratkaisusta kuva.	Viisi vihkoa/tavaraa, viisitoista kolikkoa. Kolikot jaetaan tasan tavaroiden kesken. Yhdelle viholle jää 3 kolikkoa. Piirretään kuva.	Taktiilisen toiminnan kieli, kuviokieli
SELITTÄMINEN		
3. Kirjoita vastaus sanallisesti.	*"Yksi vihko maksaa kolme euroa."*	Luonnollinen kieli
SYVENTÄMINEN		
4. Kirjoita tarinan kysymys ja tulos symbolikielellä.	*"$x = 3$"*	Symbolikieli
ARVIOINTI		
5. Arvioi sanallisesti, kuinka hyvin ymmärsit tehtävän.	*"Ymmärsin tehtävän ja ratkaisun, mutta en osaa näyttää laskua matemaattisesti..."*	Luonnollinen kieli

Taulukko 2.6. *Tarinapaperi-esimerkki 5E-mallin ja kielentämisen hyödyntämisestä yksinkertaisen tehtävän ratkaisemisessa. Sovellettu [14] s. 117.*

Viimeisenä neljästä matematiikan osaamisen piirteistä on matematiikkakuva. Matematiikan oppimiseen liittyy vahvasti oppilaan käsitys itsestään matematiikan oppijana, jolloin opetuksen tulisi myös vahvistaa oppilaan myönteisiä uskomuksia matematiikasta ja omista mahdollisuuksista sen oppimiseen. Toisaalta matematiikan opiskelussa tulisi löytää myös yhteys luokan ulkopuolelle. [20]

3. YHTÄLÖNRATKAISUSTA NOLLA-AVARUUTEEN

Tässä kappaleessa johdatellaan nolla-avaruuden käsitteeseen lineaarisesta yhtälöryhmästä muodostetun matriisin sekä lineaarikuvausten kautta. Havainnollistamalla yliopistossa eteen tulevia aiheita asetetaan painoarvoa peruskoulumatematiikassa käsitteelliseen ymmärtämiseen tärkeyteen. Myöhemmin opinnoissa ymmärtäminen vaatii enemmän työtä, joten hyvän perustan merkitys korostuu. Nolla-avaruus aiheena pohjautuu tässä työssä keskeisenä aiheena olevan yhtälön ymmärtämiseen.

Määritelmä 3.1. *Lineaarinen yhtälö*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

on yhtälö, jossa $x_1, x_2, ..., x_n$ ovat ensimmäisen asteen muuttujia ja kertoimet $a_1, a_2, ..., a_n$ ja b vakioita. [6] Kun tarkastellaan useampaa yhtälöä kerrallaan, saadaan yhtälöryhmä.

Määritelmä 3.2. *Lineaarinen yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + ... + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + ... + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots + \qquad \vdots + ... + \qquad \vdots \ = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

on useamman lineaarisen yhtälön joukko, jossa on m kappaletta yhtälöitä, joiden muuttujilla $x_1, x_2, ..., x_m$ on vakiokertoimet $a_{11}, ..., a_{1m}, ..., a_{m1}, ..., a_{mn}$ ja oikealla puolella vakiot $b_1, ..., b_m$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuna on sellaiset luvut $s_1, s_2, ..., s_n$, jotka sijoitettuna muuttujiin $x_1, x_2, ..., x_m$ toteuttavat jokaisen ryhmän yhtälöistä.

Esimerkiksi yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} -3x - \ \ y + 3z = -3 \\ \quad\ \ -2y - \ \ z \ = 1 \\ 3x + 2y - 3z \ = 0 \end{cases}$$

on kolmen yhtälöä ja kolme muuttujaa x, y ja z. Muuttujat ja kertoimet ovat yhtälöiden vasemmalla puolella ja vakiot yhtälön oikealla puolella.

Määritelmä 3.3. Taulukkoa, jossa on m riviä ja n saraketta, kutsutaan $m \times n$*-matriisiksi*.

Määritelmä 3.4. Yhtälöryhmästä muodostetussa *kokonaismatriisissa*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

vasemmalla puolella merkintä a_{ij} tarkoittaa rivin i alkiota sarakkeessa j, eli yhtälöryhmän muuttujan kerrointa tässä kohdassa. Kokonaismatriisin oikealla puolella merkintä b_i tarkoittaa yhtälöryhmän rivin i vakiota yhtälön oikealla puolella.

Edellä olevan esimerkin yhtälöryhmästä vasemmanpuoleisista kertoimista saadaan *kerroinmatriisi*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

jossa on 3 riviä ja 3 saraketta ja oikeanpuoleisista vakioista vakiotermivektori

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jossa on 3 riviä ja 1 sarake. Yhtälöryhmä vastaa matriisin ja vektorin tuloa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jossa $\mathbf{x}$ on muuttujavektori

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmän kokonaismatriisi saadaan kerroin- ja vakiomatriiseista muotoon

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Määritelmä 3.5. $m \times n$ matriisin ja vektorin $\mathbf{x}$ tulo on vektori

$$A\mathbf{x} := x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + ... + x_n\mathbf{a_n},$$

jossa $\mathbf{a_i}$ on matriisin A sarakkeen i vektori.

YHTÄLÖRYHMÄN RATKAISEMINEN MATRIISIEN AVULLA

Yhtälöryhmien ratkaiseminen matriisien avulla helpottaa ratkaisuprosessia. Yhtälöryhmän kokonaismatriisista muodostetaan alkeisrivimuunnoksilla redusoitu porrasmuoto, josta yhtälöryhmän ratkaisut ovat helposti nähtävissä.

Määritelmä 3.6. Matriisille voidaan tehdä seuraavia *alkeisrivimuunnoksia*:

- Vaihdetaan kaksi riviä keskenään,
- Kerrotaan rivin alkiot vakiolla $c \neq 0$,
- Kerrotaan yhden rivin alkiot nollasta poikkeavalla vakiolla, sitten lisätään ne toisen rivin.

Esimerkin kokonaismatriisille tehdään alkeisrivimuunnos ensimmäiselle riville. Merkinnöissä R_m tarkoittaa riviä m, ja merkintä $aR_m - R_n$, että tuo rivi kerrotaan luvulla $a \neq 0$ ja siitä vähennetään rivi n.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Alkeisrivimuunnoksia jatketaan rivi kerrallaan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Alkeisrivimuunnoksilla saatiin matriisi, jolla on ensimmäisessä sarakkeessa vain yksi nollasta poikkeava alkio. Matriisilla on edelleen samat ratkaisut, kuin alkuperäisellä matriisilla eli yhtälöryhmällä. Alkeisrivimuutokset eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. [6] Alkeisrivimuunnoksilla voidaan muodostaa porrasmuoto, jolla helpotetaan yhtälöryhmän ratkaisemista. Jos ratkaisu on yksikäsitteinen, se nähdään suoraan porrasmatriisissa, jossa on ainoastaan nollia ja johtavia alkioita.

Määritelmä 3.7. Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos seuraavat väitteet toteutuvat:[34]

1. Mahdolliset rivit, joissa on pelkkiä nolla-alkioita ovat alimpana
2. Ensimmäinen rivin nollasta poikkeava alkio, *johtava alkio*, on oikealla puolella edellisen rivin ensimmäiseen nollasta poikkeavaan alkioon nähden
3. Nollasta poikkeavia alkioita sisältävän rivin johtava alkio on 1.
4. Johtavan alkion sisältävässä sarakkeessa johtava alkio on ainoa nollasta poikkeava alkio.

Esimerkin matriisille jatketaan alkeisrivimuunnoksia rivi kerrallaan, kunnes matriisissa on ainoastaan johtavia alkioita, nollia ja oikeanpuoleiset vakiot.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1 + \frac{2}{3}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Tästä saadaan yhtälöryhmän ratkaisu, sillä matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x &= 7 \\ y &= -3 \\ z &= 5. \end{cases}$$

MATRIISIEN OMINAISUUKSIA

Matriisit muodostuvat vektoreista. [34] Käytetyn esimerkin kerroinmatriisin A riveistä saadaan rivivektorit

$$\mathbf{r_1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{r_2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{r_3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ja sarakkeista sarakevektorit

$$\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{s_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{s_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rivi- ja sarakevektoreista voidaan muodostaa *rivi- ja sarakeavaruudet* matriisille A. Avaruudella tarkoitetaan avaruutta tai tilaa, jonka vektorit virittävät. Vektoriavaruuden virittämä tila (span) vastaa kaikkia vektoreiden lineaarikombinaatioita avaruudessa.

Määritelmä 3.8. Matriisin A *riviavaruus* on rivivektoreiden $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ ja $\mathbf{r_3}$ virittämä avaruus R, johon kuuluu mikä tahansa lineaarikombinaatio kyseisistä vektoreista.

$$R = span\{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}\} = k_1\mathbf{r_1} + k_2\mathbf{r_2} + k_3\mathbf{r_3}, \text{ kun } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Matriisin *sarakeavaruus* on sarakevektoreiden $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$ ja $\mathbf{s_3}$ virittämä avaruus S, johon kuuluu mikä tahansa lineaarikombinaatio kyseisistä vektoreista.

$$S = span\{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3}\} = k_1\mathbf{s_1} + k_2\mathbf{s_2} + k_3\mathbf{s_3}, \text{ kun } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Määritellään seuraavaksi matriisin nolla-avaruus esimerkin kautta etsimällä edellä kuvattujen vaiheiden avulla ratkaisu matriisiyhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, jossa A on kerroinmatriisi, $\mathbf{x}$ on muuttujavektori ja $\mathbf{0}$ on nollavektori. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \qquad x_4 = 0, \end{cases}$$

josta saadaan vakiomatriisi, muuttujavektori ja nollavektori kokonaismatriisiksi

$$[A \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Yhtälöryhmän ratkaisemiseksi muodostetaan redusoitu porrasmuoto

$$[A \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

joka vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Yhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_3 - x_4 \\ x_2 = -2\,x_3 + x_4, \end{cases}$$

ja koska mikään rivi ei ala x_3 tai x_4, voidaan parametrisoida vapaat muuttujat $x_3 = m \in \mathbb{R}$ ja $x_4 = n \in \mathbb{R}$. Yhtälöryhmän ratkaisuvektoriksi saadaan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} m-n \\ -2m+n \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} n.$$

Vektori $\mathbf{x}$ on ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vektoreista $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ saadaan yhtälön *ratkaisuavaruus*, sillä ratkaisuvektorina on mikä tahansa lineaarikombinaatio näistä vektoreista.

Määritelmä 3.9. Olkoon A $m \times n$ matriisi. Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = 0$ toteuttavaa ratkaisuavaruutta $N(A)$ kutsutaan matriisin A *nolla-avaruudeksi*:

$$N(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Luonnollisella kielellä ilmaistuna nolla-avaruus on niiden määrittelyjoukon vektoreiden vi-

rittämä joukko $\mathbf{u}$, jotka kuvautuvat nollavektorille $\mathbf{0}$, kun "kulkevat matriisin A läpi".

LINEAARIKUVAUS

Tähän asti esillä ollut matriisiyhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voidaan havainnollistaa kuvan 3.1 esittämään tapaan. Matriisi A kuvaa funktiota, jossa "syöte" $\mathbf{x}$ saa arvon $\mathbf{b}$. Matriisi A *kuvaa* vektorin $\mathbf{x}$ vektorille $\mathbf{b}$. Vastaavia funktioita, jotka kuvautuvat vektoriavaruuksille, kutsutaan *lineaarikuvauksiksi*.

Kuva 3.1. *Matriisiyhtälö funktiona, muokattu [34]*

Määritelmä 3.10. Epätyhjää joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi*, kun sille on määritelty laskutoimitukset alkioiden summa $(+)$ ja skalaarilla kertominen $(\cdot)$.

Määritelmä 3.11. Olkoon V ja W vektoriavaruuksia. Funktiota T määrittelyjoukosta V kuvajoukkoon W kutsutaan *lineaarikuvaukseksi* $T : V \to W$, jos kaikille vektoriavaruuden V vektoreille $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(k\mathbf{u}) &= kT(\mathbf{u}), k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.12. Olkoon $T : V \to W$ lineaarikuvaus, jossa V ja W ovat vektoriavaruuksia. Määrittelyjoukon V vektorijoukkoa U kutsutaan lineaarikuvauksen T *ytimeksi*, kun kaikki vektorijoukon vektorit $\mathbf{v}$ kuvautuvat arvojoukon W nollavektorille, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Lineaarikuvauksen ydintä merkitään $ker(T)$. [34]

Määritelmä 3.13. Olkoon S vektoriavaruuden V osajoukko, eli joukko vektoriavaruuden sisältämiä alkioita. [6] S on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos

1. S on epätyhjä.
2. Jokaiselle $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in S$, on voimassa $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in S$.

3. Jokaiselle $k \in \mathbb{R}$ ja $u \in S$, on voimassa $k\mathbf{u} \in S$.

Lause 3.1. Olkoon $T : V \to W$ lineaarikuvaus, jossa V ja W ovat vektoriavaruuksia. Lineaarikuvauksen T ydin on vektorijoukon V aliavaruus.

Todistus. Olkoon $T : V \to W$ lineaarikuvaus, jossa V ja W ovat vektoriavaruuksia.

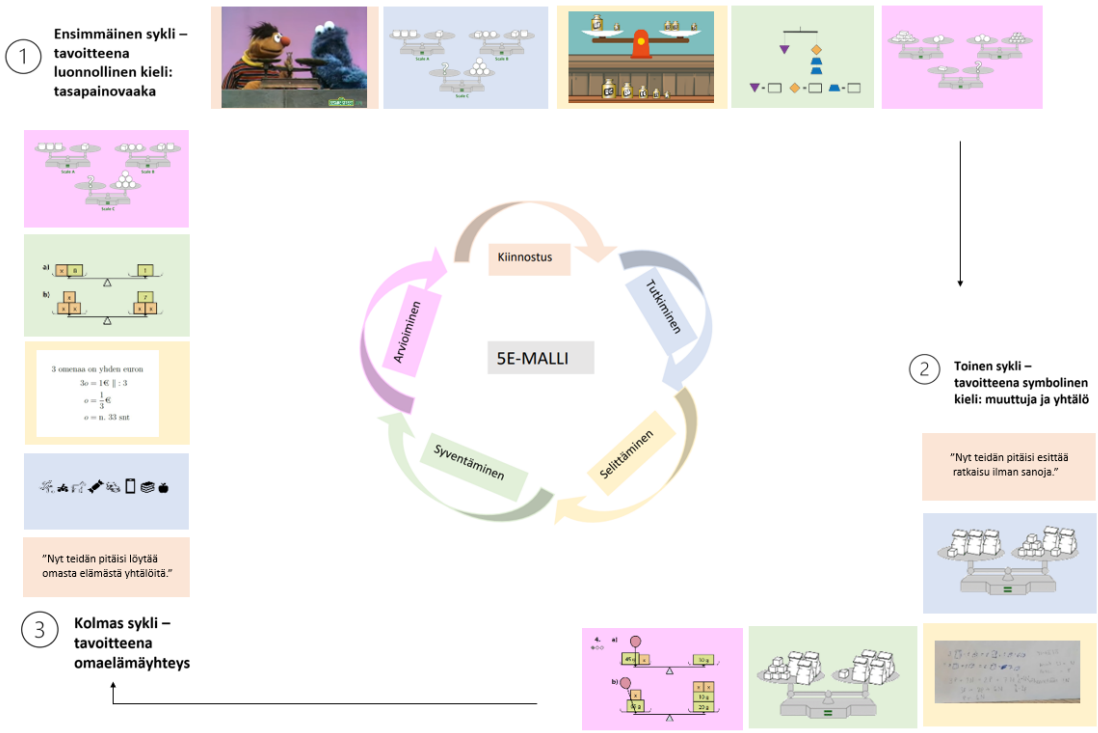
1. Todistetaan ydin epätyhjäksi osoittamalla, että nollavektori $\mathbf{0}$ kuuluu ytimeen $ker(T)$. Koska $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$, saadaan
$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}).$$
Lineaarikuvauksen määritelmän toisen ehdon mukaan
$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}) &= 0T(\mathbf{u}) \\ &= 0 \cdot T(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$
joten $\mathbf{0} \in ker(T)$.
2. Olkoon $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ ytimen $ker(T)$ vektoreita. Todistetaan, että $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in ker(T)$. Lineaarikuvauksen määritelmän ensimmäisestä ehdosta saadaan
$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0} \quad + \quad \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$
joten $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in ker(T)$.
3. Todistetaan viimeiseksi, että jokaiselle $k \in \mathbb{R}$, $k\mathbf{u} \in ker(T)$. Lineaarikuvauksen määritelmän toisesta ehdosta saadaan
$$\begin{aligned} T(k\mathbf{u}) &= kT(\mathbf{u}) \\ &= k \cdot \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}\ , \end{aligned}$$
joten $k\mathbf{u} \in ker(T)$.

□

Olkoon $T : V \to W$ lineaarikuvaus. Lineaarikuvausten kautta saatu ydin $ker(T)$ vastaa aiemmin määriteltyä nolla-avaruutta: Olkoon A matriisi, $\mathbf{u}$ vektori ja $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ lineaarikuvaus. Tällöin nolla-avaruus, eli ydin $ker(T)$ sisältää kaikki vektorit $\mathbf{u}$, joille $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

4. TUTKIMUSMENETELMÄT

Teoreettisessa viitekehyksessä luotiin lähtökohdat tutkimuskysymyksille tarkastelemalla 5E-mallia ja matematiikan osaamisen piirteitä. Viimeisimpänä havainnollistettiin yliopistomatematiikan vaatimaa tasoa, joka heijastaa peruskoulussa luodun pohjatiedon merkitystä. Tätä tutkimusta varten suunniteltiin opetuskokeilu seitsemännen luokan yhtälönlaskennassa, eli käsitteenä vastaa edellä kuvatun kappaleen lähtökohtia. Opetuskokeilusta saatua aineistoa hyödynnetään tulosten valossa tutkimuskysymyksiin vastaamisessa. Kolmen viikon opetusjaksossa hyödynnettiin ongelmalähtöistä opetusta, kielentämistä ja näiden ympärillä pedagogista 5E-mallia opetuksen runkona.



Kuva 4.1. *Kokonaiskuva opetuskokeilusta*

Opetuskokeilu rakentui kolmesta 5E-syklistä, jotka nähdään kokonaiskuvaa esittävästä kuvasta 4.1. Syklit on numeroitu ja vaiheet värikoodattu teoriakappaleessa esiintyneen kuvan 2.1 mukaisesti. Kuvan yläreunasta nähdään ensimmäinen sykli, jossa hyödynnettin tasapainovaakatehtäviä ja luonnollista kieltä. Syklin aikana oppilaat selittivät tehtäviä ja vaa'an toimintaa omin sanoin, millä pyrittiin viemään ajatukset yhtälöiden taustalla ole-

van tasapainon käsitteeseen. Kuvan oikeasta reunasta nähdään toinen 5E-sykli, jossa tavoitteena oli ymmärtää käsitteet muuttuja ja yhtälö. Toisessa syklissä siirryttiin luonnollisesta kielestä symbolikieleen, eli pyrittiin aiemmassa syklissä saaduille selityksille luomaan matemaattisia merkintöjä. Tavoitteeseen pyrittiin ongelmatehtävillä, joiden ratkaisut tuli esittää ilman sanoja, mikä ohjasi merkitsemään tasapainovaakojen esineitä piirroksilla ja kirjaimilla. Viimeiseksi, kuvan vasemmasta reunasta nähdään kolmas sykli, jossa tavoiteltiin yhteyden löytämistä omaan elämään. Yhtälökäsitteen syventämiseksi tarkoitus oli löytää yhtälöitä omasta elämästä. Kolmannella kierroksella vahvistettiin edelleen yhtälö- ja muuuttujakäsitteiden ymmärtämistä tasapainovaakatehtävillä, joita ratkaistiin symbolikielellä.

Aineisto kerättiin oppilaiden ryhmätyöäänitteistä, kirjallisista vastauksista sekä opettajan tekemistä havainnoista. Sisällönanalyysissä käytettiin aineistolähtöistä lähestymistapaa, jossa äänitteitä ja kirjallisia vastauksia hyödynnettiin ongelmanratkaisuprosessin tutkimisessa ja muodostettiin ongelmanratkaisuprosesseja havainnollistavia graafeja. Pedagogisen 5E-mallin tutkimiseksi hyödynnettiin opettajan tekemiä havaintoja.

4.1 Konteksti: Opetuskokeilun yksityiskohtainen kuvaus

Tutkimuksessa sovellettiin ongelmalähtöistä oppimista 5E-malliin kirjainlaskennan opettamisessa. Aihealueen keskeisiä asioita olivat muuttujat ja yhtälöt, joihin syvennyttiin ongelmalähtöisesti käyttämällä tasapainovaakoja yhtälöiden perustana. Opetuskokeilu koostui seitsemästä 45-minuutin oppitunnista, joista kolme pidettiin ensimmäisellä viikolla, kaksi toisella viikolla ja viimeiset kolmannella viikolla. Oppitunnit suunniteltiin niin, että opetuskokeilussa käytiin 5E-sykli kolmesti läpi. Seuraavaksi esitellään kunkin oppitunnin sisältö ja kyseisen syklin periaate.

ENSIMMÄINEN SYKLI – TAVOITTEENA LUONNOLLINEN KIELI: TASAPAINOVAAKA

Ensimmäisellä kierroksella tavoitteena oli pystyä luonnollisella kielellä selittämän ongelmanratkaisun etenemistä kuviokielellä esitettyihin vaakaongelmiin. Ensimmäinen sykli ajoittui ensimmäiselle kahdelle oppitunnille. Kiinnostus-, tutkimis- ja selittämisvaiheet pidettiin maanantaina 9.5. ja syventävä- ja arviointivaiheet seuraavana päivänä.

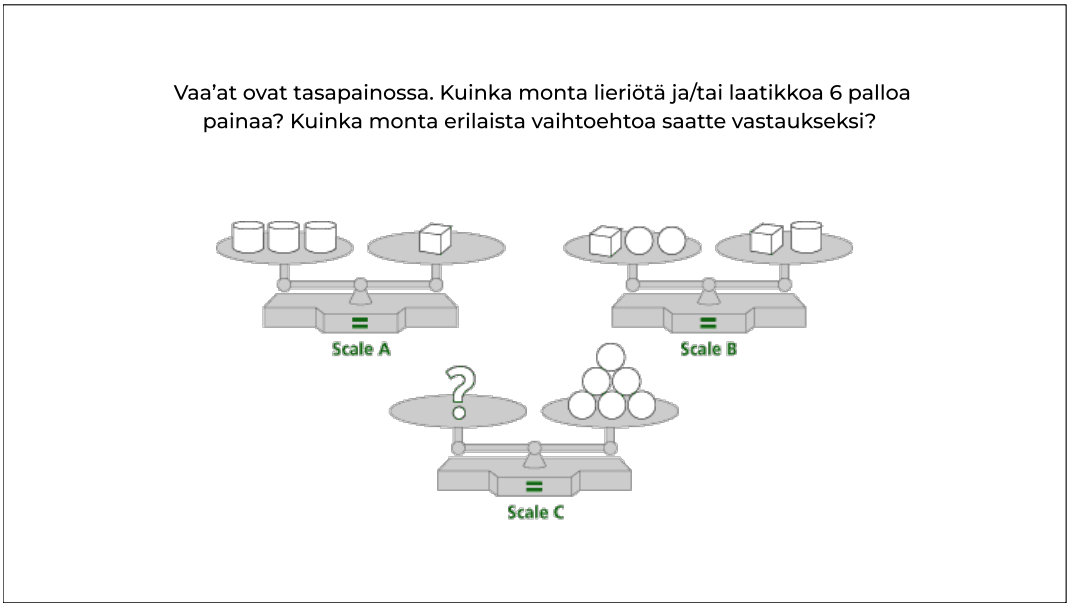
KIINNOSTUMINEN

Opettajan ensimmäisenä tavoitteena oli saada oppilaat kiinnostumaan tutkittavasta aiheesta sekä pohjustaa edessä olevaa vaakaongelmaa. Kiinnostuksen herättäjänä, eli syklin aloittavassa kiinnostusvaiheessa, käytettiin kuvan 4.2 esittämää kahden minuutin Earnies scale -videota, jossa Earnien ongelmana on, kuinka jakaa keksit tasan kahdelle. Videolla vietiin huomio tasapainovaakaan, jonka ympärille ensimmäinen sykli rakentuu.

Kuva 4.2. *Kiinnostusvaihe 1. syklissä [10]*

TUTKIMINEN

Videon jälkeen jakauduttiin tutkivan vaiheen ongelmatehtävää varten ryhmiin. Tutkivassa vaiheessa tavoitteena oli kuviokielellä esitettyyn vaakaongelmaan, kuvassa 4.3, löytää ratkaisu luonnollisella kielellä ja kirjoittaa ratkaisuprosessi paperille. Tehtävänannossa ei määritetty, millä tavalla ratkaisuprosessi tulisi esittää. Ryhmät jakautuivat luokkaan, vieressä olevaan kirjastoon sekä käytävään työskentelemään noin 15 minuutiksi. Ohjeessa mainittiin erikseen, että tehtävässä painotetaan keskustelua, ja siksi ryhmätyöt pitää äänittää omalla puhelimella.



Kuva 4.3. *Tutkivan vaiheen ongelmatehtävä 1. syklissä [9]*

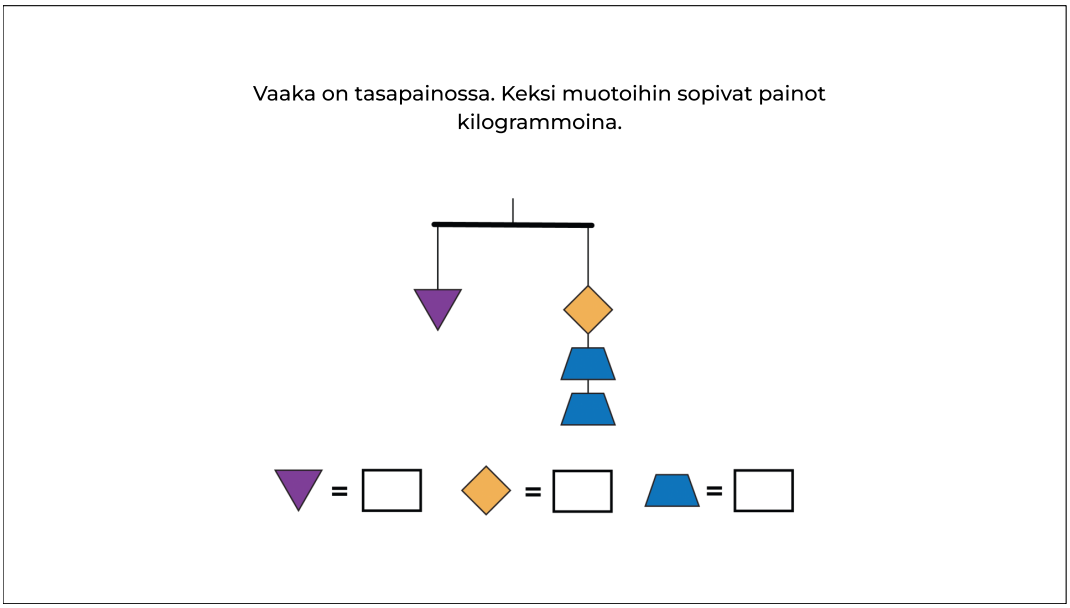
SELITTÄMINEN

Tunnin viimeiset 10 minuuttia käytettiin 5E-mallin kolmanteen vaiheeseen. Selittämisvaiheen tavoitteena oli tuoda esille oppilaiden ajatuksia edeltävästä tehtävästä ja havainnollistaa tasapainovaa'an toimintaa edellisen ongelmatehtävän ratkaisuprosessin kautta. Selittämisvaiheessa jatkettiin luonnollisella kielellä tehtävän läpikäymistä. Vaihe näkyi luokassa tehtävän läpikäymisenä virtuaalisen Panbalance-vaakaohjelman avulla, mistä esimerkki kuvassa 4.4. Opettaja kävi tehtävän läpi kyselemällä oppilailta vaiheita tehtävän ratkaisemiselle.

Kuva 4.4. *Panbalance-ohjelmalla esitetty kuvaus vaa'asta B ensimmäisen tutkivan vaiheen tehtävään, [32]*

SYVENTÄMINEN

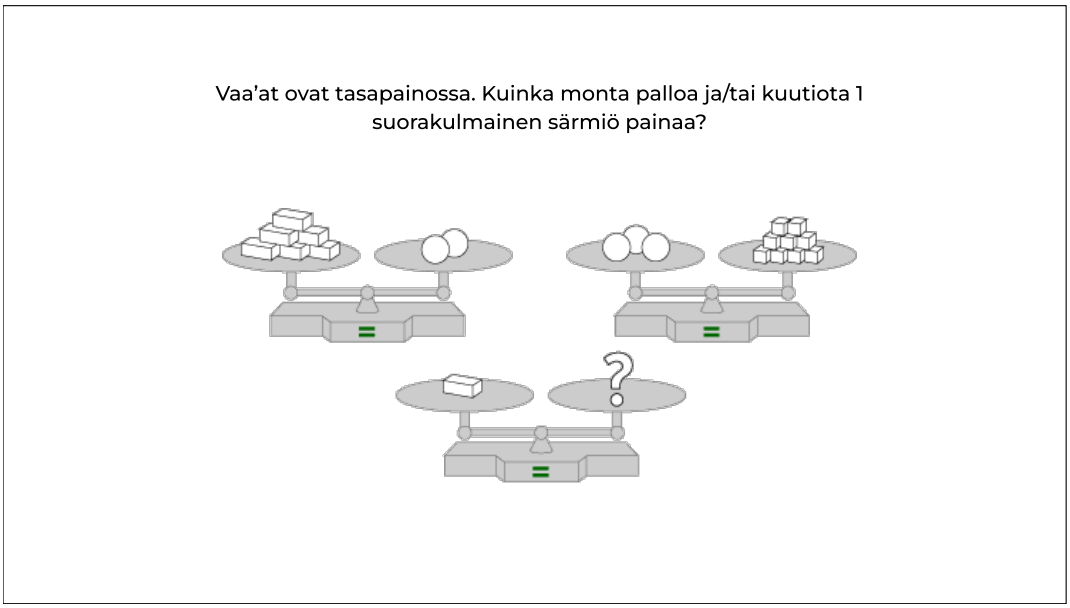
Ensimmäisen syklin viimeiset kaksi vaihetta käytiin seuraavana päivänä. Syventävän vaiheen tarkoituksena oli vahvistaa ymmärrystä vaakojen toiminnasta eri tasoisilla ja vaihtelevilla vaakatehtävillä. Tehtävänä oli kolme kuvan 4.5 mukaista vaakaa, ja tarkoituksena ratkaista, millä painoilla vaa'at toimisivat. Opettaja kierteli luokassa ja pyysi oppilaita selittämään vastauksiaan luonnollisella kielellä. Syventävä vaihe kesti noin 20 minuuttia.



Kuva 4.5. *Esimerkki syventävän vaiheen tehtävistä 1. syklissä [4]*

ARVIOINTI

Ensimmäisen 5E-syklin päätteeksi tavoitteena oli nähdä, kuinka oppilaat itse ratkaisevat tutkivaa vaihetta vastaavan tehtävän, joka nähdään kuvassa 4.6. Opettaja jatkoi luokassa kiertelyä ja pyysi oppilaita sanoittamaan vastauksiaan. Paperin toisella puolella oli lyhyt kuvaus tutkimuksesta sekä tutkimuslupakysymys oppilaalle. Tunnin päätteeksi opettaja keräsi paperit.



Kuva 4.6. *Arviointivaiheen ongelmatehtävä 1. syklissä [7]*

Toinen sykli – Tavoitteena symbolinen kieli: muuttuja ja yhtälö

Seuraavalla kierroksella tavoitteena oli löytää kuviokielellä esitettyihin tehtäviin symbolinen esitys muuttujien ja yhtälöiden avulla. Kiinnostus- ja tutkimisvaiheet käytiin perjantaina 13.5., selittämis- ja syventämisvaiheet seuraavana maanantaina ja arviointivaihe perjantaina 20.5.

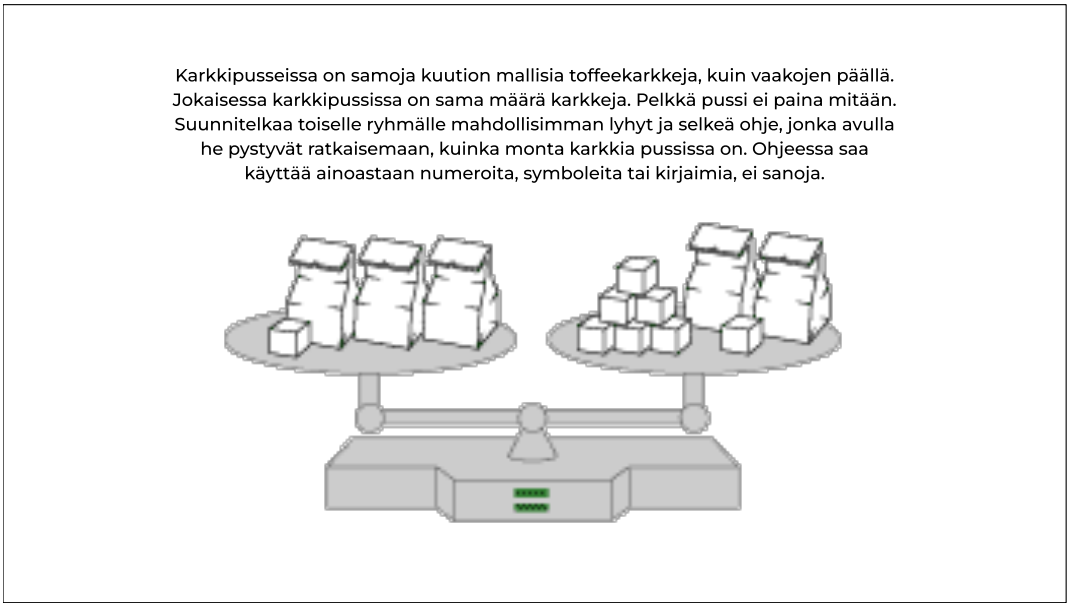
Kiinnostuminen

Toisen syklin tavoitteeseen symbolikieleen siirtymisestä lähdettiin lyhyellä kiinnostusvaiheella. Ennen tutkivan vaiheen tehtävää opettaja aloitti tunnin kuvan 4.7 lausahduksella.

Kuva 4.7. *Kiinnostusvaihe 2. syklissä.*

TUTKIMINEN

Lyhyt kiinnostusvaihe jatkui suoraan kuvassa 4.8 esiintyvään tutkivan vaiheen ongelmatehtävään. Ongelmatehtävässä tarkoituksena oli esittää ratkaisuprosessi paperille ilman sanoja eli ilman luonnollista kieltä, ja näin saada oppilaat ajattelemaan symbolisen kielen kautta. Tutkivaan vaiheeseen jäi aikaa noin 15 minuuttia, ja oppilaiden arviointikeskustelut pidettiin samalla tunnilla.

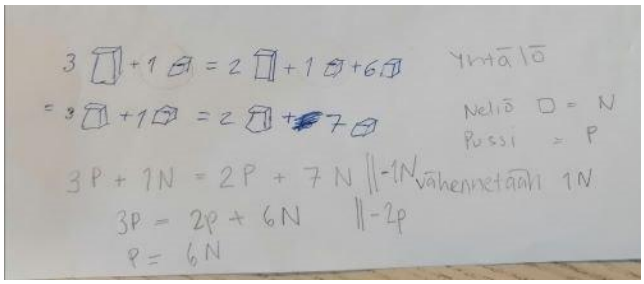


Kuva 4.8. *Tutkivan vaiheen ongelmatehtävä 2. syklissä [8]*

SELITTÄMINEN

Ongelmatehtävien yhteenveto käytiin seuraavan oppitunnin alussa selittämisvaiheessa. Toisessa syklissä tavoiteltiin ongelmatehtävän ratkaisemista symbolikielellä, ja tässä opettaja kokosi kuvan 4.9 mukaisesti yhteen ryhmien saamat tulokset, painotti pussien ja karkkien merkitsemistä kirjaimilla, ja esitti ongelmatehtävän ratkaisun yhtälönä muuttujien avulla.

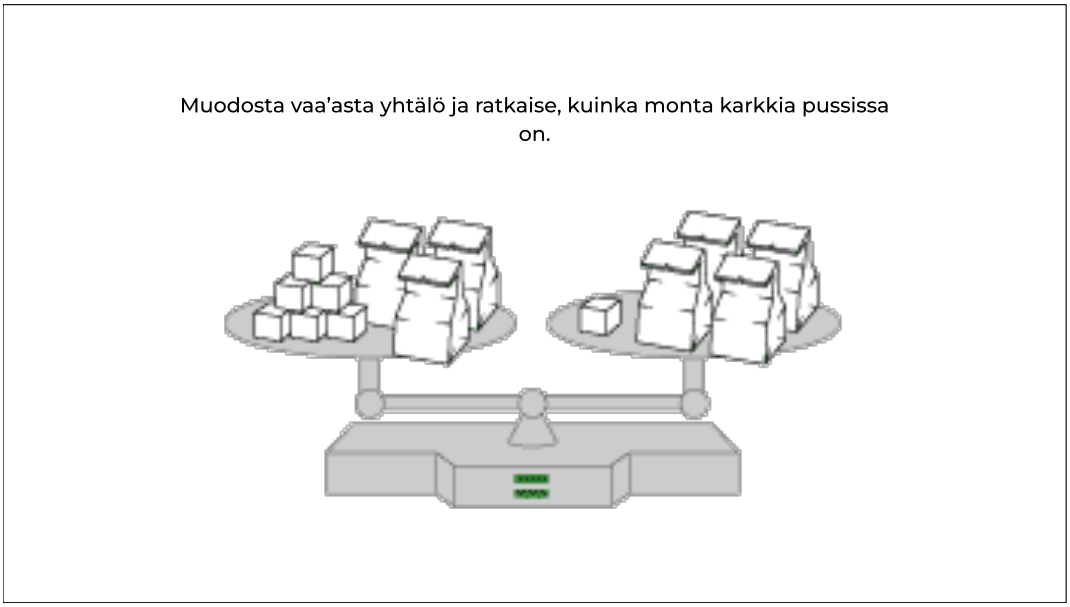
Opettajajohtoinen selitys ryhmien muodostamien yhtälöiden avulla.



Kuva 4.9. *Opettajajohtoinen selitysvaihe muuttujista ja yhtälöistä tutkivan vaiheen tehtävällä.*

SYVENTÄMINEN

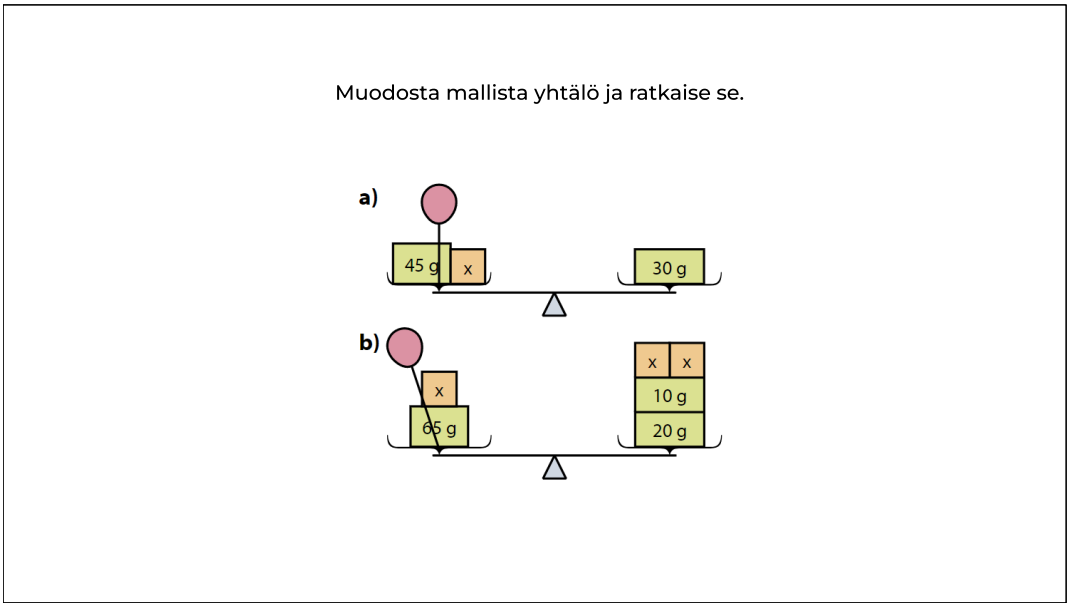
Yhteenvedosta siirryttiin 5E-mallin syventävään vaiheeseen jakamalla opppilaille kuvan 4.10 ongelmatehtävä, joka palautettiin tunnin lopussa. Tarkoituksena oli syventää ymmärrystä muuttujista ja yhtälöstä, eli tehtävän ratkaisemista symbolikielellä, antamalla tutkivaa tehtävää vastaava harjoitus, jota oppilaat ratkaisivat itsenäisesti tai yhdessä. Oppitunnilla tehtävän tekemiseen aikaa jäi noin 15 minuuttia.



Kuva 4.10. *Syventävän vaiheen ongelmatehtävä 2. syklissä [8]*

ARVIOINTI

Toisen syklin arviointivaiheeseen siirryttiin perjantaina 20.5. käymällä opettajajohtoisesti läpi syventävän vaiheen vaakatehtävä. Opettaja painotti, että on helpompi ja nopeampi muuttaa kuviot kirjaimiksi ja näin muodostaa yhtälö. Lopputunti laskettiin kirjasta tehtäviä, joissa muodostettiin vaa'asta yhtälö ja ratkaistiin x:n paino. Näistä haastavampi esimerkki nähdään kuvassa 4.11.



Kuva 4.11. *Esimerkki arviointivaiheen tehtävistä 2. syklissä [11]*

Kolmas sykli – Tavoitteena omaelämäyhteys

Viimeisellä kierroksella pysyttiin edelleen matematiikan symbolikielen ja kuviokielen välillä, kun tavoitteena oli yhdistää yhtälön käsitettä omaan elämään. Kiinnostus- ja tutkimisvaiheet käytiin maanantaina 23.5. ja viimeiset kolme vaihetta seuraavana päivänä.

Kiinnostus

Viimeisen kierroksen tavoitteena ollut yhteys omaan elämään tuotiin esille heti syklin alussa. Kiinnostusvaihe oli opettajan lausahduss syklin tavoitteesta, ja nähdään kuvasta 4.12.

“Nyt teidän pitäisi löytää omasta elämästä yhtälöitä.”

Kuva 4.12. *Kiinnostusvaihe 3. syklissä*

TUTKIMINEN

Kiinnostusvaiheesta siirryttiin tutkimisvaiheen tehtävään, kuvassa 4.13, ja oppilaat jakautuivat ryhmiin lopputunnin ajaksi. Tutkivassä tehtävässä viimeisessä syklissä ryhmien piti itse miettiä yhtälöitä annettujen kuvien perusteella tavoitteena löytää oman elämän tapahtumista yhtälönaiheita.

Kuva 4.13. *Tutkimisvaiheen tehtävä 3. syklissä (kuvat Word-ohjelmasta)*

SELITTÄMINEN

Opetuskokeilun viimeisellä tunnilla käytiin syklin viimeiset kolme vaihetta. Selitysvaiheessa opettaja kävi edeltävän kierroksen tapaan taululla läpi kaksi esimerkkiä ryhmissä muodostetuista yhtälöistä edelliseen ongelmatehtävään. Opettaja esitti taululla oppilailta kyselemällä kuvan 4.14 mukaiset vaiheet.

3 omenaa on yhden euron

$$3o = 1€ \;\|\; : 3$$

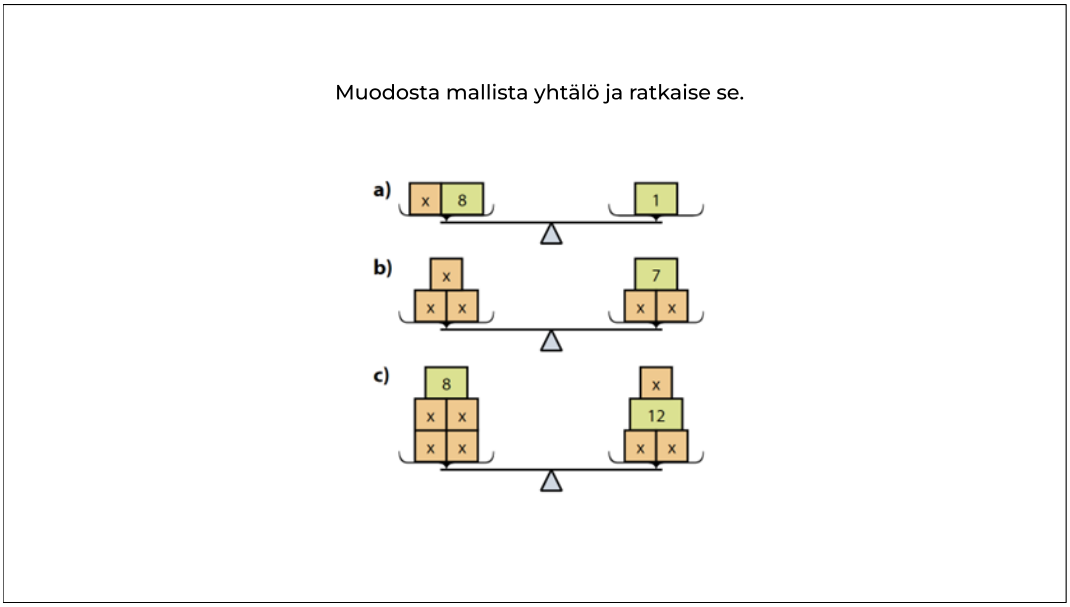
$$o = \frac{1}{3}€$$

$$o = \text{n. } 33 \text{ snt}$$

Kuva 4.14. *Opettajan läpikäymä esimerkkiyhtälö 3. selittämisvaiheessa.*

SYVENTÄMINEN

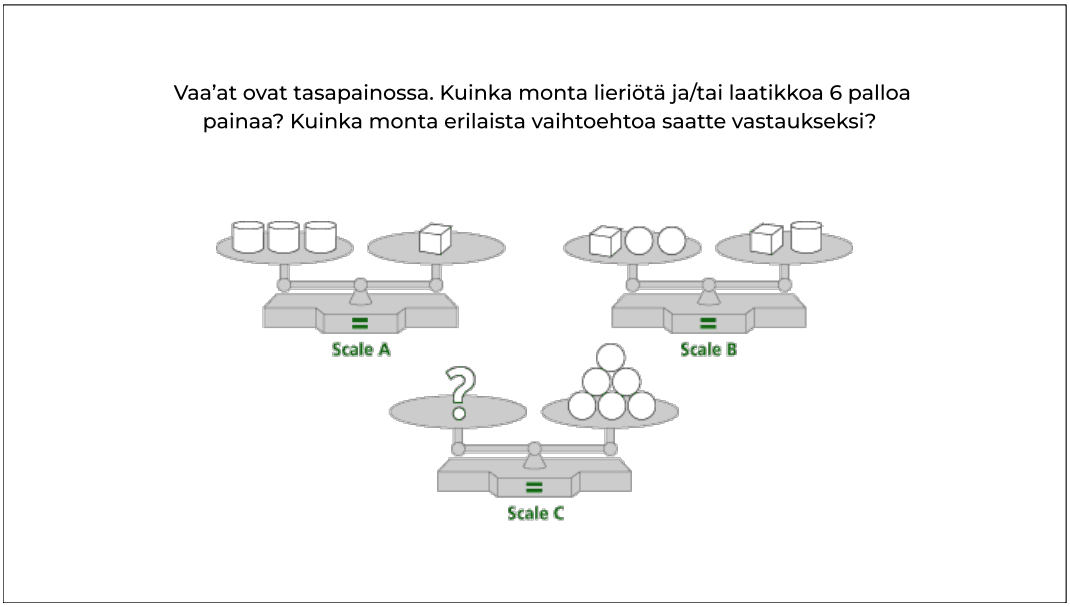
Selittämisvaiheen jälkeen tarkoituksena oli syventää muuttujien ja yhtälöiden osaamista kirjan vaakatehtävillä. Kuvan 4.15 mukaisissa tehtävissä tuli ratkaista punnuksen massa yhtälöitä käyttämällä. Opettaja kiersi luokassa auttamassa ja havainnoimassa oppilaiden työskentelyä.



Kuva 4.15. *Esimerkki syventävän vaiheen tehtävistä 3. syklissä [11]*

ARVIOINTI

Tunnin lopuksi noin 15 minuuttia käytettiin tutkimuksen viimeiselle tehtävälle, joka oli sama kuvan 4.16 ongelmatehtävä, jonka oppilaat ratkaisivat ensimmäisen syklin tutkivassa vaiheessa. Tavoitteena oli huomata kolmen 5E-syklin aikana tapahtunut kehitys saman tehtävän ratkaisemisessa. Nyt tehtävänä oli esittää tehtävän ratkaisu symbolisella kielellä muuttujien ja yhtälöiden avulla, kun ensimmäisessä syklissä tavoiteltiin sanallista selitystä. Oppilaat ratkaisivat tehtävää luokassa ja selittivät ratkaisuprosessiaan opettajalle. Opettaja auttoi avoimilla, johdattelevilla kysymyksillä ja arvioi oppilaiden tekemistä. Paperit palautettiin ja tutkimus päättyi tiistaina 24.5.



Kuva 4.16. *3. arviointivaiheen tehtävä, joka tehtiin 1. tutkimisvaiheessa [9].*

4.2 Kohderyhmä

Opetuskokeilu toteutettiin Kauraslammen koulussa toukokuussa 2022 seitsemäsluokkalaisten matematiikan tunneilla. Oppilaita luokassa oli 21, joista 19 otettiin mukaan tulosten analysointiin. Tutkimuksen toteuttajana oli matematiikan opettajaopiskelija, joka oli ryhmän opettajan sijaisena tutkimusjakson ajan sekä sitä edeltävät kolme kuukautta. Sijaisuus oli opettajaopiskelijan ensimmäinen opetuskokemus opetusharjoittelua lukuunottamatta. Ennen opetuskokeilua tutustuttiin ryhmässä työskentelyyn, avoimiin ongelmatehtäviin ja omien ajatusten selittämiseen. Näiden tuntien perusteella opettaja valitsi ryhmät tutkimuksen ajaksi sekä ongelmatehtävien tason. Opetuskokeilu kesti kolme viikkoa ja 45 minuutin oppitunteja oli yhteensä 7.

4.3 Aineistonkeruu

Tutkimuksen aineisto koottiin opettajan havainnoista, oppilaiden kirjallisista vastauksista sekä oppilaiden äänitteistä. Tutkivan vaiheen ryhmätehtävät äänitettiin, jotta ongelmanratkaisuprosessia voitiin analysoida tarkemmin. Osa äänitteistä jäi oppilailta palauttamatta, ja osassa palautetuista äänitteistä oli ainoastaan vastaus, eikä näitä otettu mukaan analyysiin. Analyysi muissa 5E-mallin vaiheissa painottuu opettajan tekemiin havaintoihin äänitteiden ja kirjattujen kommenttejen muodossa. Opettajan oppituntien jälkeen kirjaamat havainnot sisälsivät oppilaiden kommentteja ja opettajan ajatuksia tunnin kulusta. Oppituntien jälkeen opettaja äänitti vapaasti omia ajatuksiaan kuluneesta oppitunnista, opetuskokeilun kulusta ja omista tuntemuksistaan. Kunkin havainnon yhteydessä viitataan, mihin aineistoon tulokset perustuvat. Taulukko 4.1 esittää tuloksissa käytetyt aineistot 5E-mallin vaiheiden mukaan (x=käytetty, tyhjä=ei käytetty).

	Oppilaiden äänitteet	**Opettajan äänitteet ja merkinnät**	**Kirjalliset vastaukset**
Kiinnostus	**x**	**x**	
Tutkiminen			
1.sykli	**x**		**x**
2.sykli	**x**	**x**	**x**
3.sykli	**x**	**x**	**x**
Selittäminen		**x**	
Syventäminen			
1.sykli		**x**	
2.sykli		**x**	
3.sykli			
Arvionti		**x**	

Taulukko 4.1. *Tuloksissa käytetyt aineistot 5E-mallin vaiheiden mukaan*

4.4 Tutkimusetiikka

Opetuskokeilu toteutettiin eettisiä periaatteja kunnioittaen. Osallistuminen tutkimukseen oli jokaiselle oppilaalle vapaaehtoista, mutta kaikki osallistuivat tunnin tehtäviin. Vastauksia niiltä oppilailta, joilta ei saatu suostumusta ei oteta mukaan analyysiin. Ennen opetuskokeilun alkua opettaja kertoi luokalle tutkimuksesta ja sen olevan osa hänen diplomityötänsä. Seuraavalla tunnilla opettaja jakoi tutkimuslupakyselyn, jossa oli heille ymmärrettävällä tavalla selitetty tutkimuksen ja opetuksen kulusta ja kysymys tutkimukseen osallistumisesta.

Koska kyseessä oli alaikäisiä nuoria, myös oppilaiden huoltajilta kysyttiin tutkimuslupa Wilma-viestin välityksellä. Huoltajille kerrottiin yksityiskohtaisemmin tutkimuksen aiheena olevasta 5E-mallista. Sekä nuorille, että heidän huoltajilleen kerrottiin, että oppilaita ei voida tutkimuksesta tunnistaa, sillä henkilötiedot salataan. Ennen opetuskokeilun alkua opettaja sai hyväksytyn tutkimusluvan myös Kauraslammen koulun rehtorilta sekä Ylöjärven opetuspäälliköltä.

4.5 Aineistonanalyysi

Tutkimustulokset analysoitiin vaiheittain eri aineistojen mukaan. Aineistonanalyysi painottui oppilaiden äänityksiin, joista muodostettiin ongelmanratkaisua kuvaavat graafit. Ongelmanratkaisuprosesssin analysoimisessa käytettiin aineistolähtöistä lähestymistapaa, vaikka sitä useammin hyödynnetään, kun olemassa olevaa kirjallisuutta on vähemmänlaisesti. [12] Aineistolähtöisessä menetelmässä analyysi aloitetaan lukemalla aineisto useampaan kertaan kokonaiskuvan saamiseksi, minkä jälkeen muodostetaan kategoriat tutkijan omien ajatusten ja merkintöjen pohjalta. Vastaavaa lähestymistapaa käytettiin äänitteiden kategorisoimisessa. Aluksi äänitteet litteroitiin Word-tiedostoon, johon oppilaiden puheenvuorot kirjoitettiin omille riveille. Perehtymällä eri ryhmien ratkaisuihin ongelmanratkaisuprosessista muodostettiin seitsemän luokkaa: *luetaan tehtävänanto*, *sanoitetaan ongelma*, *ratkaistaan ongelmaa*, *kerrotaan johtopäätöksiä*, *annetaan vastaus*, *kirjataan vastauksia* ja *opettaja auttaa*. Luokkien muodostamisen tukena hyödynnettiin oppilaiden kirjallisia vastauksia, jotka auttoivat ratkaisuprosessin seuraamisessa. Jokainen puheenvuoro korostettiin word-tiedostossa eri värillä, ja väri kuvasi tiettyä luokkaa.

Luokittelun jälkeen ongelmanratkaisuprosessista muodostettiin Graphonline-ohjelman avulla graafeja. Aluksi lisättiin edellä kuvatut seitsemän luokkaa graafin "solmuiksi". Luokkien välille lisättin word-tiedostoon merkittyjen värien mukaan puheenvuorot nuolina. Ensimmäinen puheenvuoro lähti sitä vastaavasta luokasta, josta seuraavaa repliikkiä kuvattiin nuolena sitä vastaavaan luokkaan. Keskustelun etenemistä pystytään seuraamaan numeroitujen nuolten, eli graafin "särmien", avulla. ja kuvattiin ongelmanratkaisun etenemistä numerojärjestyksessä puheenvuorojen mukaisesti numeroitujen nuolten avulla. Numeroidut nuolet vastaavat graafin "särmiä" luokkien välillä. Muodostettuja graafeja vertailtiin eri ryhmien välillä ja havainnoitiin yhtäläisyyksiä luokkien välillä.

Oppilaiden äänitteitä hyödynnettiin lisäksi heränneen mielenkiinnon analysoimisessa tarkastelemalla tehtävänannon lukemisen ja kysyttyjen kysymysten määrää. Nämä taulukoitiin ja verrattiin tuloksia eri ryhmien välillä. Muissa 5E-mallin mukaisten toimintojen toteutumisen tutkimisessa hyödynnettiin opettajan äänittämiä ja kirjattuja kommentteja oppitunneista. 5E-vaiheita tutkittiin laadullisella sisällönanalyysillä, vertaamalla oppitunneilla toteutunutta toimintaa teoreettisiin 5E-mallin vaiheisiin. Laadullisen sisällönanalyysin tavoitteena on usein validoida ja testata olemassaolevaa teoreettista mallia tai teoriaa tar-

kastelemalla saatuja tuloksia aiempien tutkimuksien rinnalla [12]. Vaiheiden toteutumista tarkasteltiin teoriakappaleessa esitettyjen taulukoiden mukaisesti. Äänitteistä ja kirjatuista kommenteista havainnoitiin opettajan ja oppilaan 5E-mallia kuvaavia toimintoja ja analysoitiin ne havaituiksi tai ei-havaituiksi.

5. TULOKSET

Tutkimustulokset esittävät seitsemäsluokkalaisten yhtälönratkaisun ongelmalähtöistä opetusta pedagogisen 5E-mallin valossa. Aineisto kerättiin opetuskokeilusta vaiheittain oppilaiden ryhmätyöäänitteistä ja opettajan kirjaamista ja äänittämistä kommenteista. Äänitteistä saadut graafit esittävät tutkivan vaiheen ongelmanratkaisuprosesseja, ja opettajan kommenteilla kuvataan muiden 5E-mallin vaiheiden toteutumista.

5.1 Kiinnostus

Ensimmäisenä 5E-mallin vaiheena on kiinnostus, jonka tarkoituksena on herättää mielenkiinto tulevaan tutkivan vaiheen tehtävään. Taulukossa 2.1 kuvattiin yksityiskohtaisesti muita vaiheelle ominaisia piirteitä, joihin lukeutuivat oppilaan kohdalla kysymysten kysyminen ja motivoituminen ja opettajan kohdalla sääntöjen kertominen, ongelmien käyttö ja mielenkiinnon herättäminen. Tuloksissa huomioidaan herännyt mielenkiinto ryhmätyöäänitteistä kuultujen kysymysten ja tehtävänannon lukemisten lukumäärää tarkastelemalla. Nämä kuvaavat oppilaiden sitoutuneisuutta tehtävän tekemiseen.

ENSIMMÄINEN SYKLI – TAVOITTEENA LUONNOLLINEN KIELI: TASAPAINOVAAKA

RYHMÄ	KYSYMYSTEN LKM	TEHTÄVÄNANNON LUKEMINEN
1	1	1
2	4	2
3	0	0
4	0	1
5	3	5

Taulukko 5.1. *Ensimmäisen syklin motivoitumista kuvaavat tulokset kiinnostusvaiheessa*

Opetuskokeilun alussa ennen ensimmäistä ongelmatehtävää opettaja herätti mielenkiintoa ja nosti syklin teemana olevaa tasapainovaa'an ideaa näyttämällä lyhyen "cookiemonster" videon. Tästä siirryttiin tutkimisvaiheen tehtävään antamalla ohjeet ja säännöt tehtävän tekemiselle. Ensimmäisellä kierroksella opettajan toiminta vastasi kiinnostusvaiheen tavoitteita lukuun ottamatta ennakkotietojen selvittämistä. Oppilaiden motivoitumi-

nen nähdään taulukossa 5.1, josta huomataan ryhmän 2 ja 5 aktiivisuus tehtävän tekemisessä. Äänitetyn keskustelun palautti kaikki ryhmät. Motivoituminen ensimmäisellä kierroksella näkyi luokassa innostuneisuudesta ryhmätöihin.

TOINEN SYKLI – TAVOITTEENA SYMBOLINEN KIELI: MUUTTUJA JA YHTÄLÖ

Toisella kierroksella tavoiteltiin luonnollisesta kielestä symboliseen kieleen siirtymistä ja tätä kautta muuttujan ja yhtälön käsitteitä. Opettaja vastasi kiinnostusvaiheen tavoitteisiin sääntöjen ja ongelmatehtävän käytöstä, mutta erillistä aktiviteettiä ei hyödynnetty. Mielenkiinnon herättäjänä toimi lausauhdus seuraavan tehtävän tavoitteesta "kirjoittaa ratkaisu ilman sanoja". Opettajan oppitunnin jälkeisissä kommenteissa kuultiin ryhmätyömotivaatiosta vaihtelevia lausahduksia. Ryhmän 2 oppilaat innostuivat myönteisestä vastauksesta kysymykseen “tehdäänkö tänään niitä ryhmätöitä?”, ja toisaalta opettaja äänitti, kuinka ryhmän 3 oppilas “ ainaki sano, et ei taas näitä ryhmätöitä”. Kyseisten ryhmien motivoituneisuus nähdään taulukosta 5.2. Ryhmässä 2 kysmyksiä kysyttiin eniten ja tehtävänantoon palattiin kahdesti, kun ryhmässä 4 kysymyksiä oli vähemmän, mutta tehtävänantoa kerrattiin useampaan kertaan. Kolmelta ryhmältä ei saatu äänitteitä, josta voidaan olettaa motivoituneisuutta puutetta. Ryhmät tekivät tehtävän, mutta toivottua keskustelua ei syntynyt, tai se äänitettiin vasta tehtävän yrittämisen jälkeen. Toisaalta, vaikka ryhmä 5 ei palauttanut äänitettä, kirjallisen vastauksen perusteella tehtävä tehtiin huolellisesti.

RYHMÄ	KYSYTYT KYSYMYKSET	LUKEE TEHTÄVÄNANNON
1	Ei äänitettä	Ei äänitettä
2	8	2
3	Ei äänitettä	Ei äänitettä
4	2	6
5	Ei äänitettä	Ei äänitettä

Taulukko 5.2. *Toisen syklin motivoitumista kuvaavat tulokset kiinnostusvaiheessa*

KOLMAS SYKLI – TAVOITTEENA OMAELÄMÄYHTEYS

Kolmannella kierroksella tavoitteena ollut yhteys omaan elämään tuli esiin opettajan kiinnostusvaiheen aloituksesta. Opettajan toiminnan toteutumista vastaa edellisen kierroksen mukaisesti ohjeiden ja ongelmatehtävien esittäminen, mutta ennakkotietoja tai muuta aktiviteettiä ei käytetty. Taulukosta 5.3 nähdään vastaavia tuloksia, kuin toisella kierroksella. Kolme ryhmää jättivät äänitteen palauttamatta, mutta näistä ryhmän 5 kirjalliset vastaukset olivat huolellisesti tehty. Ryhmän 1 ja 3 motivoituneisuutta ei nähdä kirjallisista vastauksista. Ryhmän 2 motivoituneisuudesta kertoo äänitteessä kommentti “mä en jaksa tehä tätä tehtävää”.

RYHMÄ	KYSYTYT KYSYMYKSET	LUKEE TEHTÄVÄNANNON
1	Ei äänitettä	Ei äänitettä
2	7	1
3	Ei äänitettä	Ei äänitettä
4	2	6
5	Ei äänitettä	Ei äänitettä
6	1	3

Taulukko 5.3. *Kolmannen syklin motivoitumista kuvaavat tulokset kiinnostusvaiheessa*

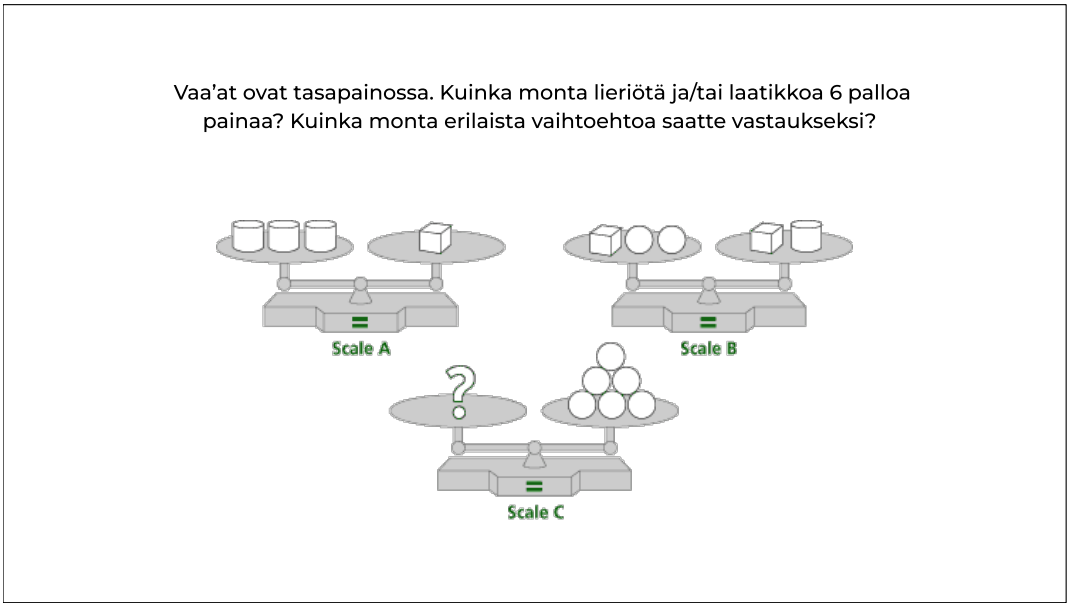
5.2 Tutkiminen

5E-mallin toisena vaiheena on tutkiminen, jota kuvaavaa toimintaa nähtiin taulukossa 2.2. Tarkoituksena on antaa oppilaiden yhdessä tutkia ja ratkaista annettua ongelmaa, ja opettajana ohjata tarvittaessa oikeaan suuntaan ilman vastauksen kommentoimista. Opetuskokeilussa hyödynnettiin ryhmässä tehtäviä ongelmatehtäviä, ja niistä saatuja äänitteitä käytettiin tulosten analysoimisessa. Ryhmien ratkaisuprosesseista muodostettiin graafeja, joilla voidaan verrata ratkaisun etenemistä. Ratkaisuprosessit jaoteltiin seitsemään vaiheeseen: luetaan tehtävänanto, sanoitetaan ongelma, ratkaistaan ongelmaa, kerrotaan johtopäätöksiä, annetaan vastaus, kirjataan vastauksia ja opettaja auttaa. Graafeilla havainnollistetaan vuoropuhelun etenemistä vaiheesta toiseen numeroitujen nuolten avulla. Keskustelun ensimmäinen repliikki lähtee sitä vastaavasta vaiheesta, ja keskustelu etenee tästä numerojärjestyksessä. Oppilaiden kommenteissa esimerkiksi "O21" viittaa oppilaaseen 1 ryhmässä 2.

ENSIMMÄINEN SYKLI – TAVOITTEENA LUONNOLLINEN KIELI: TASAPAINOVAAKA

Ensimmäisessä syklissä tavoiteltua luonnollisella kielellä selittämistä lähdettiin hakemaan

tehtävällä 5.1. Tehtävänannossa painotettiin tehtävästä keskustelemista. Opettajan toiminta tutkimisvaiheessa oli ryhmien auttamista eteenpäin keskusteluja johdattelemalla, mikä nähdään ryhmien 3 ja 4 ongelmanratkaisua kuvaavista graafeista 5.5 ja 5.6. Ryhmässä 3 opettaja oli ongelmanratkaisussa mukana ja auttoi ryhmää eteenpäin, kun ryhmässä 4 opettaja auttoi ryhmää kirjaamaan ratkaisuprosessia ylös oikean ratkaisun löytymisen jälkeen. Opettaja toimi 5E-mallin tavoitteiden mukaan ohjaajana tutkimisvaiheessa.

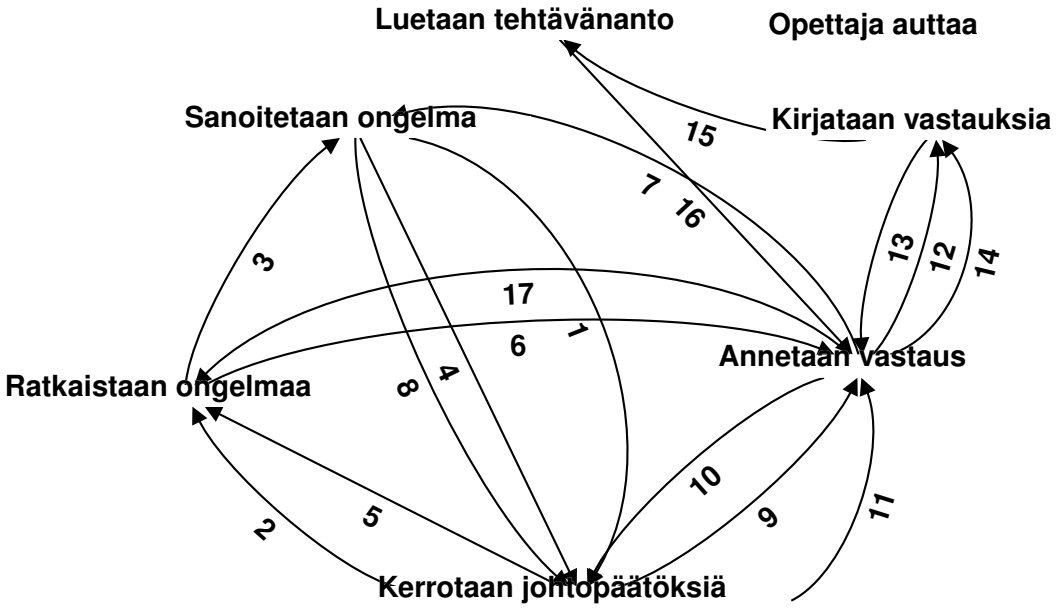


Kuva 5.1. *Tutkivan vaiheen ongelmatehtävä 1. syklissä [9]*

Ryhmä 1

Ryhmissä 1, 2 ja 5 oppilaat ratkaisivat tehtävän ilman opettajan avustusta. Ensimmäisen ryhmän ongelmanratkaisua esittää graafi kuvassa 5.2. Kuvasta nähdään, kuinka ongelmanratkaisuprosesissa käytetään kaikkia vaiheita, mutta opettaja ei ole keskustelussa mukana. Ratkaisu etenee kahden oppilaan keskustelulla, jossa toinen oppilas muodostaa suurimman osan ongelman ratkaisemisesta ja toinen kommentoi välillä. Yhden oppilaan osallistumista vuoropuheluun ei oteta tuloksissa huomioon.

Tehtävän ratkaiseminen alkaa kuvassa 5.1 esiintyvän vaa'an A ja B sanoittamisella, josta päädytään tekemään johtopäätös vaa'asta B. Oppilas jatkaa ongelman avaamista ryhmän oppilaille, mikä näkyy janana 2 johtopäätöksistä ongelman ratkaisuun. Tästä toinen oppilas jatkaa tehtävän sanoittamista, ja edellinen jatkaa johtopäätöksiin ja sieltä takaisin ongelman ratkaisuun. Graafin jana 6 näyttää vastauksen löytymisen, minkä jälkeen oppilas sanoittaa uudelleen vaakaa A ja päätyy johtopäätösten kautta samaan vastaukseen. Koko ongelmanratkaisun ajan tehtävän sanoittamisesta edetään kertomaan johtopäätöksiä tai antamaan vastaus. Tämä graafin janoja 1-9 vastaavaa vuoropuhelu etenee seuraavasti:



Kuva 5.2. *Ryhmän 1 ongelmanratkaisuprosessi ensimmäisessä tutkimistehtävässä 5.1*

> O11: “Kolme lieriöö on yhden neliön painonen ja yks neliö plus kaks palloo on yks neliö. Eli kaks palloo on yks lieriö... Kato toi on saman painonen, kun toi. Nois molemmissa on neliöt plus toi.”
> O12: “Neliö painaa ton verran ja yks tollanen.”
> O11: “Yks pallo painaa puoli lieriötä...Eiku tossa on neliö ja tossa on neliö, niin tossa on kaks noita ja tässä on yks noita. Jos kuus näitä palloja, niin se olis yhtä paljon, kuin kolme neliötä eikun noita mitä noi on ja joo yks neliö siis. Tai kolme niitä lieriöitä... Yks neliö painaa kolme lieriöö ja yks lieriö on kaks palloo. Sitten kaks palloo tuolla on kuus eli kolme lieriöö ja sitten neliö onko se kolme lieriöö. Eli se olis niinkun yks neliö tai öö kolme lieriöö.”

Ryhmässä edetään vastauksesta janassa 9 takaisin johtopäätöksiin ja uudelleen vastauksiin. Tästä siirrytään vastausten kirjaamisen ja vastausten antamisen väliseen sykliin janoissa 12-14. Oppilas miettii kahden vastausvaihtoehdon välillä vastausta vaa’alle C kuvassa 5.1. Oppilas on kirjaamassa vain yhtä vastausta, mutta toinen auttaa lukemalla tehtävänantoon. Tehtävänannon lukeminen auttaa ryhmää päätymään kahteen erilaiseen vastaukseen. Tehtävänantoon palannut oppilas etsii vielä uusia ratkaisuja, mitä kuvaa graafissa viimeinen jana 17 vastauksista ongelman ratkaisemiseen. Vuoropuhelu ongelmanratkaisun lopussa etenee seuraavasti:

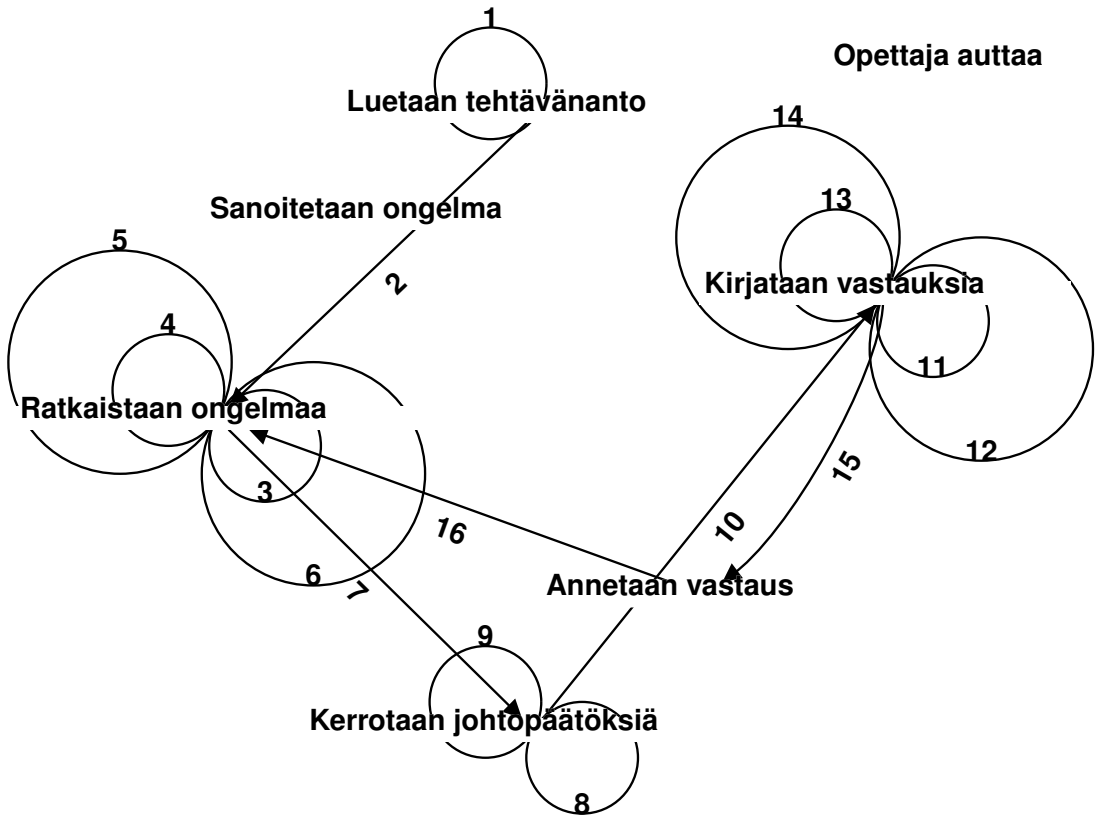
> O11: “Pistetään sit yks neliö. Eli vastaus on yks neliö tai kuusi lieriötä. Vaikka yksi neliö.”

O12: “Älä! Tähän piti laittaa montako vaihtoehtoa. Kuinka monta erilaista vaihtoehtoa saatte. Yksi neliö, kolme lieriöö...”

O11: “Tehtiin!”

O12: “Katotaan löytyiskö vielä... Ei löydy enää.”

Ryhmä 2



Kuva 5.3. *Ryhmän 2 ongelmanratkaisuprosessi ensimmäisessä tutkimistehtävässä 5.1*

Ryhmät 2 ja 5 kävivät myös keskustelun ensimmäisestä tutkivan vaiheen tehtävästä ilman opettajan avustusta, mutta graafeista nähdään ongelmanratkaisun edenneen eri tavoilla. Ryhmässä 2 tehtävän sanoittamista ei tehdä lainkaan, kuten huomataan ratkaisuprosessia esittävästä graafista kuvassa 5.3. Tehtävään osallistuneita oppilaita on neljä, joista kaksi aloittavat tehtävänannon lukemisella. Ongelmanratkaisun suuntaa määrittää ensimmäisen oppilaan ongelmanratkaisuyritys, kun siirrytään janassa 2 tehtävänannosta suoraan ratkaisemaan ongelmaa. Oppilas miettii kuvan 5.1 vaa’alle A painoja kilogrammoissa, mistä muut oppilaat jatkavat muiden muotojen painojen laskemiseen. Tämä nähdään graafissa ongelmanratkaisemisvaiheessa janoina 3-6, kun ryhmässä keskustellaan useamman oppilaan kesken:

O11: “No toi scale A vaaka A voisi olla vaikka silleen, et toi on 3 kiloa ja et

jokainen lieriö on yhen kilon.”
O12: “Joo totta.”
O11: “Jos ajatellaan vaikka silleen, et noi on 3 kiloa ja noi on yksi kiloa ja täs olis vaan niinkun kolme.”
O12: “Neljä, viis.”
O12: “Ja toi olis vaiks kaks.”

Tästä keskustelu jatkuu johtopäätöksillä graafin janoissa 7-9, kun oppilaat kertaavat painot kilogrammoina vaaoissa A ja B esiintyville muodoille kuvassa 5.1. Kyseiset painot kirjataan ylös, mikä näkyy graafissa janoissa 10-14 vastausten kirjaamisena. Lopussa vaa’an C vastaus annetaan kilogrammoissa, eikä palata tarkistamaan tehtävänantoa, kuten ryhmässä 1, kts. 5.2. Ratkaisu päätyy edellisen ryhmän tapaan vastauksesta ongelmanratkaisuun, mitä vastaa yhden oppilaan epäröinti, vaikka ongelmanratkaisun aloittanut oppilas on jo valmis:

O24: “Neljä kiloo. Toi olis neljä ja tää olis kolme kiloo. Eli toi olis puolikas. ”
O23: “Joo se olis puoli kiloo”
O21: “Eli neliö on kolme kiloo. Ympyrä, pallo on puoli kiloo. Joo. Ja lieriö kilon.”
O23: “Okei, eli kirjotanko sen tänne”

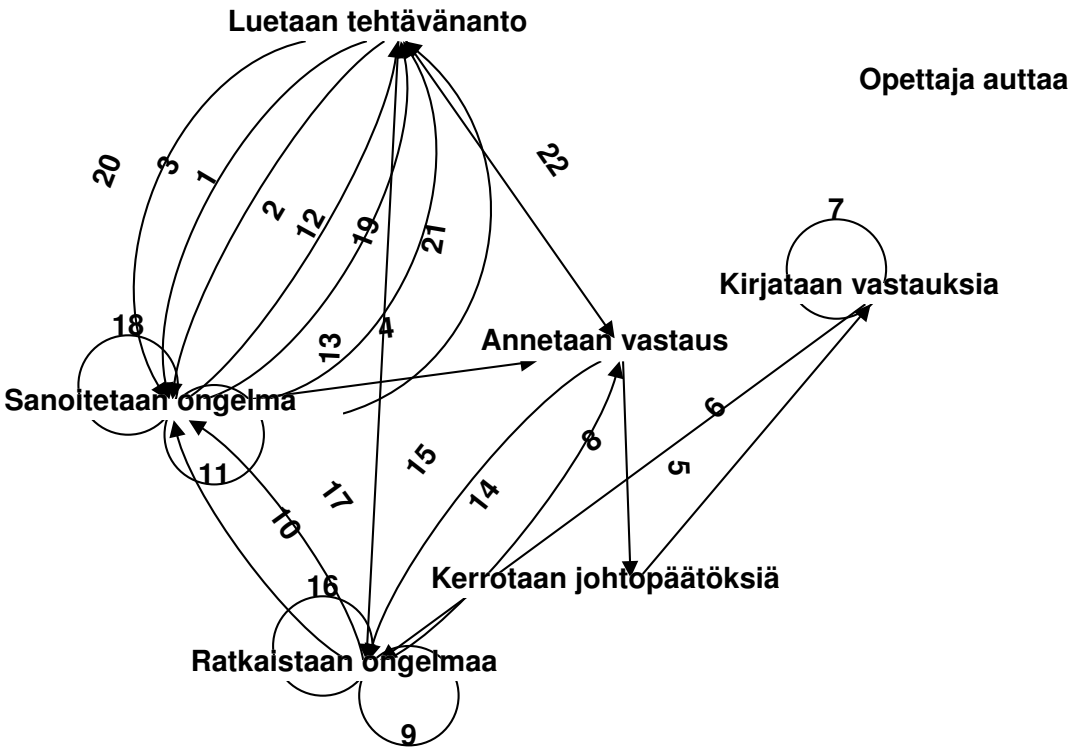
Kirjataan vastauksia janoissa 10-14

O21: “Eli kysymysmerkissä pitäis olla sillon kolme kiloa myös.”
O22: “Valmis”
O21: “Eikun...”

Ryhmä 5

Ryhmän 5 ongelmanratkaisuprosessissa kuultiin vuorottelevaa kahden oppilaan vuoropuhelua. Ryhmässä oli mukana kolmas oppilas, jota ei tutkimuksen tuloksissa huomioida. Graafista 5.4 nähdään, että opettaja ei ollut mukana ratkaisussa, mutta kaikkia muita vaiheita hyödynnettiin tehtävän ratkaisemisessa. Graafi havainnollistaa, kuinka keskustelun alussa, keskivaiheessa ja lopussa käydään tehtävän sanoittamisen ja ohjeistuksen välistä vuoropuhelua.

Ongelmanratkaisun alussa vuoropuhelua kuvaa tehtävänannon lukemisen jälkeen oppilaan pyrkimys sanoittaa tehtävänannon kuvaamat muodot ja yhdistää ne vaaoissa esiintyviin kuviin. Tästä oppilas jatkaa lukemalla tehtävänannon toisen kysymyksen. Ongelmanratkaisu jatkuu sanoittamalla kuvan 5.1 vaakaa A, minkä jälkeen oppilas päättelee



Kuva 5.4. *Ryhmän 5 ongelmanratkaisuprosessi ensimmäisessä tutkimistehtävässä 5.1*

ja antaa vastauksen vaa'alle C. Tästä keskustelu etenee johtopäätösten kautta tulosten kirjaamiseen. Tätä ongelmanratkaisun alkua, eli graafin janoja 1-7, kuvaa seuraava vuoropuhelu:

> O52: "Vaa'at ovat tasapainossa, kuinka monta..."
> O51: "Eli noi on lieriöitä, noi on laatikoita ja noi on...Kuinka monta erilaista vaihtoehtoa saatte vastaukseksi?"
> O52: "Eli yks laatikko painaa yhtä paljon, kun kolme lieriötä. . . . Yks,kaks,kolme, neljä, viis kuus. Eli kolme lieriöö on yhtä paljon, kun kuus palloo."
> O51: "Niin se on puolet sen painosta. Eli se on kuus. Merkitse. Niin siis kolme pallo on kuus. Kirjota vaikka kuus ja sit piirrät vaikka pallon."
> O52: "Mä vaan kirjotan, että palloa. Neliö olis hyvä myös..."

Graafin janat 8-12 näyttävät, kuinka vastausten kirjaamisesta siirrytään ongelmanratkaisemisvaiheeseen, jossa pohditaan neliön painoa ja päädytään sanoittamaan uudelleen vaaka A. Toinen oppilaista sanoittaa tehtävää, minkä jälkeen palataan tehtävänantoon ja tämän avulla saadaan oikea vastaus.

> O52: "Se on yks neliö painaa! Eeei..."
> O51: "Yks neliö painaa kolme lieriötä."
> O52: "Ei vaan kuinka monta palloa? Mun mielestä se oli niinku se. Se oli ton

mukaan.”
O51: “Oota, mikä se kysymys oli?...”
O52: “Eikse oo se sama. Yks laatikko painaa yhtä paljon, kun kuus palloa...”

Seuraavaksi ongelmanratkaisu etenee toistuvalla syklillä ongelman sanoittamisen ja ratkaisemisen kautta tehtävänannon lukemiseen, mutta jäädään useampaan kertaan lukemaan tehtävänantoa, mikä huomataan graafin janoista 18-21. Ohjeita luetaan keskustelun lopussa useampaan kertaan ennen lopullisen vastauksen antamista. Keskustelun loppuvaiheen vuoropuhelusta nähdään, kuinka tehtävänannon lukeminen on isossa roolissa vastauksen muodostamisessa. Ongelmanratkaisu päättyy tehtävänannon lukemisen jälkeen, kun oppilaat lukevat vielä kuvan 5.1 toisen tehtävänannon kysymyksen ja antavat ainoana ryhmänä vastauksen toiseen kysymykseen:

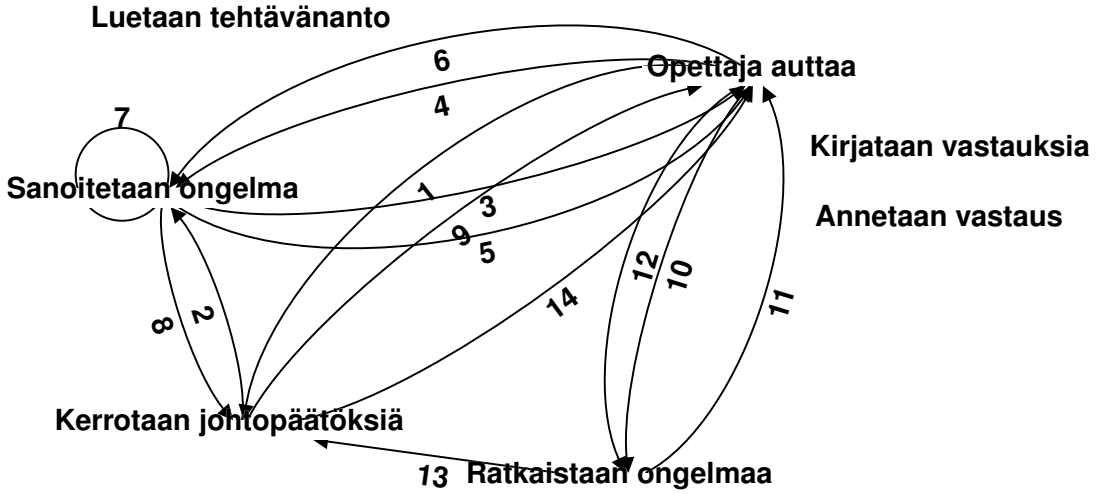
O51: “Eiksit oo enää nää.”
O52: “Siinä oli ne kaikki, ku piti laskee tää. Me ollaan valmiita.”
O51: “Nii mut, kuinka monta erilaista vaihtoehtoa?”
O52: “Tässä oli nää apujutut. Ja tää C piti vähän niinku ratkasta.”
O51: “Mut tässä lukee myös, että kuinka monta erilaista vaihtoehtoa saatte?”
O52: “Eli tämä vaihtoehto ja tämä vaihtoehto, eli kaks.”

Ryhmä 3

Ryhmässä 3 opettaja on ratkaisuprosessissa mukana koko keskustelun ajan, mikä nähdään graafista 5.5. Graafi havainnollistaa, kuinka vuoropuhelu on opettajan ja oppilaiden välistä, eikä lopullista vastausta anneta. Tehtävänannon lukemista tai vastausten kirjaamista ei nähdä.

Tehtävän ratkaiseminen alkaa opettajan avustuksella ongelman ratkaisemisen kautta ongelman sanoittamiseen. Opettaja sanoittaa kuvan 5.1 vaakaa A ja johdattelee oppilaita tekemään johtopäätöksiä. Yksi oppilaista kertoo johtopäätöksen esineiden painoista ja perustelee sen sanoittamalla vaakaa A. Tästä keskustelu jatkuu janoissa 3-6 opettajan ja oppilaiden vuorottelevalla keskustelulla vaakojen sanoittamisesta, mistä päädytään janassa 8 kertomaan johtopäätökset vaa’asta B:

Opettaja: “Nämä tällä puolella painaa saman verran, kuin nämä tällä puolella. Mihin te voisitte päätyä sillä tiedolla?”
O32: “Että nää painaa vähemmän, kuin nää. Koska näit on kolme ja noit on kaks.”
Opettaja: “Nyt mietitte, mitä te täältä voisitte tehdä, kun tiedätte, että vasen puoli painaa saman verran, kun oikee puoli.”
O33: “Ne painaa saman verran.”



Kuva 5.5. *Ryhmän 3 ongelmanratkaisuprosessi ensimmäisessä tutkimistehtävässä 5.1*

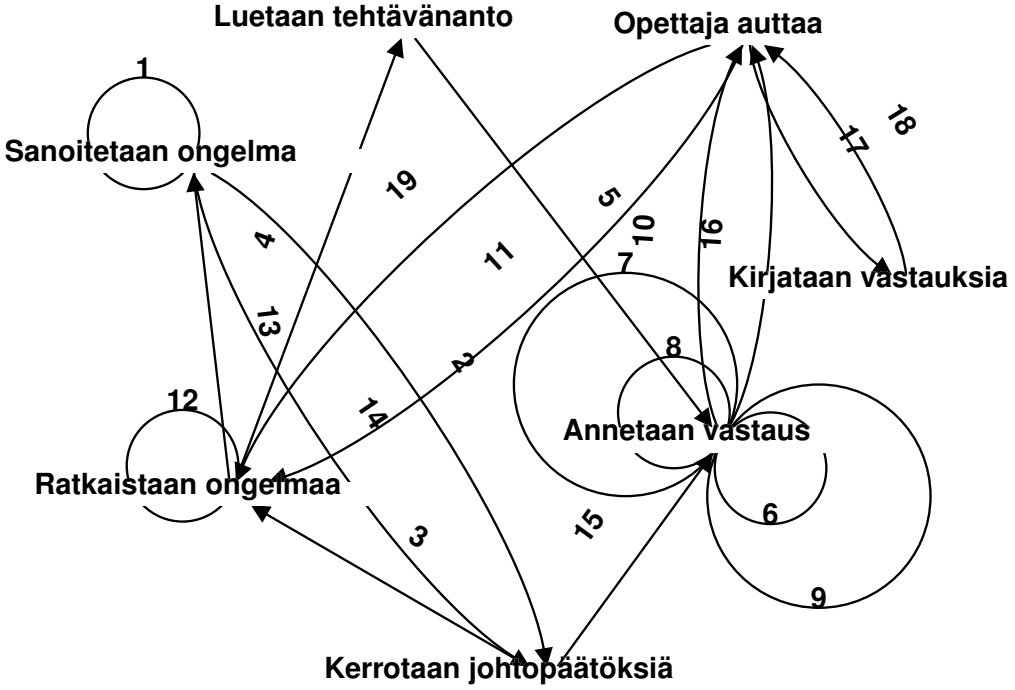
> Opettaja: “Jos te haluaisitte saada selville, vaikka näitten laatikoitten painoo ja lieriöiden painoo? Ja täältä teitä ensimmäisenä kiinnostaa tää pallon paino.”
> O31: “Kolme lieriöö painaa...”
> O32: “Saman verran, kuin yksi neliö...ja kaks palloo painaa saman verran kuin yksi lieriö.”

Opettajan kysymyksellä vuoropuhelu siirtyy ongelman ratkaisemiseen. Keskustelu jatkuu opettajan kommenttien johdattelemana, ja ongelman ratkaisemisen jälkeen saadaan johtopäätös vaa’asta B. Seuraavasta vuoropuhelusta nähdään, millaisilla kysymyksillä opettaja vei keskustelun ongelman sanoittamisesta ongelman ratkaisuun ja siitä edelleen johtopäätökseen. Ryhmän ongelmanratkaisu päättyy opettajan kommenttiin.

> Opettaja: “Mistä sen sait selville?”
> O31: “No tossa on neliö ja tossa on neliö ja tossa on kaks palloo ja tossa on lieriö, niin kaks palloo painaa saman verran kuin neliö.”
> Opettaja: “Hyvä! Kirjoittakaa jotain siihen teidän paperiin. Vaikka just toi mitä te saitte.”

Ryhmä 4

Ryhmässä 4 vuoropuheluun osallistuu tasapuolisesti kaikki kolme ryhmän oppilaista. Ongelmanratkaisun etenemistä havainnollistaa graafi 5.6. Graafista nähdään, kuinka tehtä-



Kuva 5.6. *Ryhmän 4 ongelmanratkaisuprosessi ensimmäisessä tutkimistehtävässä 5.1*

vän alussa ongelman sanoittamisella päästään tekemään johtopäätöksiä ja sen avulla ratkaisemaan ongelmaa. Tässä oppilaat sanoittavat vaakaa A ja siinä olevia muotoja ja tekevät johtopäätöksen vaa'asta B. Oppilas jatkaa edelleen kertomalla perustelun johtopäätökselle, josta toinen oppilaista jatkaa tarkentamalla tehtävänantoa keskustelemisesta. Tästä keskustelu jatkuu kuvassa 5.1 esiintyvän vaa'an C sanoittamiseen, minkä jälkeen ryhmä päätyy oikeaan vastaukseen. Vastauksen ympärillä keskustellaan useamman oppilaan kesken, kuten huomataan graafin janoista 6-9. Keskustelun alku etenee seuraavasti:

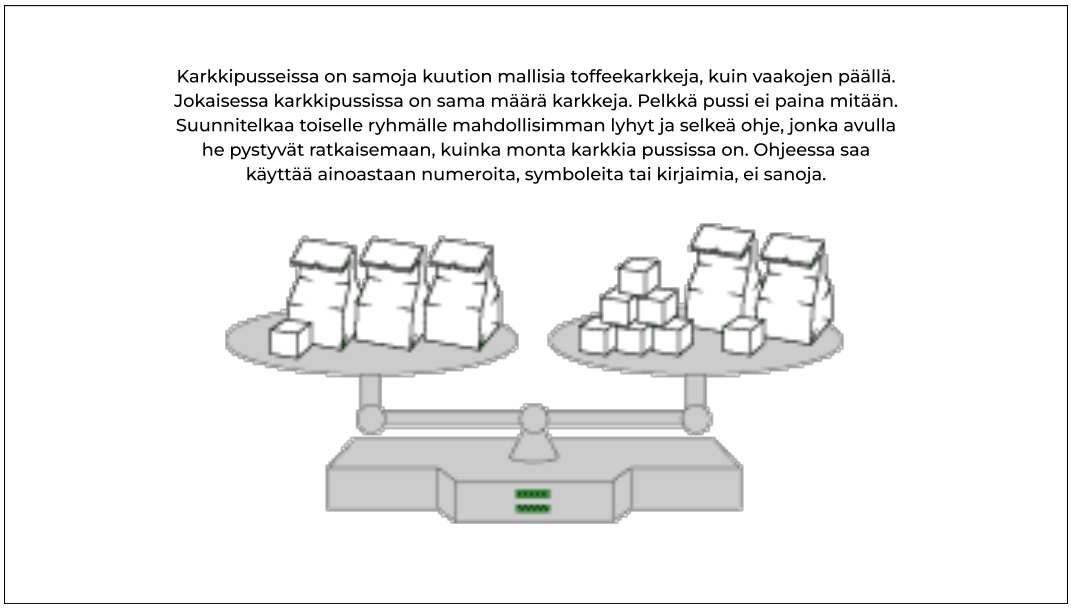
O42: "Tästä selviää, että yks neliö on kolme..."
O41: "...vaahtokarkkia ja toi sokeripala on neliö."
O42: "Ja sitten tollanen vaahtokarkki on kaks ympyrää. Se näkyy tosta, koska täs on neliö ja neliö ja ne on sama. Ja sit on nämä ja nämä."
O41: "Mut ku ne ei nää sitä. Meiän piti keskustella toistemme kanssa."
O42: "Sitten C:ssä on kuus pallo ja kysymysmerkki."
O43: "C:ssä se olisi kolme vaahtokarkkia...Eli yks neliö"

Ratkaisun löytymisen jälkeen opettaja liittyy keskusteluu pyytämällä oppilaita kirjoittamaan, kuinka ratkaisuun päädyttiin. Oppilaat selittävät opettajalle ongelmanratkaisuprosessia, jossa käydään graafin vaiheet ongelman ratkaisemisesta, ongelman sanoittami-

seen, kerrotaan johtopäätöksiä ja annetaan vastaus. Opettajan kommentin jälkeen keskustelu siirtyy vastauksen kirjaamiseen ja opettajan kommenttien väliseen sykliin ja päättyy ongelman ratkaisemiseen.

TOINEN SYKLI – TAVOITTEENA SYMBOLINEN KIELI: MUUTTUJA JA YHTÄLÖ

Toisen 5E-syklin tutkivassa tehtävässä tavoitteena oli siirtyä luonnollisesta kielestä kohti symbolikieltä. Tavoitteeseen pyrittiin antamalla kuvan 5.7 ongelmatehtävä, jossa ongelman ratkaisemisen lisäksi pyydettiin kirjaamaan ratkaisuprosessi paperille ilman sanoja.



Kuva 5.7. *Tutkivan vaiheen ongelmatehtävä 2. syklissä [8]*

Ryhmätöiden äänitteitä toisella kierroksella ei saatu ryhmiltä 3 ja 5, mutta oppitunnin kulusta kuullaan opettajan tunnin jälkeisistä ajatuksista:

> *"Tuntuu vähän semmoselta että olipa säätämistä... Ja sitte mä pidin niille niitä arviointikeskusteluja samalla... Osalla ei ollu tekemistä ni sit ne vaa riehu siellä luokassa...Se oli osittain myös sen takia, et ei ollu enää kauheen hallinnassa se tilanne vaan ne oli siellä juoksenteli missä sattuu."*

Opettaja kuvaa ryhmän hallinnan haasteita, mutta myös oppilaiden ryhmätyön tuloksia. Kommenteista nähdään opettajan tekemää arviointia jo tutkimisvaiheessa niin oppilaiden tekemiseen, kuin oppitunnin kulkuun liittyen:

> *"Moni niistä tajus, että ne vois merkata niitä jollain pienillä kuvioilla... sit pääty vaan siihen vastaukseen...ja sit ku mä sanoin, et kirjottakaa vielä tää alkutilanne, mut ei ne sit... Kyl mä luulen et ne olis pystyny siihen, mut ne oli nii*

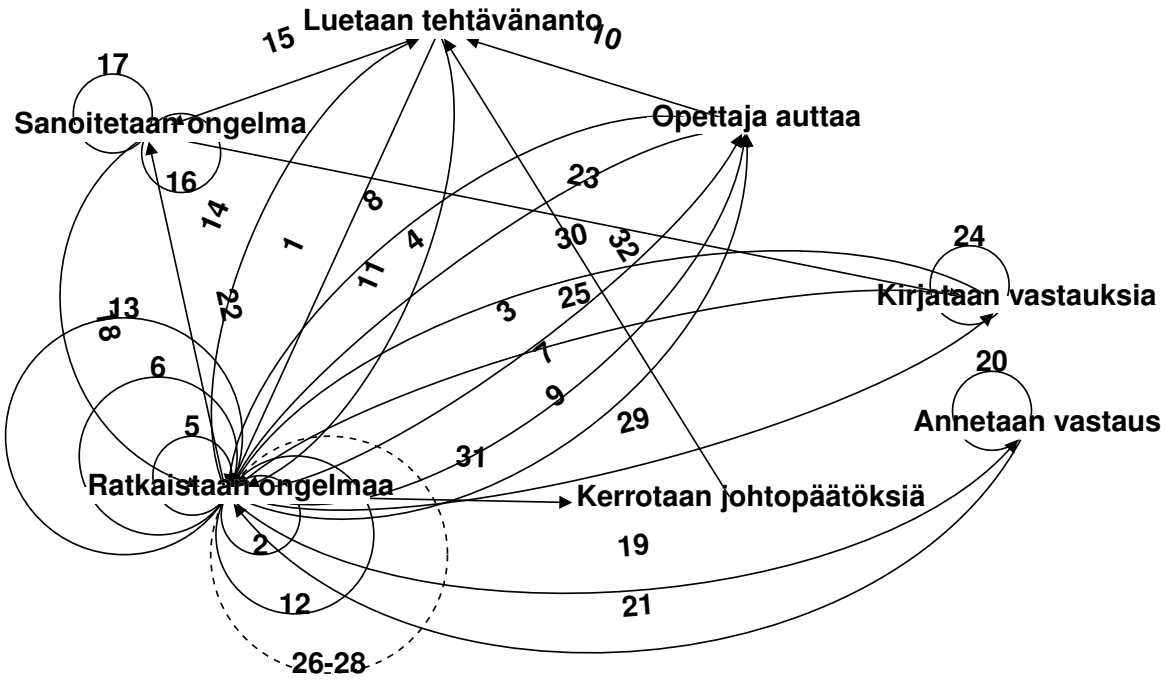
levottomia et ei jaksanu...”

“...Mutta [ryhmällä 5] oli tosi hyvää päättelyä, et ne oli kirjottanu sen alkutilanteenki, et yks laatikko plus kuus tällästä. Sit mä kävin siinä just siinä kohtaa ni sit mä sanoin et pystyiskö tätä vielä yhdistämään...sit ne tajus siitä vielä että seittemän laatikkoo.”

“[O32 ja O31] oli hyvää tekemistä, mut musta tuntuu, että ne ei vielä tajua että ne siinä vähentää tai että mitä ne siinä niinku tekee... Tän tunnin jälkeen tuntuu et ei ihan samanlailla jakseta noita ryhmätöitä... et sit tarvii ihan vaihtelua et ens tunnilla ihan laskutehtäviä, missä pääsee sit käyttään näitä.”

Ryhmä 2

Äänitetty keskustelu saatiin ryhmiltä 2 ja 4, joissa molemmissa kuultiin opettajan ohjausta. Edellisestä tutkimistehtävästä poiketen toisella kierroksella ryhmässä 2 palattiin ongelman ratkaisemisesta useampaan kertaan tarkistamaan tehtävänantoa, mikä nähdään graafista 5.8 . Graafin luettavuutta parannettiin korvaamalla useasti toistuvia vaiheita katkoviivalla.



Kuva 5.8. *Ryhmän 2 ongelmanratkaisuprosessi toisessa tutkimistehtävässä 5.7*

Vuoropuhelussa kuultiin yhden oppilaan aktiivista osallistumista tehtävän ratkaisemiseen. Kyseinen oppilas aloittaa tehtävän ratkaisemisen edellisen tehtävän ratkaisuprosessin 5.3 mukaisesti ennustamalla painoja esineille. Painoihin palataan kuitenkin vasta ratkai-

sun lopussa tarkistamalla vastaus laskemalla ne kilogrammoissa. Opettaja liittyy keskusteluun käymällä vuoropuhelua oppilaan kanssa, mikä nähdään ongelmanratkaisuvaiheen ja opettajan kommenttien välisenä aktiivisuutena graafin janoissa 1-8. Keskustelu etenee seuraavasti:

> O21: "[*Lukee tehtävänannon*]. Eli jos jokaisessa nyt noissa olis vaikka kolme. Toi painaa kilon"
> O22: "Ei toi käy mitenkään järkeen."
> Opettaja: "Miten tää. Sä sanoit, että yhtäsuuruus, ni miten tätä alkutilannetta voisi merkitä sillä?"
> O21: "Heeei, mä tajusin!...Jos nää painaa saman verran, niin sit nää on varmaan täällä...Mut onks noissa pusseissa pakko olla jotain?"
> Opettaja: "Jos nää painaa saman verran. Tämä puoli ja tämä puoli."
> O21: "Mä ajattelin, että nää pussi on tyhjiä, ja sit..."
> Opettaja: "Eli kaikissa pusseissa on saman verran. Eli tää pussi painaa saman verran, ku tää pussi."
> O21: "Mä ajattelin sen niin, että nää pussit on tyhjiä ja sit mä laitan tähän niinku näin."

Ryhmä jatkaa lukemalla tehtävänannon, mistä siirtyvät ratkaisemaan ongelmaa. Yksi oppilaista palaa uudelleen lukemaan ohjetta, mistä edetään sanoittamaan tehtävän vaakaa, mikä nähdään graafin janoista 15-17. Vastaukseen päädytään ilman perusteluja:

> O21: "Mä en tajua, toi mun idea oli oikeesti äsken aika hyvä. Mut nyt se meniki ihan pilalle."
> O23: "En ymmärrä mitään tästä tehtävästä."
> O21: "Mä en tiiä miten tän pystyy niinku tajuamaan, eihän."
> O22: "Pusseissa on... eli meiän pitää nyt kirjottaa ohje ilman, että kirjotetaan ohje."
> O21:"Eli täälä yhessä pussissa."
> O23: "On saman verran kuin tossa toisessa pussissa."
> O21. "Hei mä tajusin ehkä."
> O23: "No kirjota, tai kerro."
> O21: "Oota jokaisessa pussissa on kuus karkkia. Aaa!"

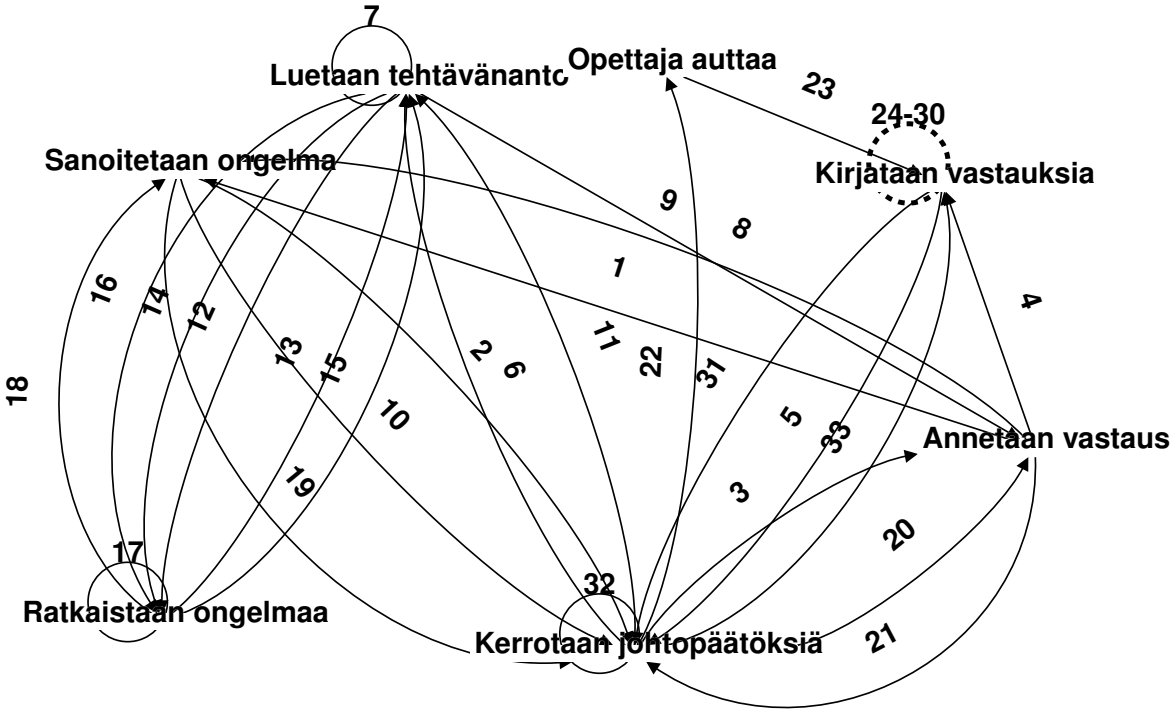
Janasta 18 eteenpäin graafista nähdään, kuinka ryhmä antaa ja toistaa vastauksen ja palaa takaisin ongelman ratkaisemiseen. Ryhmässä sanoitetaan ongelmaa, ja vastausten kautta kirjataan vastauksia. Oppilaat tarkistavat saamansa vastauksen laskemalla tehtävän 5.7 karkkipussien painot kilogrammoissa ja kirjaavat vastauksia ylös. Vastausten kirjaamisen jälkeen ongelmanratkaisu päättyy ongelman ratkaisemiseen janoissa 25-28. Oppilas 23 osallistuu tehtävän ratkaisemiseen palaamalla tehtävänantoon, ja lukee sen ääneen. Ongelman ratkaiseminen jatkuu "emmä tajua" kommenteista edelleen ohjeiden

lukemisen kautta ongelmatehtävän sanoittamiseen, minkä jälkeen saadaan oikea ratkaisu. Selitystä ratkaisulle ei saada, vaan keskustelu jatkuu palikan, tai toffeekarkin, piirtämisestä painojen laskemiseen. Ratkaisun saanut oppilas kyseenalaistaa ratkaisun palaamalla tehtävänantoon, vaikka toinen ryhmän oppilaista on lopettamassa:

> O23: “Kirjota se ny sinne. Mikä tää on mitä tää palikka on. Noni me ei tehä sille palikalle mitään ja tää loppuu nyt.”
> O21: “Älä ny vielä, ku meiän pitää vielä miettiä.”
> O22: “Yks palikka. Toi on niinku yks gramma. ”
> O21: “Onkstää nyt niinku ohje, tai sillee. ”
> O23: “On. Nyt ne voi selittää paljonko ne painaa.”

Ryhmä 4

Ryhmän 4 ongelmanratkaisuprosessi alkaa kuvan 5.7 esittämän karkkipussitehtävän ratkaisusta. Äänitteessä oppilaat pyrkivät selittämään, miten pääsivät ratkaisuun ja miten voisivat sitä merkitä, mikä nähdään ryhmän ongelmanratkaisuprosessia kuvaavan graafin 5.9 janoista 1-22. Graafista nähdään, että ratkaisun kirjaaminen saadaan käyntiin opettajan kommentin jälkeen janassa 23.



Kuva 5.9. *Ryhmän 4 ongelmanratkaisuprosessi toisessa tutkimistehtävässä 5.7*

Ratkaisuprosessin kuvaus alkaa vaa’an sisällön sanoittamisesta, ja etenee johtopäätösten kautta vastaukseen, minkä jälkeen kommentoidaan vastauksen kirjaamista. Vastaus-

ten kirjaamisesta palataan johtopäätösten kautta kertaamaan tehtävänantoa kahteen kertaan ja toistetaan oikea vastaus. O43 jatkaa uudelleen tehtävän sanoittamista, mistä päädytään tekemään johtopäätöksiä.

> O42: “Eli yks pussi on kuusi kuutiota.”
> O43: “Nyt kun tässä on tämä kolme pussia ja tässä toisessa on kaksi pussia. Molemmissa on tämä yksi kuutio, mutta toisessa on myös kuusi kuutiota.”
> O42: “Eli tähän jää nämä ja tähän jää tämä. Eli tämä on yhtä kuin tämä.”
> O43: “Ok. Tämä on ainakin kuusi. Tämä pussi painaa ainakin kuusi. Laita tähän kuusi.”

Graafin janoista 12-16 nähdään, kuinka ryhmä pyrkii selvittämään tehtävänantoa palaamalla toistuvasti tehtävänannon kautta ongelman ratkaisemiseen. Ongelmaa ratkaistaan edelleen, mistä siirrytään ongelman sanoittamisen ja johtopäätösten kautta kertomaan vastaus ja edelleen kertomaan johtopäätöksiä. Opettajan avustuksen jälkeen nähdään graafin janoista 23-33, kuinka oppilaat päätyvät kirjaamaan ratkaisuprosessiaan paperille ja sieltä johtopäätösten kautta lopulliseen ratkaisuun. Ongelmanratkaisun loppu etenee seuraavasti:

> Opettaja: “Miettikää joku merkinätätapa näille ja näille karkeille. Kirjoittakaa se tähän. Ja sanotte, että nää kumoaa toisensa, ni mitä te siinä teette, kun otatte ne pois?”
> O43: “No kaksi a:ta ja”
> O42: “Kaks plus...Joo laitetaan kirjaimia, ai niitä sai käyttää.”
> O43: “Kaksi ykköstä ja yksi kakkonen.”
> O42: “Kaks öö”
> O43: “Alfaa”
> O42: “Plus yks miinus kaks. Hei tällee me saadaan tää ilmotettua.”
> O43: “Ok, joo. Eli nää poistaa toisensa. Nyt otetaan yks pussi.”
> O42: “Sitten vielä kuusi jaettuna yhdellä ja siitä me saadaan yhden pussin paino.”
> O43: “...lasketaanks nää vai nää eka?”
> O42: “Nää lasketaan eka, kun ne on näiden sisällä. Kato...sitten, kun nämä. Sitten siellä on myös nää niin se tekee sitten, hmmm.”
> O43: “Kuusi, eli yhteen pussiin mahtuu kuusi. Emmä tiiä onkstoi oikein. Käydääks kysyy opelta?”

KOLMAS SYKLI – TAVOITTEENA OMAELÄMÄYHTEYS

Viimeisessä syklissä tavoitteena oli yhdistää yhtälöt omaan elämään muodostamalla yhtälöitä kuvan 5.10 pikkukuvista. Äänite saatiin kolmelta ryhmältä, joista ryhmän 6 oppi-

Kuva 5.10. *Tutkimisvaiheen tehtävä 3. syklissä (kuvat Word-ohjelmasta)*

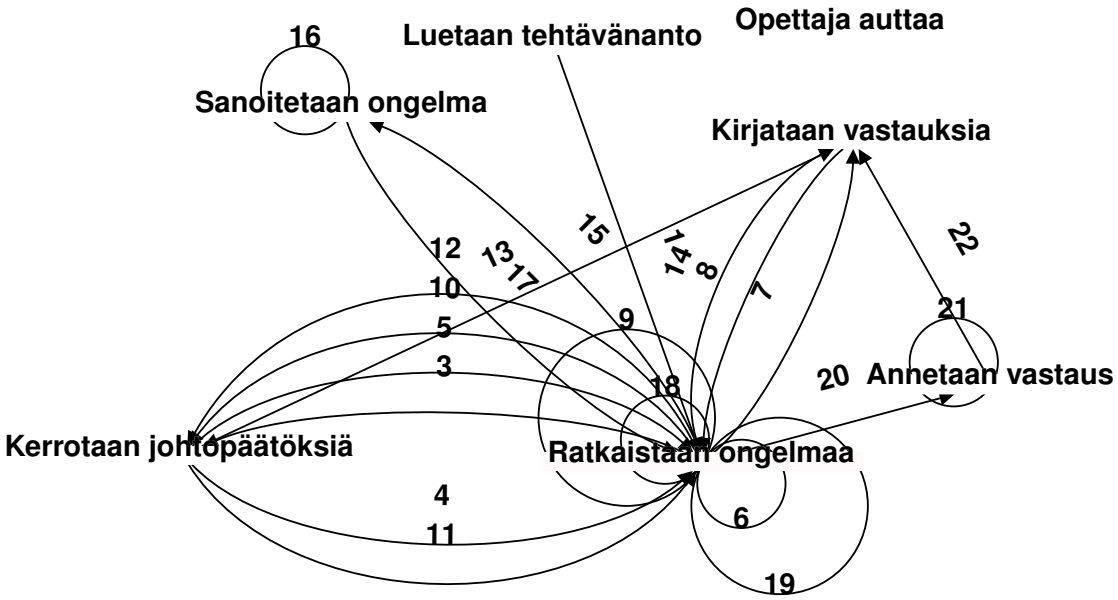
laista yksi oli aikaisemmilla kierroksilla ryhmässä 2. Lisäksi ryhmä 4 palautti äänitteen, mutta keskustelu kesti ainoastaan muutaman lauseen. Tunnin kulusta saatiin aineistoa opettajan tunnin jälkeisistä kommenteista. Opettaja kuvailee aikataulun tuottamia haasteita ja arvoi oppilaiden osaamista. Kommenteissa tulee ilmi hänen omia tuntemuksiaan opetuskokeilun kulusta sekä yleistä ilmapiiriä:

> *Opettaja: "Tunnin lopussa ryhmätyö levotonta... Tuliko hyppy yhtälöön liian suoraan, olisi tarvinnut pidempään ja perusteellisemmin syventää sitä kohtaa... Aikataulun vuoksi tuntuu, että hyppii kohtia. Olisi tehnyt mieli jäädä pidemmäksi aikaa yhtälökohtaan miettimään niitä ennen omaelämäyhteyttä. Tuntuu siltä, että saadaan vain pintaraapaisu ja matemaattinen osuus jää aika vaisuksi. Esimerkiksi merkinnät yms..."*

Ryhmä 2

Äänitteen antaneista ryhmistä jokaisessa muodostettiin yhtälöitä kuvien painoja tarkastellen, mutta ryhmässä 2 sanoitettiin rahankäytön mahdollisuus yhtälöksi. Ongelmaa lähdettiin ratkaisemaan lukemalla kuvassa 5.10 esiintyvän tehtävän tehtävänanto ja tämän jälkeen siirtymällä ongelman ratkaisemisen ja johtopäätösten väliseen vuoropuheluun, mikä nähdään ryhmän ongelmanratkaisuprosessia kuvaavan graafin 5.11 janoista 2-6. Tässä oppilaat pohtivat tehtävänannon ja erityisesti yhtälön merkitystä:

> O21: "Ai yhtälöä. Emmä ees muista, mikä on yhtälö."
> O23: "Puhelin plus apple on puhelinmerkki."



Kuva 5.11. *Ryhmän 2 ongelmanratkaisuprosessi kolmannessa tutkimistehtävässä 5.10*

O21: “Yhtälöä... Miten noi liittyy toisiinsa?”
O23: “Puhelin ja apple ainakin.”
O21: “Niin mut onkse yhtälö?”

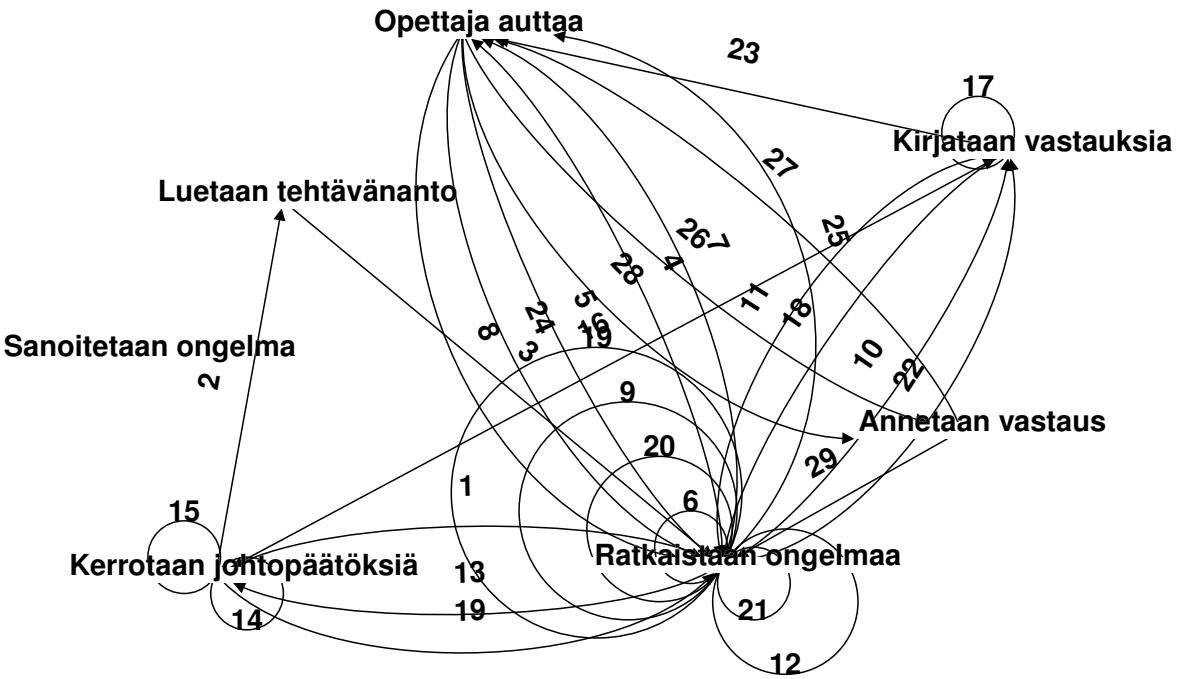
Ryhmä 2 siirtyy kirjaamaan vastauksia, mutta palaavat takaisin johtopäätösten ja ongelmanratkaisun välille janoissa 8-12. Vuorottelevat janat ongelman ratkaisemisen ja johtopäätösten välillä kuvaavat kahden oppilaan yritystä muodostaa yhtälöä rahan käytöstä. Janassa 13 käydään kirjaamassa vastauksia, kun oppilaat vaihtavat kirjoittajan roolia. Pari päätyy sanoittamaan ongelmaa, mikä nähdään janoissa 15-17, kun toinen oppilaista sanoittaa ostotilannetta. Parin yritystä muodostaa rahankäyttöä vastaavaa yhtälöä kuvaa vuoropuhelu, joka vastaa graafin janoja 9-18:

O23: “...Jos käyttää rahaa kaupassa.”
O22: “Joo!”
O23: “Nii mut miten mä teen?”
O22: “Karkki ja raha.”
O23: “Haluuksä tehä ton seuraavan?”
O22: “Joo. Karkki plus kolikot on...mitä se on? Kauppakärry...”
O23: “Ei kun sillee käytät rahaa niin saat karkkia.”
O22: “Niin...kun sä käytät rahaa, niin sä saat karkkia.”
O23: “Niin miks sulla on se plus?”
O22: “Emmätiedä...”

Yritys loppuu ja oppilaat siirtyvät rahasta tarkastelemaan tehtävän muita kuvia, ja muodostavat epäyhtälöitä paperille, mikä näkyy graafissa viimeisinä janoina vastauksesta niiden kirjaamiseen:

> O21: “Miten nää niin ku... mikä tää kirja on... Kirja on hyödyllisempää, kuin puhelin. Siis joittenki fiksujen mielestä. Tommonen juokseminen on järkevämpää, kuin vaikka mönkkärissä istuminen. Ja hevonen on järkevämpää, kuin omena.”

Ryhmä 6



Kuva 5.12. *Ryhmän 6 ongelmanratkaisuprosessi kolmannessa tutkimistehtävässä 5.10*

Ryhmän 6 ongelmanratkaisuprosessin alussa käytiin vastaavaa pohdintaa yhtälön merkityksestä, mikä nähdään graafin janoista 1-6 graafissa 5.12. Keskustelussa yhdistellään kuvia painojen perusteella, mutta yksi ryhmän jäsenistä kyseenalaistaa niiden olevan yhtälöitä:

> O61: “Moottorista ja hevosesta tulee...”
> O62: “Karkista ja suklaasta tulee suklaakolikko.”
> O22: “Mutta nyt piti tehdä yhtälöitä.”
> O62: “Eiksne oo yhtälöitä? Jos laittaa suklaa ja karkki ja ne yhdessä tasapainossa on yhtälö...”
> O23: “Ai et ne on yhtä painavia? Ei hevonen ja moottoripyörä paina yhtä pal-

jon.”
O62: “Se on tavallaan se plus, että mitä tulee kun laitat tämän ja tämän yhteen.”

Opettaja kysyy voisiko suklaakolikkoa merkata jollain muulla tavalla, ja pyrkii keskustelun lopussa syventämään ymmärrystä yhtälöihin kysymällä, voisiko puhelimen painon ratkaista muodostetusta yhtälöstä. Kysymys aiheuttaa hämmennystä, mutta oikea ratkaisu löytyy. Ennen opettajan kommenttia keskustelua käytiin oppilaiden piirtämistä kuvista. Keskustelun lopettava vuoropuhelu nähdään graafin viimeisistä janoista 25-29.

Opettaja: “Miten te täältä esimerkiksi ratkaisisitte ton puhelimen painon?”
O62: “Painon?”
Opettaja: “Esimerkiks. Jos teil olis vaikka tällänen niin, miten te ratkaisisitte ton puhelimen painon?”
O22: “Omenan verran”
Opettaja: “Eli teiän pitäis vähentää tuolta.”
O62: “Omena. Ni sit se olis puhelin.”

Ryhmä 3

Ryhmän 3 kahden lauseen pituinen keskustelu käydään rahasta, mutta keskitytään enemmän kolikoiden painoon. Graafia ei esitetä keskustelun vähäisyyden vuoksi. Yksi oppilaista aloittaa tekemällä johtopäätöksiä vertaamalla omenan painoa kolikkoihin, ja toinen jatkaa antamalla vastaukseksi eri vaihtoehtoja:

O43: “Toi raha painaa varmaan yhtä paljon, kun omena...Ihminen ja mopo on...”
O42: “Laitetaan nää rahat tässä on omena ja tämä, kaks tällästä rahaa on kirja, ja vaikka kymmenen on...”

5.3 Selittäminen

5E-mallin kolmannessa vaiheessa oli tarkoitus oppilasjohtoisesti avata tutkimistehtävää ja käydä läpi uudet käsitteet. Selittämisvaiheen piirteitä kuvattiin tulososion taulukossa 2.3. Tuloksissa tavoitellaan opettajalta oppilaiden rohkaisemisesta edellisen vaiheen tehtävän selittämiseen sekä arviointia oppilaiden muodostuvasta ymmärryksestä. Opettajan tulisi esittää tärkeät käsitteet ja huomioida niissä kiinnostus- ja tutkimisvaiheissa esiintulleita ennakkokäsityksiä. Oppilaan kohdalla tavoitellaan havaintojen ja vastausten selittämisen lisäksi oman ymmärryksen arvioimista ja toisten selitysten kuuntelemista ja kyseenalaistamista. Selittämisvaiheen tuloksissa hyödynnetään aineistona opettajan tunnin jälkeen

äänittämiä havaintoja kahdessa ensimmäisessä syklissä ja viimeisessä opettajan kirjaamia kommentteja äänityksen puuttuessa.

ENSIMMÄINEN SYKLI – TAVOITTEENA SANALLINEN SELITYS: TASAPAINOVAAKA

Ensimmäisen 5E-syklin tavoitteena ollut sanallinen selitys näkyi selittämisvaiheessa. Selittämisvaihe näkyi tunnilla tutkivan vaiheen tehtävän yhteisellä läpikäynnillä virtuaalisella PanBalance-ohjelmalla, josta kuva 5.13. Opettajan tunnin jälkeiset ajatukset selittämisvaiheesta olivat positiiviset:

Kuva 5.13. *Panbalance-ohjelmalla esitetty kuvaus vaa'asta B ensimmäisen tutkivan vaiheen tehtävään, [32]*

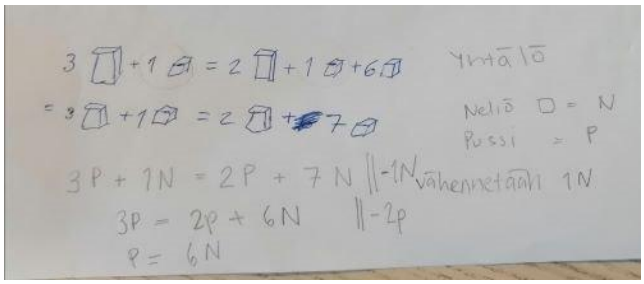
> *Siinä kun mä kävin sitä yhteisesti läpi niin [O31:kin] lähti mukaan siihen ja anto vastauksia. Kun me käytiin sitä yhteisesti läpi siinä ja varsinki ku mul oli se painojuttu siinä mukana, niin siihen ne jotenki tarttu hyvin et sitten ne niinku viittaili ja halus antaa itteki vastauksia. Et se oli ihan hyvä, et otti siihen sen konkreettisen semmosen tai sen havainnollistuksen siihen, minkä kaa sitä yhessä kävi läpi.*

Opettajan kommentista havaitaan sekä opettajan, että oppilaan selittämisvaiheelle ominaisia piirteitä, mutta se antaa vain osittaista tietoa selittämisvaiheen toiminnasta. Opettaja painottaa ajatuksissaan useampaan kertaan, kuinka "käytiin sitä yhdessä läpi", mikä viittaa oppilaiden osallistumiseen tehtävän läpikäymisessä. Tästä voidaan olettaa, että oppilaat ovat kuunnelleet toisten ja opettajan tarjoamaa selitystä. Selitysten kyseenalaistamista tai oman oppimisen arvioimista ei voida aineiston perusteella arvioida, eikä opettajan tekemää arviointia oppilaiden muodostuvasta ymmärryksestä kuulla. Oppilaat kirja-

sivat vastauksensa papereille, mutta ei nähdä niiden hyödyntämistä selityksissä, sillä oppilaiden tarkkoja kommentteja ei kuulla. Ennakko-oletuksia ei otettu huomioon aineiston perusteella.

TOINEN SYKLI – TAVOITTEENA SYMBOLINEN KIELI: MUUTTUJA JA YHTÄLÖ

Opettajajohtoinen selitys ryhmien muodostamien yhtälöiden avulla.



Kuva 5.14. *Opettajajohtoinen selitysvaihe muuttujista ja yhtälöistä tutkivan vaiheen tehtävän 5.7 läpikäymisellä.*

Toisella kierroksella selittämisvaiheessa tarkoituksena oli päätyä yhtälön ja muuttujan käsitteisiin, eli siirtyä luonnollisesta kielestä symbolikieleen. Opettaja kävi tutkivan vaiheen karkkipussi- ja karkkitehtävässä 5.7 muodostetut ratkaisut yhteisesti, mistä vaiheet nähdään kuvasta 5.14. Tehtävän tarkoituksena oli muodostaa ratkaisu ilman sanoja ja päätyä yhtälömuotoon. Opettajan ajatukset selittämisvaiheesta toisessa syklissä eivät jatkuneet yhtä positiivisina, kuin edellisellä kierroksella:

> *Tän tunnin jälkeen olo oli vähän semmonen tavallaan pettynyt, koska mä olin aamulla niin innoissaan niistä vastauksista. Et ne oli löytäny niitä, että merkitään näitä kirjaimilla ja näitä tämmösillä ja kun mä kävin niitten niitä vastauksia, ja sit mä huomasin et ei tääl jakseta kuunnella. Ja ku ne pojat sääti omaa juttuansa niin sit mä vaan sit et kokeilette tätä seuraavaa samanlaista tehtävää ja sit ku ne sai vihkoja vähän esiin ni [tapahtui yksi tuntia keskeyttävä tapahtuma.*

Opettajan ajatuksista huomataan ristiriitaiset tunteet oppitunnin kulusta. Opettaja oli innoissaan edellisen tutkivan tehtävän vastauksista ja "[kävi] niitten niitä vastauksia" tunnilla. Tästä nähdään ero edellisen kierrokseen kommentteihin, jossa opettaja kävi yhdessä vastauksia läpi oppilaiden kanssa. Nyt selittämisvaihe on äänityksen perusteella

opettajajohtoinen, eikä luokassa "jakseta kuunnella". Kuvan 5.14 selityksessä ei nähdä selkeää määrittelyä muuttujalle tai yhtälölle, mutta siinä on hyödynnetty oppilaiden tutkivassa tehtävässä muodostuneita havaintoja. Opettajan kommentista ei voidaan tulkita muita selitysvaiheen toimintoja, eikä esimerkiksi arviointia tai kyseenalaistamista pystytä arvioimaan toisessakaan syklissä puutteellisen aineiston vuoksi.

KOLMAS SYKLI – TAVOITTEENA OMAELÄMÄYHTEYS

Viimeisen kierroksen selittämisvaiheessa läpikäytiin kuvasta 5.10 muodostettuja yhtälöitä. Opettaja kävi edellisen kierroksen tapaan kaksi esimerkkiä tutkivan vaiheen ratkaisuista läpi taululla oppilailta kyselemällä. Kyseisestä vaiheesta aineistoa ei ole äänityksen eikä kommenttejen muodossa. Opettajan toiminta voidaan olettaa opettajajohtoiseksi, eikä pystytä arvioimaan muita selitysvaiheen toimintoja toteutuneiksi.

5.4 Syventäminen

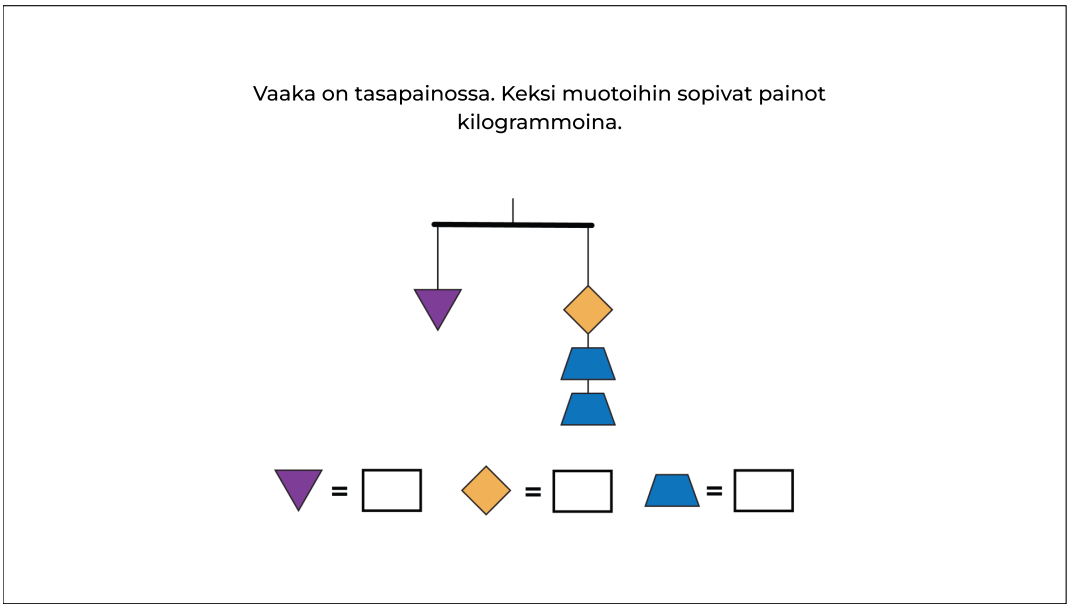
Selittämisvaiheen jälkeen tarkoituksena on syventää käsitteiden osaamista ja soveltaa erilaisissa tilanteissa. Taulukko 2.4 teoriakappaleessa kuvasi kyseiselle vaiheelle ominaisia opettajan ja oppilaan rooleja. Opettaja jatkaa oppilaiden rohkaisemista käsitteiden ja taitojen soveltamiseen erilaisissa tilanteissa ja selittämisvaiheen jälkeen olettaa oppilailta virallisia määritelmiä ja selityksiä. Syventävässä vaiheessa oppilaita voi myös ohjata vaihtoehtoisiin selityksiin. Oppilaiden tehtävänä on kokeilla ja soveltaa opittuja asioita uusissa tilanteissa ja muodostaa kysymyksiä, ratkaisuja ja päätöksiä aiemman tiedon pohjalta. Syventävässä vaiheessa kiinnostavaa tulosten kannalta on myös yhdessä tekeminen ja muilta avun pyytäminen tehtävien ratkaisemisessa.

ENSIMMÄINEN SYKLI – TAVOITTEENA LUONNOLLINEN KIELI: TASAPAINOVAAKA

Syventämisvaiheen tuloksissa aineistona käytetään opettajan äänittämiä ja kirjaamia kommentteja. Ensimmäisessä syklissä tavoiteltiin yhtälöiden taustalla olevan tasapainon ymmärtämistä. Syventävässä vaiheessa oppilaat määrittivät erilaisille tasapainossa ja epätasapainossa oleville vaaoille painoja, ja niistä esimerkki nähdään kuvassa 5.15.

Opettaja kuvailee äänitteessä tuntemuksia ensimmäisen syventävän ja arviointivaiheen tunnista kertomalla tunnin kulusta ja arvioimalla oppilaiden tekemistä:

> *“Siinä [O63] osas saman tien sanoo, et no jos toi painaa neljä kiloo ja toi painaa yks kilo niin noi muut painaa puoltoist kiloo... Et se tuli ihan saman tien ilman, et kauheesti ees miettii sitä asiaa.*



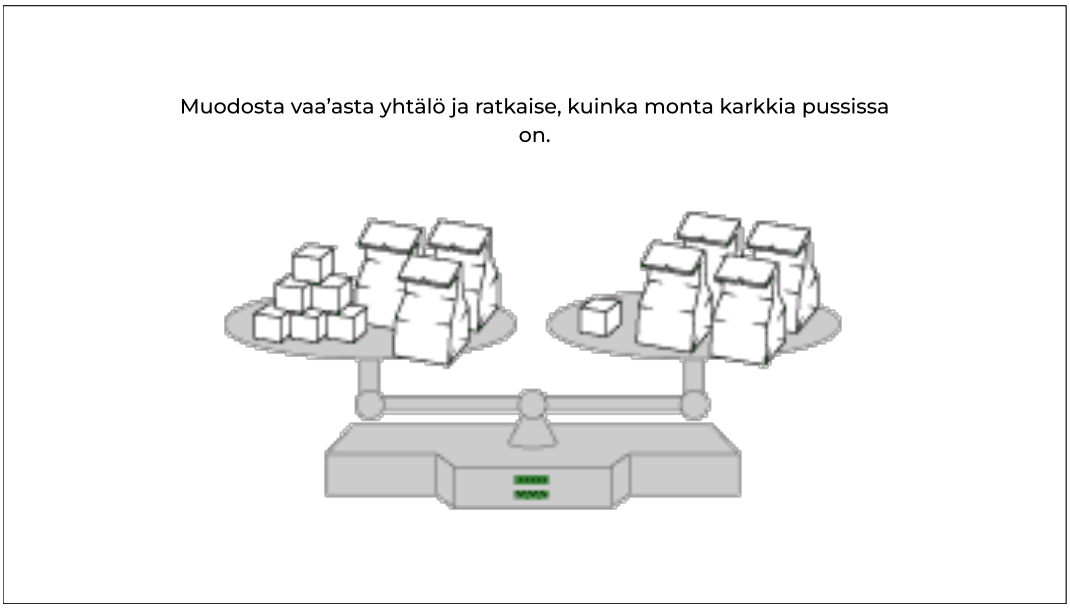
Kuva 5.15. *Esimerkki syventävän vaiheen tehtävistä 1. syklissä [4]*

> *...O64:kin sitte, et ku mä johdattelin siihen et, jos ne vaa'at on niinku tasapainossa ni mitä se tarkottaa niiden molemmille puolille..."No et ne painaa saman verran..."[O64] tais sanoo et molemmat painaa neljä kiloo. Sit mä kysyin, et kuinka paljon sit toi violetti painaa, ni se sano et neljä kiloo. Ja sit mä kysyin vielä erikseen, et kuinka paljon keltanen painaa nin yhen kilon ja sit osas sanoo vielä että 1,5 kiloo ne toiset. Sit kysyin vielä, että ymmärsiksä tän ni se sano et kyllä ymmärsin...*
>
> *Sitä teki aika hyvin kaikki mietti niitä painoja... [O41] osas tosi hyvin sanoo ne painot. Et se sano ensimmäisen tehtävän heti ja en tainnu keretä käydä siellä enää niihin muihin..."*

Opettajan ja oppilaan toiminta vastaa kommenttien perusteella syventävän vaiheen tarkoituksia soveltaa aiempia tehtäviä uusissa tilanteissa. Toisaalta opettajan tehtävä oppilaiden rohkaisemiseen ja uuden tiedon soveltamiseen välittyy pyrkimyksestä sanoittaa tehtävää ja kysymällä tehtävän ymmärryksestä. Oppilaiden aktiivisuus tehtävän yrittämiseen nähdään opettajan viimeisimmästä kommentista. Yhdessä tekemistä ei aineiston perusteella voida arvioida.

TOINEN SYKLI – TAVOITTEENA YHTÄLÖN JA MUUTTUJAN KÄSITTEET

Toisen syklin selittämisvaiheen tuloksissa esitettiin opettajan ajatuksia tunnin kulusta, missä ilmeni tuntia häirinnyt tilanne haastavasti alkaneen selitysvaiheen jälkeen. Toisella kierroksella tavoitteena oli muuttujan ja yhtälön käsitteiden ymmärtäminen, mihin pyrittiin syventävässä vaiheessa vastaavalla karkkipussi- ja karkkitehtävällä 5.16, kuin sitä edel-



Kuva 5.16. *Syventävän vaiheen ongelmatehtävä 2. syklissä [8]*

täneessä tehtävässä. Kyseisen tehtävän ratkaisemista ja lopputunnin ajatuksia nähdään opettajan kommenteista:

> *"Siinä oli muutama, jotka selvästi niinku pääs eteenpäin. [O21 ja O23] niillä oli hyvää ajattelua et [O21] kysy et "aai pitääks meiän näyttää se vaaka niinku yhtälömuodossa tai jotenki numeromuodossa?"Ja sit se jotenki itte tajus, et "aa voidaaksme niinku et pussi on vaikka A ja neliö on vaikka N?...ja sit meiän pitää kirjottaa se niinku ylös?"...*
>
> *No sitte se tunti melkein loppu, ku ne alko tekee sitä... [O31 ja O12] sai niinku sen ensimmäisen kohan tehtyä, mut sitte ne hyppäs suoraan sinne loppuun, mut ne ei näyttäny niitä välivaiheita...et mitä ne siinä tekee. Et se pitää käydä uudestaan, et tässä me vähennetään, otetaan molemmilta vaa'oilta pois yks."*

Opettajan ajatukset ja referoinnit oppilaan ajatuksista toiseen tehtävään kuvaavat 5E-mallin syventävässä vaiheessa toivottua oppilaan toimintaa. Oppilas kokeilee ja soveltaa edellisissä vaiheissa opittuja taitoja uudessa tehtävässä, ja toisaalta kysyy opettajalta ymmärtäneensä tehtävänannon oikein. Kommenteista välittyy oppilaiden yhteistyö ja opettajan oletus siitä, että oppilaiden tulisi tässä kohdassa ymmärtää vähentävänsä, kun ottavat vaaoilta pois. Toisaalta opettaja toteaa, että "se pitää käydä uudestaan", mikä viestii sitä, että selitysvaiheessa määritelmät jäivät opettajan kokemuksen mukaan liian vähäisiksi. Yleisesti opettajan kokemuksia opetuskokeilun keskivaiheilla syventävän vaiheen jälkeen kuvaavat hänen äänittämänsä ajatukset:

“Tuntuu jotenki, kun tavallan ittellä on ehkä myös vahva jotenki sellanen fiilis että tää matikka on se tärkeempi... tai tuntuu et ei olla päästy niinku mihinkää, vaik ollaanhan me jo niinku puoleen väliin et moni on ymmärtäny sen.

Itseasiassa [O61] sano et "mikse pitää tehä jos sen voi vaan päätellä"... niin mä luulen et moni ei... sen takia tee sitä, koska ne aattelee, et se vastaus on niinku se pääasia.”

KOLMAS SYKLI – TAVOITTEENA OMAELÄMÄYHTEYS

Viimeisellä opetuskokeilun tunnilla syventävässä vaiheessa laskettiin kirjan tehtäviä, ja lopputunnista tehtiin arviointivaiheen ongelmatehtävä. Opettajan äänitettä tai kommentteja syventävästä vaiheesta tuntia ei ole, joten toiminnan toteutumista ei voida arvioida muilta osin, kuin vaihtelevien tehtävien käyttöä. Kolmannessa syklissä tavoiteltu omaelämäyhteys jäi vähäiseksi, koska keskityttiin edelleen yhtälön symbolisen muodon ymmärtämiseen ja käyttämiseen.

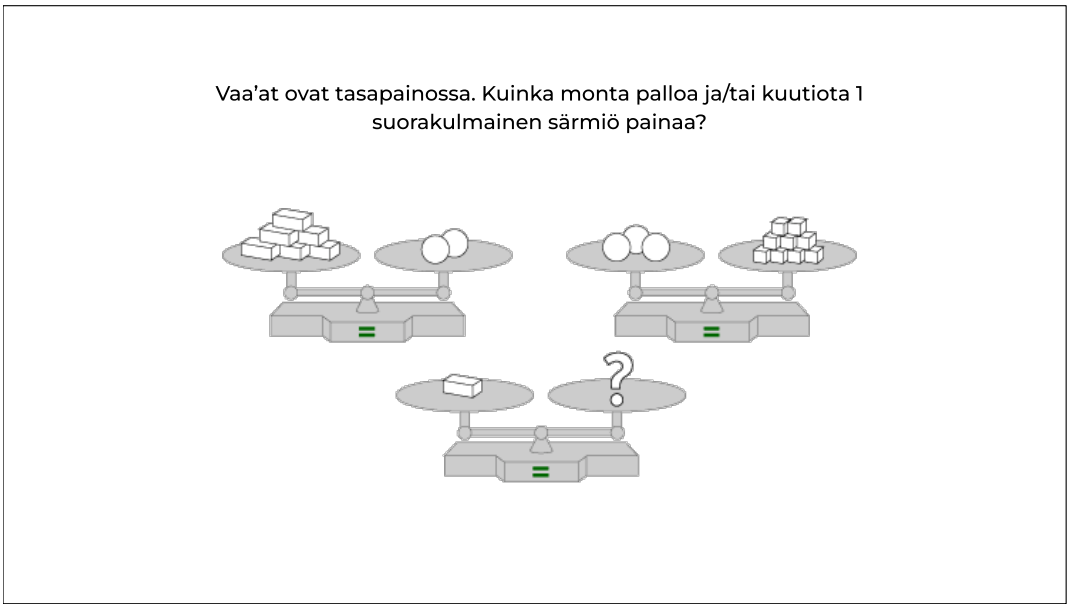
5.5 Arviointi

Viimeinen 5E-mallin vaihe on arviointi, jossa tavoitellaan taulukossa 2.5 esitettyjä toimintoja. Arviointiin sisältyy oppilaiden tietojen ja taitojen arvioimista, mutta myös havainnointia siitä, kuinka oppilaat soveltavat uusia konsepteja. Yhtä oikeaa vastausta hakevien kysymysten sijaan avoimien ja selitystä vaativien kysymysten kysyminen on osana opettajan toivottua toimintaa. Oppilaan roolissa huomioidaan näihin kysymyksiin vastaamista, uusien kysymyksien esittämistä sekä oman osaamisen ja kehittymisen arviointia.

ENSIMMÄINEN SYKLI – TAVOITTEENA LUONNOLLINEN KIELI: TASAPAINOVAAKA

Ensimmäisen syklin arviointivaiheessa oppilaille annettiin kuvan 5.17 ongelmatehtävä. Arviointivaiheen tuloksia kuvaa opettajan positiiviset ajatukset oppitunnin kulusta:

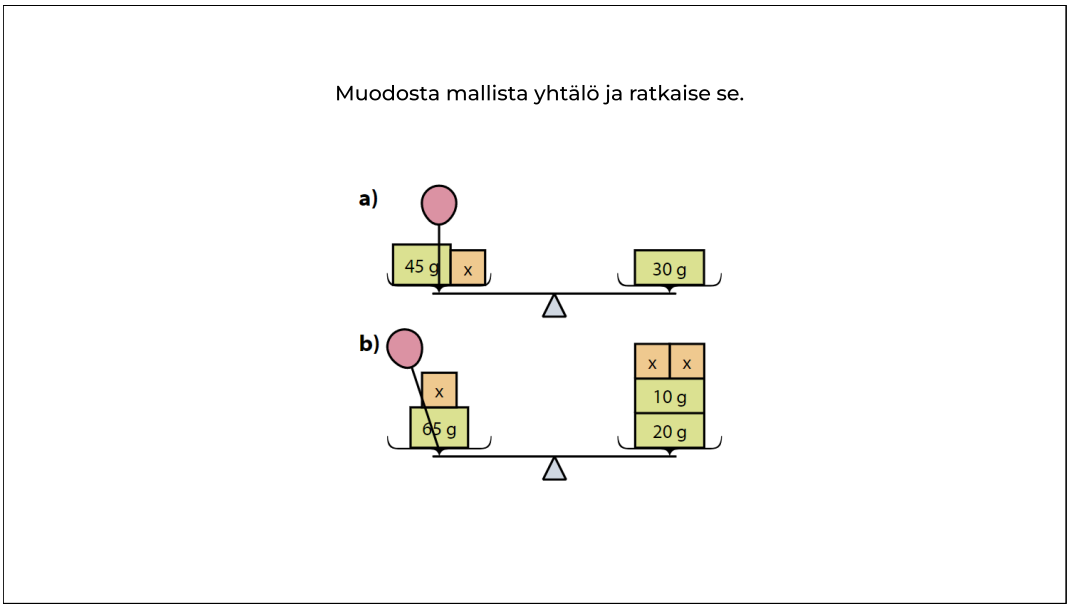
“Sit lopuks tehtiin se arviointitehtävä, jossa oli niitä harkkoja... sitäkin tosi hyvin ne teki....[O21] ja [O12] mietti niitä [kaksin] tosi hyvin ja sai sen selville, et pallohan on vähemmän kun yks. Ja joo ymmärs... mut mä vähän johdattelin ja sit ne ymmärs sen, että jaetaan kolmella. [O43:kin]...nopeesti se ajatteli sen kilogrammamäärinä...tosi hyvin sen mulle selitti, mut en sitä kyl enää muista, mutta jotenki se sitä mietti, et ku on kuus niitä ja kaks palloo ni jos kuus tommosta painaa yhen ni kaks palloo pitää painaa kolme kiloo... ni sit mä vähän johdattelin siihen et, jos sä et käyttäs kilogrammoja ni miten sä lähtisit ratkaisemaan. Mut se oli ihan innoissaan se meni oikein muille sanoon et mä menin tekeen ensimmäisen matikan tehtävän koko vuonna.”



Kuva 5.17. *Arviointivaiheen ongelmatehtävä 1. syklissä [7]*

Oppilaan viimeisin kommentti on yksi esimerkki oppilaan oman osaamisen arvioimisesta ja kehittymisestä. Opettajan ajatuksista nähdään, kuinka opettaja pyrkii avoimella kysymyksellä johdattelemaan vastausta vaihtoehtoiseen suuntaan, ja samalla arvioi oppilaan osaamista.

TOINEN SYKLI – TAVOITTEENA SYMBOLINEN KIELI: MUUTTUJA JA YHTÄLÖ



Kuva 5.18. *Esimerkki arviointivaiheen tehtävistä 2. syklissä [11]*

Toisen syklin arviointivaiheeseen siirryttiin läpikäymällä syventävän vaiheen vaakatehtävä, minkä jälkeen siirryttiin kirjan tehtäviin, joista nähdään esimerkki kuvassa 5.18. Toi-

sessa syklissä tavoitteena ollut yhtälöiden ymmärtäminen tulee esiin opettajan kirjaamista kommenteista, joissa hän arvioi oppilaiden osaamista ja tähän asti muodostunutta ymmärrystä yhtälöistä:

> *"Oppilailla epäselvää, mikä yhtälö on. Osaa päätellä, mutta haastavaa ymmärtää, mitä yhtälöllä tarkoitetaan. [O41] ymmärsi ilman selittämistä, että voidaan jakaa... Pääsi jo ilmapallokohtaan ja ymmärsi, että se paino vähennetään. Monet hyppää suoraan vastaukseen.*
>
> *[O32] ymmärsi yhtälön ja teki eteenpäin, mutta moni alkoi grammoja miettimään päässä.*
>
> *[O31] päätteli painot ja sanoi, että mitä välii ei niin tarvii tehdä.*
>
> *Painaa yhtä paljon YMMÄRRETTY. Yhtälöiden käsittelyä ei oikein ymmärretty. Negatiivista ei vielä ymmärretty. Hämää koska ei ehditty käymään ja vaa'alla painot. "Miten voi olla -7 painoset?""*

Opettaja kirjaa ylös myös opettamiseen liittyviä kommentteja, sekä kuvailee omaa toimintaansa:

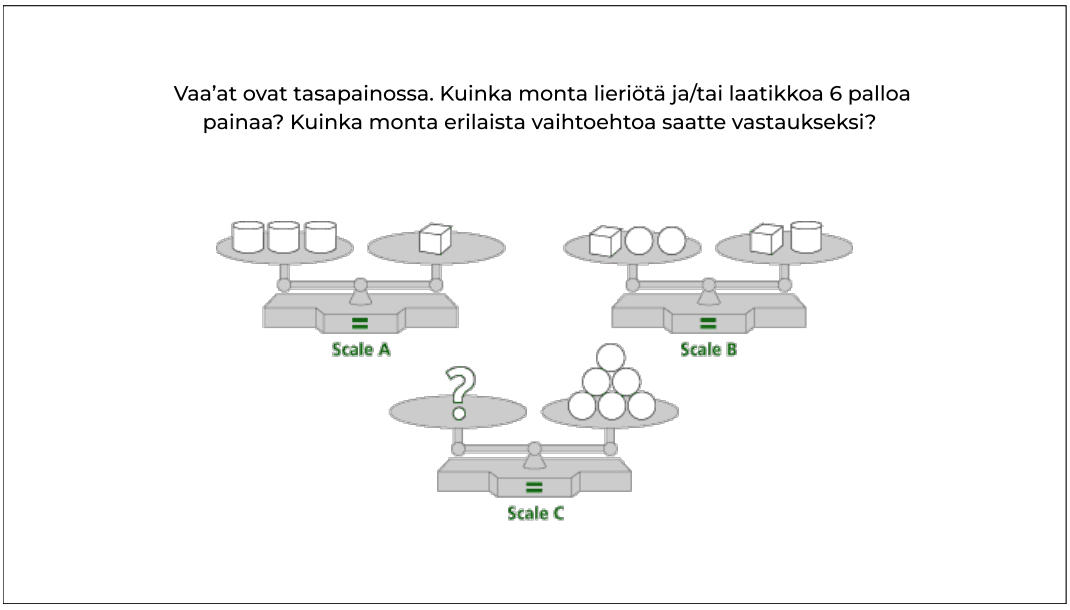
> *O31: "Emmää ymmärrä, kun ei näitä oo kunnolla opetettu."*
> *Opettaja: "Johdattelen heitä, että itse päätyisivät vastaukseen. Esim. [O32] annan tilaa, mutta onko että ei uskalla antaa vastausta?"*

Oppilaan kommentti kuvaa hänen omaa oppimisensa arviointia, ja opettajan oppilaiden arviointia. Annettujen kommenttien perusteella opettaja ei painota yhden oikean vastauksen löytymistä vaan johdattelee tehtävässä eteenpäin ja tavoittelee laajempaa ymmärrystä yhtälöiden ideasta. Opettajan ja oppilaan toiminta aineiston perusteella vastaa arviointivaiheen tavoitteita.

KOLMAS SYKLI – TAVOITTEENA YHTEYS OMAAN ELÄMÄÄN

Opetuskokeilu päättyy viimeiseen arviointivaiheeseen, jossa oppilaat saivat uudelleen ensimmäisen ongelmatehtävän 5.19 ratkaistavaksi. Tehtävänantona oli nyt ratkaista tehtävä yhtälöitä apuna käyttäen, eli luonnollisen kielen sijaan symbolisella kielellä. Viimeisen arviointivaiheen tulokset nähdään opettajan kirjaamina kommentteina, joissa hän arvioi oppilaiden osaamista ja toistaa oppilaiden kommentteja:

> *"[O23] silläkin oli sitte, sil oli paljon merkintöjtä ja se oli ymmärtäny hyvin, mut seki oli käyttäny kilogrammoja ja päätelly sieltä, että se jaetaan, mutta ei ihan päässy siihen... mä vähän siinä...kerroin, että jos ei käyttäis kilogrammoja ni*



Kuva 5.19. *Opetuskokeilun viimeinen tehtävä arviointivaiheessa, [9]*

mitä sä siinä teet. Ni oli selvästi siinä rajalla et ymmärtää sen, että se jako sen sillä kolmella. Sanoi, että ei ymmärrä, mikä on yhtälö, kun annoin tehtävän..."Emmä ymmärrä sun ohjeistusta...aaa...", kun vähän johdattelee, esim. voisiko ottaa jotain pois. Osas tehdä lähes täydellisen kuvia piirtämällä...

[O63]: 'miks meidän pitää käyttää yhtälöitä, kun sen pystyy niin helposti päätteleen?'

[O11]: Selkeästi ymmärtänyt yhtälöiden pointin, ainoastaan merkinnöissä oli jotain outoa.

Todella moni osas jo käyttää kirjaimia merkinnöissä, ainoastaan yhtälöiden kanssa oli haasteita.

[O54] ymmärsi nopeasti, miten lasku päätellään, mutta vaikea kertoa, että on vähentänyt ne. Vasta johdattelun jälkeen."

Opettajan kommenteista nähdään, että edellisen kierroksen arviointivaiheen jälkeen opettajan mukaan ymmärrystä yhtälöistä on syntynyt. Opettajan ja oppilaiden toiminta vastaa toisen kierroksen arviointivaihetta. Opettaja lopettaa äänityksen kommentteihin, jossa reflektoi omaa tekemistään opettajana ja pohtii käyttämäänsä opetusmetodia:

"Tekee mieli käydä jokaisen luona ja antaa heidän oivaltaa, mutta aika ei riitä ja paljon odottelua. Paras olis jos he löytäisivät toisistaan matikkatuen. Huomaa, että ei ole tarvinnut itse päätyä ja ajatella niin paljon, koska en kerro kaikkia vastauksia. Moni ihmettelee miksi pitää näyttää matemaattisesti, jos

voi myös päätellä"

5.6 Yhteenveto

Tulosten esittämiä graafeja käytettiin havainnollistamaan eri ryhmien välistä vuorovaikutusta ja ratkaisuprosessin etenemistä. Graafien lisäksi esitettiin opetuskokeilun tulokset 5E-mallin vaiheiden toteutumisesta. Kiteytetään lopuksi keskeisimmät tulokset opettajan ja oppilaan toiminnasta niin ongelmanratkaisuprosessissa, kuin 5E-mallin toteutumisessa opetuskokeilun aikana.

OPPILAAN TOIMINTA ONGELMANRATKAISUPROSESSISSA

Tutkivan vaiheen ongelmatehtävien ratkaisuprosessit jaoteltiin seitsemään vaiheeseen: luetaan tehtävänanto, sanoitetaan ongelma, kerrotaan johtopäätöksiä, ratkaistaan ongelmaa, annetaan vastaus, kirjataan vastaus ja opettaja auttaa. Ryhmien äänittämiä vuoropuheluja tehtävän ratkaisemisessa kuvattiin graafeina, joissa nähtiin ongelmanratkaisun eteneminen numerojärjestyksessä vaiheista toiseen. Ryhmien välillä huomattiin seuraavia tuloksia.

Opetuskokeilussa keskeiseksi vaiheeksi ongelmanratkaisuprosessissa nousi ongelman sanoittaminen. Kolmen 5E-kierroksen aikana eri ryhmissä nähtiin, että ongelman sanoittaminen johti johtopäätöksiin tai oikeaan vastaukseen. Esimerkiksi ongelman sanoittamisen ja johtopäätösten yhteys nähtiin ryhmän 4 ongelmanratkaisua kuvaavissa graafeissa 5.6 ja 5.9. Ryhmän 5 graafista 5.4 nähtiin ratkaisun eteneen suoraviivaisesti tehtävänannon ja ongelman sanoittamisen vuoropuhelun kautta toivottuun ratkaisuun. Ratkaisuprosessin lopussa vastausta tarkistettiin vastaavasti lukemalla tehtävänantoa ja sanoittamalla ongelmaa vuorotellen.

Tehtävänannon lukeminen nousi muissakin ryhmissä tärkeäksi vaiheeksi ongelman ratkaisemisessa. Ryhmässä 1 palattiin ennen lopullisen vastauksen antamista vielä tarkistamaan tehtävänanto, mikä johti oikeaan ratkaisuun, kts. 5.2. Avoin kysymys *"kuinka monta vastausta..."* tuotti toivotun tuloksen, eikä tehtävän ratkaiseminen loppunut ensimmäisen vastauksen löydyttyä. Ongelman sanoittamisen ja tehtävänannon lukemisen puute korreloi esitettyjä tuloksia: ryhmässä 2 tehtävänanto luettiin vain alussa, tehtävää ei sanoitettu lainkaan, ja ratkaisu pääteltiin tehtävänannosta poiketen grammoissa, kts. 5.3.

OPETTAJAN TOIMINTA ONGELMANRATKAISUPROSESSISSA

Opettajan osallistumista ryhmien keskusteluihin nähtiin useammassa graafissa. Ongel-

man sanoittaminen korostuu opettajan toiminnassa. Ryhmässä 3 opettaja johti ryhmän keskustelua ensimmäisessä syklissä sanoittamalla ongelmaa, mistä ryhmän jäsenet tekivät johtopäätöksiä, kts. graafi 5.5. Ongelman ratkaiseminen loppuu opettajan kommenttiin, vaikka ongelma ei ole ratkaistu:

> Opettaja:“Hyvä! Kirjoittakaa jotain siihen teiän paperiin. Vaikka just toi, mitä te saitte.”

Opettajan avustusta nähdään myös ryhmässä 2 toisella kierroksella, kts.5.8. Tehtävänanto tuotti haasteita, ja siihen palattiin toistuvasti, mikä lopulta johti ongelman sanoittamisen kautta haluttuun ratkaisuun. Opettaja osallistuu keskusteluun ennen, kuin ratkaisu löytyy. Oppilas sanoittaa tehtävää, mutta opettaja keskeyttää oppilaan ajattelun omalla kommentillaan:

> O21: “Mä ajattelin, että nää pussi on tyhjiä, ja sit...”
> Opettaja: “Eli kaikissa pusseissa on saman verran. Eli tää pussi painaa saman verran, ku tää pussi.”

Saman ryhmän tulokset nousivat esiin viimeisellä kierroksella. Ryhmässä huomattiin rahankäytön mahdollisuus yhtälön aiheeksi, mutta sen muodostaminen symboliseen muotoon tuotti haasteita. Oppilaat osasivat luonnollisella kielellä sanoittaa haluamansa yhtälön muotoon "kun käytät rahaa, niin saat karkkia", mutta keskenään eivät päässeet etenemään, kts.5.11.

5E-MALLIN VAIHEIDEN TOTEUTUMINEN

5E-mallin vaiheiden toteutumista analysoitiin opettajan kirjaamista kommenteista ja tuntien jälkeisistä äänitteistä. Tulokset perustuvat ainoastaan opettajan *kokemukseen* tunnin kulusta, poikkeuksena jotkin oppilaiden suorat lainaukset. Kiinnostusvaiheen tuloksista nähtiin tehtäviin herännyttä motivaatiota. Selkeimpänä huomiona nähtiin toisen ja kolmannen kierroksen äänitteiden puuttuminen osalta ryhmistä, mikä viestii motivaation hiipumista. Tutkimisvaihe toteutui 5E-mallin mukaisesti ryhmissä tehtävien ongelmatehtävien vuoksi, kun oppilaat ratkaisivat yhdessä tehtävää ja opettaja kiersi auttamassa ryhmiä eteenpäin. Graafeista ja äänitteistä nähtiin opettajan avustuksen olleen ongelman sanoittamista ja ryhmän eteenpäin viemistä, eikä yhden oikean vastauksen hakemista.

Tuloksissa nähtiin selitysvaiheen toteutuneen 5E-mallin mukaisesti ensimmäisellä kierroksella, kun käytössä oli PanBalance-ohjelma, mutta muilla kierroksilla selitysvaihe päätyi opettajajohtoiseksi eikä aineisto tarjonnut riittävästi tietoa muista vaiheelle ominaisista toiminnoista. Syventävän vaiheen tuloksissa merkittävänä havaintona oli opettajan kommentti liittyen opetuksen toteutukseen yleisemmin. Kommentissa opettaja viittaa siihen, kuinka opetuskokeilussa on painotettu vain yhtälön käsitteellistä ymmärtämistä, ja pohtii

ongelmalähtöisen opetuksen keskeistä aihetta eli kokemusta lopullisen vastauksen tärkeydestä:

> *“Tuntuu jotenki kun tavallan ittellä on ehkä myös vahva jotenki sellanen fiilis, että tää matikka on se tärkeempi... tai tuntuu, et ei olla päästy niinku mihinkää, vaik ollaanhan me jo niinku puoleen väliin, et moni on ymmärtäny sen. Itseasiassa [O61] sano et "mikse pitää tehä jos sen voi vaan päätellä"... niin mä luulen et moni ei... sen takia tee sitä, koska ne aattelee et se vastaus on niinku se pääasia.”*

Syventävässä vaiheessa havaittiin 5E-mallin toimintoja vaihtelevista tehtävistä, mutta esimerkiksi yhdessä tekemistä ei voitu kaikkien aineistojen perusteella arvioida, eikä aineiston puutteellisuuden vuoksi saatu viimeisestä vaiheesta tietoa. Viimeiseksi, arviointivaiheissa nähtiin 5E-mallin mukaista toimintaa: oppilaiden oman osaamisen arviointia sekä ongelmalähtöistä opetusta tukevaa arviointia opettajalta – kysymyksillä tavoiteltiin ymmärrystä yhden oikean vastauksen sijaan. Viimeinen opettajan kommentti arviointivaiheessa kuvaa opettajan ajatuksia ongelmalähtöisen opetuksen haasteista perinteisen opetusmallin rinnalla:

> *“Tekee mieli käydä jokaisen luona ja antaa heidän oivaltaa, mutta aika ei riitä ja paljon odottelua. Paras olis jos he löytäisivät toisistaan matikkatuen. Huomaa että ei ole tarvinnut itse päätyä ja ajatella niin paljon, koska en kerro kaikkia vastauksia. Moni ihmettelee miksi pitää näyttää matemaattisesti, jos voi myös päätellä”*

6. POHDINTA

Tässä työssä kuvattiin yksi esimerkki peruskoulumatematiikan muutoksesta kohti nykyaikaa – aikaa, jossa tarvitaan kaavojen muistamisen sijaan kykyä ajatella, ratkaista ongelmia ja tilaa luoville ideoille. Tutkimuksen painopisteenä oleva ongelmanratkaisutaitojen hallinta auttaisi oppilasta niin koulussa, harrastuksissa, kuin myöhemmin työelämässä. Lähtökohtana ongelmalähtöisen opetuksen tutkimiseen käytettiin pedagogista 5E-mallia, jonka ympärille seitsemäsluokkalaisten matematiikan opetuskokeilu rakennettiin. Kolmen viikon yhtälönratkaisun ympärille suunniteltu opetuskokeilu rakentui kolmesta 5E-syklistä, joiden avulla saatiin tietoa niin oppilaiden ongelmanratkaisuprosessista, kuin kielentämisen hyödyllisyydestä sen tukena. Sanoittamalla tehtävää, oppilas ja opettaja pääsivät käsiksi oppilaan ymmärrykseen käsillä olevasta tehtävästä. Tätä kautta löydettiin avain ongelman ratkaisemiseen.

6.1 *Kirjoittakaa jotain siihen teiän paperiin*

5E-mallin toisen vaiheen, tutkimisvaiheen, ryhmätyöäänitteistä muodostetut graafit tuottivat arvokasta visuaalista tietoa ongelmanratkaisuprosessin etenemisestä. Oppilaat ratkaisivat ryhmissä vaakaongelmia, joilla syvennyttiin yhtälöaiheeseen. Opetuskokeilu rakentui tasapainovaa'an ympärille, millä pyrittiin luomaan käsitteellistä ymmärrystä yhtälöiden taustalla olevasta tasapainon ideasta. Aihetta käsiteltiin ensin luonnollisen kielen kautta ensimmäisessä syklissä, mikä osoittautui luontevaksi tavaksi päästä käsiksi oppilaiden ennakkokäsityksiin – ja toimi samalla ikään kuin laajempana kiinnostusvaiheena koko opetuskokeilussa. Luonnollinen kieli ja monelle helposti ymmärrettävät tasapainovaakatehtävät loivat itsevarmuutta ja kannustivat puhumaan omaa ajatteluprosessiaan tehtävää tehdessä. Tällä pystyttiin luomaan pohjaa yhtälön ratkaisemiselle vahvistamalla oppilailta nousseita ajatuksia. Vaakaongelmia jatkettiin toisessa 5E-syklissä, kun tavoitteena oli pyrkiä luonnollisesta kielestä symbolikieleen. Keskeisenä tähän tavoitteeseen pääsemisessä oli vaakatehtävä 5.7, jonka tehtävänantona oli esittää ratkaisuprosessi ilman sanoja. Tehtävänanto pakotti oppilaat jatkamaan tehtävän tekemistä oikean ratkaisun löytymisen jälkeen, ja miettimään taaksepäin yhteistä ratkaisuprosessia. Oppilaiden johdolla päästiin luonnollisesta kielestä symbolikieleen, kun oppilaat ymmärsivät merkitä vaakojen esineitä kirjaimilla ja muodoilla. Käsitteellinen ymmärrys yhtälöiden taustalla olevasta vaakaideasta oli luotu, ja nyt päästiin käsiksi yhtälön matemaattiseen merkin-

tään. Tätä vahvistettiin edelleen viimeisellä kierroksella, kun tavoitteena oli löytää yhteys omaan elämään. Tehtävä 5.10 yhtälöiden muodostamisesta kuvien perusteella ja tavoite omaelämäyhteydestä tuli monelle liian aikaisin, sillä yhtälön matemaattista muotoa ei oltu vielä käsitelty tarpeeksi syvällisesti. Tästä huolimatta tuloksia saatiin tavoitteen suuntaan.

Äänitteiden jaottelu seitsemään vaiheeseen antoi mahdollisuuden tarkastella niin oppilaiden ongelmanratkaisun etenemistä, kuin opettajan tuen merkitystä ongelman ratkaisemisessa. Yksinkertaiset, ymmärrettävät kategoriat olivat aineiston analysoimisen kannalta merkittävät. Huomionarvoisiksi nousivat kolme kategoriaa: "tehtävänannon lukeminen", "ongelman sanoittaminen"ja "opettaja auttaa". Tehtävänannon lukemisen ja ongelman sanoittamisen merkitys korostui niin tehtävän ratkaisun alussa tehtävän ymmärtämisessä, kuin lopussa ratkaisua tarkistaessa. Ongelman sanoittaminen, eli tehtävän avaaminen luonnollisella kielellä, *kielentämällä*, johdatti ryhmät joko tekemään johtopäätöksiä, tai antamaan vastauksen, kts. 5.4, 5.6, 5.5, 5.2. Tulos on merkittävä osoitus kielentämisen hyödyllisyydestä matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Kuviokielellä esitetyn ongelman avaaminen luonnollisella kielellä ohjasi tehtävässä eteenpäin.

Tämä matemaattisen ongelman, tai tässä tilanteessa kuviokielellä esitetyn ongelman, ääneen ajatteleminen on tunnistettu keskeiseksi tekijäksi oppilaan oman ymmärryksen kehittymisessä, mikä auttoi tehtävän ratkaisemisessa. [19] Tehtävän sanoittaminen vaatii oppilaan jäsentävän omaa ajatustaan, jotta pystyy sitä jakamaan muille, mikä edesauttaa ymmärryksen kehittymistä. Tämä luonnollisen kielen hyödyllisyys ulottuu pitkälle – kyky selittää toisille tuntematon ongelma tai sen ratkaisu ymmärrettävällä tavalla on keskeinen työelämätaito alasta riippumatta.

Ongelman sanoittamisen painoarvoa korostaa sen pois jättämisen vaikutus yhden ryhmän ratkaisuprosessissa, kts. 5.3. Ongelmaa ei sanoitettu lainkaan, eikä palattu lopussa tarkistamaan tehtävänantoa, mikä itsessään ohjasi useampaa ryhmää vastaamaan avoimeen kysymykseen toivotulla tavalla, kts. 5.2 ja 5.4. Vastaus tehtävälle saatiin nopeasti, mutta ryhmä väistää sekä tehtävänannon kysymyksen, että ideana olleen keskustelemisen, jolloin ratkaisu jää puuttelliseksi. Tämä saattaa olla seurausta siitä, että oppilaat ovat tottuneet suljettuihin tehtäviin, jossa tavoitteena on saada yksi vastaus. Tehtävä nähdään jo ratkaistuksi, kun vastaus on selvillä. Tämä piirre esiintyy usein oppikirjaan sitoutuvaksi opetukseksi kutstutussa opetusmallissa. [23] Oppilaat ovat tottuneet oppikirjoista tuttuun symbolikielen käyttämiseen, ja saattavat tunnistaa sen ainoaksi oikeaksi ratkaisuvaihtoehdoksi. Tämä on kuitenkin tunnistettu oppilaan ajattelun kehittymisen kannalta haitalliseksi, sillä se ei kannusta oppilasta ilmaisemaan omaa ajatteluaan ja vahvistaa käsitystä siitä, että vastaus olisi keskiössä.

Ongelman sanoittamisen lisäksi opettajan avustuksen sisällyttäminen ongelmanratkaisuvaiheisiin tuotti merkittävää lisätietoa oikea-aikaisen tuen merkityksestä ongelmanratkaisun etenemisessä. Muodostetuista graafeista havaittiin ongelmanratkaisun kulku ja toi-

saalta opettajan merkitys tehtävän ratkaisemisessa. Janat "opettaja auttaa" -solmusta muihin solmuihin kuvaavat opettajan tuen osuutta tehtävän ratkaisemisessa. Toisissa ryhmissä janat vuorottelevat opettajan ja oppilaiden välillä, kun toisissa opettajan apua tarvittiin vain yksittäisten kommenttien verran. Keskusteluja kuuntelemalla huomattiin, kuinka opettaja pystyi tukemaan ryhmää sanoittamalla ongelmaa ja näin saamaan oppilaat tekemään johtopäätöksiä, kts. 5.5. Toisaalta, ongelmanratkaisun etenemisen kannalta ratkaisevana kommenttina ollut

> "kirjoittakaa jotain siihen teiän paperiin...",

saa kyseisen ryhmän keskustelun ja ongelman ratkaisemisen loppumaan välittömästi opettajan poistuttua. Toisenlaisella kysymyksellä keskustelu olisi voinut edetä toivotulla tavalla. Esimerkiksi, "kertokaa vielä ääneen, mitä huomaatte vaa'asta B ja hyödyntäkää tätä tietoa vaakaan C", kts. tehtävä 5.1. Näin opettaja ohjaisi oppilaita sanoittamaan vaakaa, mikä voisi suunnata heidät jatkamaan tehtävän ratkaisemista.

Opettajan tuella on merkittävä rooli ongelmanratkaisuprosessissa, kun ryhmä ei pääse etenemään. Viimeisessä tutkimisvaiheessa yhdessä ryhmässä täytettiin viimeisen 5E-syklin tavoite yhteydestä omaan elämään, kun ryhmän oppilas havaitsi luonnollisella kielellä, "kun käytät rahaa, niin saat karkkia", kts. 5.11, mutta ei kyennyt parin kanssa muodostamaan yhtälöä symbolikielelle. Opettajan tuki tässä kohdassa olisi ollut merkittävä. Yritys loppuu nopeasti, mistä huomataan pitkäjänteisen työskentelyn puute. Tämä voi olla seurausta tottuneisuudesta opettajan liian aikaiseen avun tarjoamiseen, tai toisaalta nostaa itseluottamuksen ja minäpystyvyyden aiheita ajatuksella siitä, että idea ei ole oikein, joten turha yrittää. Esimerkiksi aiemmat kokemukset heikoista arvosanoista tai vääristä vastauksista todennäköisesti vaikuttavat siihen, kuinka pitkään jaksaa yrittää, kun oikeaa ratkaisua ei heti löydy. Opettajan tehtävänä olisi luoda kannustava ilmapiiri, jossa oikeiden vastausten sijaan pitkäjänteinen yrittäminen on arvokkaampaa.

Toisaalta opettajan avustusta samalla ryhmällä nähtiin toisessakin syklissä, kts. 5.8. Oppilas prosessoi tehtävää ja pyrki sanoittamaan omaa ajatteluaan, mutta opettaja puuttui väliin liian nopeasti. Oppilas sanoittaa tehtävää 4.8 kuvailemalla, että "jos nää painaa saman verran, niin sit nää on varmaan täällä... nää pussit on tyhjiä, ja sit..." Opettaja ei odota oppilaan kertovan ajatustaan loppuun, vaan puuttuu sanomalla, että "eli pusseissa on saman verran..." Oppilaalla oli suurella todennäköisyydellä oikea suunta ajatteluprosessissaan, koska päätyi myöhemmin oikeaan vastaukseen. On kuitenkin huomattava, että opettaja saattaa liian aikaisella puuttumisella lannistaa oppilaan vapaata ideoiden ja ajatusten jakamista, koska saa oppilaan ajattelemaan niiden olevan väärin. Tästä viitteitä saatiin oppilaan kommentista opettajan poistuttua: “mä en tajua toi mun idea oli oikeesti äsken aika hyvä. Mut nyt se meniki ihan pilalle.”

Opettajan kyky tarjota tukea oikeaan aikaan ja oikealla tavalla nostaa esiin opettajana tarvittavan osaamisen monipuolisuutta. Matematiikan opettajalle ei riitä pelkän matematiikan

osaaminen, mutta myös sen opettamiseen liittyvän tiedon tuntemusta, mihin välttämättä yliopistokoulutuskaan ei tarjoa edellytyksiä yhtä hyvin kuin yleisempään matemaattiseen osaamiseen. [21] Opettajana tarvitsee opetuksen ja oppimisen piirteiden tuntemusta, eli esimerkiksi oppimisvaikeuksien tunnistamista ja kykyä muokata opetusta oppilaiden yksilöllisiin tarpeisiin. Ja keskeisenä, esimerkiksi edellä kuvatussa tilanteessa, opettajan pitäisi pystyä huomioimaan oppilaan onnistumisia, tunnistamaan oikea aika tuen antamiselle ja oikea hetki siirtyä seuraavaan aiheeseen. Suomalainen väitöskirja keskittyy tähän mittavaan skaalaan opettajan tarvitsemaa tietoa, ja tutkimuksen kautta tuo esiin valmistuneiden opettajien haasteita näiden tietojen käyttöönotossa opettajaksi siirtymisessä.

Opetuskokeilussa esiintyneitä oppilaiden keskusteluja ja opettajan tukea voidaan heijastaa Vygotskyn teoriaan lähikehityksen vyöhykkeestä (*zone of proximal development*). [41] Teorian mukaan yksilön nykyisen taitotason ja potentiaalisen taitotason välissä on lähikehityksen vyöhyke, jossa oppiminen tapahtuu. Lähikehityksen vyöhyke saavutetaan, kun yksilön taitotaso ongelman ratkaisemiseen ei riitä, vaan opettajan tai osaavamman oppilaan osallistumisella tai ohjauksella saadaan ongelma ratkaistua. Oikea-aikaisella tuella (*scaffolding*) opettaja mahdollistaa oppilaan sisäistämään tiedon seuraamalla ja ohjaamalla oppilasta, kunnes hän pystyy itse ratkaisemaan ongelman. [2] Oikea-aikainen tuki voi tarkoittaa esimerkiksi tehtävän rajoitusten määrän vähentämistä, jolloin oppilas pääsee etenemään. Tämä vaatii opettajalta kärsivällisyyttä odottaa avun antamista ja kannustamaan oppilaita yrittämään todellisen taitotasonsa rajalle, mutta kuitenkin kykyä olla auttamassa juuri oikealla hetkellä. Esimerkiksi edellä kuvatun rahankäyttötehtävän kohdalla opettajan tuki olisi voinut tarkoittaa opettajan sanoittavan yhden esimerkin, ”ostat viisi maitopurkkia viidellä eurolla,” jolla oppilaat olisivat malttaneet jatkaa tehtävän ratkaisemista ja päässeet omalle lähikehityksen vyöhykkeellensä. Todellinen haaste ilmaantuukin siinä, missä määrin opettaja pystyy tunnistamaan oppilaan nykyisen taitotason ja viitseliäisyyden rajan. Oikea-aikaisella tuella voi olla keskeinen tekijä pitkäjänteisemmän työskentelyn edesauttamiseen. Tästä *yrittämisen* alueesta saadaan oiva mahdollisuus päästä työn alussa toivottuihin taitoihin – epävarmuuden sietämiseen, kyseenalaistamiseen ja luovuuteen, joilla päästään tietokoneen edelle.

6.2 *Mikse pitää tehä, kun voi vaan päätellä?*

5E-mallilla toteutettu ongelmalähtöinen matematiikan opetus nosti kielentämisen kautta käsitteellisen ymmärryksen merkitystä. Ongelmatehtävien kautta yhtälöaihetta johdateltiin kuviokielen ja luonnollisen kielen kautta kohti matemaattista yhtälöä. Kielten kautta tavoitteena oli muodostaa syvällinen ymmärrys yhtälöstä käsitteenä eikä peräkkäisinä operaatioina x:n ympärillä. Tämä tarkoitti yhtälön taustalla olevan tasapainon ymmärtämistä, mihin ensimmäisessä 5E-syklissä tavoiteltiin luonnollisen kielen avulla kuvaamalla vaa’an esineitä ja niiden suhteita toisiin. Näin pyrittiin huomioimaan esimerkiksi se, että

yhtälön molemmille puolille pitää aina tehdä samat laskutoimitukset, jotta "vaaka pysyisi tasapainossa". Oppilaiden tottuneisuus rutiinimaisiin kirjan tehtäviin, nk. *proseduraalisen sujuvuuden* harjoittamiseen, heijastui opettajan tunninjälkeisten ajatusten välistä:

> "Moni ihmettelee miksi pitää näyttää matemaattisesti, jos voi myös päätellä...Mä luulen, et moni ei sen takia tee sitä, koska aattelee, et se vastaus on niinku se pääasia."

Ongelmalähtöisen oppimisen ytimessä ovat avoimet ongelmat, joilla yhden oikean vastauksen etsiminen jää taka-alalle. Avoimissa tehtävissä on usein monta erilaista vastausvaihtoehtoa, jotka voivat riippua vastausprosessista. Opetuskokeilu rakentui avoimien vaakaongelmien ympärille, millä pyrittiin suuntaamaan huomio käsitteeseen – eli tasapainoon yhtälön taustalla. Opettajana en ollut kiinnostunut kuulemaan, kuinka monta neliötä yksi pallo painaa, kts. tehtävä 4.3, vaan siitä, *miten* oppilaat päätyivät tuohon vastaukseen. Huomio kiinnitettiin prosessiin ja sen esille tuomiseen, ei päämäärään eli vastaukseen. Tätä harjoiteltiin sykli kerrallaan. Ensimmäisessä syklissä tarkoituksena oli keskustelemalla etsiä, kuinka monta ratkaisua vaakaongelmalle löytyy ja miettiä, miten ratkaisuun päädyttiin ilman suurempaa painoarvoa lopullisella vastauksella, kts. tehtävä 4.3. Toisessa syklissä painotus prosessiin kasvoi, sillä tarkoituksena oli kirjoittaa ratkaisuprosessi ilman sanoja, kts. tehtävä 4.8. Tämän tarkoituksena oli saada oppilaat ajattelemaan, kuinka kuvioita voisi merkitä symboleilla, ja kuinka he hyödyntävät matemaattista ajattelua huomaamattaan vastaavien ongelmien ratkaisemisessa. Oppilaiden itse löytämä yhteys muotojen ja kirjainten välille tuotti positiivisia tuloksia, sillä oppilaat tunnistivat kirjaimen, eli muuttujan merkitsevän jotain konkreettista. Kuitenkin toisen ja kolmannen syklin kohdalla ratkaisuprosessin avaaminen tuotti haasteita. Ongelman muuttaminen matemaattiseen muotoon tuntui turhalta, kun oikea vastaus oli jo löytynyt.

Opetuskokeilu heijasti ongelmakohtia, joita perinteinen oppikirjaopetus saattaa piilottaa. Toisen syklin kohdalla kyseisten tehtävien tavoitteena ollut yhtälön ja muuttujan *ymmärtäminen* ratkaisuprosessin kirjaamisella tuotti haasteita numeromuotoisten tehtävien toistamisen rinnalla. Oppilaat ovat mahdollisesti tottuneet etsimään yhtä oikeaa vastausta niin tuntitehtävissä, kuin kokeissakin, mikä väkisin vie huomion pois prosessista ja ymmärtämisestä. Jos oppilas saa täydet pisteet mekaanisilla kaavoilla ja oikealla vastauksella, ei hän motivoidu aihetta suuremmin ymmärtämään. Tästä huolimatta yläkoulumatematiikan kirjoissa opetetaan yhtälöiden laskemista irrallisten termien, kaavojen ja termien siirtelyn kautta. Oletuksena varmaan on, että lopuksi oppilas itse kokoaa näistä ymmärrettävän kokonaisuuden. Opettajanhuonekeskusteluissa tehtävien toistamisen merkitys ainakin korostuu. Oppikirjan tehtävät edellä suuntaava opetus on monelle opetajalle helpoin vaihtoehto, eikä esimerkiksi kielentämisen hyödyllisyydestä käsitteellisen ymmärryksen luomisessa olla saatu omakohtaista kokemusta. [23] Opettajille ja etenkin opettajaopiskelijoille tarjottu tuki monipuolisemman opetuksen toteuttamiselle olisi keskiössä, jotta he saisivat intention hyödyntää niitä opetuksessaan.

Käsitteellisen ymmärryksen merkitys korostuu yliopistomatematiikkaan siirtymisessä, sillä peruskoulussa ja lukiossa luodulle pohjalle rakennetaan abstraktimpeja oppeja, joita ei pysty enää "vain päättelemään". Tätä havainnollistettiin kappaleessa 3 johdattelemalla nolla-avaruuskäsitteeseen lineaaristen yhtälöryhmien kautta. Haastavammille käsitteille ei löydy yhtä luontevasti arkielämän yhteyksiä tai selityksiä, joilla ymmärtäminen helpottuisi, vaan "on pakko tehä". Olennaista olisikin, että yliopistoon mentäessä, opitut asiat olisivat *ymmärretty*, eikä erillisten toimintojen ja muistisääntöjen varassa. Kenties yksi keskeisimmistä asioista olisi ymmärtää, mistä yhtälössä yksinkertaisimmillaan on kyse. Nolla-avaruuden ymmärtämisessä lähdetään liikkelle linearisesta yhtälöryhmästä. Jos tässä kohdassa yhtälön ymmärtäminen perustuu termien siirtelyyn, voi yliopistomatematiikka tuottaa haasteita.

Yliopistomatematiikassa esiintyviin haasteisiin pitäisi vastata jo ennen niiden alkamista. Jos peruskoulu- ja lukio-opintojen lähtökohdaksi otettaisiin matemaattisen ajattelun kehittyminen ja käsitteiden ymmärtäminen, siirtymäkohdat eri asteiden välillä voisivat muuttua joustavammiksi. Yliopistotasolla matemaattisen ajattelun piirteitä, kts. kappale 2.4, käytetään kattavasti. [33] Yliopistomatematiikkaan keskittyvässä artikkelissa koostettiin, kuinka matematiikan opetus rakentuu eri osista matemaattisen ajattelun mukaan. Muun muassa sovelluksia, keskustelua ja verkkomateriaalia hyödynnetään käsitteellisen ymmärryksen, mukautuvan päättelyn ja matematiikkakuvan vahvistamiseksi. Proseduraalisen sujuvuuden edistämiseksi järjestettiin tehtävien tekemistä harjoittavaa matematiikkaklinikkaa, ja toisaalta ollaan tunnistettu tutkivan oppimisen hyödyt ja pyritään sen avulla vastaamaan opiskelijoiden motivaationpuutteeseen. Vastaavaa lähestymistapaa voisi ulottaa lukion lisäksi myös yläkoulu- ja alkuopetustasolle.

Tässä tutkimuksessa käytetty 5E-malli itsessään huomioi kattavasti matematiikan osaamisen piirteitä ja pakottaa opettajan suunnittelemaan opetusta johdannossa ilmi tulleista muistajan ja toistajan rooleista kohti ajattelijaa ja tutkijaa. Eri vaiheiden mukainen tuntisuunnittelu sekä opettajan roolin muuttuminen irrottaa opettajan yksinomaan oppikirjan aukeama edellä opetuksesta. 5E-mallin aloittavalla vaiheella, kiinnostumisella, kohdistetaan huomio oppilaan ennakkokäsityksiin, joista oppiminen alkaa. Ennakko-oletusten huomioiminen saattaa nostattaa oppilaan matematiikkakuvaa, sillä aiemmin vastaavan aiheen ympärille muodostetut mielikuvat, pettymykset tai onnistumiset heijastavat hänen valmiuttaan vastaanottaa uutta tietoa. Tutkimisvaiheessa avoimet ongelmalähtöiset tehtävät vahvistavat strategisen kompetenssin kehittymistä, ja selittämisvaiheessa ohjataan kielentämään. Uudet käsitteet muotoillaan yhdessä oppilaiden selitysten avulla. Proseduraalista sujuvuutta voidaan kehittää syventävässä vaiheessa esimerkiksi kirjan tehtävillä, mutta aiempi käsitteellisen ymmärryksen vahvistus välttää rutiininomaisen kaavojen toistamisen.

Lopettavana vaiheena 5E-mallissa on arviointi. Kun opetus tähtää käsitteellisen ymmärryksen vahvistamiseen ja ongelmanratkaisutaidon kehittämiseen, voidaan haastaa sum-

matiivisen koearvioinnin soveltuvuutta näiden arvottamiseen. Testiälykkyyden sijaan tai sen nojalla voitaisiin alkaa arvioimaan ryhmätyöskentelyn kautta kehittyvää ongelmanratkaisutaitoa ja sitä kautta kypsyvää asiantuntemusta ja käsitystä itsestään oppijana. Koulu on kuitenkin yksi harvasta paikasta, jossa numeroarvosanalla arvotetaan yksilön taitoja. Kuinka suuren hyödyn saisimme, jos arvottaisimmekin niitä taitoja, joita oppilas, yksilö ja tulevaisuuden työntekijä tarvitsee menestyäkseen? Tämä kysymys arvioinnin toteuttamisesta ja etenkin palautteen antamisen ja toiminnan yhteys numeroarviointiin tuotti itselle kysymyksiä opetuskokeilun aikana. Formatiivisen arvioinnin merkitys korostuu, mutta jonkinlaisen rungon luominen pakollisen numeroarvioinnin pohjaksi olisi arvokasta tukea koearvioinnista muutoshaluisille opettajille. Esimerkiksi ryhmätyöskentelytaitojen ja käsitteellisen ymmäryksen huomioiminen arviointirungon sisään auttaisi opettajaa muuttamaan arvioinnin kohdetta ymmärryksen, taitojen ja kokonaisvaltaisen oppimisen suuntaan.

5E-mallin käyttöönotossa saattaa esiintyä myös muita haasteita. Arviointiin liittyvien kysymysten lisäksi tuntien suunnittelu 5E-mallin mukaan tuotti epävarmuutta, eikä vaiheet toteutuneet aina odotetusti. Aloittavana opettajana 5E-mallin mukaan toteutettujen tuntien suunnittelu oli aikaavievää, ja epävarmuus vaiheiden piirteistä lisäsi sitä entisestään. Opettajan rooliin astuminen oli uutta, ja luokanhallinta tuotti haasteita uuden opetusmallin käyttöönotossa. Selittämisvaiheet päätyivät opettajajohtoisiksi toisen ja kolmannen syklin kohdalla, vaikka huomattiin positiiviset tulokset ensimmäisessä syklissä. Toisaalta huomattiin aineiston puutteellisuuden vaikutus vaiheiden analysoimiseen. Vaiheiden vaihtelevuus nähtiin positiivisena, sillä oppilaat kaipasivat ongelmatehtävien rinnalla myös tavallista laskemista, jota tehtiin syventävässä vaiheessa.

Vastaavia haasteita tuntien suunnittelussa käytetystä ajasta ja eri vaiheiden haasteista on saatu muissakin tutkimuksissa muukan lukien opetusharjoittelijoilla, jotka olivat harjoittaneet 5E-mallilla tuntisunnnittelua entuudestaan [5, 15]. Oman kokemukseni mukaan luokanhallinan omaksuminen vie aikaa, ja uudenlaisen opetusmallin mukainen opetus saattaa innostaa oppilaita vapaammiksi, jolloin luokanhallinnan merkitys korostuu. Tuntisuunnittelun ja luokanhallinan haasteet vahvistuvat opetuksen alkuaikoina, mutta asiantuntemuksen ja varmuuden lisääntyessä todennäköisimmin tasaantuisivat. Lisäksi tuntien suunnitteluun käytetty aika on haaste, joka jokaisella aloittavalla opettajalla on edessään opetusmallista riippumatta.

Opettajan rooli 5E-mallin onnistumisessa ja opetuksen muuttumisessa on keskeinen, joten mallille saadulla perehdytyksellä olisi valtava hyöty. Tähän tulokseen on päästy aiemmissakin tutkimuksissa. [25, 27] 5E-mallille saatu perehdytys auttoi fysiikan opettajia kiinnittämään huomiota arviointivaiheeseen kannustavalla ja rakentavalla palautteella, jolla saatiin kielentämisnäkökulmaa opetukseen oppilaiden omien kysymysten ja tulosten ilmaisun kautta [25]. Toinen tutkimus vertasi matematiikan osaamista kahden oppilasryhmän kesken, joista vain toisen ryhmän opettajat saivat 5E-mallille koulutuksen. [27]

Kyseisen ryhmän tuloksissa huomattiin kontrolliryhmään verrattuna selkeä parannus oppimistuloksissa sekä kiinnostuksessa matematiikan oppimista kohtaan. Kenties kriittisintä opetuksen muuttamisessa on kuitenkin opettajan uskallus ja rohkeus 5E-mallin aloittamiseen ja käyttämiseen perinteisten mallien rinnalla. Oman näkemykseni mukaan keskeistä olisi opastaa opettajaopiskelijoita opetusmallin käyttöön jo pedagogisten opintojen aikana, jotta opetus saisi selkeän suunnan alkumetreiltä asti.

Yksi keskeinen matemaattisen ajattelun piirre, jonka merkitys korostuu opettajan roolissa uuden opetusmallin käyttöönotossa on opettajan matematiikkakuva. Matematiikkakuvan merkitystä korostetaan eräässä tutkimuksessa avoimien tehtävien, tai muun uudenlaisen opetustavan käyttöönottamisessa. [29] Jos uusi menetelmä ei tue opettajan opettamiskäsitystä, tai sitä, minkä hän kokee hyväksi opetukseksi, ei tulokset vastaa odotuksia, vaikka opettaja olisikin saanut koulutusta. Tästä syystä, kuten jo johdannossa ilmeni, tulisi opettajan tulla tietoiseksi omista ajatusmalleistaan ja uskomuksistaan opettamiseen liittyen. Aineenhallinnan ja pedagogisen osaamisen lisäksi mahdollisimman kehittynyt matematiikkakuva ja joustavuus opetuksen toteutuksessa kiteyttää opettajan tarvittavia taitoja, joilla pystyy huomioimaan omien uskomusten lisäksi oppilaiden uskomukset matematiikasta. Tätä voidaan rinnastaa edellämainittuun 5E-mallin kiinnostumisvaiheeseen. Oppilailla on mahdollisuus löytää merkitys oppimalleen, kun sille on olemassa oleva pohja, uskomus tai tieto olemassa, jonka päälle luodaan syvällisempää ymmärrystä.

Opettajan matematiikkakuvan merkityksen lisäksi alkuopetuksella on keskeinen rooli oppilaan matematiikkakuvan muodostumisessa. [24] Sillä vaikutetaan oppilaan omaan kokemukseen itsestään matematiikan oppijana erityisesti onnistumisenkokemusten tai niiden puutteen seurauksena. Kielentämiseen matematiikan alkuopetuksessa kohdistuvassa tutkimuksessa tunnistettiin numeroiden ja lukumäärien ääneen puhumisen merkitys ja opettajan ohjauksen rooli, mitkä vastaavat tässä tutkimuksessa saatuja tuloksia ongelman sanoittamisesta ja opettajan avustuksesta. 1. luokan opetuksessa ei arvostettu lopullista ratkaisua vaan painotettiin lukujen ymmärtämistä ja näin kannustettiin oppilaita yrittämään ja saamaan onnistumisen kokemuksia.

Positiivisen matematiikkakuvan luominen on pohjana kaikelle matematiikan oppimiselle. Voisi pitää lähes itsestään selvyytenä, että ilman positiivisia onnistumisen kokemuksia kuka tahansa lannistuu ja menettää motivaation uuden opetteluun. Kun lapsi opettelee kävelemään, hän kaatuu ja yrittää uudelleen niin kauan, kuin vanhempi kannustaa vierellä ja uskoo lapsensa kykyihin ilman ennakko-odotuksia. Vanhempi ei arvioi lapsensa kävelytaitoja ensimmäisen, toisen tai kolmannenkaan askeleen jälkeen vaan kannustaa yrittämään – on tukena ja oppaana. Opettajan tehtävänä olisi olla tuo vanhempi matematiikan ongelmia ratkovalle oppilaallensa.

6.3 Luotettavuustarkastelu

Tässä tutkimuksessa saatiin monipuolista informaatiota ongelmanratkaisuprosessista opetuskokeilun kautta. Kyseessä ollut laadullinen sisällönanalyysi on eräs tutkimusmenetelmä tekstin analysoimiseen ja sen tavoitteena onkin tuottaa tietoa ja ymmärrystä käsillä olevasta aiheesta [12]. Analysoitava teksti saatiin oppilaiden itse äänittämistä keskusteluista sekä opettajan tunninjälkeisistä äänitteistä.

Aineisto vastaa lähelle sitä, mitä opetus olisi ollut ilman tutkimusasetelmaa. Vapaamuotoinen aineistonkeruu saattoi luotettavuuden kannalta olla hyvä vaihtoehto, sillä esimerkiksi videokuvaaminen olisi voinut vaikuttaa oppilaiden työskentelyyn jollain tavalla. Vaihtoehtoisesti jälkikäteen toteutettu teini-ikäisten haastattelu ei olisi ongelmanratkaisuprosessista välttämättä antanut merkittävää lisätietoa. Opettajan kokemukset tunnin kulusta antoivat näkökulmaa opettajan tuntemuksiin, eikä niiden luotettavuutta voida kovinkaan paljoa parantaa erityisesti tutkimusasetelmassa, jossa opettajan kommentit ovat tuomassa lisäarvoa kerätylle aineistolle. Opettajan tunninjälkeisten kommenttien luotettavuutta paransi entisestään se, että hän äänitti ne päiväkirjamaisesti ilman käsitystä siitä, että niitä hyödynnettäisiin tutkimuksen analyysissä.

Oppilaiden äänitteistä muodostetut ongelmanratkaisuprosessia kuvaavat verkot tuottivat tietoa ja ymmärrystä ongelman sanoittamisen ja opettajan tuen merkityksestä. Verkkojen luotettavuutta voidaan tarkastella useammasta näkökulmasta. Lähtökohtaisesti luotettavuuteen vaikutti se, että jokaiselta ryhmältä ei saatu ryhmätyöäänitettä vaihtelevista syistä. Toisessa ja kolmannessa syklissä äänitteet olivat puutteelliset kolmella viidestä ryhmästä ja äänitteet saatiin vain "tunnollisimmilta oppilailta", minkä vaikutus ongelmanratkaisuprosessista tehtyihin havaintoihin on huomattava. Puuttuvien ryhmien ongelmanratkaisuprosessit olisivat tuottaneet mielenkiintoista lisätietoa toisella ja kolmannella kierroksella, sillä esimerkiksi ryhmän 5 paperille kirjatut havainnot olivat huolellisesti tehty.

Analyysi toteutettiin kategorisoimalla ongelmanratkaisun vaiheita keskusteluista saadun tekstin pohjalta, mikä viittaa koodaukseen laadullisessa sisällönanalyysissä. [12] Ongelmanratkaisuprosessin jaottelu vaiheisiin voisi erota hieman eri tutkijan näkökulmalla, mutta voitaisiin olettaa samankaltaisia tuloksia prosessin etenemisessä. Vaikka vaiheiden nimet vastaisivat esimerkiksi aiemmin tunnistettua nelivaiheista Pólyan ongelmanrakaisumallia, [31], tai avoimen ongelmanratkaisun mallia, [13], samat tulokset ongelman sanoittamisen ja oikean ratkaisun löytymisen välillä olisivat todennäköisesti olleet tunnistettavissa. Tulokset opettajan tuen merkityksestä ja verkkojen visuaalinen representaatio keskustelun etenemistä voidaan tunnistaa luotettaviksi.

6.4 Jatkotutkimusideoita

Luotettavuuden parantamisen lisäksi mielenkiintoista olisi toistaa opetuskokeilu ja tutkia erityisesti ongelmanratkaisua kuvaavia graafeja. Graafien visuaalinen kuvaus ongelmanratkaisuprosessin kulusta mahdollistaisi useamman näkökulman esiintuomista tai vaihtoehtoisesti tietyn vaiheen tarkempaa analysoimista. Esimerkiksi tässä tutkimuksessa esiin noussut ongelman sanoittaminen kävisi yhtenä tutkimuksen aiheena itsessään. Opettajan tukea ongelmanratkaisutaidon edistämäisessä voisi edesauttaa harjoittelemalla ongelman sanoittamista, ja tutkia tämän vaikutusta ongelmanratkaisun etenemisessä. Toisiko kielentäminen tämän tutkimuksen mukaisia tuloksia, vai löytyisikö uusia ulottuvuuksia ongelmanratkaisun etenemisestä? Toisaalta kielentämisen roolia ongelmanratkaisussa voisi lisätä entisestään, esimerkiksi piirtämisen tai taktiilisen, käsilllä kosketeltavan materiaalin muodossa. Vai pysähtyisikö tutkimaan taktiilisen toiminnan vaikutusta osana 5E-mallia?

5E-mallin hyödyllisyydestä ongelmalähtöisen opetuksen runkona olisi aiheeksi jatkotutkimukselle. Tässä tutkimuksessa tulokset painottuivat ongelmanratkaisuprosessin analysoimiseen, ja nähtiin positiivisia piirteitä 5E-mallista sen oppaana, mutta laajemmalla opettajaskaalalla, videoiduilla oppitunneilla ja 5E-malliin perehdyttämisellä saisi tutkimustuloksiin monipuolisempaa ja tarkempaa tietoa ja lisäarvoa matematiikan opetukselle.

Viimeisenä ajatuksena kiteytetään tutkimuksessa käytettyjen graafien monipuoliset mahdollisuudet ongelmalähtöisen oppimisen ja opetuksen tutkimisessa. Vaiheita voidaan soveltaa tunnettuihin ongelmanratkaisumalleihin ja hyödyntää niiden kautta saatua informaatiota opetuksessa koulutusasteesta riippumatta. Graafiteorian tuntemuksella graafeista saisi olennaista tietoa ongelmanratkaisuprosessista niin keskustelijoiden kuin vaiheiden välillä. Useampien, mahdollisesti eri asteilta saatujen tulosten varjolla saisi laajempaa käsitystä ongelmanratkaisutaidon kehittymisestä – arvokasta aineistoa opetuksen ja oppimisen tutkimukselle ja ajateltavaa opettajille oppitunteja suunnitellessaan.

LÄHTEET

[1] Tuna Abdulkadir ja Kacar Ahmet. ”The effect of 5E learning cycle model in teaching trigonometry on students’ academic achievement and the permanence of their knowledge”. *International Journal on New Trends in Education and Their Implications* (tammikuu 2013).

[2] Mike Askew, Joan Bliss ja Macrae Sheila. *Subject Learning in the Primary Curriculum: Issues in English, science and mathematics*. Routledge, (1995). Luku 18.

[3] Rodger Bybee, April Taylor Joseph amd Gardner, Pamela Scotter, Janet Carlson, Anne Westbrook ja Nancy Landes. ”The BSCS 5E Instructional Model: Origins, Effectiveness, and Applications”. *BSCS* (heinäkuu 2006).

[4] The Math Learning Center. *Mobile Math: Balance the Triangle*. (2022). URL: https://mathathome.mathlearningcenter.org/activity/1583.

[5] Ramya Enugu ja Hayat Hokayem. ”Challenges pre-service teachers face when implementing inquiry model of instruction”. *European Journal of Science and Mathematics Education* (toukokuu 2017).

[6] Rita Fioresi ja Marta Morigi. *Introduction to Linear Algebra*. CRC Press, (2022).

[7] WGBH Educational Foundation. *Part A: Equality and Balance*. (2002). URL: https://www.learner.org/series/learning-math-patterns-functions-and-algebra/solving-equations/part-a-equality-and-balance-30-minutes/.

[8] WGBH Educational Foundation. *Part C: Bags, Blocks, and Balance*. (2002). URL: https://www.learner.org/series/learning-math-patterns-functions-and-algebra/solving-equations/part-c-bags-blocks-and-balance-30-minutes/.

[9] WGBH Educational Foundation. *Part D: More Problems That Illustrate Algebraic Thinking*. (2002). URL: https://www.learner.org/series/learning-math-patterns-functions-and-algebra/classroom-case-studies-grades-3-5/part-d-more-problems-that-illustrate-algebraic-thinking-25-minutes/.

[10] Rohail Hashmi. *Classic Sesame Street - Ernie’s Scales*. (2014). URL: https://www.youtube.com/watch?v=4nxRB8P-j9Q&t=1s.

[11] Sanna Hassinen, Olli Latva, Jari-Pekka Makkonen, Mikko (Ville) Peltola, Maria Pirttimaa ja Aulis Tolvanen. *Kuutio 7*. Sanoma Pro, (2016).

[12] Hsiu-Fang Hsieh ja Sarah E Shannon. ”Three Approaches to Qualitative Content Analysis”. *Qualitative Health Research* (2005).

[13] Markus Hähkiöniemi, Henry Leppäaho ja Antti Viholainen. ”Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä”. *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta* (2012).

[14] Hannele Ikäheimo. *Matematiikan osaaminen vahvaksi – Iloa opetukseen ja oppimiseen*. ELLI Early Learning Oy, (2021).

[15] Canay Demirhan İşcan, Aysegul Bayraktar ja Erten Gokce. ”Pre-service Teachers' Teaching Applications Based on 5E Learning Cycle”. *Anthropologist* (huhtikuu 2015), s. 319–329.

[16] Jorma Joutsenlahti. ”Kielentäminen matematiikan opiskelussa”. *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta : ainedidaktinen symposium 7.2.2003* (tammikuu 2003).

[17] Jorma Joutsenlahti. ”Kielentäminen matematiikan opiskelussa”. *Virta Arja and Marttila Outi (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003)* (2022).

[18] Jorma Joutsenlahti ja Daranee Lehtonen. ”Yhtälönratkaisun oppiminen teknologisen toimintamateriaalin ja kielentämisen avulla”. *LUMATIKKA-ohjelman matematiikan opetuksen teemanumero* (2022).

[19] Jorma Joutsenlahti ja Timo Tossavainen. ”Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa.” *Matematiikan opetus ja oppiminen* (2018).

[20] Jorma Joutsenlahti ja Jorma Vainionpää. ”Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseenperuskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa?” *Opettajankoulutuksenmuuttuvat rakenteet: Ainedidaktinen symposium 9.2.2007* (2007).

[21] Mika Koponen. *Investigating Mathematical Knowledge for Teaching and Mathematics Teacher Education*. Itä-Suomen yliopisto, (2017).

[22] Mika Koponen, Antti Viholainen ja Mervi A. Asikainen. ”Opettajaopiskelijoiden matemaattisen opettajantiedon kehittäminen opetusintervention avulla.” *Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Research association* (tammikuu 2015).

[23] Marja-Kaisa Kortesalmi, Päivi Perkkilä ja Jorma Joutsenlahti. ”Kielentämisen näkökulmia kuudennen luokan oppilaiden matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuihin”. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education* (2022).

[24] Maarit Laitinen, Heli Rantamäki ja Jorma Joutsenlahti. ”Puhutko matematiikkaa?” *Monilukutaito kaikki kaikessa* (2015).

[25] J.D Nkurikivimana, J. Uwamahoro ja K. Ndihokubwayo. ”Teaching and learning mechanics explored through the use of the 5E's educational model”. *Problems of the 21st century* (2022), s. 179–194.

[26] David Olson ja Jerome Bruner. *Folk psychology and folk pedagogy.* Oxford, Blackwell, (1996), s. 9–27.

[27] Stephen Akinyemi Omotayo ja Joshua Olutatoyin Adeleke. ”The 5E Instructional model: A Constructivist approach for enhancing students' learning outcomes in mathematics”. *Journal of the International Society for Teacher Education* (marraskuu 2019).

[28] Blessinger Patrick ja Carfora John M. *Inquiry-Based Learning for Science, Technology, Engineering, and Math (STEM) Programs: A Conceptual and Practical Resource for Educators.* Vol. First edition. Innovations in Higher Education Teaching and Learning volume 4. Emerald Group Publishing Limited, (2015).

[29] Erkki Pehkonen. ”Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen”. *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (2011). Helsingin yliopisto.

[30] *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Opetushallitus, (2014).

[31] George Pólya. *How to solve it? A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press., (1945).

[32] RoomRecess. *PanBalance|Online Scale for Kids with Gram Weights*. (2016). URL: https://www.roomrecess.com/Tools/PanBalance/play.html/.

[33] Kirsi Silius, Seppo Pohjolainen, Thumas Miilumäki, Jussi Kangas ja Jorma Joutsenlahti. ”Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä?” *Korkeajännityksiä - kohti osallisuutta luovaa korkeakoulutusta* (2011).

[34] Kuldeep Singh. *Linear Algebra: Step by Step*. Oxford University Press, Incorporated, (2013).

[35] Kimberly Tanner. ”Order matters: using the 5e model to align teaching with how people learn”. *CBE – Life Sciences Education* (2010).

[36] Saku Tuominen ja Martti Hellström. *Koulukirja*. Otava, (2017).

[37] Saku Tuominen ja Karja Lindroos. *Ravistettava, Omskakas. Toisinajattelijan käsikirja.* Tammi, (2009).

[38] Serife Turan ja Shirley M. Matterson. ”Middle school mathematics classrooms practive based on 5E instructional model.” *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)* (joulukuu 2020), s. 22–39.

[39] Anna Uitto. ”Millainen on biologian tuntien oppimisympäristö peruskoulussa? Oppilaiden, opettajien ja opetusharjoittelijoiden käsityksiä konstruktivistisen 5E-mallin pohjalta.” *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta: ainedidaktinen symposium 7.2.2003* (2003).

[40] Pooja Walia. ”Effect of 5E Instructional Model on Mathematical Creativity of Students”. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology* (maaliskuu 2013).

[41] Lev Vygotsky. *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press, (1978).

[42] Raija Yrjönsuuri. *Matematiikka mieluisaksi: psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arvioimiseen*. Oppilo, (2009).

LIITE A: TUTKIMUSLUPAHAKEMUS YLÖJÄRVEN OPETUSPÄÄLLIKÖLLE

Tutkimusta koskevat tiedot

Tutkimuksen nimi Tutkiva oppiminen yläkoulun matematiikassa

Mihin toimintaan tai yksikköön tutkimus liittyy? Tutkimus sisältyisi diplomityöhöni Tampereen yliopistolta matemaattisten aineiden opettajakoulutuksesta. Tutkimus toteutetaan Kauraslammen koulun 7 H-luokan matematiikan tunneilla. Olen kyseisen luokan matematiikan opettajana.

Tutkimuksen tavoitteet ja lyhyt kuvaus toteutuksesta

Tutkimuksen tavoitteena on kehittää 7lk matematiikan opetusta oppilaslähtöisemmäksi tutkivan oppimisen kautta ja samalla pohtia, millä tavalla oppilaiden arviointi voitaisiin kehittää oppimisprosessia kuvaavaksi tutkivan oppimisen avulla. Tutkimus toteutetaan 3 viikon jaksona, jonka aiheena on yhtälöt. Taustalla on ajatus siitä, että ensin oppilas itse päätyy teoriaan ongelmatehtävän kautta ja vasta sitten opettaja täydentää tietoa ja arvioidaan oppimista tehtävien ja lisäongelmien kautta. Tutkimus tehdään mukaillen tutkivan oppimisen 5E-mallia, joka tulee englannin kielen sanoista engage (kiinnostus), explore (tutkiminen), explain (selittäminen), elaborate (syventäminen) ja evaluate (arvioiminen).

Tutkimus toteutetaan Kauraslammen koulun 7-H luokalle toukokuun viimeisillä viikoilla. Tutkimuksen aineistoa kerätään havainnoimalla ryhmätyöskentelyä, arviointi-kysymysten vastauksilla ja jakson lopussa olevalla haastattelulla. Liitteenä olevassa tutkimussuunnitelmassa on tarkempi kuvaus tutkimuksen vaiheista, mutta siihen tulee vielä ohjaajien kommenttejen jälkeisiä muutoksia yksityiskohtiin.

Miten anonymiteetti ja vapaaehtoisuus tutkimukseen osallistumisesta turvataan?

Opiskelijoille ja heidän vanhemmilleen lähetetään tutkimuslupakysely ja tutkimuksessa oppilaat voidaan nimetä esimerkiksi kirjaimilla.

Kuvaus mahdollisten henkilötietojen käsittelystä

Kerään oppilailta ja heidän vanhemmiltaan suostumuksen tutkimukseen osallistumisesta, minkä jälkeen käsittelen aineistoa heidän osaltaan, jotka vastasivat kyllä. Oppilaiden nimiä tutkimuksessa ei tarvitse käyttää. Lähestyvä kesäloma nopeuttaa tutkimuksen aikataulua, ja tämän vuoksi yksityiskohdat tutkimukseen ovat vielä vaiheessa.

Tutkimuksen aikataulu

Tutkimus aloitetaan maanantaina 9.5.2022 ja päättyy tiistaina 24.5.2022.

Tutkimuksen raportoinnin ajankohta ja toimittaminen sähköisesti Ylöjärven perusturvaosaston käyttöön

Tutkimus kirjoitetaan kesällä 2022 ja valmistuu viimeistään syksyllä 2022.

LIITE B: TUTKIMUSLUPAKYSELY VANHEMMILLE

Moikka!

Olen matematiikan opettajan sijaisena ollut tämän kevään ja nyt kun kevät lähenee loppuaan, olen myös diplomityötä vaille ”valmis” opettaja. Toisin sanoen tutkinnostani on jäljellä vielä diplomityö, johon teen tutkimuksen vielä ennen kesää, ja pääsen ilokseni toteuttamaan sitä tutuksi tulleen 7H-luokan matematiikassa. Vaikka kyseinen tutkimus onkin osa normaalia opetusta, tulee tietojen käsittelyyn kysyä lupa teiltä ja oppilailta itseltään. Tässä ensin lyhyt esittely tutkimuksesta:

Tutkimuksessa tutustun ja kokeilen tutkivan oppimisen 5E-mallia (engage, explore, explain, elaborate, evaluate), jossa ideana on ensin antaa oppilaiden ratkaista ongelmatehtäviä ryhmissä, ja vasta sen jälkeen täydentää heiltä saatuja ajatuksia matemaattisilla käsitteillä. Tällä tavalla käännetään tavallinen opetus päälaelleen ja annetaan oppilaalle mahdollisuus itse päätyä kyseessä olevaan teoriaan, ikään kuin huomaamattaan. Toisaalta, vaikka sinne asti ei pääsisikään, oppilas on paljon valmiimpi ottamaan vastaan siihen liittyvän teorian, kun on sitä itse etukäteen pohtinut. Näin, ainakin teoriassa, käsitteellinen ymmärrys on syvempää, eikä rutiinitehtäviä tarvitse tehdä kymmeniä, kun itse asia on ymmärretty. Ongelmatehtävien kautta matematiikka viedään lähemmäksi arjen ilmiöitä irrallisten laskujen sijaan. Aihealueenamme tutkimuksessa on yhtälöt, joita lähestytään tasapainovaakojen kautta. Tutkimuksessa keskityn havainnoimaan oppilaiden ajatteluprosessia eri tehtävissä, ja tämän vuoksi ryhmäkeskustelut äänitetään. Äänityksistä ja tunneilla tehdyistä havainnoista saan erittäin hyvää materiaalia seitsemäsluokkalaisten matemaattisesta ajattelusta työtäni varten. Äänitteet pysyvät vain minulla, eikä tutkimuksessa käytetä kenenkään nimiä.

Sanko luvan käyttää lapsenne tietoja tutkimuksessani? Voitte antaa vastauksen vastaamalla tähän viestiin. Kiitän teitä luottamuksestanne jo nyt.

Lämmöllä,
Anniina

LIITE C: TUTKIMUSLUPAKYSELY OPPILAILLE

Moi!

Eilen jo kerroin, mutta nyt pääsisit osallistumaan tutkimukseen. Kokeilen erilaista tapaa opettaa matematiikkaa. Pääsette ryhmissä pohtimaan tehtäviä ja sitten vasta mietitään, mitä matikkaa sieltä voisi oppia. Lopuksi arvioidaan vielä, mitä ollaan opittu. Tätä sanotaan tutkivaksi oppimiseksi.

Mua kiinnostaa tässä se, miten sä ajattelet ja lähdet tekemään tehtäviä. Eli ei oikeat vastaukset, vaan se miten sä niihin vastauksiin päädyt. Tämän takia ryhmätehtäviä äänitetään. Näitä äänityksiä ei kuule kukaan muu kuin minä, eikä sua voida tunnistaa tutkimuksesta. Eli sun nimeä ei tutkimuksessa käytetä.

Saanko käyttää sun vastauksia tutkimuksessa? Joo Ei

Nimi:
Kiitos!!
-Anniina