Tampereen yliopisto

Jessica Kuntola

ULTRATULOT JA RABININ JA KEISLERIN LAUSE

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Joulukuu 2022

Tiivistelmä

Jessica Kuntola: Ultratulot ja Rabinin ja Keislerin lause
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin tutkinto-ohjelma
Joulukuu 2022

Tutkielman tarkoituksena on esitellä ultratulot ja todistaa niitä soveltamalla Rabinin ja Keislerin lause. Tutkielma aloitetaan määrittelemällä predikaattilogiikan syntaksi eli kaavat ja lauseet sekä semantiikka eli syntaksille merkityksen antavat mallit, jotka ovat niiden määrittelyjoukosta ja määrittelyjoukon äärellispaikkaisista relaatioista muodostettuja järjestettyjä pareja. Pohjatietojen jälkeen käsitellään ultratuloja, joiden avulla malleja on mahdollista muodostaa. Esitellään ensin ultrafiltterin käsite, ja sen avulla ultratulo eli useista pienemmistä malleista konstruoitu yksittäinen isompi malli. Todistetaan ultratulojen peruslause, Łoś'n lause, jonka mukaan kaava on totta ultratulossa, jos ja vain jos niiden indeksien joukko, jolla kaava on totta alkuperäisissä malleissa, kuuluu ultrafiltteriin. Todistetaan myös ultratulojen ja Łoś'n lauseen sovellus, kompaktisuuslause, jonka mukaan lausejoukolla on malli, jos ja vain jos jokaisella sen äärellisellä osajoukolla on malli.

Tutkielman jälkimmäisellä puoliskolla keskitytään Rabinin ja Keislerin lauseeseen sekä sen alustamiseen. Määritellään ensin todistuksen sisällön ymmärtämistä varten tarvittavia käsitteitä, kuten kardinaaliluku, joukon mahtavuus eli alkioiden lukumäärä, pääultrafiltteri ja ω-mitallinen kardinaali. Tutkielman viimeisessä luvussa oletetaan, että ääretön kardinaali κ ei ole ω-mitallinen. Tähän oletukseen perustuen todistetaan Rabinin ja Keislerin lause, jonka mukaan kaikilla malleilla on samaa mahtavuutta κ oleva aito elementaarinen laajennus, jos ja vain jos $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$. Todistus käydään läpi vaiheittain apulauseiden avulla.

Avainsanat: matemaattinen logiikka, joukko-oppi, elementaarinen laajennus, ultrafiltteri, ultratulo, Łoś'n lause, kompaktisuuslause, Rabinin ja Keislerin lause

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tullaan esittelemään Rabinin ja Keislerin lause todistuksineen sekä todistusta varten tarvittavat pohjatiedot. Israelilaisen matemaatikon ja tietojenkäsittelytieteilijän Michael O. Rabinin ja amerikkalaisen matemaatikon H. Jerome Keislerin työhön perustuvassa Rabinin ja Keislerin lauseessa väitetään, että kaikilla malleilla on samaa mahtavuutta κ oleva aito elementaarinen laajennus, jos ja vain jos $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$. Väite perustuu oletukseen, että ääretön kardinaali κ ei ole ω-mitallinen. Pohjatiedot tämän lauseen ymmärtämiseen ja sen todistuksen hallitsemiseen on saatu viimeiseen lukuun mennessä, jolloin todistus tullaan käymään läpi. Pohjatietojen kerryttäminen aloitetaan tutkielman toisessa luvussa käymällä läpi käsitteitä, joita tarvitaan kolmannessa luvussa esitetyn ultratulon konstruktion ymmärtämiseen. Tällaisiin käsitteisiin lukeutuvat kaava, malli, tulkintajono sekä elementaarinen laajennus ja elementaarinen upotus. Luvussa tullaan esittelemään myös puolalaisamerikkalaisen matematiikko Alfred Tarskin totuusmääritelmä.

Tutkielman toisen keskeisen osa-alueen, ultratulojen, idea perustuu norjalaisen matemaatikon Thoralf Skolemin [17] vuonna 1934 antamaan numeroituvan epästandardin aritmetiikan mallin konstruointiin. Varsinainen ultratulojen käsite on lähtöisin puolalaiselta matemaatikko Jerzy Łoś'lta vuodelta 1955. Ultratulo on useasta, yleensä äärettömän monesta pienemmästä mallista konstruoitu isompi malli, jossa ikään kuin ilmenee alkuperäisten pienempien mallien yhteisiä ominaisuuksia. Tällöin niiden indeksien joukko, joilla kaava on totta alkuperäisissä malleissa, kuuluu ultrafiltteriin, jos ja vain jos kaava on totta ultratulossa, kuten ultratulojen peruslauseessa, Łoś'n lauseessa, tullaan myöhemmin todistamaan. Tämä ominaisuus mahdollistaa sen, että ultratulon avulla voidaan konstruioida uusia malleja sen mukaisesti, että minkälainen joukko kaavoja halutaan toteuttaa. Matemaattisen logiikan osa-alue, malliteoria, onkin tutkimusala, jossa mallien konstruoinnin menetelmät ovat tärkeässä roolissa, ja ultratulot ovat siihen tarkoitukseen hyödyllinen väline. Tunnetuin esimerkki ultratulojen hyödyntämisestä on se, että ultratulot antavat menetelmän tässäkin tutkielmassa esitetyn kompaktisuuslauseen todistamiseen ilman, että todistuksen käsitettä on tarpeellista määritellä. Kompaktisuuslauseen todistuksessa konstruoidaan lausejoukon äärellisten osajoukkojen malleista koko lausejoukon malli.

Ultratulojen käsitteleminen aloitetaan siis pykälässä 3.1 esittelemällä filtterin ja maksimaalisen filtterin, ultrafiltterin, määritelmät sekä todistamalla ultrafiltterilause, jonka mukaan jokaisen aidon filtterin voi laajentaa ultrafiltteriksi. Tarski esitti ultrafiltterilauseen ensimmäisen todistuksen vuonna 1930. Tämän jälkeen pykälässä 3.2 käydään läpi varsinainen ultratulon konstruointi filttereiden avulla ja pykälässä 3.3 tullaan esittämään Łoś'n lauseen todistus. Ultratulojen tarkempi käsittely päätetään pykälässä 3.4 todistamalla kompaktisuuslause.

Neljännessä luvussa tutustutaan vielä hieman tarkemmin joihinkin Rabinin ja Keislerin lauseen todistamisessa tarvittaviin keskeisten käsitteiden määritelmiin sekä niihin liittyviin lauseisiin. Luku aloitetaan esittelemällä pykälässä 4.1 lyhyesti kardinaaliluvut ja joukon mahtavuus sekä niihin liittyviä käsitteitä joidenkin havainnollistavien esimerkkien avulla. Pykälässä 4.2 tullaan tarkastelemaan sellaisia ultrafilttereitä, jotka eivät ole päräfilttereitä, ja niiden ominaisuuksia. Esitellään vielä pykälässä 4.3 ω-täydellinen ja ω-epätäydellinen ultrafiltteri ja ω-mitallinen kardinaali sekä selvitetään pykälässä 4.4, milloin ultratulo on hyvinjärjestetty joukko, jos jokainen kyseiseen ultratuloon liittyvä malli on hyvinjärjestetty joukko.

Viimeiseen eli viidenteen lukuun mennessä on siis tutkielmassa kerrytetyn tiedon avulla mahdollista ymmärtää luvussa esitetyn Rabinin ja Keislerin lauseen todistus, jonka todistamisessa sovelletaan myös ultratuloja. Keislerin [11] 1963 julkaistussa todistuksessa on hyödynnetty myös rajaultrapotenssien konstruktiota, joka on yleistys ultrapotenssien konstruktiosta. Tässä tutkielmassa käsitettä ei ole kuitenkaan erikseen esitelty eikä sitä ole hyödynnetty todistuksissa. Se ei ole myöskään ollut tarpeellista, kuten kiinalainen matemaatikko Chen Chung Chang [5] on osoittanut 1965 julkaistussa todistuksessaan. Keisler on tutkinut myös, että milloin kaikilla malleilla on samaa mahtavuutta oleva aito elementaarinen laajennus, jos kardinaaliluku on ω-mitallinen. Olkoon κ ω-mitallinen kardinaaliluku. Tällöin Keislerin todistuksessa osoitetaan, että jos kardinaaliluvulla κ pätee, että sitä aidosti suurempi pienin kardinaali $\kappa^+ = 2^\kappa$, niin kaikilla malleilla, joiden mahtavuus on κ, on samaa mahtavuutta oleva aito elementaarinen laajennus [11, s. 402]. Tässä tutkielmassa tätä ei kuitenkaan tulla käymään läpi, vaan keskitytään tarkastelemaan samaa mahtavuutta olevan aidon elementaarisen laajennuksen vaatimuksia ainoastaan sellaisten kardinaalien tapauksessa, jotka eivät ole ω-mitallisia.

Tutkielman sisällön ymmärtämisen kannalta vaadittavat tärkeimmät käsitteet on määritelty, mutta lukijan odotetaan hallitsevan matemaattisen logiikan ja joukko-opin perusasiat. Päälähdeteoksena tutkielmassa käytetään J. L. Bellin ja A. B. Slomsonin kirjaa Models and Ultraproducts: an introduction.

2 Peruskäsitteitä

2.1 Predikaattilogiikan syntaksi

Luvussa 2 käsitellään ultratulojen tarkasteluun vaadittavia pohjatietoja. Tässä pykälässä 2.1 tarkastellaan predikaattilogiikan syntaksia, joka kertoo, miten muodostetaan kaavoja ja lauseita. Esitellään ensin predikaattilogiikan kielen L aakkosto ja siihen sisältyvät symbolit.

Määritelmä 2.1. (Vrt. [12, s. 10 ja s. 13].) *Aakkosto* $\mathcal{A}$ on epätyhjä joukko symboleja. Predikaattilogiikan kielen L aakkostoon sisältyy seuraavat symbolit:

1. **Loogiset symbolit**:

   - *Konnektiivit*, joita ovat negaatio $\neg$, konjunktio $\wedge$, disjunktio $\vee$, implikaatio $\rightarrow$ ja ekvivalenssi $\leftrightarrow$.
   - *Kvanttorit*, joita ovat universaalikvanttori $\forall$ [lue: "kaikilla"] ja eksistenssikvanttori $\exists$ [lue: "on olemassa"].
   - *Identiteettisymboli* $\doteq$
   - *Välimerkit*), (ja ,
   - *Muuttujasymbolit* $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, joita voidaan merkitä myös symboleilla $u, v, w, \ldots$.

2. **Ei-loogiset symbolit**

   - *Relaatiosymbolit* $P_0^n, P_1^n, P_2^n, \ldots$, missä *relaatiosymbolin paikkaluku* $n \geq 1$. Relaatiosymboleja voidaan merkitä myös symboleilla $P, Q, R, S, \ldots$. Relaatiosymbolin P paikkalukua merkitään $ar(P)$.
   - *Funktiosymbolit* $f_0^n, f_1^n, f_2^n, \ldots$, missä *funktiosymbolin* paikkaluku $n \geq 1$. Funktiosymboleja voidaan merkitä myös symboleilla $f, g, h, \ldots$. Funktiosymbolin f paikkalukua merkitään $ar(f)$.
   - *Vakiosymbolit* $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, joita voidaan merkitä myös symboleilla $c, d, e, \ldots$.

Esitellään seuraavaksi aakkostoon pohjautuvia keskeisiä määritelmiä sekä havainnollistetaan niitä esimerkeillä.

Määritelmä 2.2. (Vrt. [12, s. 10]) Aakkoston $\mathcal{A}$ *merkkijono* on äärellinen jono peräkkäisiä aakkostoon kuuluvia symboleja.

Esimerkki 2.3. Predikaattilogiikan kielen L aakkostossa $\exists u \wedge \exists v$ ja $v_0v_1v_2v_3v_4v_5$ ovat merkkijonoja, mutta $v_0 \quad v_1v_2$ ei ole, sillä v_0 ja v_1v_2 ovat kaksi erillistä merkkijonoa.

Määritelmä 2.4. (Vrt. [12, s. 14]) Kielen L aakkoston merkkijonoa kutsutaan *termiksi*, jos se voidaan muodostaa käyttämällä seuraavia kohtia 1. - 3. äärellisen monta kertaa:

1. Jokainen muuttujasymboli on termi.
2. Jokainen vakiosymboli on termi.
3. Jos f on funktiosymboli, jonka paikkaluku $ar(f)$ on m, ja $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ovat termejä, niin myös $f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ on termi.

Esimerkki 2.5. Tarkastetaan, onko merkkijono $f(g(v_0, v_1), h(v_2), c)$, missä $ar(f) = 3$, $ar(g) = 2$ ja $ar(h) = 1$, termi. Käytetään apuna määritelmää 2.4. Todetaan ensin, että symbolit v_0, v_1 ja v_2 ovat muuttujasymboleja, joten kohdan 1 perusteella ne ovat termejä.

Koska lisäksi f, g ja h ovat funktiosymboleja, niin kohdan 3 perusteella ne ovat termejä. Todetaan vielä, että symboli c on vakiosymboli, joten kohdan 2 nojalla kyseessä on termi. Tämän perusteella voidaan todeta, että $f(g(v_0, v_1), h(v_2), c)$ on termi, koska se voidaan muodostaa määritelmän 2.4 sääntöjen perusteella.

Määritelmä 2.6. (Vrt. [4, s. 22]) Kielen L *atomikaavat* ovat jompaakumpaa seuraavista tyypeistä:

- $t_1 \doteq t_2$ on atomikaava, missä t_1 ja t_2 ovat termejä.
- Jos P on relaatiosymboli, jonka paikkaluku $ar(P)$ on m ja $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ovat termejä, niin $P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ on atomikaava.

Määritelmä 2.7. (Vrt. [4, s. 23]) Kielen L *kaavat* φ voidaan muodostaa käyttämällä seuraavia kohtia 1. – 3. äärellisen monta kertaa:

1. Jokainen atomikaava on kaava.
2. Jos θ ja ψ ovat kaavoja, niin $\neg\theta$ ja $(\theta * \psi)$, missä $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, ovat kaavoja.

3. Jos θ on kaava ja v muuttuja, niin $(\forall v)\theta$ ja $(\exists v)\theta$ ovat kaavoja.

Kaavan φ *alikaavoja* ovat kaava φ itse sekä kaikki sääntöjen $1.-3.$ mukaisesti kaavan φ muodostamisessa esiintyvät kaavat θ ja ψ. Jokaisen alikaavan alikaavat ovat myös alkuperäisen kaavan φ alikaavoja.

Huomautus. (Vrt. [3, s. 52]). Jatkossa ei ole tarpeen käsitellä konnektiiveja $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ eikä kvanttoria $\forall$, sillä ne voidaan määritellä konnektiivien $\neg$ ja $\wedge$ ja kvanttorin $\exists$ avulla kaikille kaavoille φ ja ψ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &:= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\\
(\varphi \rightarrow \psi) &:= \neg(\varphi \wedge \neg\psi),\\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)),\\
(\forall v)\varphi &:= \neg(\exists v)\neg\varphi.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.8.

- $P(v_0, v_1)$ ja $P(v_0, c_0, h(c_2), f(v_1), g(v_2, f(c_1)))$ ovat atomikaavoja, joten ne ovat myös kaavoja.

- Tarkastetaan, ovatko $\exists v_0 \forall v_1 P(v_0, v_1)$ ja $P(\exists v_0 R(v_0))$ kaavoja. Käytetään apuna määritelmää 2.7. Ensimmäisessä tapauksessa $P(v_0, v_1)$ on kohdan 1 mukaisesti kaava, joten kohdan 3 perusteella sekä $\forall v_1(P(v_0, v_1)$ että $\exists v_0 \forall v_1 P(v_0, v_1)$ ovat kaavoja. Kyseessä ei kuitenkaan kvanttoreiden $\exists$ ja $\forall$ johdosta ole atomikaava. Jälkimmäisessä tapauksessa ei eksistenssikvanttorin $\exists$ vuoksi ole kyseessä määritelmän 2.6 mukainen atomikaava, joten $P(\exists v_0 R(v_0))$ ei ole kaava.

Esimerkki 2.9. Kaavan $(v_0 \vee v_1) \leftrightarrow (\neg v_2 \wedge v_3)$ alikaavoja ovat $(v_0 \vee v_1) \leftrightarrow (\neg v_2 \wedge v_3)$, $(v_0 \vee v_1)$, $(\neg v_2 \wedge v_3)$, $\neg v_2$, v_0, v_1, v_2 ja v_3.

Määritellään seuraavaksi kaavan φ vapaat ja sidotut muuttujat.

Määritelmä 2.10. (Vrt. [10, s. 16]) Olkoon v_i muuttuja ja φ kaava. Kvanttoreiden $\forall v_i$ ja $\exists v_i$ *vaikutusalue* kaavassa φ on se kaavan φ alikaava, jossa kvanttori on pääoperaattori määritelmän 2.7 mukaisesti.

Esimerkki 2.11.

$\underline{\exists v_0(P(v_0) \wedge R(v_0))}$, $\underline{\exists v_0 R(v_0, v_1)} \wedge S(v_0)$, $\underline{\forall v_0(P(v_0) \vee R(v_0))} \leftrightarrow P(v_0)$, $\underline{\exists v_0 P(v_0)}$, $\underline{\forall v_0 P(v_0, v_1)}$, missä eksistenssikvanttorin $\exists$ ja universaalikvanttorin $\forall$ vaikutusalueet ovat alleviivattuna.

Määritelmä 2.12. (Vrt. [10, s. 16]) Olkoon v_i muuttuja ja φ kaava. Muuttujan v_i esiintymä kaavassa φ on *sidottu*, jos se on kvanttoreiden $\forall v_i$ tai $\exists v_i$ vaikutusalueella. Muutoin muuttujan v_i esiintymä on *vapaa*.

Jos jokin muuttujan v_i esiintymistä on vapaa kaavassa φ, muuttujan v_i sanotaan olevan vapaa kaavassa φ. Vastaavasti jos jokin muuttujan v_i esiintymistä on sidottu kaavassa φ, muuttujan v_i sanotaan olevan sidottu kaavassa φ.

Määritelmä 2.13. (Vrt. [10, s. 16] Kielen L kaava on *lause*, jos siinä ei ole lainkaan vapaita muuttujia.

Esimerkki 2.14.

- Kaikki muuttujien esiintymät ovat vapaita kaavassa $P(v_0, v_1)$.
- Kaikki muuttujien esiintymät ovat sidottuja kaavassa $\forall v_0 \exists v_1 P(v_0, v_1)$, joten kyseessä on lause.
- Kaavassa $\forall v_0 R(v_0, v_1) \vee \forall v_1 P(v_1)$ kaikki muuttujan v_0 esiintymät ovat sidottuja ja muuttujan v_1 ensimmäinen esiintymä vapaa ja muut sidottuja.
- Kaavassa $\exists v_1 (P(v_1, v_2) \wedge \forall v_0 (P(v_0, v_2) \rightarrow v_0 \doteq v_1))$ kaikki muuttujien v_0 ja v_1 esiintymät ovat sidottuja ja kaikki muuttujan v_2 esiintymät ovat vapaita.
- Kaavassa $\exists v_1 [\forall v_2 [v_1 \doteq v_2 \rightarrow P_1(v_2, v_3)] \vee [v_1 \doteq v_4 \wedge P_2(v_2, v_4)]]$ muuttujien v_3 ja v_4 kaikki esiintymät ovat vapaita, muuttujan v_1 kaikki esiintymät sidottuja ja muuttujan v_2 viimeinen esiintymä on vapaa ja muut sidottuja.

Määritelmä 2.15. (Vrt. [1, s. 1]). Olkoot X ja Y joukkoja ja $f : X \rightarrow Y$ kuvaus. Tällöin

- f on *injektio*, jos se toteuttaa seuraavan ehdon: $f(u) = f(v) \implies u = v$ kaikilla $u, v \in X$.
- f on *surjektio*, jos se toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla $v \in Y$ on olemassa $u \in X$ siten, että $f(u) = v$.
- f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

2.2 Boolen algebra

Tässä pykälässä 2.2 esitellään Boolen algebra.

Määritelmä 2.16. (Vrt. [4, s. 579]) *Järjestetty pari* $\langle x, y\rangle$ on kahden alkion joukko, missä alkioiden järjestyksellä on merkitystä. Se määritellään seuraavasti

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Tällöin $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$, jos ja vain jos $x = x'$ ja $y = y'$ ([13, s. 5]).

Määritelmä 2.17. (Vrt. [13, s. 6 ja s. 131]). *Karteesinen tulo* $X \times Y$ on kaikkien niiden järjestettyjen parien $\langle x, y\rangle$ joukko, joilla $x \in X$ ja $y \in Y$. Joukkoperheen $\{X_i \mid i \in I\}$ karteesinen tulo $\prod\limits_{i\in I} X_i$ määritellään seuraavasti: $\prod\limits_{i\in I} X_i := \{f \mid f$ on funktio, jonka määrittelyjoukko $dom(f) = I$ siten, että $f(i) \in X_i$ kaikilla $i \in I\}$.

Merkintä. Karteesisen tulon $\prod\limits_{i\in I} X_i$ alkioita merkitään jatkossa symboleilla f, g, h, f' ja g', ja jos $f \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, niin sen *i-koordinaattia* merkitään $f(i)$.

Esimerkki 2.18. Olkoon $X = \{5, 7\}$ ja $Y = \{2, 8\}$ joukkoja. Karteesinen tulo $X \times Y = \{\langle 5, 2\rangle, \langle 5, 8\rangle, \langle 7, 2\rangle, \langle 7, 8\rangle\}$.

Määritelmä 2.19. (Vrt. [10, s. 5]). Kaksipaikkainen relaatio P joukossa X on niiden järjestettyjen parien $\langle x, y\rangle$ joukko, jotka ovat joukon $X \times X$ osajoukkoja.

Määritelmä 2.20. (Vrt. [9, s. 84]) *Osittain järjestetty joukko* on järjestetty pari $\langle X, P\rangle$, missä X on epätyhjä joukko ja P sen kaksipaikkainen relaatio, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in X$:

1. **Refleksiivisyys**: $\langle x, x\rangle \in P$.

2. **Transitiivisuus**: Jos $\langle x, y\rangle \in P$ ja $\langle y, z\rangle \in P$, niin $\langle x, z\rangle \in P$.

3. **Antisymmetrisyys**: Jos $\langle x, y\rangle \in P$ ja $\langle y, x\rangle \in P$, niin $x = y$.

Kyseessä on *järjestetty joukko*, jos myös seuraava ehto pätee:

4. **Totaalisuus**: $\langle x, y\rangle \in P$ tai $\langle y, x\rangle \in P$.

Esimerkki 2.21. Relaatio $\leq$ reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ ja relaatio $\subseteq$ luonnollisten lukujen potenssijoukossa $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ toteuttavat määritelmän mukaiset ehdot, joten järjestetyt parit $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$ ja $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ ovat osittain järjestettyjä joukkoja. Järjestetty pari $\langle \mathbb{R}, >\rangle$ ei ole osittain järjestetty joukko, koska $x \not> x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten se ei ole refleksiivinen.

Määritelmä 2.22. (Vrt. [9, s. 75]). *Boolen algebra* on struktuuri $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1\rangle$, missä $\vee$ ja $\wedge$ ovat kaksipaikkaisia funktioita ja $^{-}$ yksipaikkainen funktio joukossa B, 0 ja 1 ovat erillisiä joukon B alkioita ja kaikilla $x, y, z \in B$ pätevät seuraavat identiteetit:

Idempotenssilait:

$x \vee x \doteq x, \qquad x \wedge x \doteq x.$

Vaihdantalait:

$x \vee y \doteq y \vee x, \qquad x \wedge y \doteq y \wedge x.$

Liitäntälait:

$(x \vee y) \vee z \doteq x \vee (y \vee z), \qquad (x \wedge y) \wedge z \doteq x \wedge (y \wedge z).$

Osittelulait:

$x \vee (y \vee z) \doteq (x \vee y) \wedge (x \vee z), \qquad x \wedge (y \wedge z) \doteq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$

Komplementtilait:

$x \vee \overline{x} \doteq 1, \qquad x \wedge \overline{x} \doteq 0,$

$\overline{\overline{x}} \doteq x.$

Identiteettilait:

$x \vee 0 \doteq x, \qquad x \wedge 1 \doteq x.$

Esimerkki 2.23. (Vrt. [4, s. 39]). Jos B on kokoelma epätyhjän joukon X osajoukkoja siten, että $\emptyset, X \in B$ ja B on suljettu yhdisteen $\cup$, leikkauksen $\cap$ ja komplementin $^{-}$ suhteen, niin $\mathscr{B} = \langle B, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, X\rangle$ on Boolen algebra. Potenssijoukko $\mathscr{P}(X)$ on tällainen kokoelma.

Esimerkki 2.24. Olkoon $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1\rangle$ Boolen algebra. Osoitetaan, että $x \vee 1 \doteq 1$. Nyt

$$\begin{aligned}
x \vee 1 &= (x \vee 1) \wedge 1 && \text{(Identiteettilaki)}\\
&= (x \vee 1) \wedge (x \vee \overline{x}) && \text{(Komplementtilaki)}\\
&= x \vee (1 \wedge \overline{x}) && \text{(Osittelulaki)}\\
&= x \vee \overline{x} && \text{(Identiteettilaki)}\\
&= 1. && \text{(Komplementtilaki)}
\end{aligned}$$

2.3 Predikaattilogiikan semantiikka

Tässä pykälässä 2.3 tarkastellaan predikaattilogiikan semantiikan malliteoriaa. Normaalisti malleissa voi olla relaatiosymboleita, funktiosymboleita ja vakiosymboleja, mutta funktiosymboleja ei tarvita, mikä nähdään seuraavasti (vrt. [3, s. 72]):

Olkoon X joukko ja f sen n-paikkainen funktio. Joukossa X voidaan määritellä $(n+1)$-paikkainen relaatio P_f seuraavasti:

$$\langle x_1, \ldots, x_{n+1} \rangle \in P_f, \text{ jos ja vain jos } f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}.$$

Funktioiden ominaisuudet voidaan siis määritellä relaatioiden avulla, joten kaikki funktiosymbolit voidaan korvata vastaavilla relaatiosymboleilla. Siksi riittää tarkastella malleja, joissa on pelkästään relaatioita.

Merkintä. Merkitään luonnollisten lukujen joukkoa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ symbolilla ω.

Määritelmä 2.25. (Vrt. [3, s. 55] *Malli* on järjestetty pari

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{P_n \mid n \in \omega\} \rangle,$$

missä määrittelyjoukko A on epätyhjä ja P_n, jonka paikkaluku $ar(P_n) = r_n$, on joukon A äärellispaikkainen relaatio.

Huomautus. On tavallista tarkastella myös malleja, joissa on vain äärellinen määrä relaatioita $P_0, \ldots, P_n$. Mallit voidaan palauttaa alkuperäisen määritelmän 2.25 mukaiseen muotoon lisäämällä niihin tyhjät relaatiot, joiden paikkaluku on yksi.

Määritelmä 2.26. Mallit $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_n \mid n \in \omega\} \rangle$ ja $\mathfrak{B} = \langle B, \{R_n \mid n \in \omega\} \rangle$ ovat *samaa tyyppiä* olevia malleja, jos niille pätee, että $ar(P_n) = ar(R_n)$ jokaisella $n \in \omega$.

Määritelmä 2.27. (Vrt. [3, s. 73]) Olkoon $\mathfrak{A}$ malli $\langle A, \{P_n \mid n \in \omega\} \rangle$ ja $\mathfrak{B}$ malli $\langle B, \{R_n \mid n \in \omega\} \rangle$, missä $ar(P_n) = ar(R_n) = r_n$. Malli $\mathfrak{A}$ on mallin $\mathfrak{B}$ *alimalli* ja malli $\mathfrak{B}$ mallin $\mathfrak{A}$ *laajennus*, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, mikäli seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $A \subseteq B$ ja
2. $P_n = R_n \cap A^{r_n}$.

Jos $P_n = R_n \cap A^{r_n}$, niin sitä kutsutaan relaation R_n *rajoittumaksi* joukkoon A. Mallin $\mathfrak{B}$ rajoittuma joukkoon A, $\mathfrak{B} \upharpoonright_A$, on malli $\langle A, R_n \cap A^{r_n} \mid n \in \omega \rangle$.

Nyt voidaan muodostaa kielen ja sen mallien välinen yhteys määrittelemällä kaavojen totuus mallissa. Annetaan ensin kaikille kielen L vapaana esiintyville muuttujille samankaltainen tulkinta määritelmän 2.28 avulla, ja hyödynnetään sitä *Tarskin totuusmääritelmässä* 2.29.

Määritelmä 2.28. (Vrt. [3, ss. 55–56]) Mallin $\mathfrak{A}$ *tulkintajono* on ääretön joukon A alkioiden jono x, jota merkitään $x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$. Jos x on tällainen tulkintajono, $n \in w$ ja $a \in A$, niin tulkintajono $x(n/a)$ saa muuten samat arvot kuin tulkintajono x, mutta muuttuja x_n korvataan arvolla a. Toisin sanoen $x(n/a) = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, a, x_{n+1}, \ldots \rangle$.

Merkintä. (Vrt. [3, s. 56]). Merkintä $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi$ tarkoittaa, että tulkintajono x toteuttaa kaavan φ mallissa $\mathfrak{A}$. Kun kaavan φ vapaiden muuttujien esiintymät ovat joukossa $\{v_0, \ldots, v_n\}$, kaavan φ toteutumista mallissa $\mathfrak{A}$ voidaan merkitä myös $\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0, \ldots, x_n]$, missä x on tulkintajono. Vastaavasti merkintä $\mathfrak{A} \nvDash_x \varphi$ tarkoittaa, että tulkintajono x ei toteuta kaavaa φ mallissa $\mathfrak{A}$.

Määritelmä 2.29. (Vrt. [3, s. 56]) *(Tarskin totuusmääritelmä).* Olkoon $\mathfrak{A}$ malli $\langle A, \{P_n \mid n \in \omega\}\rangle$. Määritellään rekursiivisesti, milloin tulkintajono x toteuttaa kaavan φ mallissa $\mathfrak{A}$:

- $\mathfrak{A} \vDash_x v_i \doteq v_j$, jos ja vain jos $x_i = x_j$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$, jos ja vain jos $\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\rangle \in P_n$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x \neg\varphi$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \nvDash_x \varphi$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi \wedge \psi$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi$ ja $\mathfrak{A} \vDash_x \psi$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi \vee \psi$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi$ tai $\mathfrak{A} \vDash_x \psi$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi \rightarrow \psi$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \nvDash_x \varphi$ tai $\mathfrak{A} \vDash_x \psi$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi \leftrightarrow \psi$, jos ja vain jos joko $\mathfrak{A} \vDash_x \varphi$ ja $\mathfrak{A} \vDash_x \psi$ tai $\mathfrak{A} \nvDash_x \varphi$ ja $\mathfrak{A} \nvDash_x \psi$
- $\mathfrak{A} \vDash_x (\exists v_i)\varphi$, jos ja vain jos jollakin $a \in A$ pätee, että $\mathfrak{A} \vDash_{x(n/a)} \varphi$.
- $\mathfrak{A} \vDash_x (\forall v_i)\varphi$, jos ja vain jos kaikilla $a \in A$ pätee, että $\mathfrak{A} \vDash_{x(n/a)} \varphi$.

Määritelmä 2.30. (Vrt. [10, ss. 14–15]). Kaava φ on *toteutuva*, jos ja vain jos φ on tosi jollakin mallilla $\mathfrak{A}$ ja tulkintajonolla x. Kaava φ on *validi*, $\vDash \varphi$, jos ja vain jos φ on tosi jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$ ja tulkintajonolla x.

Määritelmä 2.31. (Vrt. [3, s. 56]). Jos $\mathfrak{A}$ on malli, σ on kaavajoukko ja x on sellainen tulkintajono, että $\mathfrak{A} \vDash_x \sigma$ jokaisella $\sigma \in \Sigma$, niin $\mathfrak{A}$ on joukon Σ malli tulkintajonolla x.

Esimerkki 2.32. • Kaava $R(v_0, v_1) \wedge \neg R(v_0, v_1)$ ei ole validi eikä toteutuva, sillä kaava on tosi mallissa $\mathfrak{A}$ tulkintajonolla x vain, jos $\mathfrak{A} \vDash_x \neg R(v_0, v_1)$ ja $\mathfrak{A} \vDash_x R(v_0, v_1)$. Tämä on mahdotonta, sillä kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ ja tulkintajonoilla x joko $\mathfrak{A} \vDash_x \neg R(v_0, v_1)$ ja $\mathfrak{A} \nvDash_x R(v_0, v_1)$ tai $\mathfrak{A} \nvDash_x \neg R(v_0, v_1)$ ja $\mathfrak{A} \vDash_x R(v_0, v_1)$.

- Kaava $\forall v_0(P(v_0) \wedge R(v_0)) \leftrightarrow \forall v_0 P(v_0) \wedge \forall v_0 R(v_0)$ on validi ja toteutuva, sillä kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $n \in \omega$ pätee, että jos $\mathfrak{A} \vDash_{x(n/a)} P(v_0)$ ja $\mathfrak{A} \vDash_{x(n/a)} R(v_0)$, niin $\mathfrak{A} \vDash_{x(n/a)} (P(v_0) \wedge R(v_0))$. Tällöin $\mathfrak{A} \vDash_x \forall v_0(P(v_0) \wedge R(v_0))$. Vastaavasti $\mathfrak{A} \vDash_x \forall v_0 P(v_0)$ ja $\mathfrak{A} \vDash_x \forall v_0 R(v_0)$, joten $\mathfrak{A} \vDash_x \forall P(v_0) \wedge \mathfrak{A} \vDash_x \forall v_0 R(v_0)$. Toisaalta jos $\mathfrak{A} \nvDash_{x(n/a)} P(v_0)$ tai $\mathfrak{A} \nvDash_{x(n/a)} R(v_0)$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $n \in \omega$, niin $\mathfrak{A} \nvDash_x \forall v_0(P(v_0) \wedge R(v_0))$ ja $\mathfrak{A} \nvDash_x \forall v_0 P(v_0) \wedge \forall v_0 R(v_0)$.

  Tällöin aina joko $\mathfrak{A} \vDash_x \forall v_0(P(v_0) \wedge R(v_0))$ ja $\mathfrak{A} \vDash_x \forall v_0 P(v_0) \wedge \forall v_0 R(v_0)$ tai $\mathfrak{A} \nvDash_x \forall v_0(P(v_0) \wedge R(v_0))$ ja $\mathfrak{A} \nvDash_x \forall v_0 P(v_0) \wedge \forall v_0 R(v_0)$, joten kaava on tosi jokaisessa mallissa $\mathfrak{A}$ jokaisella tulkintajonolla x.

- Kaava $P(v_0) \vee \neg P(v_0)$ on validi ja toteutuva, sillä $\mathfrak{A} \vDash_x P(v_0)$ tai $\mathfrak{A} \vDash_x \neg P(v_0)$, joten kaava $P(v_0) \vee \neg P(v_0)$ on tosi jokaisessa mallissa $\mathfrak{A}$ jokaisella tulkintajonolla x.

Tarkastellaan vielä seuraavien määritelmien avulla mallien välisiä suhteita.

Määritelmä 2.33. (Vrt. [3, s. 73]). Oletetaan, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat samaa tyyppiä. Kuvaus $h : A \to B$ on *homomorfismi* mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$, jos kaikilla $n \in \omega$ ja alkioilla $a_1, a_2, \ldots, a_{r_n} \in A$ pätee, että

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{r_n} \rangle \in P_n, \text{ jos ja vain jos } \langle h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_{r_n}) \rangle \in R_n.$$

Homomorfismia mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$, joka on bijektio, kutsutaan *isomorfismiksi* mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B} \restriction_{h[A]}$ välillä. Sitä voidaan kutsua myös *upotukseksi* mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$. Kun mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä on isomorfismi, niin ne ovat *isomorfiset*, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Esimerkki 2.34. Olkoon $\mathfrak{A} = \langle \{1, 8, -3, 12\}, \leq \rangle$ ja $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 16, -2\}, \geq \rangle$. Olkoon $h : A \to B$ kuvaus, jolla $h(-3) = 16$, $h(1) = 2$, $h(8) = 1$ ja $h(12) = -2$. Tämä on bijektio, ja koska järjestys joukkojen välillä säilyy, niin kyseessä on myös homomorfismi. Tällöin mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat keskenään isomorfiset.

Määritelmä 2.35. (Vrt. [4, s. 32]). Mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat *elementaarisesti ekvivalentit*, jos ja vain jos jokainen lause, joka on totta mallissa $\mathfrak{A}$, on totta myös mallissa $\mathfrak{B}$ ja päinvastoin. Tätä merkitään $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Merkintä. Olkoon φ kaava. Jos kaavassa φ esiintyvät muuttujat ovat joukossa $\{v_0, \ldots, v_m\}$, niin silloin tästä kaavasta voidaan käyttää merkintää $\varphi(v_0, \ldots, v_m)$.

Määritelmä 2.36. (Vrt. [3, s. 75]). Malli $\mathfrak{B}$ on mallin $\mathfrak{A}$ *elementaarinen laajennus*, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ja kaikilla kielen L kaavoilla $\varphi(v_0, \ldots, v_m)$ ja tulkintajonon x muodostavilla alkioilla $x_0, x_1, \ldots, x_m \in A$ pätee, että

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, x_1, \ldots, x_m], \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{B} \models \varphi[x_0, x_1, \ldots, x_m].$$

Jos malli $\mathfrak{B}$ on mallin $\mathfrak{A}$ elementaarinen laajennus, niin vastaavasti malli $\mathfrak{A}$ mallin $\mathfrak{B}$ *elementaarinen alimalli*. Elementaarinen laajennus on *aito*, jos $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$ ([16, s. 167]).

Esimerkki 2.37. Olkoon $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ja $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ osittain järjestettyjä joukkoja. Malli $\mathfrak{A}$ on määritelmän 2.27 mukaisesti mallin $\mathfrak{B}$ alimalli. Olkoon $\varphi(v_0, v_1)$ kaava $\forall v_2[v_0 \leq v_2 \leq v_1 \rightarrow (v_0 \doteq v_2 \vee v_2 \doteq v_1)]$. Kaava on tosi mallissa $\mathfrak{A}$ tulkintajonolla x, jossa x antaa muuttujan v_0 arvoksi 0 ja muuttujan v_1 arvoksi 1, $\mathfrak{A} \models \varphi[0, 1]$, mutta on epätosi mallissa $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[0, 1]$. Määritelmän 2.36 mukaisesti malli $\mathfrak{A}$ ei ole mallin $\mathfrak{B}$ elementaarinen alimalli, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \nprec \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$.

Määritelmä 2.38. (Vrt. [3, s. 75]). Kuvaus $h : A \rightarrow B$ on mallin $\mathfrak{A}$ *elementaarinen upotus* mallille $\mathfrak{B}$, $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, jos kaikilla kielen L kaavoilla $\varphi(v_0, \ldots, v_m)$ ja tulkintajonon x muodostavilla alkioilla $x_0, x_1, \ldots, x_m \in A$ pätee, että

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, x_1, \ldots, x_m], \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{B} \models \varphi[h(x_0), h(x_1), \ldots, h(x_m)].$$

On huomattava, että elementaarinen upotus on aina injektio, sillä epäyhtälöstä $v_i \neq v_j$ seuraa, että kaksi eri alkiota eivät voi kuvautua samaksi alkioksi.

Esimerkki 2.39. Olkoon $h : A \rightarrow A$ identtinen kuvaus eli $h(a) = a$ jokaisella $a \in A$. Tällöin h on mallin $\mathfrak{A}$ *triviaali* elementaarinen upotus itselleen.

3 Ultratulot

3.1 Filtterit

Luvussa 3 tutustutaan ultratulon konstruoimiseen ja todistetaan sekä ultratulon peruslause, *Łoś'n lause*, että ultratulojen ja Łoś'n lauseen sovellus, *kompaktisuuslause*. Pykälässä 3.1 esitellään ultratulojen konstruoinnin kannalta olennaisten filtterin ja maksimaalisen filtterin, ultrafiltterin, määritelmät.

Määritelmä 3.1. (Vrt. [15, s. 42].) Olkoon I epätyhjä joukko. Joukkoa $F \subseteq \mathscr{P}(I)$, kun $\mathscr{P}(I)$ on joukon I kaikkien osajoukkojen kokoelma eli potenssijoukko, kutsutaan joukon I *filtteriksi*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

1. $I \in F$,
2. jos $X, Y \in F$, niin $X \cap Y \in F$ ja
3. jos $X \in F$ ja $X \subseteq Y \subseteq I$, niin $Y \in F$.

Jos $\emptyset \notin F$, niin F on *aito filtteri*.

Esimerkki 3.2.
- Joukon I *triviaali filtteri* on joukko $\{I\}$ ([4, s. 211]).
- Olkoon I epätyhjä joukko. Osoitetaan, että

$$F = \{X \subseteq I \mid Y \subseteq X\}$$

  on joukon I aito filtteri kaikilla $Y \subseteq I$. Kyseessä on epätyhjän joukon Y määräämä *pääfiltteri* ([4, s. 211]). Todetaan ensin, että tyhjän joukon ainoa osajoukko on se itse, joten $Y \nsubseteq \emptyset$. Täten $\emptyset \notin F$. Lisäksi oletuksen perusteella $Y \subseteq I$, joten $I \in F$.

  Oletetaan sitten, että $S, T \in F$. Nyt $Y \subseteq S \subseteq I$ ja $Y \subseteq T \subseteq I$, joten $Y \subseteq S \cap T \subseteq I$. Tästä seuraa, että $S \cap T \in F$. Oletetaan vielä, että $S \in F$ siten, että $S \subseteq T \subseteq I$. Tällöin $Y \subseteq S \subseteq T$, joten $Y \subseteq T$. Tästä seuraa, että $T \in F$. Täten on osoitettu, että F on joukon I aito filtteri.

Esimerkki 3.3. Olkoon I ääretön joukko. Osoitetaan, että

$$F = \{X \subseteq I \mid I \backslash X \text{ on äärellinen}\}$$

on joukon I aito filtteri. Kyseessä on *Fréchet-filtteri* ([4, s. 211]), josta käytetään myös nimitystä *kofiniitti filtteri* ([9, s. 68]). Todetaan ensin, että $I \backslash \emptyset = I$ on oletuksen perusteella ääretön joukko, joten $\emptyset \notin F$. Lisäksi $I \backslash I = \emptyset$ on äärellinen joukko, joten $I \in F$.

Oletetaan sitten, että $S, T \in F$. Tällöin $I \backslash (S \cap T) = (I \backslash S) \cup (I \backslash T)$ on kahden äärellisen joukon yhdisteenä äärellinen, joten $(S \cap T) \in F$. Oletetaan vielä, että $S \in F$ siten, että $S \subseteq T \subseteq I$. Tällöin $I \backslash T$ on äärellinen, koska se on äärellisen joukon $I \backslash S$ osajoukko, joten tästä seuraa, että $T \in F$. Täten on osoitettu, että F on joukon I aito filtteri.

Määritelmä 3.4. (Vrt. [15, s. 44].) Olkoon I epätyhjä joukko. Joukkoa $F \subseteq \mathscr{P}(I)$, kun $\mathscr{P}(I)$ on joukon I potenssijoukko, kutsutaan joukon I *ultrafiltteriksi*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

1. F on joukon I aito filtteri määritelmän 3.1 mukaisesti ja

2. jokaiselle $Z \subseteq I$ joko $Z \in F$ tai $I \backslash Z \in F$.

Esimerkki 3.5. Osoitetaan, että *Fréchet-filtteri*

$$F = \{X \subseteq I \mid I \backslash X \text{ on äärellinen}\}$$

ei ole joukon I ultrafiltteri, kun joukko I on ääretön. Joukko I voidaan jakaa kahteen äärettömään, erilliseen joukkoon, joista kummankaan komplementti ei ole äärellinen. Esimerkiksi jos $I = \mathbb{N}$ ja sen osajoukko X sisältää kaikki parilliset luonnolliset luvut, niin $I \backslash X$ ja $I \backslash (I \backslash X)$ ovat selvästi äärettömiä joukkoja, joten $X \notin F$ ja $I \backslash X \notin F$. Täten on osoitettu, että F ei ole äärettömän joukon I ultrafiltteri.

Esimerkki 3.6. Olkoon $I = \{u, v\}$ ja $\mathscr{P}(I) = \{\emptyset, \{u\}, \{v\}, \{u, v\}\}$ sen potenssijoukko. Joukon I filtterit ovat $\{\{u, v\}\}, \{\{u\}, \{u, v\}\}$ ja $\{\{v\}, \{u, v\}\}$. Näistä ultrafilttereitä ovat $\{\{u\}, \{u, v\}\}$ ja $\{\{v\}, \{u, v\}\}$, sillä jokaisen joukon I osajoukon tai sen komplementin on sisällyttävä ultrafiltteriin.

Todistetaan nyt *Zornin lemman* 3.16 ja apulauseen 3.17 avulla tärkeä filttereiden laajennusta ultrafilttereiksi mielivaltaisessa Boolen algebrassa koskeva *ultrafiltterilause* 3.19 sekä sen seuraus.

Määritelmä 3.7. (Vrt. [9, ss. 69–70]) Olkoon I joukko ja F kokoelma sen osajoukkoja. Kokoelmalla F on *äärellinen leikkausominaisuus*, mikäli $F \neq \emptyset$ eikä mikään joukon F äärellisen monen alkion leikkaus ole tyhjä. Joukkoa

$$\mathcal{F} := \{Y \subseteq I \mid \text{ jollakin } n \in \omega \text{ ja joillakin } X_0, \ldots, X_n \in F \text{ pätee, että } \bigcap_{i=1}^{n} X_i \subseteq Y\}$$

kutsutaan joukon F *virittämäksi filtteriksi*. Apulauseessa 3.17 osoitetaan, että $\mathcal{F}$ on filtteri.

Esimerkki 3.8. Olkoon $F = \{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ siten, että $F_0 \neq \emptyset$ ja $F_i \subseteq F_{i+1}$ kaikilla $0 \leq i < n$. Leikkauksella $X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$, missä $X_i \in F$, ja joka sisältää leikkauksen $F_0 \cap \cdots \cap F_n = F_0 \neq \emptyset$, pätee, että $X \neq \emptyset$, sillä F_0 sisältyy kaikkiin joukon F alkioihin. Täten joukolla X on äärellinen leikkausominaisuus.

Määritelmä 3.9. (Vrt. [6, s. 3]). Olkoon $\langle X, P\rangle$ osittain järjestetty joukko ja Y sen osajoukko. Tällöin $x \in X$ on joukon Y *yläraja*, jos kaikilla $y \in Y$ pätee, että $\langle y, x\rangle \in P$. Vastaavasti $x \in X$ on joukon Y *alaraja*, jos kaikilla $y \in Y$ pätee, että $\langle x, y\rangle \in P$.

Esimerkki 3.10. Olkoon $X \in \mathbb{N}$ siten, että $X = [2, 242]$. Joitakin joukon X ylärajoja ovat $x = 242$, $x = 300$ ja $x = 820$. Vastaavasti joukon X alarajoja ovat $x = 2$, $x = 0$ ja $x = -800$.

Määritelmä 3.11. (Vrt. [6, s. 3]). Olkoon $\langle X, P\rangle$ osittain järjestetty joukko ja Y sen epätyhjä osajoukko. Tällöin $x \in Y$ on joukon Y *maksimaalinen alkio*, jos kaikilla $y \in Y$ ja $x \neq y$ pätee, että $\langle x, y\rangle \notin P$. Vastaavasti $x \in Y$ on joukon Y *minimaalinen alkio*, jos kaikilla $y \in Y$ ja $x \neq y$ pätee, että $\langle y, x\rangle \notin P$.

Esimerkki 3.12. Olkoon $\langle\{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}, \subseteq\rangle$ osittain järjestetty joukko. Alkiot $\{x, y\}$, $\{x, z\}$ ja $\{y, z\}$ ovat maksimaalisia, sillä ne eivät ole yhdenkään toisen alkion osajoukkoja. Alkiot $\{x\}$, $\{y\}$ ja $\{z\}$ ovat minimaalisia, sillä yksikään muu alkio ei ole niiden osajoukko.

Määritelmä 3.13. (Vrt. [6, s. 2]). *Lineaarisesti järjestetty joukko* on järjestetty pari $\langle X, P\rangle$, missä X on epätyhjä joukko ja P sen kaksipaikkainen relaatio, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in X$:

1. **Transitiivisuus**: Jos $\langle x, y\rangle \in P$ ja $\langle y, z\rangle \in P$, niin $\langle x, z\rangle \in P$.

2. **Antisymmetrisyys**: Jos $\langle x, y\rangle \in P$ ja $\langle y, x\rangle \in P$, niin $x = y$.

3. **Totaalisuus**: $\langle x, y\rangle \in P$ tai $\langle y, x\rangle \in P$.

Määritelmä 3.14. (Vrt. [6, s. 4]) Olkoon $\langle X, P \rangle$ osittain järjestetty joukko. Nyt $T \subseteq X$ on *ketju*, jos $\langle T, P\restriction_T \rangle$ on lineaarisesti järjestetty joukko määritelmän 3.13 mukaisesti.

Esimerkki 3.15. Olkoon $\langle \mathscr{P}(X), \subseteq \rangle$ osittain järjestetty joukko, missä X on joukko $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tarkastellaan sen osajoukkoja $T_1 = \{5\}$, $T_2 = \{5, 6\}$ ja $T_3 = \{5, 6, 7, 8\}$. Huomataan, että $T_1 \subseteq T_2$, $T_2 \subseteq T_3$ ja $T_1 \subseteq T_3$. Tällöin $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3$, joten joukon X osajoukkojen kokoelma $\{T_1, T_2, T_3\}$ on ketju.

Lause 3.16. *(Zornin lemma.) Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Oletetaan, että millä hyvänsä ketjulla $Y \subseteq X$ pätee, että $\bigcup Y \in X$. Tällöin X sisältää maksimaalisen alkion. Tällaiselle alkiolle $G \in X$ pätee, että jos $G \subseteq H \in X$, niin $G = H$.*

Todistus. (Ks. [13, s. 276]).Zornin lemma on yhtäpitävä valinta-aksiooman kanssa. Todistus sivuutetaan. □

Apulause 3.17. Olkoon I ääretön joukko ja F joukon I osajoukkojen kokoelma. Olkoon $\mathcal{F} := \{Y \subseteq I \mid$ jollakin äärellisellä n ja joillakin $X_0, \ldots, X_n \in F$ pätee, että $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \subseteq Y\}$ epätyhjän joukon F virittämä filtteri. Tällöin on voimassa, että

1. $\mathcal{F}$ on filtteri joukossa I.
2. $\mathcal{F}$ on aito filtteri, jos ja vain jos joukolla F on äärellinen leikkausominaisuus.

Todistus. (Vrt. [9, s. 70] ja [4, s. 212]).

1. Osoitetaan, että $\mathcal{F} = \{Y \subseteq I \mid$ jollakin äärellisellä n ja joillakin $X_0, \ldots, X_n \in F$ pätee, että $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \subseteq Y\}$ on filtteri. Nyt jos $X_i \in F$, kun $i = 0, \ldots, n$, niin triviaalisti $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \subseteq I$, koska jokainen $X_i \subseteq I$. Täten määritelmän 3.1 mukaisesti $I \in \mathcal{F}$.

   Oletetaan nyt, että $Y, Y' \in \mathcal{F}$ ja $X_1, \ldots, X_n \in F$ ja $X'_1, \ldots, X'_m \in F$ ovat joukkoja, joille pätee, että $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \subseteq Y$ ja $\bigcap_{j=1}^{m} X'_j \subseteq Y'$. Nyt

   $$\bigcap_{i=1}^{n} X_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} X'_j \subseteq Y \cap Y',$$

   joten $Y \cap Y' \in \mathcal{F}$.

   Oletetaan vielä, että $X \in \mathcal{F}$ ja $X \subseteq Z \subseteq I$. Tällöin on olemassa joukot $Y_1, \ldots, Y_n \in F$, jolla pätee, että $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \subseteq X \subseteq Z$. Täten määritelmän 3.1 mukaisesti $Z \in \mathcal{F}$. Näin ollen on osoitettu, että $\mathcal{F}$ on filtteri.

2. Osoitetaan vielä, että filtteri $\mathcal{F}$ on aito, jos ja vain jos joukolla F on äärellinen leikkausominaisuus määritelmän 3.7 mukaisesti. Oletetaan ensin, että $\mathcal{F}$ on aito filtteri. Tehdään vastaoletus, että joukolla F ei ole äärellistä leikkausominaisuutta. Tällöin joillakin $X_0, \ldots, X_n \in F$ pätee, että $\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \emptyset \in \mathcal{F}$, joten $\mathcal{F}$ on epäaito filtteri. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten joukolla F on oltava äärellinen leikkausominaisuus.

   Oletetaan sitten, että joukolla F on äärellinen leikkausominaisuus. Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{F}$ on epäaito filtteri. Tällöin $\emptyset \in \mathcal{F}$, joten $\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \emptyset \in \mathcal{F}$ joillakin $X_0, \ldots, X_n \in F$. Tämä on ristiriidassa äärellisen leikkausominaisuuden kanssa, joten on oltava, että $\mathcal{F}$ on aito filtteri.

□

Apulause 3.18. Oletetaan, että F on aito filtteri joukossa I. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. F on maksimaalinen aito filtteri, eli jos $F \subseteq F'$ ja F' on filtteri, niin $F' = F$.
2. F on ultrafiltteri.

Todistus. (Vrt. [18, s .10]). Oletetaan ensin, että F on ultrafiltteri joukossa I. Tehdään vastaoletus, että $F \subset F'$ ja F' on aito filtteri, joka laajentaa filtterin F. Olkoon X joukko siten, että $X \in F' \backslash F$. Koska $X \notin F$ ja F on ultrafiltteri, niin $I \backslash X \in F$. Tällöin $\emptyset = X \cap I \backslash X \in F'$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten on oltava, että F on maksimaalinen aito filtteri.

Oletetaan sitten, että F on maksimaalinen aito filtteri. Tehdään vastaoletus, että F ei ole ultrafiltteri. Tällöin on olemassa joukko $X_0 \subseteq I$ siten, että $X_0 \notin F$ ja $I \backslash X_0 \notin F$. Nyt jos on olemassa joukko $Z \in F$ siten, että $Z \subseteq I \backslash X_0$, niin $I \backslash X_0 \in F$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Täten jokainen filtterin F alkio Z leikkaa joukon X_0. Tästä seuraa, että jokainen joukon $F \cup \{X_0\}$ äärellisen monen alkion leikkaus on epätyhjä, ja koska $X_0 \notin F$, niin joukon $F \cup \{X_0\}$ virittämä filtteri on aidosti laajempi kuin filtteri F. Tämä on ristiriidassa filtterin maksimaalisuuden kanssa, joten on oltava, että F on ultrafiltteri. □

Lause 3.19. *(Ultrafiltterilause.) Jokainen aito filtteri voidaan laajentaa ultrafiltteriksi.*

Todistus. (Vrt. [3, ss. 15–16]) Olkoon F aito filtteri joukossa I. Olkoon $\mathscr{F}$ kaikkien niiden joukon I filttereiden joukko, jotka sisältävät filtterin F. Nyt $\mathscr{F} \neq \emptyset$, koska

$F \in \mathscr{F}$. Tarkastellaan osittainjärjestystä $\langle \mathscr{F}, \subseteq \rangle$ ja osoitetaan, että se on suljettu ketjujen yhdisteiden suhteen.

Olkoon $\mathscr{C} = \{C_j \mid j \in J\}$ ketju joukossa $\mathscr{F}$. Osoitetaan sitten, että $\bigcup_{j \in J} C_j$ on aito filtteri joukossa I.

1. Koska $\emptyset \notin C_j$ kaikilla $j \in J$, niin $\emptyset \notin \bigcup_{j \in J} C_j$. Lisäksi koska joukko $\bigcup_{j \in J} C_j$ on yhdiste joukoista, joihin joukko I kuuluu, niin $I \in \bigcup_{j \in J} C_j$.
2. Oletetaan sitten, että $X, Y \in \bigcup_{j \in J} C_j$. Tällöin $X \in C_j$ ja $Y \in C_k$ joillakin $j, k \in J$. Koska $\mathscr{C}$ muodostaa ketjun, niin on oltava joko $C_j \subseteq C_k$ tai $C_k \subseteq C_j$. Oletetaan nyt, että $C_j \subseteq C_k$. Tällöin $X, Y \in C_k$, joka on filtteri, joten $X \cap Y \in C_k \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$.
3. Oletetaan vielä, että $Z \in \bigcup_{j \in J} C_j$ ja $Z \subseteq X \subseteq I$. Koska $Z \in C_j$, joka on filtteri, niin $X \in C_j \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$.

On osoitettu, että $\bigcup_{j \in J} C_j$ on aito filtteri. Nyt $F \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$, joten $\bigcup_{j \in J} C_j \in \mathscr{F}$. Tällöin joukko $\bigcup_{j \in J} C_j$ on ketjun $\mathscr{C}$ yläraja joukossa $\mathscr{F}$. *Zornin lemman* 3.16 perusteella joukko $\mathscr{F}$ sisältää maksimaalisen alkion G. Tällöin apulauseen 3.18 mukaisesti G on ultrafiltteri, joka on filtterin F laajennus. □

Seuraus 3.20. *Jokainen joukko, jolla on äärellinen leikkausominaisuus, voidaan laajentaa ultrafiltteriksi.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 16]). Apulauseen 3.17 perusteella joukko F, jolla on äärellinen leikkausominaisuus, virittää aidon filtterin $\mathcal{F}$ siten, että $F \subseteq \mathcal{F}$. Tämä voidaan lauseen 3.19 nojalla laajentaa ultrafiltteriksi. □

3.2 Ultratulon konstruointi

Tässä pykälässä 3.2 konstruoidaan redusoitu tulo $\prod \mathfrak{A}_i/F$ ja sen erikoistapaus ultratulo, jonka avulla voidaan rakentaa uusia malleja. Käytetään konstruointia ensin joukkoihin ja sitten malleihin. Rajoitetaan tarkastelu malleihin, joissa on vain yksi kaksipaikkainen relaatio. Yleistäminen yleiseen tapaukseen on suoraviivainen.

Oletetaan, että I mielivaltainen indeksijoukko, F on joukon I aito filtteri, ja jokaisella alkiolla $i \in I$ on olemassa malli $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, R_i \rangle$, missä A_i on epätyhjä joukko ja R_i kaksipaikkainen relaatio. Filtterin F intuitiivinen idea on, että siihen kuuluvat indeksijoukon I osajoukot ovat sellaisia, että ne sisältävät melkein kaikki indeksijoukon alkiot. Toisin sanoen filtteri F koostuu indeksijoukon I "isoista"osajoukoista.

Määritellään ensin kaksipaikkainen relaatio $\sim_F$ joukossa $\prod_{i \in I} A_i$, joka osoittaa, että jos filtteri F koostuu isoista osajoukoista, niin $f(i) = g(i)$ melkein kaikilla koordinaateilla. Tämä voidaan laajentaa määrittelemällä relaatio R joukossa $\prod_{i \in I} A_i$ siten, että R pätee joukossa $\prod_{i \in I} A_i$ aina, kun relaatio P_i sisältää melkein kaikki koordinaatit.

Määritelmä 3.21. (Vrt. [3, s. 87]). Olkoon F kokoelma joukon I osajoukkoja. Jos $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$, niin f ja g ovat *F-ekvivalentit*

$$f \sim_F g, \text{jos ja vain jos } \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in F.$$

Määritelmä 3.22. (Vrt. [3, s. 88]). Olkoon F filtteri joukossa I. Jos $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$, niin relaatio R määritellään joukossa $\prod_{i \in I} A_i$ seuraavalla ehdolla:

$$\langle f, g \rangle \in R, \text{jos ja vain jos } \{i \in I \mid \langle f(i), g(i) \rangle \in P_i\} \in F.$$

Osoitetaan seuraavaksi apulauseen 3.24 avulla, että $\sim_F$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\prod_{i \in I} A_i$, ja apulauseen 3.25 avulla, että ne karteesisen tulon $\prod_{i \in I} A_i$ alkiot, jotka ovat ekvivalentteja relaatiossa $\sim_F$, ovat erottamattomia myös relaation R suhteen.

Määritelmä 3.23. (Vrt. [4, s. 580]). Relaatio P on *ekvivalenssirelaatio* joukossa X, mikäli se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in X$:

1. **Refleksiivisyys:** $\langle x, x \rangle \in P$.
2. **Symmetrisyys:** Jos $\langle x, y \rangle \in P$, niin $\langle y, x \rangle \in P$.
3. **Transitiivisuus:** Jos $\langle x, y \rangle \in P$ ja $\langle y, x \rangle \in P$, niin $\langle x, z \rangle \in P$.

Apulause 3.24. Jos F on filtteri joukossa I, niin $\sim_F$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\prod_{i \in I} A_i$.

Todistus. (Vrt. [3, ss. 87–88]). Osoitetaan määritelmän 3.23 mukaisesti, että relaatio $\sim_F$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. F on filtteri joukossa I, joten $\{i \in I \mid f(i) = f(i)\} = I \in F$. Tällöin $f \sim_F f$, mikä tarkoittaa, että $\sim_F$ on refleksiivinen.

Oletetaan, että $f \sim_F g$. Tällöin relaation $\sim_F$ määritelmän 3.21 mukaisesti $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in F$. Nyt $\{i \in I \mid g(i) = f(i)\} \in F$, joten myös $g \sim_F f$. Tämä tarkoittaa, että $\sim_F$ on symmetrinen.

Oletetaan vielä, että $f \sim_F g$ ja $g \sim_F h$. Tällöin relaation $\sim_F$ määritelmän 3.21 mukaisesti pätee, että

$$X := \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in F \qquad \text{ja} \qquad Y := \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in F.$$

Nyt $X \cap Y \in F$, koska F on filtteri. Lisäksi

$$X \cap Y \subseteq Z = \{i \in I \mid f(i) = h(i)\},$$

joten myös $Z \in F$. Tällöin $f \sim_F h$, mikä tarkoittaa, että $\sim_F$ on transitiivinen.

Näin ollen relaatio $\sim_F$ toteuttaa vaaditut ehdot, joten se on ekvivalenssirelaatio joukossa $\prod_{i \in I} A_i$. □

Apulause 3.25. Relaatio $\sim_F$ on *kongruenssirelaatio* relaation R suhteen. Toisin sanoen, jos $f \sim_F f'$, $g \sim_F g'$ ja $\langle f, g\rangle \in R$, niin $\langle f', g'\rangle \in R$.

Todistus. (Vrt. [3, s. 88]). Oletetaan, että $f \sim_F f'$ ja $g \sim_F g'$. Tällöin määritelmän 3.21 mukaisesti pätee, että

$$X := \{i \in I \mid f(i) = f'(i)\} \in F \qquad \text{ja} \qquad Y := \{i \in I \mid g(i) = g'(i)\} \in F.$$

Oletetaan vielä, että $\langle f, g\rangle \in R$, jolloin määritelmän 3.22 mukaisesti pätee, että

$$Z := \{i \in I \mid \langle f(i), g(i)\rangle \in P_i\} \in F.$$

F on filtteri, joten $X \cap Y \cap Z \in F$. Lisäksi

$$X \cap Y \cap Z \subseteq W := \{i \in I \mid \langle f'(i), g'(i)\rangle \in P_i\} \in F.$$

Tällöin määritelmän 3.22 perusteella voidaan todeta, että $\langle f', g'\rangle \in R$. □

Määritelmä 3.26. (Vrt. [3, s. 89]) Olkoon

$$f/F = \{g \in A \mid f \sim_F g\} = \{g \in A \mid \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in F\}$$

kaikilla $f \in \prod_{i \in I} A_i$ alkion f *ekvivalenssiluokka* relaatiossa $\sim_F$. Kaikkien relaation $\sim_F$ ekvivalenssiluokkien joukkoa voidaan merkitä

$$\prod_{i \in I} A_i/F = \{f/F \mid f \in \prod_{i \in I} A_i\}.$$

Tämän joukon $\prod_{i \in I} A_i/F$ relaatio P_F voidaan määritellä joukon $\prod_{i \in I} A_i$ relaation R (m. 3.22) avulla seuraavasti

$$\langle f/F, g/G\rangle \in P_F, \text{ jos ja vain jos } \langle f, g\rangle \in R.$$

Tämä on apulauseen 3.25 nojalla hyvinmääritelty.

Määritellään nyt redusoitu tulo sekä sen erikoistapaus ultratulo.

Määritelmä 3.27. (Vrt. [3, s. 89]). Olkoon $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ malli $\langle \prod_{i\in I} A_i/F, P_F\rangle$. Nyt $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ on perheen $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ *redusoitu tulo* joukon I filtterin F suhteen.

Jos filtteri F on lisäksi ultrafiltteri, niin $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ on *ultratulo*.

Määritelmä 3.28. (Vrt. [3, s. 89]) Jos $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ kaikilla $i \in I$, niin $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F := \mathfrak{A}^I/F$ on mallin $\mathfrak{A}$ *redusoitu potenssi* joukon I filtterin F suhteen.

Jos filtteri F on lisäksi ultrafiltteri, niin $\mathfrak{A}^I/F$ on mallin $\mathfrak{A}$ *ultrapotenssi*.

3.3 Łoś'n lause

Tässä pykälässä 3.3 todistetaan ultratuloille keskeinen Łoś'n lause 3.29, joka osoittaa, että kaava φ on totta ultratulossa $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$, jos ja vain jos se on totta sen malleissa $\mathfrak{A}_i$ melkein kaikilla $i \in I$.

Merkintä. Tulon $\prod_{i\in I} A_i$ tulkintajonoa $f = \langle f_1, \dots, f_m, \dots\rangle$ merkitään $f \in (\prod_{i\in I} A_i)^\omega$. Vastaavasti tulon $\prod_{i\in I} A_i/F$ tulkintajonoa $f/F = \langle f_1/F, \dots, f_m/F, \dots\rangle$ merkitään $f/F \in (\prod_{i\in I} A_i/F)^\omega$. Joukon A_i tulkintajonoa $\langle f_1(i), \dots f_m(i) \dots\rangle$ merkitään $f(i)$.

Lause 3.29. *(Łoś'n lause). Oletetaan, että F on joukon I ultrafiltteri. Jokaisella kielen L kaavalla φ ja jokaisella jonolla $f/F \in (\prod_{i\in I} A_i/F)^\omega$ pätee, että*

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \varphi, \text{ jos ja vain jos } \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \varphi\} \in F.$$

Todistus. (Vrt. [3, ss. 90–91]). Todistetaan väite induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen. Osoitetaan ensin, että väite pätee, jos φ on atomikaava.

- Oletetaan, että φ on muotoa $v_m \doteq v_n$ oleva atomikaava, missä v_m ja v_n ovat muuttujia. Tällöin

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \varphi &\overset{\text{oletus}}{\iff} \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} v_m \doteq v_n \\
&\iff f_m/F = f_n/F \\
&\overset{\text{M. 3.26}}{\iff} f_m \sim_F f_n \\
&\overset{\text{M. 3.21}}{\iff} \{i \in I \mid f_m(i) = f_n(i)\} \in F \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} v_m = v_n\} \in F \\
&\overset{\text{oletus}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \varphi\} \in F.
\end{aligned}$$

On osoitettu, että väite pätee atomikaavalle $v_m \doteq v_n$.

- Oletetaan, että φ on muotoa $P(v_m, v_n)$ oleva atomikaava, missä v_m ja v_n ovat muuttujia. Tällöin

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \varphi &\overset{\text{oletus}}{\iff} \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} P(v_m, v_n) \\
&\iff \langle f_m/F, f_n/F\rangle \in P_F \\
&\overset{\text{M. 3.26}}{\iff} \langle f_m, f_n\rangle \in R \\
&\overset{\text{M. 3.22}}{\iff} \{i \in I \mid \langle f_m(i), f_n(i)\rangle\} \in F \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} P(v_m, v_n)\} \in F \\
&\overset{\text{oletus}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \varphi\} \in F.
\end{aligned}$$

  On osoitettu, että väite pätee atomikaavalle $P(v_m, v_n)$.

Osoitetaan vielä, että jos väite pätee kaavan φ alikaavoille, niin väite pätee kaavalle φ. Riittää käsitellä kaavoja $\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \psi \wedge \theta$ ja $\varphi = (\exists v_m)\psi$.

- Oletetaan, että φ on muotoa $\neg\psi$ oleva kaava ja tehdään induktio-oletus (IO), että väite pätee kaavalle ψ.

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \varphi &\overset{\text{oletus}}{\iff} \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \neg\psi \\
&\overset{\text{M. 2.29}}{\iff} \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \nvDash_{f/F} \psi \\
&\overset{\text{IO}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \psi\} \notin F \\
&\underset{\text{filtteri}}{\overset{\text{F ultra-}}{\iff}} I \setminus \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \psi\} \in F \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \neg\psi\} \in F \\
&\overset{\text{oletus}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \varphi\} \in F.
\end{aligned}$$

  On osoitettu, että väite pätee kaavalle $\neg\phi$.

- Oletetaan, että φ on muotoa $\psi \wedge \theta$ oleva kaava ja tehdään induktio-oletus (IO), että väite pätee kaavoille ψ ja θ.

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \varphi &\overset{\text{oletus}}{\iff} \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \psi \wedge \theta \\
&\overset{\text{M. 2.29}}{\iff} \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \psi \text{ ja } \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} \theta \\
&\overset{\text{IO}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \psi\} \in F \text{ ja } \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \theta\} \in F \\
&\underset{\text{filtteri}}{\overset{\text{F}}{\iff}} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \psi\} \cap \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \theta\} \in F \\
&\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \psi \text{ ja } \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \theta\} \in F \\
&\overset{\text{M. 2.29}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \psi \wedge \theta\} \in F \\
&\overset{\text{oletus}}{\iff} \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} \varphi\} \in F.
\end{aligned}$$

On osoitettu, että väite pätee kaavalle $\psi \wedge \theta$.

- Oletetaan, että φ on muotoa $(\exists v_m)\psi$ oleva kaava, missä v_m on muuttuja, ja tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle ψ. Oletetaan ensin, että $\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} (\exists v_m)\psi$. Tällöin on olemassa jokin alkio $a \in \prod_{i\in I} A_i$ siten, että $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f(n/a)/F} \psi$. Induktio-oletuksen nojalla $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(n/a)(i)} \phi\} \in F$. Nyt $f(n/a)(i) = f(i)(n/a_i)$, joten

  $$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(n/a)(i)} \psi\} \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi\}.$$

  Koska F on filtteri, niin tästä seuraa, että $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi\} \in F$.

  Oletetaan sitten, että $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi\} \in F$. Jos $i \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi\}$, niin $\mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi$. Tällöin on olemassa jokin alkio $a_i \in A_i$ siten, että $\mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)(n/a_i)} \psi$. Valinta-aksiooman (ks. [13, s. 275]) nojalla on olemassa jokin alkio $b \in \prod_{i\in I} A_i$ siten, että $b_i = a_i$ kaikilla $i \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi\}$ ja muutoin joukon A_i mielivaltainen alkio. Tällöin

  $$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(i)} (\exists v_m)\psi\} \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(n/b)(i)} \psi\},$$

  joten koska F on filtteri, niin tästä seuraa, että $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash_{f(n/b)(i)} \psi\} \in F$. Induktio-oletuksen nojalla $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f(n/b)/F} \psi$, joten $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F \vDash_{f/F} (\exists v_m)\psi$. On osoitettu, että väite pätee kaavalle $(\exists v_m)\psi$.

On siis osoitettu, että väite pätee kaikille kaavoille φ. $\square$

Määritelmä 3.30. (Vrt. [3, s. 92]). Olkoon $\mathfrak{A}$ malli ja F joukon I ultrafiltteri. Oletetaan, että $a \in A$. Määritellään $a^* \in A^I$ asettamalla $a^*(i) = a$ kaikilla $i \in I$. Kuvaus $d : A \to A^I/F$ määritellään siten, että $d(a) = a^*/F$. Sitä kutsutaan mallin $\mathfrak{A}$ *kanoniseksi upotukseksi* mallille $\mathfrak{A}^I/F$.

Seuraus 3.31. *(Vrt. [3, s. 92]). Kanoninen upotus on mallin $\mathfrak{A}$ elementaarinen upotus mallille $\mathfrak{A}^I/F$, ja täten $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^I/F$.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 92]). Olkoon $\varphi(v_0, \ldots, v_m)$ jokin kielen L kaava ja olkoot $x_0, \ldots, x_m$ joukon A alkioita. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^I/F \vDash \varphi[x_0^*/F, \ldots, x_m^*/F] &\overset{\text{L. 3.29}}{\Longleftrightarrow} \{i \in I \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0^*(i), \ldots, x_m^*(i)]\} \in F \\ &\overset{\text{M. 3.30}}{\Longleftrightarrow} \{i \in I \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0, \ldots, x_m]\} \in F \\ &\underset{\text{filtteri}}{\overset{\text{F ultra-}}{\Longleftrightarrow}} \mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0, \ldots, x_m].\end{aligned}$$

On osoitettu, että kuvaus d on elementaarinen upotus. $\square$

3.4 Kompaktisuuslause

Tässä pykälässä 3.4 todistetaan ultratulojen ja Łoś'n lauseen sovellus, kompaktisuuslause, joka osoittaa, että lausejoukolla Σ on malli, jos jokaisella sen äärellisellä osajoukolla on malli.

Lause 3.32. *(Kompaktisuuslause). Olkoon Σ joukko kielen L lauseita. Jos jokaisella äärellisellä joukon $\sum$ osajoukolla on malli, niin joukolla $\sum$ on malli.*

Todistus. (Vrt. [4, ss. 219–220] ja [3, s. 102]). Olkoon $I = \mathscr{P}_\omega(\Sigma)$ joukon Σ äärellisten osajoukkojen joukko. Oletetaan, että jokaiselle $i \in I$ olemassa malli $\mathfrak{A}$ siten, että $\mathfrak{A}_i \vDash i$. Osoitetaan, että on olemassa joukon I ultrafiltteri F siten, että ultratulo $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F$ on joukon Σ malli.

Olkoon

$$\hat{\sigma} = \{i \in I \mid \sigma \in i\}$$

kaikilla $\sigma \in \Sigma$. Joukolla $\{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$ on äärellinen leikkausominaisuus, sillä $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in \bigcap_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j$. Seurauksen 3.20 nojalla joukko $\{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$ voidaan laajentaa joukon I sellaiseksi ultrafiltteriksi F, joka sisältää alkuperäisen joukon $\{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$.

Jos $i \in \hat{\sigma}$, niin $\sigma \in i$, mistä oletuksen nojalla seuraa, että $\mathfrak{A}_i \vDash \sigma$. Tällöin

$$\hat{\sigma} \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \sigma\} \text{ ja } \hat{\sigma} \in F$$

kaikilla $\sigma \in \Sigma$. Koska F on filtteri, niin tästä seuraa, että $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \sigma\} \in F$. Łoś'n lauseen 3.29 nojalla $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \vDash \sigma$ kaikilla $\sigma \in \Sigma$. Tällöin $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \vDash \Sigma$, ja väite on todistettu.

□

4 Avustavia tarkasteluja

4.1 Kardinaaliluvut

Tässä luvussa 4 käydään läpi luvussa 5 esiintyvissä lauseissa olevien käsitteiden määritelmiä sekä niihin liittyviä lauseita. Pykälässä 4.1 määritellään *kardinaaliluvut*. Jokaiseen joukkoon voidaan liittää yksikäsitteinen kardinaaliluku siten, että jos kahdessa joukossa on sama määrä alkioita, niin niihin liittyy sama kardinaaliluku. Kardinaaliluvut määritellään *ordinaalilukuina*, jotka puolestaan liittyvät *hyvinjärjestetyn joukon* käsitteeseen.

Palautetaan mieleen, että luonnollisten lukujen joukkoa $\{0, 1, 2, \dots\}$ merkitään symbolilla ω. Määritellään seuraavaksi joukko-opillisisesti, mitä luonnolliset luvut ovat.

Määritelmä 4.1. Luonnollinen luku $n \in \omega$ on joukko $\{0, \dots, n-1\}$, jossa on täsmälleen n alkiota.

Tämä määritelmä tarkoittaa sitä, että luonnolliset luvut voidaan määritellä rekursiivisesti asettamalla:

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset, \\
1 &= \{0\} = \{\emptyset\}, \\
2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\vdots \\
n + 1 &= \{0, \dots, n\} = \{0, \dots, n-1\} \cup \{n\} = n \cup \{n\}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.2. Luonnollinen luku 4 on muodostettu seuraavasti

$$\begin{aligned}
4 &= 3 \cup \{3\} = (2 \cup \{2\}) \cup (\{2 \cup \{2\}\}) \\
&= (1 \cup \{1\} \cup \{1 \cup \{1\}\}) \cup (\{1 \cup \{1\} \cup \{1 \cup \{1\}\}\}) \\
&= (\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}\}) \cup (\{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}\}\}) \\
&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 4.3. (Vrt. [8, s. 21]). Lineaarisesti järjestetty joukko $\langle X, P\rangle$ on *hyvinjärjestetty joukko*, jos jokaisessa sen epätyhjässä osajoukossa on pienin alkio.

Toisin sanoen jokaisella epätyhjällä joukolla $Y \subseteq X$ on olemassa alkio $x \in Y$ siten, että kaikilla alkioilla $y \in Y$ pätee, että $\langle x, y\rangle \in P$.

Esimerkki 4.4. Olkoon $X = \langle\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}, \leq\rangle$ äärellinen lineaarisesti järjestetty joukko. Nyt $v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_{n-1} \leq v_n$, joten joukko X on hyvinjärjestetty, koska nähdään, että jokaisella sen epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio.

Esimerkki 4.5. Osoitetaan, että kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ei ole hyvinjärjestetty. Tehdään vastaoletus, että $\mathbb{Z}$ on hyvinjärjestetty. Tällöin määritelmän 4.3 mukaisesti jokaisella sen epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio.

Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{Z}$. Oletetaan, että $v \in \mathbb{Z}$ on sen pienin alkio. Nyt kuitenkin $v - 1$ on kokonaisluku, jolle pätee, että $v - 1 < v$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että alkio v olisi pienin kokonaislukujen joukossa. On siis osoitettu, että $\mathbb{Z}$ ei ole hyvinjärjestetty joukko.

Määritelmä 4.6. (Vrt. [8, s. 7]). Olkoot X ja Y joukkoja. Joukot X ja Y ovat *yhtämahtavia*, $X \approx Y$, mikäli on olemassa bijektiivinen kuvaus $f : X \to Y$.

Määritelmä 4.7. (Vrt. [8, s. 7]). Olkoot X ja Y joukkoja. Joukko X on *korkeintaan yhtämahtava* kuin joukko Y, $X \preccurlyeq Y$, mikäli on olemassa injektiivinen kuvaus $f : X \to Y$.

Määritelmä 4.8. (Vrt. [8, s. 6]). Olkoon X joukko. Joukko X on *äärellinen*, jos on olemassa $u \in \omega$, jolle pätee, että $X \approx u$. Muussa tapauksessa X on *ääretön joukko*.

Määritelmä 4.9. (Vrt. [8, s. 40]). Olkoon X joukko. Joukko X on *numeroituva*, mikäli pätee, että $X \preccurlyeq \omega$. Toisin sanoen on olemassa injektiivinen kuvaus $f : X \to \omega$.

Muussa tapauksessa kyseessä on *ylinumeroituva* joukko.

Määritelmä 4.10. (Vrt. [1, s. 2]). Olkoot X, Y, Z joukkoja ja $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ kuvauksia. Kuvausten f ja g *yhdistetty kuvaus* on kuvaus $g \circ f : X \to Z$, joka määritellään asettamalla

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)).$$

kaikilla $u \in X$.

Määritelmä 4.11. (Vrt. [1, s. 3]). Olkoot X ja Y joukkoja ja olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Kuvausta $g : Y \to X$ kutsutaan kuvauksen f *käänteiskuvaukseksi*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

$$g(f(u)) = u \text{ kaikilla } u \in X \text{ ja}$$

$$f(g(v)) = v \text{ kaikilla } v \in Y.$$

Kuvauksen f käänteiskuvausta merkitään $g = f^{-1}$.

Apulause 4.12. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Kuvauksella f on käänteiskuvaus, jos ja vain jos kuvaus f on bijektio.

Todistus. (Vrt. [1, s. 3]) Oletetaan esin, että kuvauksella $f : X \to Y$ on käänteiskuvaus $f^{-1} : Y \to X$.

Osoitetaan ensin, että kuvaus f on injektio. Olkoot $v_1, v_2 \in X$ siten, että $f(v_1) = f(v_2)$. Injektion määritelmän mukaisesti on osoitettava, että $v_1 = v_2$. Tällöin

$$v_1 = f^{-1}(f(v_1)) = f^{-1}(f(v_2)) = v_2,$$

joten on osoitettu, että $v_1 = v_2$ ja täten f on injektio.

Osoitetaan vielä, että f on surjektio. Oletetaan, että $w \in Y$ ja merkitään, että $v = f^{-1}(w)$. Tällöin

$$f(v) = f(f^{-1}(w)) = w,$$

joten f on surjektio. Nyt on osoitettu, että f on sekä injektio että surjektio, joten määritelmän 2.15 mukaan se on myös bijektio.

Oletetaan sitten, että $f : X \to Y$ on bijektiivinen kuvaus. Osoitetaan, että kuvauksella f on käänteiskuvaus $g : Y \to X$. Olkoon $w \in Y$. Kuvaus f on surjektiivinen, joten määritelmän 2.15 mukaisesti on olemassa $v \in X$ siten, että $f(v) = w$. Kuvaus f on myös injektiivinen, joten v on yksikäsitteinen, ja voidaan määritellä kuvaus $g : Y \to X$ asettamalla $g(w) = v$.

Osoitetaan vielä, että kuvaus g on kuvauksen f käänteiskuvaus. Olkoon $v \in X$ ja $f(v) = w$, joten $g(w) = v$. Nähdään, että $g(f(v)) = g(w) = v$. Olkoon $w \in Y$. Vastaavasti nähdään, että $f(g(w)) = f(v) = w$. Käänteiskuvauksen määritelmän 4.11 mukaisesti kuvaukset g ja f ovat käänteiskuvauksia, ja väite on todistettu. □

Esimerkki 4.13. Tarkastetaan, ovatko kuvaukset $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(u) = \frac{4u-1}{3}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(v) = \frac{3v+1}{4}$ käänteiskuvauksia. Nähdään, että

$$f(g(v)) = f(\frac{3v+1}{4}) = \frac{4\frac{3v+1}{4} - 1}{3} = \frac{3v}{3} = v \text{ kaikilla } v \in \mathbb{R}$$

ja

$$g(f(u)) = g(\frac{4u-1}{3}) = \frac{3\frac{4u-1}{3} + 1}{4} = \frac{4u}{4} = u \text{ kaikilla } u \in \mathbb{R}.$$

Määritelmän 4.11 mukaisesti kuvaukset f ja g ovat käänteiskuvauksia.

Apulause 4.14. Oletetaan, että kuvaukset $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ ovat bijektioita. Osoitetaan, että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on bijektio.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $g \circ f$ on injektio. Oletetaan, että $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$. Kyseessä on yhdistetty kuvaus, joten määritelmän 4.10 mukaisesti $g(f(u)) = g(f(v))$. Tästä saadaan, että

$$\begin{aligned} g(f(u)) = g(f(v)) &\underset{\text{injektio}}{\overset{\text{g}}{\Longrightarrow}} f(u) = f(v) \\ &\underset{\text{injektio}}{\overset{\text{f}}{\Longrightarrow}} u = v. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että h on surjektio. Nyt

$$g(f(X)) \underset{\text{surjektio}}{\overset{\text{f}}{=}} g(Y) \underset{\text{surjektio}}{\overset{\text{g}}{=}} Z.$$

On osoitettu, että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on injektio ja surjektio, joten määritelmän 2.15 mukaisesti $g \circ f$ on bijektio.

□

Lause 4.15. *(Ks. [8, s. 7]) Yhtämahtavuudelle pätee seuraavat ehdot kaikilla joukoilla X, Y ja Z:*

1. ***Refleksiivisyys**: $X \approx X$.*
2. ***Symmetrisyys**: Jos $X \approx Y$, niin $Y \approx X$.*
3. ***Transitiivisuus**: Jos $X \approx Y$ ja $Y \approx Z$, niin $X \approx Z$.*

Todistus. Olkoot X, Y ja Z joukkoja.

Identiteettikuvauksella $id_X : X \to X$ on käänteiskuvaus $id_X^{-1} : X \to X$, joten id_X on bijektio. Määritelmän 4.6 nojalla $X \approx X$. Täten yhtämahtavuus on refleksiivinen.

Oletetaan sitten, että $X \approx Y$. Tällöin on olemassa bijektio $f : X \to Y$. Bijektion käänteiskuvaus on bijektio, joten myös $f^{-1} : Y \to X$ on bijektio. Tällöin määritelmän 4.6 nojalla $Y \approx X$, joten yhtämahtavuus on symmetrinen.

Oletetaan vielä, että $X \approx Y$ ja $Y \approx Z$. Tällöin on olemassa bijektiot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$. Nyt yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on apulauseen 4.14 nojalla myös bijektio. Tällöin määritelmän 4.6 nojalla $X \approx Z$, joten yhtämahtavuus on transitiivinen.

□

Esimerkki 4.16. Olkoon $X = \{-2, 4, 10, 187\}$ ja $Y = \{-200, -3, 0, 128\}$. Nyt joukoissa X ja Y on yhtä monta alkioita, mutta nämä alkiot eivät ole keskenään samoja. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, jolla $f(-2) = -200$, $f(4) = -3$, $f(10) = 0$ ja $f(187) = 128$. Tämä on bijektio, joten joukot X ja Y ovat yhtämahtavia.

Esimerkki 4.17. On osoitettava, että kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on numeroituva joukko.

Todistus. Määritelmän 4.9 mukaisesti joukko $\mathbb{Z}$ on numeroituva, mikäli on olemassa injektiivinen kuvaus $f : \mathbb{Z} \to \omega$. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{Z} \to \omega$ siten, että jokainen alkio $u \in \mathbb{Z}$ vastaa joukon ω eri alkioita seuraavasti:

$$f(u) = 2u, \text{ kun } u \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad f(u) = -2u - 1, \text{ kun } u < 0.$$

Osoitetaan, että kuvaus f on injektio. Oletetaan, että $f(u) = f(v)$, missä $u, v \in \mathbb{Z}$. On osoitettava, että $u = v$. Käsitellään neljä tapausta.

1. Jos $u, v \geq 0$, niin $f(u) = 2u = 2v = f(v) \implies u = v$.
2. Jos $u, v < 0$, niin $f(u) = -2u - 1 = -2v - 1 = f(v) \implies -2u = -2v \implies u = v$.
3. Jos $u \geq 0$ ja $v < 0$, niin $f(u) = 2u$ on parillinen ja $f(v) = -2v - 1$ on pariton. Tällöin on oltava, että $f(u) \neq f(v)$.
4. Jos $u < 0$ ja $v \geq 0$, niin $f(u) = -2u - 1$ on pariton ja $f(v) = 2v$ on parillinen. Tällöin on oltava, että $f(u) \neq f(v)$.

Tapaukset 3 ja 4 eivät ole vaadittujen ehtojen mukaisia, joten tapauksien 1 ja 2 nojalla $u = v$. Funktio f on siis injektio. Näin ollen määritelmän 4.9 mukaisesti $\mathbb{Z}$ on numeroituva joukko.

□

Määritelmä 4.18. (Vrt. [14, s. 6]). Olkoon $X = \langle X, P \rangle$ joukko. Joukko X on *ordinaaliluku*, jos se on hyvinjärjestetty joukko ja kaikilla $x, y \in X$:

$$\langle x, y \rangle \in P \iff x \in y.$$

Esimerkki 4.19. Olkoot $u, v \in \omega$. Oletetaan ensin, että $u < v$. Luonnollisten lukujen määritelmän 4.1 nojalla v on kaikkien sitä pienempien alkioiden joukko, joten saadaan, että $u \in v = \{0, \ldots, u, \ldots, v - 1\}$.

Oletetaan sitten, että $u \in v$. Määritelmän 4.1 nojalla luonnollinen luku on kaikkien sitä pienempien alkioiden joukko, joten on oltava, että $u < v$. Määritelmän 4.18 mukaisesti luonnollisten lukujen joukko ω on ordinaali. Tapauksessa, jossa u ja v ovat jonkin luonnollisen luvun t alkioita, nähdään samankaltaisella päättelyllä, että t on ordinaali. Vastaavasti kaikki luonnolliset luvut ovat ordinaaleja.

Esitellään vielä kardinaaliluvut.

Määritelmä 4.20. (Vrt. [8, s. 25]). Olkoon X ordinaaliluku. Ordinaaliluku X on *kardinaaliluku*, jos jokaiselle ordinaaliluvulle Y, joka toteuttaa ehdot $Y \subseteq X$ ja $Y \approx X$ pätee, että $Y = X$.

Jatkossa kardinaalilukuja merkitään symboleilla κ ja λ.

Apulause 4.21. Olkoon X joukko. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kardinaaliluku κ siten, että $X \approx \kappa$.

Todistus. (Ks. [8, ss. 26–27]). Todistus on monivaiheinen, ja siinä tarvitaan valinta-aksioomaa. Todistus sivuutetaan. □

Määritelmä 4.22. (Vrt. [8, s. 27]). Olkoon X joukko. Apulauseen 4.21 mukaisesti on olemassa yksikäsitteinen kardinaaliluku κ, jolle pätee, että $X \approx \kappa$. Kardinaaliluku κ on joukon X *mahtavuus* eli *kardinaliteetti*, jota merkitään symboleilla $|X|$ tai $card(X)$. Toisin sanoen joukon kardinaaliluku ilmaisee joukon alkioiden lukumäärää.

Huomataan myös, että jos $X \approx u$ ja $u \in \omega$, niin $card(X) = u$. Toisin sanoen äärellisten joukkojen mahtavuus on luonnollinen luku.

Luonnollisten lukujen joukko ω on ääretön, joten sen mahtavuutta ei voi ilmaista millään äärellisellä luvulla $n \in \omega$. Määritelmän mukaisesti $\omega \approx card(\omega)$. Kardinaaliluvut ovat ordinaalilukuja, ja joukko ω on pienin ääretön joukko, joten $card(\omega) = \omega$. Jatkossa luonnollisten lukujen joukon mahtavuudelle $card(\omega)$ käytetään myös merkintää $\aleph_0$.

Merkintä. (Vrt. [3, s. 5]). Olkoon X joukko, jonka mahtavuus on κ ja Y joukko, jonka mahtavuus on λ. Tällöin X^Y on kaikkien niiden kuvausten joukko, joiden määrittelyjoukko on Y ja arvojoukko on X. Merkinnällä κ^λ tarkoitetaan joukon X^Y mahtavuutta. Merkinnällä 2^κ tarkoitetaan sellaisen joukon, jonka mahtavuus on κ, kaikkien osajoukkojen joukon mahtavuutta.

Esimerkki 4.23.

- Tarkastellaan joukkoa $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tästä nähdään, että kyseisen joukon eri alkoiden lukumäärä on 5, joten $card(X) = 5$.

- Tarkastellaan joukkoa $X = \{1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$. Nähdään, että joukkosulkeiden sisällä on 8 symbolia. Huomataan kuitenkin, että symboli 4 toistuu sulkeiden sisällä kahdesti ja symboli 5 kolmesti. Tämä tarkoittaa, että joukossa X on ainoastaan 5 eri alkoita, joten se on identtinen joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kanssa, ja täten $card(X) = 5$.

- Tarkastellaan joukkoa $X = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. Tästä nähdään, että joukossa X on ääretön määrä alkioita. Olkoon $f : X \to \omega$ kuvaus, jolla $f(n) = \frac{n}{2}$. Kuvaus f on injektiivinen, joten määritelmän 4.9 nojalla X on numeroituva joukko. Tällöin joukon X mahtavuus on korkeintaan luonnollisten lukujen joukon mahtavuus, joten $card(X) = \aleph_0$.

Esimerkki 4.24. Osoitetaan, että positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ ja parillisten positiivisten kokonaislukujen joukko $2\mathbb{Z}_+ = \{2, 4, 6, \dots\}$ ovat yhtämahtavia.

Todistus. Määritelmän 4.6 mukaisesti joukot $\mathbb{Z}_+$ ja $2\mathbb{Z}_+$ ovat yhtämahtavia, jos on olemassa bijektiivinen kuvaus $f : \mathbb{Z}_+ \to 2\mathbb{Z}_+$. Määritellään ensin kuvaus $f : \mathbb{Z}_+ \to 2\mathbb{Z}_+$ seuraavasti:

$$f(u) = 2u.$$

Määritellään käänteiskuvaus $f^{-1} : 2\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ seuraavasti:

$$f^{-1}(v) = \frac{v}{2} \in \mathbb{Z}_+.$$

Osoitetaan vielä, että kuvaukset $f : \mathbb{Z}_+ \to 2\mathbb{Z}_+$ ja $f^{-1} : 2\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ ovat käänteiskuvauksia keskenään. Nyt

$$f^{-1}(f(u)) = f^{-1}(2u) = \frac{2u}{2} = x \text{ kaikilla } u \in \mathbb{Z}_+$$

ja

$$f(f^{-1}(v)) = f(\frac{v}{2}) = \frac{2v}{2} = v \text{ kaikilla } v \in 2\mathbb{Z}_+.$$

Nyt on osoitettu, että kuvauksilla $f : \mathbb{Z}_+ \to 2\mathbb{Z}_+$ ja $f^{-1} : 2\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ on käänteiskuvaukset, joten ne ovat apulauseen 4.12 mukaisesti bijektioita. Täten joukoilla $\mathbb{Z}_+$ ja $2\mathbb{Z}_+$ on sama kardinaliteetti, ja väite on todistettu. □

4.2 Pääultrafiltteri

Pykälässä 3.1 todettiin, että muotoa $F = \{Y \subseteq I \mid X \subseteq Y\}$ olevat filtterit ovat pääfilttereitä. Ultratulojen konstruoinnin avulla saadaan tuotettua jotain uutta vain, jos ultrafiltteri ei ole pääfiltteri. Näitä ultrafilttereitä tarkastellaan tässä pykälässä 4.2. Todistetaan seuraavaksi muutamia lauseita koskien ultrafilttereitä, jotka eivät ole pääfilttereitä.

Määritelmä 4.25. (Vrt. [2, s. 108]). *Pääultrafiltteri* on ultrafiltteri, joka on pääfiltteri. Jos F on filtteri joukossa I ja $\{u\} \in F$ jollakin $u \in I$, niin F on joukon $\{u\}$ virittämä pääultrafiltteri joukossa I.

Todistetaan ensin apulauseet, joiden avulla osoitetaan, että jos joukon I mahtavuus on κ, niin joukossa I on täsmälleen κ kappaletta eri pääultrafilttereitä, ja että jos ultrafiltteri sisältää Fréchet-filtterin, niin kyseessä ei ole pääfiltteri.

Apulause 4.26. Oletetaan, että F on pääfiltteri. Pääfiltteri F on ultrafiltteri, jos ja vain jos joukko, joka virittää filtterin F sisältää ainoastaan yhden alkion.

Todistus. (Vrt. [3, s. 107]). Oletetaan ensin, että $F = \{Y \subseteq I \mid X_0 \subseteq Y\}$ on pääultrafiltteri. Tehdään vastaoletus, että joukon F virittävään joukkoon sisältyy useampi kuin yksi alkio. Olkoon $X_0 = \bigcap\{X \mid X \in F\}$ joukon F virittävä joukko. Tällöin on olemassa alkiot u ja v joille pätee, että $u, v \in X_0$ ja $u \neq v$.

F on ultrafiltteri, joten on oltava joko $\{u\} \in F$ tai $I \backslash \{u\} \in F$. Oletetaan ensin, että $\{u\} \in F$. Tällöin $I \backslash \{u\} \cap X_0 = \{v\} \notin F$, mistä seuraa, että $v \notin X_0$, sillä muutoin $X_0 \nsubseteq Y$. Tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten on oltava, että $I \backslash \{u\} \in F$ eli $I \backslash \{u\} \cap X_0 = \{v\} \in F$. Tällöin $\{u\} \notin F$, mistä seuraa, että $u \notin X_0$, sillä muutoin $X_0 \nsubseteq Y$. Myös tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten joukko X_0 sisältää ainoastaan yhden alkion.

Oletetaan sitten, että $u \in I$ ja $F = \{X \subseteq I \mid u \in X\}$. Jokaisella $X \subseteq I$ pätee, että joko $u \in X$ tai $u \in I \backslash X$. Tällöin F on ultrafiltteri, ja väite on todistettu.

□

Apulause 4.27. Oletetaan, että F on joukon I ultrafiltteri. Ultrafiltteri F ei ole pääultrafiltteri, jos ja vain jos se sisältää Fréchet-filtterin F^*.

Todistus. (Vrt. [2, s. 108]). Oletetaan, että F on ultrafiltteri, joka ei ole pääultrafiltteri joukossa I ja $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ on joukon I äärellinen osajoukko.

Osoitetaan, että $\{u_1, \ldots, u_n\} \notin F$. Tehdään vastaoletus, että $\{u_1, \ldots, u_n\} \in F$. Ultrafiltteri F ei ole pääultrafiltteri, joten $\{u_n\} \notin F$. Tällöin ultrafiltterin määritelmän 3.4 mukaisesti $I \backslash \{u_n\} \in F$, joten $I \backslash \{u_n\} \cap \{u_1, \ldots, u_n\} = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\} \in F$. Vastaavasti $\{u_{n-1}\} \notin F$, joten $I \backslash \{u_{n-1}\} \cap \{u_1, \ldots, u_{n-1}\} = \{u_1, \ldots, u_{n-2}\} \notin F$. Tällöin

$I \backslash \{u_{n-1}\} \in F$. Jatketaan vastaavasti, kunnes tullaan tilanteeseen, että $\{u_2\} \notin F$, joten $I \backslash \{u_2\} \cap \{u_1, u_2\} = \{u_1\} \in F$. Tällöin F on pääultrafiltteri, mikä on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa. On siis osoitettu, että $\{u_1, \ldots, u_n\} \notin F$. Tällöin ultrafiltterin määritelmän 3.4 mukaisesti $I \backslash \{u_1, \ldots, u_n\} \in F$. Koska $F^* = I \backslash \{u_1, \ldots, u_n\}$, nähdään, että $F^* \subseteq F$.

Oletetaan sitten, että $F^* \subseteq F$. Tällöin $I \backslash \{u\} \in F^*$, joten $\{u\} \notin F$ kaikilla $x \in I$. Määritelmän 4.25 mukaisesti F ei ole pääultrafiltteri. □

Joukon I, jonka mahtavuus on κ, potenssijoukolla $\mathscr{P}(I)$, jonka mahtavuus on 2^κ, on 2^{2^κ} osajoukkoa, joten joukossa I on korkeintaan 2^{2^κ} ultrafiltteriä, jotka eivät ole pääfilttereitä. Lauseen 4.29 todistuksessa osoitetaan, että ultrafilttereitä, jotka eivät ole pääfilttereitä, on täsmälleen 2^{2^κ}.

Apulause 4.28. Jos I on ääretön joukko, niin kaikkien joukon I äärellisten osajoukkojen joukolla $\mathscr{P}_\omega(I)$ on sama mahtavuus kuin joukolla I.

Todistus. (Ks. [7, s. 143]). Todistus sivuutetaan. □

Lause 4.29. *Jos I on ääretön joukko, jonka mahtavuus on κ, joukossa I on 2^{2^κ} ultrafiltteriä, jotka eivät ole pääultrafilttereitä.*

Todistus. (Vrt. [3, ss. 108–111]). Olkoon $\mathscr{P}_\omega(I)$ kaikkien joukon I äärellisten osajoukkojen joukko. Joukko I on ääretön joukko, jonka mahtavuus on κ, joten joukon $\mathscr{P}(I)$ mahtavuus on 2^κ ja apulauseen 4.28 perusteella joukkojen $\mathscr{P}_\omega(I)$ ja $\mathscr{P}_\omega(\mathscr{P}_\omega(I))$ mahtavuus on κ. Itse asiassa osoitetaan, että tässä joukossa $\mathscr{P}_\omega(\mathscr{P}_\omega(I))$ on 2^{2^κ} ultrafiltteriä. Todistuksen lopussa osoitetaan, miten tulos voidaan yleistää mihin tahansa joukkoon, jonka mahtavuus on κ. Jaetaan todistus osiin.

1. Joukko I on ääretön, joten on olemassa erilliset joukot A ja B, joiden mahtavuus on κ, ja joille pätee, että $A \cup B = I$. Olkoon $f : A \to B$ mikä tahansa injektiivinen kuvaus. Jos $X \subseteq A$, niin olkoon

$$X^+ = X \cup (B \backslash \{f(u) \mid u \in X\}),$$

jolloin X^+ on yhdiste joukosta X ja joukon B niiden alkioiden joukosta, jotka eivät kuulu joukon X arvojoukkoon kuvauksessa f.

Oletetaan, että $X, Y \subseteq A$ ja $X \neq Y$. Tällöin joko $X \backslash Y \neq \emptyset$ tai $Y \backslash X \neq \emptyset$. Jos $u \in X \backslash Y$, niin $u \in X$. Tällöin $u \in X^+$, sillä $X^+ = X \cup (B \backslash \{f(u) \mid u \in X\})$. Toisaalta $u \notin Y$, joten $Y^+ = Y \cup (B \backslash \{f(u) \mid u \notin Y\}) = Y \cup (\{f(u) \mid u \in Y\})$.

Tällöin $f(u) \in Y^+$ ja A ja B ovat erillisiä joukkoja, joten on oltava, että $u \notin Y^+$. Tästä seuraa, että $x \in X^+ \backslash Y^+$. Vastaavasti jos $u \in Y \backslash X$, niin $u \notin X$. Tällöin $f(u) \in X^+$, sillä $X^+ = X \cup (B \backslash \{f(u) \mid u \notin X\}) = X \cup (\{f(u) \mid u \in X\})$. Toisaalta $u \in Y$, joten $u \in Y^+$, sillä $Y^+ = Y \cup (B \backslash \{f(u) \mid u \in Y\})$. Tällöin on oltava, että $f(u) \notin Y^+$, sillä A ja B ovat erillisiä joukkoja. Tästä seuraa, että $f(u) \in X^+ \backslash Y^+$.

Kummassakin tapauksessa $X^+ \nsubseteq Y^+$. On siis osoitettu, että jos $X, Y \subseteq A$ ja $X \neq Y$, niin $X^+ \nsubseteq Y^+$.

2. Olkoon $\mathbf{I} = \mathscr{P}_\omega(I)$ ja

$$\mathscr{A} = \{\mathbf{I} \backslash \mathscr{P}_\omega(X^+) \mid X \subseteq A\}.$$

Joukon $\mathbf{I}$ mahtavuus on siis κ. Joukon A mahtavuus on κ, joten joukolla A on 2^κ eri osajoukkoa X. Kohdan 1 nojalla pätee, että jos $X \neq Y$, niin $X^+ \neq Y^+$, joten myös eri joukkoja X^+ on 2^κ kappaletta. Myös $\mathscr{P}_\omega(X^+) \neq \mathscr{P}_\omega(Y^+)$, joten joukkoja $\mathscr{P}_\omega(X^+)$ on 2^κ kappaletta ja joukon $\mathscr{A}$ mahtavuus on vähintään 2^κ. Potenssijoukon $\mathscr{P}(\mathbf{I})$ mahtavuus on 2^κ ja $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\mathbf{I})$, joten joukon $\mathscr{A}$ mahtavuus on 2^κ.

Oletetaan, että $\mathbf{X} = \mathbf{I} \backslash \mathscr{P}_\omega(X^+) \in \mathscr{A}$ ja $\mathscr{Y}$ on äärellinen joukko, jolle pätee, että $\mathbf{X} \notin \mathscr{Y} \subseteq \mathscr{A}$. Tällöin $\mathscr{Y}$ on muotoa

$$\mathscr{Y} = \{\mathbf{I} \backslash \mathscr{P}_\omega(Y_i^+) \mid i \leq n\}.$$

Nyt $X \neq Y_i$, kun $i \leq n$ ja täten kohdan 1 nojalla $X^+ \nsubseteq Y_i^+$.

Olkoon $g(i) \in X^+ \backslash Y_i^+$ ja $U = \{g(i) \mid i \leq n\}$. Joukko $U \subseteq X^+$ on äärellinen, joten $U \notin \mathbf{X}$. Tällöin pätee, että $U \nsubseteq Y_i^+$, kun $i \leq n$, joten $U \in \mathbf{I} \backslash \mathscr{P}_\omega(Y_i^+)$. Tästä seuraa, että $U \in \bigcap \mathscr{Y}$. On siis osoitettu, että jos $\mathbf{X} \in \mathscr{A}$, $\mathscr{Y} \in \mathscr{P}_\omega(\mathscr{A})$ ja $\mathbf{X} \notin \mathscr{Y}$, niin $\bigcap \mathscr{Y} \nsubseteq \mathbf{X}$.

3. Olkoon $\mathscr{J} = \mathscr{P}_\omega(\mathbf{I})$ ja

$$\mathfrak{B} = \{\mathscr{P}_\omega(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathscr{A}\}.$$

Joukon $\mathscr{J}$ mahtavuus on siis κ. Kohdan 2 perusteella nähdään, että joukon $\mathfrak{B}$ mahtavuus on vähintään 2^κ. Potenssijoukon $\mathscr{P}(\mathscr{J})$ mahtavuus on 2^κ ja $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{J})$, joten joukon $\mathfrak{B}$ mahtavuus on 2^κ.

Oletetaan, että

$$\mathfrak{X} = \{\mathscr{P}_\omega(\mathbf{X}_i) \mid i \leq m\} \qquad \text{ja} \qquad \mathfrak{Y} = \{\mathscr{P}_\omega(\mathbf{Y}_j) \mid j \leq n\}$$

ovat erillisiä ja äärellisiä joukon $\mathfrak{B}$ osajoukkoja. Tällöin jokaisella $i \leq m$ pätee, että $\mathbf{X}_i \notin \{\mathbf{Y}_j \mid j \leq n\}$, ja siksi kohdan 2 nojalla pätee, että $\bigcap\limits_{j \leq n} \mathbf{Y}_j \nsubseteq \mathbf{X}_i$. Tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, joten $\emptyset \subseteq \mathbf{X}_i$. Tällöin on oltava, että $\bigcap\limits_{j \leq n} \mathbf{Y}_j \neq \emptyset$, joten on olemassa jokin alkio $h(i) \in \bigcap\limits_{j \leq n} \mathbf{Y}_j \setminus \mathbf{X}_i$.

Olkoon

$$\mathscr{V} = \{h(i) \mid i \leq m\}.$$

Nyt $\mathscr{V}$ on joukon $\mathbf{Y}_j$ äärellinen osajoukko kaikilla $j \leq n$ ja siksi

$$\mathscr{V} \in \bigcap_{j \leq n} \mathscr{P}_\omega(\mathbf{Y}_j) = \bigcap \mathfrak{Y}.$$

Toisaalta $\mathscr{V} \nsubseteq \mathbf{X}_i$, kun $i \leq m$ ja siksi $\mathscr{V} \notin \bigcup \mathfrak{X}$. On siis osoitettu, että jos $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ ovat erillisiä ja äärellisiä joukon $\mathfrak{B}$ osajoukkoja, niin $\bigcap \mathfrak{Y} \nsubseteq \bigcup \mathfrak{X}$.

4. Jos $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}$, niin olkoon

$$\mathfrak{Z}^* = (\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{Z}) \cup \{\mathscr{J} \setminus \mathscr{X} \mid \mathscr{X} \in \mathfrak{Z}\}.$$

Joukon $\mathfrak{B}$ mahtavuus on 2^κ, joten sillä on 2^{2^κ} eri osajoukkoa $\mathfrak{Z}$. Jos $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2 \in \mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}_2$, niin on olemassa jokin $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{J}$, jolle pätee, että $\mathscr{X} \in \mathfrak{Z}_1^*$ ja $\mathscr{J} \setminus \mathscr{X} \in \mathfrak{Z}_2^*$. Tällöin on olemassa 2^{2^κ} eri joukkoa $\mathfrak{Z}^*$, joista jokainen vastaa yhtä joukon $\mathfrak{B}$ osajoukkoa.

Oletetaan, että $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}$ ja olkoon

$$\{\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_m, \mathscr{J} \setminus \mathscr{Y}_1, \ldots, \mathscr{J} \setminus \mathscr{Y}_n\}$$

äärellinen joukko, jolle pätee, että $\mathscr{X}_i \notin \mathfrak{Z}$, kun $i \leq m$ ja $\mathscr{Y}_j \in \mathfrak{Z}$, kun $j \leq n$. Kohdan 3 nojalla $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i \nsubseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j$, jolloin

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i \cap \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{J} \setminus \mathscr{Y}_j \neq \emptyset.$$

Tämä osoittaa, että joukolla $\mathfrak{Z}^*$ on äärellinen leikkausominaisuus ja joukko $\mathfrak{Z}^*$ voidaan täten laajentaa ultrafiltteriksi $U_{\mathfrak{Z}}$ joukossa $\mathscr{J}$. Jos $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}_2$, niin silloin $U_{\mathfrak{Z}_1} \neq U_{\mathfrak{Z}_2}$. Tästä seuraa, että $\{U_{\mathfrak{Z}} \mid \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}\}$ on kokoelma joukon $\mathscr{J}$ ultrafilttereitä, joita on 2^{2^κ} kappaletta.

Olkoon $\theta : \mathcal{J} \to I$ mikä tahansa injektiivinen kuvaus ja

$$V_{\mathfrak{Z}} = \{\theta[\mathfrak{X}] \mid \mathfrak{X} \in U_{\mathfrak{Z}}\}$$

jokaisella joukolla $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}$. Tällöin joukko $\{V_{\mathfrak{Z}} \mid \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}\}$ on kokoelma joukon I ultrafilttereitä, joita on 2^{2^κ} kappaletta. Koska korkeintaan κ kappaletta näistä voivat olla pääultrafilttereitä, tämä osoittaa, että joukossa I on olemassa vähintään ja täten täsmälleen 2^{2^κ} ultrafiltteriä, jotka eivät ole pääfilttereitä.

□

4.3 ω-täydellinen ja ω-epätäydellinen ultrafiltteri

Tässä pykälässä 4.3 määritellään ω-täydellinen ja ω-epätäydellinen ultrafiltteri sekä ω-mitallinen kardinaali. Näiden määritelmien avulla todistetaan lause 4.32, jota hyödynnetään luvussa 5 Rabinin ja Keislerin lauseen todistuksessa.

Määritelmä 4.30. (Vrt. [3, s. 111]). Olkoon κ mielivaltainen, ääretön kardinaali. Ultrafiltteri F joukossa I on *κ-täydellinen*, jos jokaisella $m < \kappa$ ja $X_m \in F$ pätee, että $\bigcap\{X_n \mid n < \kappa\} \in F$. Ultrafiltteri F on *κ-epätäydellinen*, jos se ei ole *κ-täydellinen*.

Jatkossa tullaan tarkastelemaan erityisesti tapausta $\kappa = \omega$ eli ω-täydellisiä ja ω-epätäydellisiä ultrafilttereitä.

Määritelmä 4.31. (Vrt. [3, s. 112]). Kardinaali κ on *ω-mitallinen*, jos kardinaalissa κ on olemassa ω-täydellinen ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri.

Apulause 4.32. Olkoon F ultrafiltteri joukossa I ja κ pienin kardinaali siten, että F on κ-epätäydellinen. Tällöin on olemassa ultrafiltterin F alkioiden jono $\langle X_n \mid n < \kappa\rangle$ jolle pätee, että

1. $X_m \subseteq X_n$, jos $n \leq m < \kappa$ ja
2. $\bigcap_{n<\kappa} X_n = \emptyset$.

Todistus. (Vrt. [3, s. 114]). Ultrafiltteri F on *κ-epätäydellinen*, joten määritelmän 4.30 mukaisesti on olemassa kokoelma $\{Y_n \mid n < \kappa\}$ ultrafiltterin F alkioita, joille pätee, että $Y = \bigcap_{n<\kappa} Y_n \notin F$. Tällöin $I \backslash Y \in F$. Olkoon

$$X_n = (I \backslash Y) \cap \bigcap_{i<n} Y_i.$$

Olkoon $n < \kappa$. Tällöin $card(n) < \kappa$ ja F on $card(n)$-täydellinen, joten määritelmän 4.30 perusteella tästä seuraa, että $X_n \in F$. Nyt kohta 1 pätee ja saadaan, että

$$\bigcap_{n<\kappa} X_n = (I \backslash Y) \cap \bigcap_{n<\kappa} Y_n = (I \backslash Y) \cap Y = \emptyset,$$

joten myös kohta 2 pätee, ja väite on todistettu. □

4.4 Ultratulojen hyvinjärjestys

Aiemmin pykälän 4.1 määritelmässä 4.3 todettiin, että järjestetty joukko $\langle X, P \rangle$ on *hyvinjärjestetty joukko*, jos jokaisessa sen epätyhjässä osajoukossa on pienin alkio.

Tässä pykälässä 4.4 tutkitaan, että jos kukin malli $\mathfrak{A}_i$ on hyvinjärjestetty joukko, niin milloin ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i / F$ on hyvinjärjestetty joukko. Osoitetaan ensin lauseen 4.33 avulla, että ultratulo on hyvinjärjestetty joukko, kun ultrafiltteri F on ω-täydellinen. Lisäksi lauseessa 4.34 todistetaan tapaus, jossa ultratulo ei ole hyvinjärjestetty joukko.

Lause 4.33. *Oletetaan, että jokainen joukon I malli $\mathfrak{A}_i$ on hyvinjärjestetty joukko. Jos F on ω-täydellinen ultrafiltteri, niin ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i / F$ on hyvinjärjestetty joukko joukossa I.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 134]). Oletetaan, että jokainen malli $\mathfrak{A}_i$ on hyvinjärjestetty joukko ja F on ω-täydellinen ultrafiltteri. Tehdään vastaoletus, että ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i / F$ ei ole hyvinjärjestetty joukko. Tällöin ultratulossa $\prod \mathfrak{A}_i / F$ on ääretön, laskeva jono

$$f_0/F > f_1/F > f_2/F > \cdots > f_{n-1}/F > f_n/F > f_{n+1}/F > \cdots .$$

Olkoon $X_n = \{i \in I \mid f_n(i) > f_{n+1}(i)\} \in F$, kun $n < \omega$.

Oletuksen perusteella F on ω-täydellinen, joten

$$X = \bigcap_{n<\omega} X_n \in F.$$

Tällöin

$$X = \bigcap_{n<\omega} X_n \neq \emptyset.$$

Toisaalta, jos $i \in X$ jollakin $i \in I$, niin

$$f_0(i) > f_1(i) > f_2(i) > \cdots > f_{n-1}(i) > f_n(i) > f_{n+1}(i) > \cdots ,$$

joten joukossa A_i on ääretön laskeva jono. Siis mallissa $\mathfrak{A}_i$ on epätyhjä osajoukko, jossa ei ole pienintä alkioita, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $\mathfrak{A}_i$ on hyvinjärjestetty joukko. Täten ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i/F$ on hyvinjärjestetty joukko, ja väite on todistettu. $\square$

Lause 4.34. *Jos I on joukko, F on joukon I ω-epätäydellinen ultrafiltteri ja $\mathfrak{A}_i$ on hyvinjärjestetty, ääretön joukko, kun $i \in I$, niin ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i/F$ ei ole hyvinjärjestetty joukko.*

Todistus. (Vrt. [3, ss.134–135]). Oletetaan, että joukko $\mathfrak{A}_i$ on ääretön, kun $i \in I$ ja ultrafiltteri F on ω-epätäydellinen. Nyt jokaisesta äärettömästä hyvinjärjestetystä joukosta $\mathfrak{A}_i$ löytyy alkusegmentti, jolla sama järjestys kuin luonnollisilla luvuilla seuraavasti:

$$0 < 1 < 2 < 3 \cdots < n - 1 < n < n + 1 \cdots .$$

Olkoon $\langle X_n \mid n < \omega \rangle$ jono ultrafiltterin F alkioita lauseen 4.32 mukaisesti. Voidaan olettaa, että $X_0 = I$. Tällöin $X_{n+1} \subseteq X_n$ ja $\bigcap_{n<\omega} X_n = \emptyset$. Olkoon

$$\tau(i) = max\{n \mid i \in X_n\}$$

jokaisella $i \in I$.

Määritellään tulon $\prod A_i$ alkioiden jono $\langle f_n \mid n < \omega \rangle$ seuraavasti: jokaisella $i \in I$ pätee, että $f_0(i) = \tau(i)$ ja $f_{n+1}(i) = f_n(i) \dot{-} 1$, missä $k \dot{-} 1 = k - 1$, jos $k > 0$ ja $0 \dot{-} 1 = 0$. Tällöin

$$f_{n+1}(i) < f_n(i) \quad \iff \quad n + 1 \leq \tau(i) \quad \iff \quad i \in X_{n+1},$$

joten

$$\{i \in I \mid f_{n+1}(i) < f_n(i)\} = X_{n+1} \in F.$$

Tästä seuraa, että

$$f_0/F > f_1/F > f_2/F > \cdots > f_{n-1}/F > f_n/F > f_{n+1}/F > \cdots .$$

on ultratulon $\prod \mathfrak{A}_i/F$ alkioiden ääretön, laskeva jono. Tällöin ultratulossa $\prod \mathfrak{A}_i/F$ on epätyhjä osajoukko, jossa ei ole pienintä alkiota, joten määritelmän 4.3 mukaisesti ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i/F$ ei ole hyvinjärjestetty joukko, ja väite on todistettu. $\square$

5 Rabinin ja Keislerin lause

Tässä luvussa 5 todistetaan *Rabinin ja Keislerin lause*, joka osoittaa, milloin mallilla, jonka mahtavuus on κ, on aito elementaarinen laajennus, jonka mahtavuus on κ. Todistetaan ensin apulauseet, joita tarvitaan Rabinin ja Keislerin lauseen todistuksen esittämisessä.

Apulause 5.1. Oletetaan, että κ on ääretön kardinaali. On olemassa kokoelma joukon κ numeroituvia osajoukkoja, joita on $\kappa^{\aleph_0}$ kappaletta, ja joiden pareittaiset leikkaukset ovat äärellisiä.

Todistus. (Vrt. [3, ss. 136–137]). Oletetaan, että κ on ääretön kardinaali. Tällöin on olemassa injektiivinen funktio $\varphi : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \kappa$, missä $\kappa^{<\omega}$ on kaikkien joukon κ alkioiden äärellisten jonojen joukko. Jos $f \in \kappa^{\omega}$, olkoon

$$R_f = \{\varphi(\langle f(0), \dots, f(k)\rangle) \mid k \in \omega\}.$$

Nyt R_f on joukon κ numeroituva osajoukko.

Oletetaan, että $f, g \in \kappa^{\omega}$ ja $f \neq g$. Tällöin $f(n) \neq g(n)$ jollakin $n < \omega$. Nyt jos $n \leq k$, niin

$$\langle f(0), \dots, f(n), \dots f(k)\rangle \neq \langle g(0), \dots g(n), \dots g(k)\rangle,$$

ja täten

$$\varphi(\langle f(0), \dots f(k)\rangle) \neq \varphi(\langle g(0), \dots, g(k)\rangle).$$

Tästä seuraa, että $R_f \cap R_g$ on äärellinen, ja täten kokoelmalla $\{R_f \mid f \in \kappa^{\omega}\}$ on vaaditut ominaisuudet, ja väite on todistettu. $\square$

Apulause 5.2. Oletetaan, että malli $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_n \mid n \in 2^{\kappa}\}\rangle$, jonka mahtavuus on κ, ja malli $\mathfrak{A}' = \langle A', \{P_n' \mid n \in 2^{\kappa'}\}\rangle$, jonka mahtavuus on κ', ja joka on mallin $\mathfrak{A}$ aito elementaarinen laajennus. Oletetaan lisäksi, että $\{P_n \mid n \in 2^{\kappa}\}$ on luettelo kaikista joukon A yksipaikkaisista relaatioista.

Jos $u \in A' \backslash A$ ja $F = \{P_n \mid u \in P_n'\}$, niin F on joukon A ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri.

Todistus. (Vrt. [3, s. 137]). Oletetaan, että $u \in A' \backslash A$ ja $F = \{P_n \mid u \in P_n'\}$. Mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{A}'$ kielessä on kokoelma $\{R_n \mid n \in 2^{\kappa'}\}$ yksipaikkaisia relaatiosymboleita, jotka vastaavat yksipaikkaisia relaatioita $\{P_n \mid n \in 2^{\kappa}\}$ ja $\{P_n' \mid n \in 2^{\kappa'}\}$.

Oletetaan ensin, että $P_n \in F$ ja $P_n \subseteq P_m$. Tällöin

$$\mathfrak{A} \vDash (\forall v)[R_n(v) \rightarrow R_m(v)].$$

Oletuksen perusteella malli $\mathfrak{A}'$ on mallin $\mathfrak{A}$ aito elementaarinen laajennus, joten

$$\mathfrak{A}' \vDash (\forall v)[R_n(v) \rightarrow R_m(v)].$$

Tällöin $P_n^{'} \subseteq P_m^{'}$. Koska $P_n \in F$, niin $u \in P_n^{'}$. Tällöin $u \in P_m^{'}$, joten $P_m \in F$.

Oletetaan sitten, että $P_n, P_m \in F$. Tällöin $u \in P_n^{'}$ ja $u \in P_m^{'}$, joten $u \in P_n^{'} \cap P_m^{'}$. Tästä seuraa, että $P_n \cap P_m \in F$.

Oletetaan vielä, että $n \in 2^{\kappa'}$. Nyt jos $u \in P_n^{'}$, niin $P_n \in F$. Toisaalta, jos $u \notin P_n^{'}$, niin $u \in A \backslash P_n^{'}$. Tästä seuraa, että $A \backslash P_n \in F$. Tällöin pätee, että joko $P_n \in F$ tai $A \backslash P_n \in F$, ja on osoitettu, että F on joukon A ultrafiltteri.

Tehdään vielä vastaoletus, että F on pääultrafiltteri. Tällöin F sisältää erään yhden alkion joukon P_n, joten $\mathfrak{A} \vDash (\exists! v) R_n(v)$ ja $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$. [1] Tästä seuraa, että

$$\mathfrak{A}' \vDash (\exists! v) R_n(v),$$

jolloin myös $P_n^{'}$ on myös yhden alkion joukko. Nyt $P_n \in F$, joten $u \in P_n^{'}$ ja $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, joten $P_n \subseteq P_n^{'}$. Tästä seuraa, että $P_n = \{u\} = P_n^{'}$. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $u \in A' \backslash A$ ja $u \notin A$. On siis osoitettu, että F on joukon A ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri. □

Esitetään nyt *Rabinin ja Keislerin lauseen* 5.3 todistus. Ekvivalenssin molemmat suunnat on esitetty erillisinä todistuksina apulauseiden 5.4 ja 5.5 avulla.

Lause 5.3. *(Rabinin ja Keislerin lause.) Olkoon κ ääretön kardinaali, joka ei ole ω-mitallinen. Kaikilla malleilla, joiden mahtavuus on κ, on aito elementaarinen laajennus, jonka mahtavuus on κ, jos ja vain jos $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$.*

Todistus. Todistus on esitetty apulauseiden 5.4 ja 5.5 avulla. □

Apulause 5.4. Jos $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$, niin jokaisella mallilla, jonka mahtavuus on κ, on aito elementaarinen laajennus, jonka mahtavuus on κ.

Todistus. (Vrt. [3, s. 136]). Oletetaan, että $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$. Olkoon $\mathfrak{A}$ malli, jonka mahtavuus on κ ja F joukon ω ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri. Seurauksen 3.31 nojalla ultrapotenssi $\mathfrak{A}^{\omega}/F$ on isomorfiaa vaille mallin $\mathfrak{A}$ elementaarinen laajennus.

[1] $(\exists! v) R_n(v)$ luetaan ”on olemassa yksikäsitteinen v siten, että $R_n(v)$ on tosi”

Olkoon $a^* = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ jono joukon A eri alkioita. Ultrafiltteri F ei ole pääfiltteri, joten jokaisella $a_+ \in A$ pätee, että $\{i \in \omega \mid a^*(i) = a_+\} = \{a_+\} \notin F$. Tällöin on oltava, että $a^*(i) \neq a_+$ kaikilla $i \in \omega$, joten $d(a_+) \neq a^*/F$, missä d on mallin $\mathfrak{A}$ kanoninen upotus malliin $\mathfrak{A}^\omega/F$. Tästä seuraa, että $\mathfrak{A}^\omega/F$ on joukon $d[\mathfrak{A}]$ aito elementaarinen laajennus. Nyt

$$\kappa = card(\mathfrak{A}) \leq card(\mathfrak{A}^\omega/F) \leq \kappa^{\aleph_0} = \kappa \text{ ja } d[\mathfrak{A}] \cong \mathfrak{A},$$

joten väite on todistettu. □

Apulause 5.5. Jos kardinaali κ ei ole ω-mitallinen ja kaikilla malleilla, joiden mahtavuus on κ, on aito elementaarinen laajennus, jonka mahtavuus on κ, niin $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$.

Todistus. (Vrt. [3, ss. 137–139]). Olkoon A joukko, jonka mahtavuus on κ ja

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{P_n \mid n \in 2^\kappa\} \cup \{R_n \mid n \in 2^\kappa\}\rangle,$$

missä $\{P_n \mid n \in 2^\kappa\}$ on luettelo kaikista joukon A yksipaikkaisista relaatioista ja $\{R_n \mid n \in 2^\kappa\}$ kaikista joukon A kaksipaikkaisista relaatioista.

Olkoon $\{P_f \mid f \in \kappa^{\aleph_0}\}$ sellainen perhe joukon A numeroituvia osajoukkoja, joita on $\kappa^{\aleph_0}$ kappaletta, ja joiden pareittaiset leikkaukset ovat äärellisiä. Tällaisen joukon olemassaolo on todistettu apulauseessa 5.1. Jokaista $f \in \kappa^{\aleph_0}$ kohti on olemassa jokin $n_f \in \kappa^{\aleph_0}$ siten, että $P_f = P_{n_f}$. Jos $f \in \kappa^{\aleph_0}$, olkoon $\langle p_{f,m} \mid m < \omega\rangle$ luettelo numeroituvan joukon P_f alkioista.

Koska A on joukko, jonka mahtavuus on κ, niin oletuksen perusteella mallilla $\mathfrak{A}$ on aito elementaarinen laajennus, jonka mahtavuus on κ, ja jota merkitään

$$\mathfrak{A}' = \langle A', \{P'_n \mid n \in 2^\kappa\} \cup \{R'_n \mid n \in 2^\kappa\}\rangle.$$

Olkoon $u \in A' \backslash A$ ja $F = \{P_n \mid u \in P'_n\}$. Kyseessä on apulauseen 5.2 mukainen joukko, joten F on joukon A sellainen ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri. Tällöin koska kardinaali κ ei ole ω-mitallinen, niin määritelmän 4.31 mukaisesti F on ω-epätäydellinen. Apulauseen 4.32 perusteella on olemassa ultrafiltterin F alkioiden laskeva jono

$$A = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_m \supseteq \cdots,$$

jonka leikkaus on tyhjä.

Jokaisella $m < \omega$ on olemassa jokin $n_m \in \kappa^{\aleph_0}$ siten, että $F_m = P_{n_m}$. Olkoon nyt $F'_m = P'_{n_m}$, ja jokaiselle $f \in \kappa^{\aleph_0}$ määritellään funktio $\tau_f : A \to P_f$ seuraavasti: jokaisella $a \in A$

$$\tau_f(a) = p_{f,m} \iff a \in F_m \backslash F_{m+1}.$$

Joukon A kaksipaikkaista relaatiota

$$T_f = \{\langle a, b\rangle \mid \tau_f(a) = b\}$$

merkitään R_{n_f}.

Nyt koska malli $\mathfrak{A}'$ on mallin $\mathfrak{A}$ aito elementaarinen laajennus, niin apulauseen 5.2 mukaisesti funktio $\tau'_f : A' \to P'_f$ määritellään seuraavasti: jokaisella $a' \in A'$

$$\tau'_f(a') = b' \iff \langle a', b'\rangle \in R'_{n_f}.$$

Lisäksi jokaisella $a' \in A'$

$$\tau'_f(a') = p_{f,m} \iff a' \in F'_m \setminus F'_{m+1}.$$

Kaikilla $m < \omega$ pätee, että $u \in F'_m$ ja $\tau'_f(u) \notin P_{n_f}$, joten $\tau'_f(u) \in P'_{n_f} \setminus P_{n_f}$.

Lisäksi apulauseen 5.1 mukaisesti, kun $f, g \in \kappa^\omega$ ja $f \neq g$, niin $P_{n_f} \cap P_{n_g}$ on äärellinen. Tällöin saadaan, että $(P_{n_f} \cap P_{n_g})' = P'_{n_f} \cap P'_{n_g} = P_{n_f} \cap P_{n_g}$. Tästä seuraa, että jos $f \neq g$, niin $\tau'_f(u) \neq \tau'_g(u)$, ja täten joukko A' sisältää ainakin $\kappa^{\aleph_0}$ alkiota. Aiemmin on todettu, että mallin $\mathfrak{A}'$ mahtavuus on κ, joten $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$, ja väite on todistettu. $\square$

Lähteet

[1] J. An, & R. Gover. *Functions as relations, one-to-one and onto functions*, *Principles of Mathematics*. [Verkkodokumentti], The University of Auckland, 2008. [Haettu 2.10.2022] Saatavilla: https://www.math.auckland.ac.nz/class255/08s1/04s2/week5.pdf

[2] J. Barwise, & H. J. Keisler. *Handbook of Mathematical Logic*, 1st ed. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1977. ISBN 0-7204-2285-X.

[3] J. L. Bell, & A. B. Slomson. *Models and Ultraproducts: an introduction*, 2nd ed. New York: North-Holland Publishing Company, 1969. ISBN 0-444-10615-4.

[4] C. C. Chang, & H. J. Keisler. *Model theory*, 3rd ed. New York: Elsevier science publishers B.V., 1990. ISBN 0-444-88054-2.

[5] C. C. Chang. *Simple proof of the Rabin-Keisler theorem*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1965, vol. 71, s. 642 - 643.

[6] B. Cody. *Ultraproducts, the compactness theorem and applications*. [Verkkodokumentti], Virginia Commonwealth University, 2014. [Haettu 13.3.2022] Saatavilla: http://www.people.vcu.edu/~bmcody/Compactness-Notes.pdf

[7] C. Dellacherie, & M. Émery. *Filtrations Indexed by Ordinals; Application to a Conjecture of S. Laurent*, *Séminaire de Probabilités XLV*, 1st ed. Switzerland: Springer International Publishing, 2013. ISBN 978-3-319-00320-7.

[8] M. Garden. *Cardinal Numbers*, *The Cardinality of Sets*. [Verkkodokumentti], J. Ueberberg, 2021. [Haettu 2.11.2022] Saatavilla: https://math-garden.com/wp-content/uploads/2021/01/math_garden_card_cardinal_numbers.pdf

[9] P. G. Hinman. *Fundamentals of Mathematical Logic*, 1st ed. Massaschusetts: A K Peters, 2005. ISBN 1-56881-262-0.

[10] Å. Hirvonen. *Johdatus logiikkaan 2*. [Verkkodokumentti], Helsingin yliopisto, 2016. [Haettu 30.3.2022] Saatavilla: https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/187827425/Johdatus_logiikkaan_2.pdf?version=12&modificationDate=1462184843253&api=v2

[11] H. J. Keisler. *Limit ultrapowers*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1963, vol. 107, s. 382 - 408.

[12] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, & W. Thomas. *Mathematical Logic*, 1st ed. New York: Springer-Verlag, 1984. ISBN 0-378-90895-1.

[13] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*, 4th ed. London: Chapman & Hall, 1997. ISBN 0-412-80830-7.

[14] J. T. Moore. *The Proper Forcing Axiom*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. India: Hindustan Book Agency, 2010. ISBN 978-81-85931-08-3.

[15] P. Rothmaler. *Introduction to Model Theory*, *Algebra, Logic and Applications Series Volume 15*, 1st ed. Cornwall: Gordon and Breach Science Publishers, 2000. ISBN 90-5699-287-2.

[16] G. E. Sacks. *Saturated Model Theory*, 2nd ed. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. ISBN 981-283-381-1.

[17] T. Skolem. *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen*, *Fundam Math*, 1934, vol. 23, s. 150 - 161.

[18] B. Tsaban. *Numbers and Colors*. [Verkkodokumentti], University of Bar-Ilan. [Haettu 11.5.2022] Saatavilla: https://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/RT/Book/BookSkeleton.pdf