Tampereen yliopisto

Henriina Linna

VIISIVÄRITYSLAUSE

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Joulukuu 2022

TIIVISTELMÄ

Henriina Linna: Viisivärityslause
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Joulukuu 2022

Tässä kanditutkielmassa on tarkoituksena todistaa viisivärityslause, joka on graafiteoriaan liittyvä lause, jossa jokainen tasograafi tai tasossa oleva kartta on väritettävissä korkeintaan viidellä värillä siten, että missään kohtaa ei ole kahta saman väristä aluetta vierekkäin.

Työssä tarkastellaan graafeja sekä niiden värityksiä. Graafi on solmuista eli pisteistä ja särmistä eli viivoista muodostettu matemaattinen malli. Solmut kuvaavat joitain kohteita ja särmät niiden välisiä yhteyksiä. Väritys tarkoittaa graafin solmujen värittämistä eri väreillä siten, etteivät vierekkäiset solmut ole saman värisiä. Tämä tarkoittaa sitä, ettei saman värisillä solmuilla ole yhteistä särmää. Solmuväritystä voidaan käyttää muun muassa työtehtävien jakamiseen, kun samalla työpisteellä ei voida työskennellä yhtäaikaisesti. Myös suurien koulujen tenttijärjestelyt on helppo toteuttaa, kun ne suunnitellaan solmuvärityksen avulla.

Alussa tuodaan esille graafiteorian peruskäsitteitä ja niiden yksinkertaisia todistuksia. Peruskäsitteitä ovat esimerkiksi graafi, solmu, särmä ja aste. Todistettuja lauseita ovat muun muassa Eulerin kaava, särmien lukumäärä sekä osittain todistettu Kuratowskin lause. Esimerkkejä näistä tapauksista löytyy tutkielman alkuosasta.

Kolmannessa luvussa esitellään nelivärityslausetta lyhyesti sekä sen historiaa ja ongelmakohtia. Nelivärityslause todistaa sen, että mikä tahansa tasossa oleva graafi voidaan värittää neljällä värillä siten, ettei naapurisolmut ole saman väriset. Nelivärityslauseen todistamisen ongelmaksi on noussut pitkät todistukset sekä tietokoneavusteisuus.

Viimeisessä luvussa todistetaan luvun kaksi tiedoilla viisivärityslause kahdella tavalla. Ensimmäisessä todistuksessa näytettiin mahdollisimman vähällä solmumäärällä, kuinka kuusi solmua voidaan värittää viidellä värillä, kun yhdestä solmusta lähtevät viisi solmua, jotka kaikki ovat aluksi eri värisiä. Todistuksessa käytettiin apuna polkuja sekä osagraafeja. Todistus osoittaa, että yksi viidestä solmusta voidaan värittää jollain muulla värillä, jolloin keskimmäinen kuudes solmu voidaan värittää yli jäävällä värillä. Tämä todistus löytyy usein oppikirjateksteistä.

Toisessa todistuksessa käytettiin apuna myös kuuden solmun graafiesitystä, jossa solmut on aluksi väritetty kuudella värillä. Todistuksessa ensin solmuja ja särmiä poistamalla sekä solmuja yhdistämällä ja sitten taas särmiä ja solmuja lisäämällä saadaan graafista viisivärinen. Tässä todistuksessa oli tarkoitus löytää keskimmäisen solmun naapurisolmut, jotka eivät ole keskenään naapureita ja siksi ne voidaankin värittää samalla värillä, jolloin vapautuu viides väri keskimmäisen solmun värittämiseen.

Avainsanat: graafiteoria, solmu, särmä, aste, tasograafi, väritys

ALKUSANAT

Toteutin ensimmäisen lapsen kanssa kandiseminaarin ja aloitin työn kirjoittamisen. Kirjoitin kanditutkielmaa toista lasta odottaessa muun opiskelun ohessa. Kirjoittaminen on hieman venynyt, mutta valmista tuli. Olen kiitollinen aviomiehelleni sekä hänen perheelleen, että minulla on ollut mahdollisuus opiskella pienen lapsen kanssa. Myös kandiseminaarin ohjaajat olitte huippuja ja sain paljon seminaarista apua kirjoittamiseen. Suurkiitos myös kandiohjaajalleni huomattavasta avusta tutkielman kirjoittamisessa.

Lempäälässä, 5. joulukuuta 2022

Henriina Linna

SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto 1
2. Käsitteitä 2
   2.1 Graafi 2
   2.2 Aste 4
   2.3 Tasograafi 5
   2.4 Graafin väritys 9
3. Nelivärityslause 11
4. Viisivärityslause 13
   4.1 Ensimmäinen todistus 13
   4.2 Toinen todistus 15
5. Yhteenveto 18
Lähteet 19

LYHENTEET JA MERKINNÄT

D	kokonaisaste
$deg(\bullet)$	solmun aste, alueen aste
E	särmäjoukko
$\lvert E \rvert$	särmien määrä
G	graafi
$\Delta(\bullet)$	maksimiaste
$\delta(\bullet)$	minimiaste
$\chi(\bullet)$	väritysluku
p	polku
V	solmujoukko

1. JOHDANTO

Työssä tarkastellaan graafeja sekä niiden värityksiä. Graafi on solmuista eli pisteistä ja särmistä eli viivoista muodostettu matemaattinen malli. Solmut kuvaavat joitain kohteita ja särmät niiden välisiä yhteyksiä. Väritys tarkoittaa graafin solmujen värittämistä eri väreillä siten, etteivät vierekkäiset solmut ole saman värisiä. Tämä tarkoittaa sitä, ettei saman värisillä solmuilla ole yhteistä särmää. Solmuväritystä voidaan käyttää muun muassa työtehtävien jakamiseen, kun samalla työpisteellä ei voida työskennellä yhtäaikaisesti. Myös suurien koulujen tenttijärjestelyt on helppo toteuttaa, kun ne suunnitellaan solmuvärityksen avulla.

Käsitteitä-luvussa esitellään graafiteorian yleisiä käsitteitä, kuten graafi, tasograafi, särmä, solmu sekä aste. Siinä myös esitellään ja todistetaan graafiteorian yksinkertaisia lauseita, kuten Eulerin kaava sekä osittain Kuratowskin lause. Pitkin tutkielmaa käsitteitä sekä todistuksia havainnollistetaan piirroksin, joissa pisteet ovat solmuja ja viivat särmiä.

Kolmannessa luvussa käsitellään neliväritystlausetta, sen historiaa ja todistusta sekä siihen liittyvää ongelmaa. Nelivärityslause todistaa sen, että mikä tahansa tasossa oleva graafi voidaan värittää neljällä värillä niin, ettei naapurisolmut ole saman väriset. Tässä luvussa tuodaan myös esille, kuinka kartat ja graafit liittyvät toisiinsa. Nelivärityslauseen todistusta ovat monet lahjakkaat matemaatikot yrittäneet ratkaista. Se on kuitenkin hyvin haastava tehtävä, koska siihen ei ole yksiselitteistä keinoa ja sen joutuu tekemään tietokoneavusteisesti, jossa on satoja, jopa tuhansia yksittäisiä tapauksia. [3]

Koska nelivärityslauseen todistaminen on näissä puitteissa mahdotonta, tullaan tässä työssä todistamaan viisivärityslause kahdella eri tavalla. Sen todistaminen onnistuu työssä esitettyjen käsitteiden ja teorioiden avulla. Viisivärityslause todistaa sen, että tasograafi on aina 5-värinen. Se tarkoittaa sitä, että jokainen tasossa oleva graafi tai kartta voidaan värittää korkeintaan viidellä värillä niin, ettei kaksi vierekkäistä solmua tai aluetta ole saman värisiä.

2. KÄSITTEITÄ

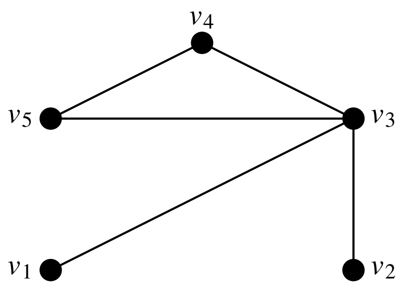
Tässä luvussa esitellään graafiteorian yleisiä käsitteitä. Ensimmäisessä kappaleessa kerrotaan, mitä ovat graafi, tasograafi, vierussolmu sekä polku. Toisessa kappaleessa käsitellään astetta ja kolmannessa kappaleessa perehdytään graafin väritykseen.

2.1 Graafi

Graafi eli verkko koostuu solmuista, joita kuvataan pisteinä ja särmistä, joita kuvataan solmujen välisinä kaarina.

Määritelmä 2.1. Graafi G on pari (V, E) siten, että $V \neq \emptyset$ on joukko, jonka alkiot ovat solmuja $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ ja E on solmujen välisten särmien joukko $\{\{a, b\} : a, b \in V\}$. [1][7]

Esimerkki 2.2. Graafissa H, kuvassa 2.1, on viisi solmua $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ sekä särmät $\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$.



Kuva 2.1. *Graafi H.*

Määritelmä 2.3. Kaksi solmua ovat a ja b sekä niiden välissä särmä $e = \{a, b\}$. Nyt a ja b ovat naapureita eli vierussolmuja [1]. Solmut a ja b ovat särmän e päätesolmut.

Esimerkki 2.4. Graafissa H solmut v_1 ja v_3 ovat vierussolmuja sekä särmän $\{v_1, v_3\}$ päätesolmuja.

Työssä käytetään vain suuntaamattomia ja yksinkertaisia graafeja. Suuntaamaton graafi tarkoittaa sitä, ettei graafin särmien kulkusuuntaa ole määrätty. Yksinkertaisessa graafissa kahden solmun välillä on vain yksi särmä, eikä solmusta ole särmää itseensä. [6]

Määritelmä 2.5. Polku on graafissa sarja solmuja $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ siten, että solmujen välissä on särmä $\{v_i, v_{i+1}\}$ kaikilla $i = 1, 2, ..., k - 1$. Polun päätesolmut ovat v_1 ja v_k. Polusta voidaan käyttää merkintää $p : v_1, v_2, v_3, ..., v_k$.

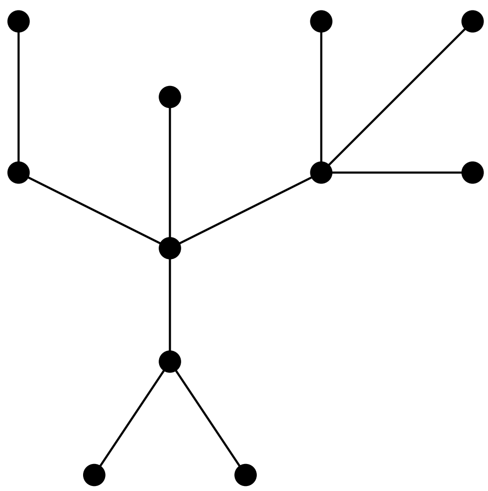
Polun ei tarvitse käydä kaikkien graafin solmujen kautta sekä se voi kulkea saman solmun kautta uudelleen.

Esimerkki 2.6. Graafissa H on monta polkua, mutta valitaan niistä muutama. Yksi polku kulkee solmujen $v_1, v_3, v_5, v_4, v_3, v_2$ kautta ja toinen kulkee solmujen v_2, v_3, v_5, v_4 kautta.

Suuntaamaton graafi on yhtenäinen, mikäli sen kahden minkä tahansa solmun välillä on olemassa polku. [6]

Määritelmä 2.7. Puu on suuntaamaton, yksinkertainen ja yhtenäinen graafi. [6] Eli kaikki solmut ovat toisiinsa yhteydessä särmien kautta, mutta polut eivät ala ja pääty samaan solmuun.

Esimerkki 2.8. Kuvassa 2.2 on esimerkki puusta.



Kuva 2.2. *Esimerkki puusta.*

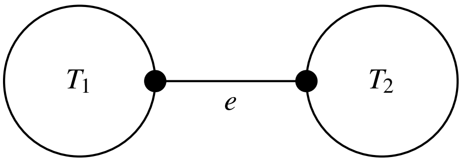
Lause 2.9. *Jos puussa on solmuja n määrä ja särmiä q määrä, niin $q = n - 1$. [6] Eli särmiä on aina yksi vähemmän kuin solmuja.*

Todistus. Kun $n = 1$, on selvää, että $q = 0$. Ei voi olla yhtään särmää. Osoitetaan induktiolla, että kaikilla puilla $q = n - 1$. Olkoon nyt T puu, jonka solmujen lukumäärä on k. Induktioväitteenä oletetaan, että $q = n - 1$ on tosi kaikille puille, joiden solmujen lukumäärä on pienempää kuin k.

Valitaan jokin särmä e puusta T. Poistetaan särmä e, jolloin muodostuu kaksi erillistä puuta T_1 ja T_2, joiden solmujen lukumäärät ovat k_1 ja k_2. Nyt $k_1 + k_2 = k$, joten $k_1 < k$ ja $k_2 < k$. Nyt väite pätee sekä puulle T_1 että puulle T_2. Täten puulla T_1 särmiä on $k_1 - 1$ ja puulla T_2 niitä on $k_2 - 1$. Nyt puun T särmien määrä $q = |E(T)|$ saadaan puiden T_1 sekä T_2 särmien lukumäärien summana,

johon lisätään vielä särmä e.
Eli $q = |E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 1 = k_1 + k_2 - 1 = k - 1 = n - 1$.
Täten siis $q = n - 1$. [3] □

Kuvassa 2.3 on puu T, sen osapuut T_1 ja T_2 sekä särmä e.



Kuva 2.3. *Hahmotelma puusta T, jossa puut T_1 ja T_2 sekä särmä e.*

2.2 Aste

Määritelmä 2.10. Solmun aste graafissa on solmusta lähtevien särmien määrä. Solmun aste ilmoitetaan $\deg(v_n)$. [1]

Esimerkki 2.11. Kuvassa 2.1 solmujen v_1, v_3 ja v_4 asteet ovat
$\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_3) = 4$ sekä $\deg(v_4) = 2$.

Määritelmä 2.12. Graafin kokonaisaste saadaan, kun lasketaan kaikkien solmujen summa [7]

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{v \in V} \deg(v) = D. \tag{2.1}$$

Esimerkki 2.13. Kuvassa 2.1 graafin H kokonaisaste on
$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) + \deg(v_4) + \deg(v_5) = 1 + 1 + 4 + 2 + 2 = 10$.

Lause 2.14. *Kaikkien särmien määrä $|E|$ saadaan laskettua kaavalla*

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v). \tag{2.2}$$

Todistus. Kun summataan kaikkien solmujen asteet, saadaan särmien lukumäärä kaksinkertaisena, koska särmällä on aina kaksi päätesolmua. Tämän vuoksi täytyy jakaa solmujen asteiden summa kahdella. [1] □

Määritelmä 2.15. Graafin G maksimiaste merkitään $\Delta(G)$ ja se määritellään olevan

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\} \tag{2.3}$$

ja se tarkoittaa sitä, että kaikista asteista $\Delta(G)$ on suurin. Graafin G minimiaste merkitään $\delta(G)$ ja se määritellään olevan

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\} \tag{2.4}$$

ja se tarkoittaa sitä, että kaikista asteista $\delta(G)$ on pienin. [1][3]

Esimerkki 2.16. Esimerkiksi kuvassa 2.2 graafin maksimiaste on neljä ja minimiaste on yksi.

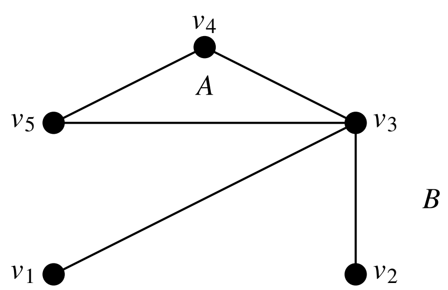
2.3 Tasograafi

Graafi on tasograafi, jos se voidaan piirtää tasolle ilman, että särmät risteävät [7]. Jos graafissa G on risteäviä särmiä ja saadaan solmuja siirtämällä muutettua graafi niin, ettei päällekkäisiä särmiä enää ole, graafi G on tasograafi. Tässä työssä tullaan käyttämään tasograafeja.

Määritelmä 2.17. Tasograafi on äärellinen joukkopari (V, E), kun se toteuttaa seuraavat ominaisuudet:

1) $V \subseteq \mathbb{R}^2$.
2) Jokainen särmä on kaari täsmälleen kahden solmun välillä.
3) Eri särmillä on eri päätepisteet.
4) Särmän sisäpuolella ei ole minkään muun särmän solmuja tai pisteitä.

Esimerkki 2.18. Kuvassa 2.4 on tasograafi ja kuvassa 2.6 on esimerkki graafista, joka ei ole tasograafi.



Kuva 2.4. *Graafi H.*

Määritelmä 2.19. Tasoesitys tasograafista jakaa tason alueisiin. Aluetta ympäröivien särmien määrä on alueen aste $\deg(\bullet)$. [6]

Esimerkki 2.20. Kuvassa 2.4 alueita on kaksi. Toinen on särmien $\{v_5, v_4\}, \{v_4, v_3\}, \{v_3, v_5\}$ rajaama alue A ja toinen on sen ulkopuolella oleva ääretön alue B. Alueiden asteet ovat $\deg(A) = 3$ ja $\deg(B) = 5$.

Lause 2.21. *(Eulerin kaava). Olkoon yhtenäisen graafin solmujen määrä n, särmien määrä q sekä alueiden määrä r. Jos graafi on tasograafi, niin $n - q + r = 2$. [3]*

Todistus. Tehdään induktio särmien lukumäärän q suhteen. Jos $q = 0$, tulos pätee, koska $n = 1$ ja $r = 1$ eli $n - q + r = 1 - 0 + 1 = 2$. Induktio-oletuksena on, että tulos on tosi kaikille yhtenäisille tasograafeille, joissa on alle q särmää. Oletetaan myös, että graafissa G särmiä on q.

Tilanne 1: Oletetaan, että G on puu. Tiedämme, että puussa $q = n - 1$ ja $r = 1$. Tällöin $n - q + r = n - (n - 1) + 1 = 2$.

Tilanne 2: Oletetaan, että G ei ole puu. Olkoon S silmukka graafissa G ja e särmä tässä silmukassa. Tarkastellaan graafia $G^* = G - e$, joka tarkoittaa, että graafista G on poistettu yksi särmä e. Graafissa G^* solmujen määrä on n^*, särmien määrä on q^* sekä alueiden määrä on r^*. Kun verrataan graafia G^* graafiin G, siinä on yksi vähemmän särmiä ja alueita, mutta solmuja saman verran. Yhden särmän poistaminen siis yhdisti kaksi aluetta yhdeksi alueeksi.

Nyt $n^* = n, q^* = q - 1, r^* = r - 1$ ja täten $q = q^* + 1, r = r^* + 1$.

Siis $n - q + r = n^* - (q^* + 1) + (r^* + 1) = n^* - q^* + r^* = 2$. Nyt induktioväite pätee sekä molemmat tilanteet on todistettu. [3][8] □

Lause 2.22. *Olkoon tasograafin G solmujen lukumäärä n sekä särmien lukumäärä q. Kun $n \geq 3$, niin $q \leq 3n - 6$.*

Todistus. Olkoon $C = \{c_1, c_2, ..., c_j\}$ alueiden joukko sekä $\deg(c_i)$ alueen aste eli niiden särmien määrä, jotka koskettavat aluetta. Asteiden summa

$$D = \sum_{i=1}^{j} \deg(c_i) \tag{2.5}$$

Yhden särmän vieressä on korkeintaan kaksi aluetta, joten $D \leq 2q$. Kaikkia alueita rajaa ainakin kolme särmää, joten $D \geq 3r$, missä r on graafin alueiden lukumäärä. [3][8] Nyt sijoittamalla $2q$ alueiden asteiden summan D paikalle ja käyttämällä Eulerin kaavaa (Lause 2.21) saadaan

$$2q \geq 3r \Rightarrow 2q \geq 3(2 + q - n) \Rightarrow 2q \geq 6 + 3q - 3n \Rightarrow q \leq 3n - 6. \tag{2.6}$$

□

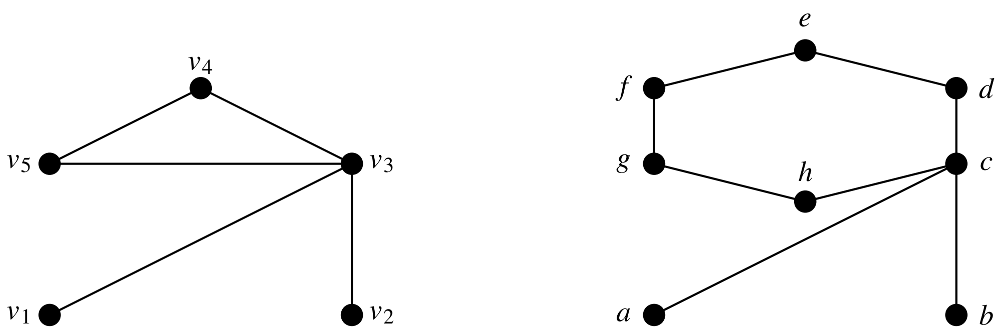
Lause 2.23. *Jos tasograafi on yhtenäinen yksinkertainen tasograafi, jossa on n solmua ja m särmää eikä siinä ole kolmen särmän mittaisia silmukoita sekä $n \geq 3$, niin $q \leq 2n - 4$.*

Todistus. Koska graafissa ei ole kolmen särmän mittaisia silmukoita, niin $D \geq 4r$ ja täten $2q \geq 4r \Rightarrow q \leq 2n - 4$. [8] □

Määritelmä 2.24. Graafit ovat isomorfisia, jos ne saadaan solmuja siirtämällä samanlaisiksi. Kaksi graafia ovat isomorfiset, jos ne ovat muuten samanlaisia, mutta niiden solmut ja särmät on nimetty eri tavalla.

Määritelmä 2.25. Graafit ovat homeomorfisia, jos ne ovat isomorfisia tai niistä voidaan muodostaa isomorfisia lisäämällä tai vähentämällä astetta 2 olevia solmuja.

Esimerkki 2.26. Keskenään homeomorfisia graafeja ovat H ja K, jotka on esitetty kuvassa 2.5. Graafista K saadaan isomorfinen graafin H kanssa, kun poistetaan graafista K solmut h, d ja e.



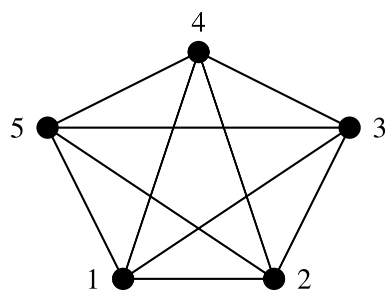
Kuva 2.5. *Graafi H sekä sen kanssa homeomorfinen graafi K.*

Määritelmä 2.27. Kaksijakoinen graafi on sellainen graafi (V,E), jossa solmujoukko V on jaettu kahteen osajoukkoon V_1 sekä V_2 niin, että särmän toinen päätesolmu on joukossa V_1 ja toinen joukossa V_2. Täydellisen kaksijakoisesta graafista tekee se, että solmut on yhdistetty särmällä aina, kun ne kuuluvat eri osajoukkoihin. [6]

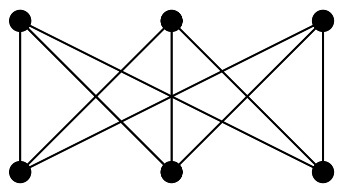
Määritelmä 2.28. Graafi K_5 on sellainen viisisolmuinen graafi, jossa kaikki solmut ovat yhteydessä toisiinsa särmällä.

Määritelmä 2.29. Graafi $K_{3,3}$ on sellainen täydellinen kaksijakoinen graafi, jossa joukkoihin V_1 ja V_2 kuuluu kolme solmua.

Esimerkki 2.30. Kuvassa 2.6 on täydellinen viidenpisteen graafi K_5. Kuvassa 2.7 on täydellinen kaksijakoinen graafi $K_{3,3}$.



Kuva 2.6. *Graafi* K_5

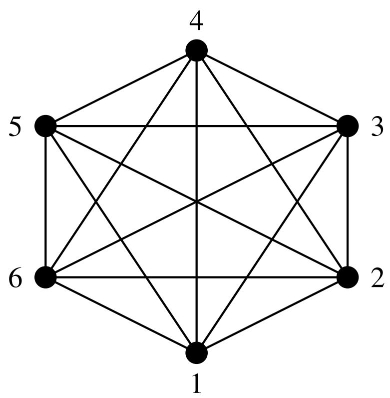


Kuva 2.7. *Graafi* $K_{3,3}$

Lause 2.31. *(Kuratowskin lause). Graafi on tasograafi, jos sen aligraafina ei ole sellaista graafia, joka on graafien K_5 tai $K_{3,3}$ kanssa homeomorfinen.*

Todistus. Todistetaan pieni osa Kuratowskin lauseesta Eulerin kaavaa (Lause 2.21) apuna käyttäen: K_5 ja $K_{3,3}$ eivät ole tasograafeja. Graafissa K_5 $n = 5$ ja $q = 10$ sekä lauseen 2.22 mukaan pitäisi olla $3n - 6 \geq q$. Nyt kuitenkin $3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = q$, joten K_5 ei ole tasograafi. Graafi $K_{3,3}$ ei sisällä kolmen särmän mittaisia silmukoita ja $n = 6$ sekä $q = 9$, joten käytetään lausetta 2.23. Nyt $2n - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8 < 9 = q$, joten $K_{3,3}$ ei ole tasograafi. Tässä työssä ei todisteta Kuratowskin lausetta kokonaan, mutta sen voi löytää Hararyn kirjasta. [2] □

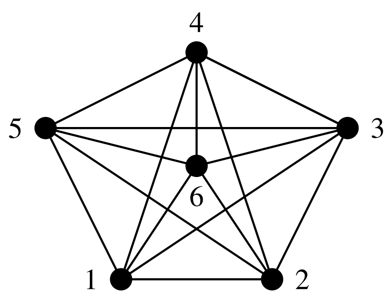
Esimerkki 2.32. Vertaamalla kuvia 2.6, 2.7 sekä 2.8 näemme helposti, että K_5 ja $K_{3,3}$ ovat graafin K_6 aligraafeja, joten graafi K_6 ei ole tasograafi.



Kuva 2.8. *Graafi K_6*

Lause 2.33. *Jos G on tasograafi, sillä on ainakin yksi solmu, jonka aste on korkeintaan viisi. Eli $\delta(G) \leq 5$. [3]*

Todistus. Olkoon graafissa G solmujen lukumäärä n ja särmien lukumäärä q. Jos $n \leq 6$, aste on korkeintaan viisi. Kuvassa 2.9 $n = 6$ sekä kaikkien solmujen aste on viisi eli myös $\delta(G) = 5$, vaikka se ei ole edes tasograafi. Jos siis solmuja on kuusi tai vähemmän minimiaste voi olla korkeintaan viisi.



Kuva 2.9. *Graafi, jossa on kuusi solmua.*

Olkoon $n > 6$ ja graafin G kokonaisaste D. Nyt $D = 2q \leq 2(3n - 6) = 6n - 12$ lausetta 2.22 käyttäen. Nyt jos kaikkien solmujen aste olisi kuusi tai enemmän, tällöin olisi $D \geq 6n$ eli kokonaisaste olisi suurempaa kuin kuusi kertaa solmujen lukumäärä. Tämä on mahdotonta, koska $D \leq 6n - 12$. Täten täytyy olla vähintään yksi solmu, jonka aste on korkeintaan viisi. [3] □

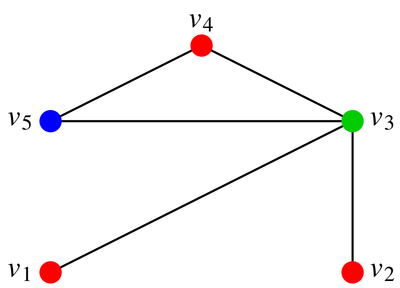
2.4 Graafin väritys

Graafin väritys tarkoittaa, että sen solmuja väritetään eri väreillä niin, etteivät vierussolmut ole saman väriset. [8]

Määritelmä 2.34. Olkoon C joukko, jonka alkiot ovat värejä, merkitään niitä $\{1, 2, 3, ..., k\}$. Solmuväritys on väritysfunktio $\varphi : V(G) \to C$ siten, että $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, kun $\{a, b\} \in E(G)$. [4]

Määritelmä 2.35. Kromaattinen luku eli värityssluku $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, joilla graafi voidaan värittää. [8] Voidaan sanoa, että graafi on $\chi(G)$-värinen. Jos graafi on väritetty viidellä värillä, graafi on 5-värinen.

Esimerkki 2.36. Graafin H solmuväritys nähdään kuvassa 2.10 ja sen värityssluku $\chi(H) = 3$.



Kuva 2.10. *Graafin H solmuväritys.*

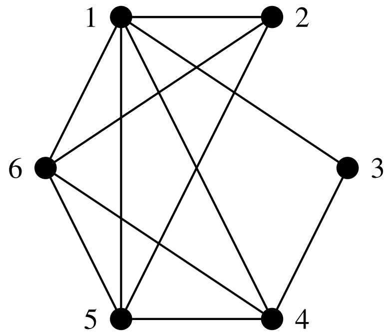
Esimerkki 2.37. Tenttipäivien valitsemiseen voidaan käyttää graafin värittämistä. Yliopistolla järjestetään 6 tenttiä ja tenttipäivät pitäisi järjestää niin, että kukaan opiskelija ei joudu tekemään useampaa tenttiä saman päivän aikana.

Alla olevaan taulukkoon 2.1 on koottu tentit ja opiskelijat, joilla on useampi tentti tentittävänä. Opiskelijoita merkataan kirjaimilla h, i, j, k, l, m, n. Kurssit on numeroitu 1 – 6.

kurssin numero	kurssi	opiskelijat
1	Laaja fysiikka 1	j, k, m
2	Matematiikka 1	m, n
3	Laaja kemia 1	h, k
4	Orgaaninen kemia 1	i, k
5	Ruotsia työelämään	i, m, n
6	Differentiaaliyhtälöt	i, j, l, n

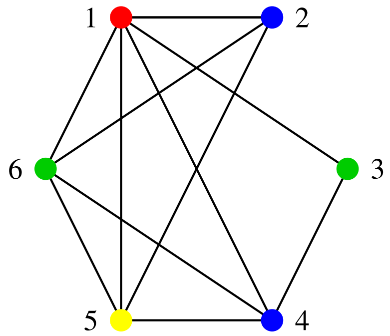
Taulukko 2.1. *Kurssit ja niiden yhteiset opiskelijat.*

Graafissa K, kuvassa 2.11, solmut $1 - 6$ ovat tenttejä sekä särmä kuvastaa, että kurssilla on yhteisiä opiskelijoita.



Kuva 2.11. *Esimerkin 2.37 mukaan tehty graafi K.*

Tehdään graafille väritys. Tällöin mitkään kaksi sellaista tenttiä, joissa on samoja opiskelijoita, eivät tule väritetyksi samalla värillä. Täten samalla värillä väritetyt tentit voidaan järjestää saman päivän aikana.



Kuva 2.12. *Graafin K väritys.*

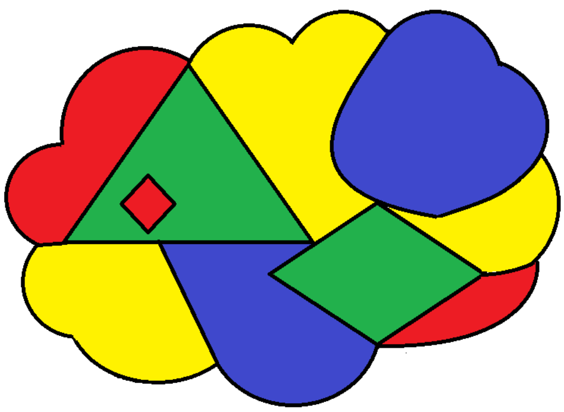
Graafi K on väritetty kuvaan 2.12. Graafin väritysluku $\chi(K) = 4$, joten neljä tenttipäivää riittää, jolloin kukaan ei joudu useampaan tenttiin samana päivänä.

3. NELIVÄRITYSLAUSE

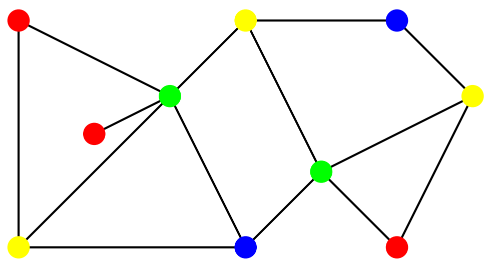
Neliväritysongelmassa on ajatuksena, että mikä tahansa tasolla oleva kartta voidaan värittää neljällä värillä ilman, että viereiset alueet ovat saman väriset. Tällaista tasolla olevaa karttaa voidaan havainnollistaa tasograafilla.

Kuvassa 3.1 on kuvitteellinen saari, jonka kartan osat on väritetty neljällä värillä. Tästä kartasta on muodostettu graafi, joka näkyy kuvassa 3.2. Graafi muodostetaan kuvan avulla siten, että alue on solmu ja alueiden yhteinen rajaviiva on särmä. Särmää ei tule silloin, kun alueilla on yhteinen rajapiste. Tämä huomataan esimerkiksi kuvissa 3.1 ja 3.2 vihreiden alueiden avulla. Vaikka vihreillä alueilla on yhteinen rajapiste, niitä vastaavia solmuja ei ole yhdistetty särmällä.

Graafin solmut on väritetty kartan alueiden värein. Nän kartan alueiden värittäminen neljällä värillä, siten, että erivärisetalueet eivät kosketa toisiaan, vastaa graafin solmujen väritystä, jossa naapurisolmut eivät ole samaa väriä.



Kuva 3.1. *Kuvitteellisen saaren kartta.*



Kuva 3.2. *Kartasta muodostettu graafi ja sen väritys.*

Augustus DeMorganin oppilas Francis Gutherie esitti vuonna 1852 neliväritysongelman. Ongelman esille tuonnin jälkeen monet matematiikot yrittivät ratkaista sitä suuntaan tai toiseen. Vuonna 1879

Alfred Kempe ilmoitti todistaneensa neliväritysläuseen olemassa olon. Kuitenkin vuonna 1890 P. J. Heawood löysi Kempen todistuksesta virheitä. Kempen todistuksen avulla Heawood onnistui kuitenkin todistamaan viisivärityslauseen. Heawoodin löydettyä virheen Kempen todistuksesta matemaatikot alkoivat uudelleen tutkimaan neliväritysongelmaa. [3]

Vasta vuonna 1976 Kenneth Appel, Wolfgang Haken sekä John Koch löysivät todistuksen ongelmaan. Todistuksessaan he joutuivat muodostamaan tuhansia tapauksia tietokoneavusteisesti. Matemaatikot pohtivatkin, että onko tällainen tietokoneavusteisesti tuotettu todistus pätevä. Kuitenkin tämä Appel-Haken-todistus hyväksytään päteväksi. Siitä huolimatta matemaatikot jatkoivat uudenlaisten todistusten etsimistä. [3]

Vaikka useat matemaatikot ovat olleet lähellä lyhyempää todistusta, ne vaativat silti paljon tietokonelaskelmia. Vuonna 1998 Robin Thomas halusi selättää tietokoneavusteisuuden ja varmistaa käsin tehdyn osan uudelleen. Kuitenkaan hän ei onnistunut poistamaan tietokoneavusteisuutta, mutta onnistui hieman toisessa tavoitteessaan ja hän tulikin kollegoidensa kanssa siihen tulokseen, että neliväritysläuseen todistaminen alusta alkaen olisi todennäköisesti helpompi tehtävä. [3]

Koska Neliväritysläuseen todistaminen on niin monimutkainen, todistan seuraavassa luvussa viisiväritysläuseen kahdella eri tavalla luvun kaksi tiedoilla.

4. VIISIVÄRITYSLAUSE

Lause 4.1. *Jokainen tasograafi on 5-värinen.*

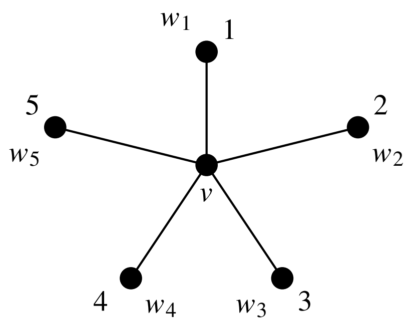
4.1 Ensimmäinen todistus

Todistus. Olkoon G tasograafi, jonka solmujen lukumäärä on n. Jos $n \leq 5$, tulos on selvä. Valitaan siis induktio-oletukseksi $n \geq 6$ ja väite on tosi kaikille, joissa solmuja on $n-1$ kappaletta. Lauseesta 2.33 tiedämme, että kaikissa graafeissa on solmu v, jonka $\deg(v) \leq 5$ eli solmulla v on korkeintaan viisi naapuria.

Muodostetaan graafi G' graafista G siten, että poistetaan solmu v sekä siihen yhdistyvät särmät. Graafissa G' solmun v vierussolmujen aste on yhden pienempi kuin graafissa G. Koska graafi G on tasograafi, myös graafi G' on tasograafi. Graafin G' solmujen lukumäärä on nyt $n-1$. Täten induktio-oletuksen mukaan päättelemme, että G' on 5-värinen.

Oletetaan siis, että graafi G' on väritetty viidellä värillä. Nimetään värit numeroin 1, 2, 3, 4 ja 5. Kuten aikaisemmin todettiin solmulla v on enintään viisi vierussolmua. Jos graafissa G' on käytetty alle viittä väriä solmun v vierussolmujen värittämiseen, voimme värittää solmun v sellaisella värillä, jota ei ole käytetty vierussolmuihin. Näin olemme tehneet graafista G 5-värisen.

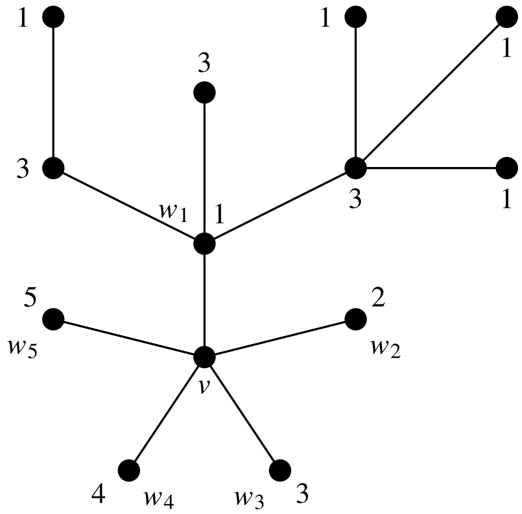
Oletetaan nyt, että graafissa G' solmun v naapurit on väritetty täsmälleen viidellä värillä. Täten naapureita on myös tasan viisi, kutsutaan niitä w_1, w_2, w_3, w_4 ja w_5 ja olkoon jokainen w_i väritetty värillä i. Havainnekuva tilanteesta on kuvassa 4.1.



Kuva 4.1. *Solmu v sekä sen väritetyt vierussolmut.*

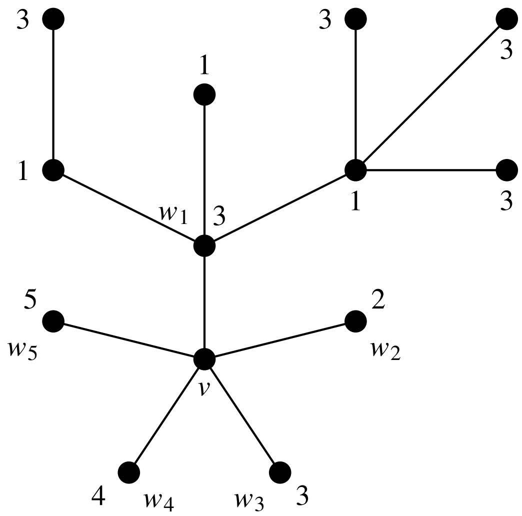
Nyt järjestetään graafin G' värit uudelleen niin, että saamme värin solmulle v. Tarkastellaan graafin G' pisteitä, jotka on väritetty väreillä 1 tai 3.

Tapaus 1: Oletetaan, että graafissa G' ei ole polkua solmusta w_1 solmuun w_3, jossa kaikki solmujen värit olisivat 1 tai 3. Määritetään graafin G' osagraafi F, johon kuuluu solmu w_1 sekä siitä lähtevät polut, joissa kaikki solmut on värjätty väreillä 1 tai 3. Solmu w_3 eikä yksikään sen naapureista kuulu osagraafiin F. Alla on kuva 4.2, jossa osagraafi F näkyy.



Kuva 4.2. *Solmu v, sen vierussolmut sekä osagraafi F.*

Vaihdetaan nyt osagraafin F värit niin, että väri 1 muuttuu väriksi 3 ja toisin päin. Alla on kuva 4.3, jossa osagraafin F värit on vaihdettu.

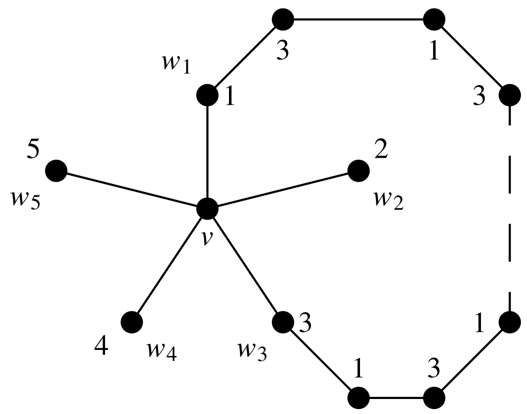


Kuva 4.3. *Osagraafi F, kun värit 1 ja 3 on vaihdettu toisikseen.*

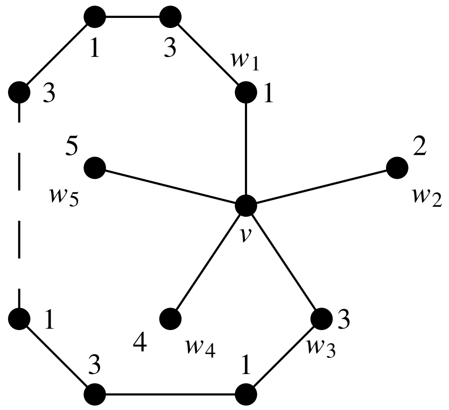
Saatiin graafin G' uusi solmuväritys ongelmitta. Nähdään kuvasta 4.3, että solmun w_1 väri on nyt 3. Tästä seuraa, että solmu v voidaan värittää värillä 1. Saatiin viisivärinen graafi G.

Tapaus 2: Oletetaan, että graafissa G' on polku solmujen w_1 ja w_3 välillä, jossa kaikkien solmujen värit ovat 1 tai 3. Olkoon tämä polku p. Huomataan, että polku p sekä solmu v muodostavat syklin, jonka sisälle jää solmu w_2 tai solmu w_4. Alla on kuvat 4.4 sekä 4.5 tilanteista.

Tällöin ei ole olemassa polkua solmusta w_2 solmuun w_4, jossa kaikki polun värit olisivat 2 tai 4. Täten voidaan värittää solmu w_2 värillä neljä, vastaavasti kuin tapauksessa 1. Nyt väri 2 jää



Kuva 4.4. *Tilanne, jossa w_2 jää polun p sisälle.*



Kuva 4.5. *Tilanne, jossa w_4 jää polun p sisälle.*

käytettäväksi solmulle v. Näin ollen tässäkin tilanteessa tapauksen 1 päättely toimii. Tapausten 1 ja 2 pohjalta voimme todeta, että graafi G on 5-värinen. [3] □

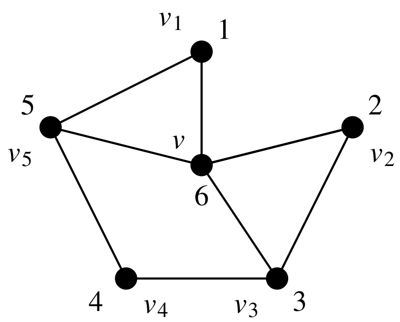
Tässä esiteltiin 5-värityslauseen todistus, joka löytyy yleensä oppikirjateksteistä. Muitakin tapoja todistuksesta löytyy. Seuraavaksi esitellään yksi esimerkki lisää. Se eroaa ensimmäisestä todistuksesta ainakin siten, että siihen tarvitaan enemmän tietoa, kuin vain graafiteorian perustietoja.

4.2 Toinen todistus

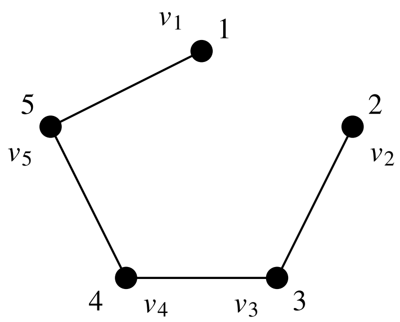
Todistetaan nyt viisivärityslause mukaillen lähdettä "A generalization of the 5-color theorem". [5]

Todistus. Oletetaan lause vääräksi. Olkoon graafi H pienin eli vähäsolmuisin tasograafi, joka ei ole 5-väritettävä. Sen solmujen määrä on n. Koska graafi H on tasograafi, sillä on lauseen 2.33 mukaan ainakin yksi solmu v, jonka aste on korkeintaan viisi. Kuvassa 4.6 esimerkki graafista H solmun v ympäristössä. Siinä solmut on väritetty väreillä $1-6$.

Olkoon $H' = H - v$. Jos solmun v aste on alle 5, nähdään, että graafi H on 5-värinen, kun H' on 5-värinen. Lisäksi graafi H' täytyy olla 5-värinen, koska graafi H oli pienin mahdollinen tasograafi, joka ei ole 5-väritettävä. Kuvassa 4.7 graafin H' solmut on väritetty väreillä $1-5$. Nyt voimme olettaa, että solmulla v on viisi vierussolmua v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.



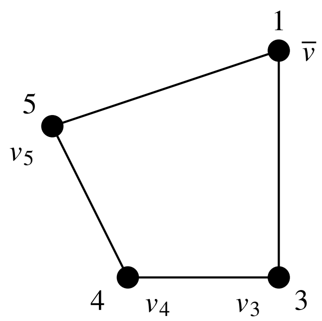
Kuva 4.6. *Esimerkki graafista H, joka ei ole 5-väritetty.*



Kuva 4.7. *Esimerkki graafista H'.*

Jos kaikki parit $v_i, v_j, 1 \leq i < j \leq 5$, olisivat keskenään naapureita, joukko $\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ määrittäisi täydellisen aligraafin K_6. Kuvassa 2.9 graafi K_6. Tällöin graafissa H olisi 6 solmua ja kaikkien välillä särmä. Se on mahdotonta, koska K_6 ei ole tasograafi. Tämä nähdään lauseesta 2.31 sekä esimerkistä 2.32. Tästä syystä kaikki solmut $v_i, v_j, 1 \leq i < j \leq 5$ eivät voi olla naapureita. Yleisyyttä menettämättä voidaan siis olettaa, että solmut v_1 ja v_2 eivät ole naapureita.

Olkoon $\overline{H}$ graafi, joka saadaan graafista H' korvaamalla solmut v_1 ja v_2 uudella solmulla $\overline{v}$. Solmu $\overline{v}$ on minkä tahansa graafin H' solmun w vieressä, joka oli joko solmun v_1 tai solmun v_2 vieressä. Kuvassa 4.7 solmu v_5 on solmun v_1 vieressä ja solmu v_3 on solmun v_2 vieressä. Seuraavassa kuvassa 4.8 molemmat solmut v_3 ja v_5 ovat solmun $\overline{v}$ vieressä. Kaikki muut graafin $\overline{H}$ solmut ovat samat kuin graafissa H'. Nähdään kuvasta 4.8, että graafissa $\overline{H}$ on neljä väriä.



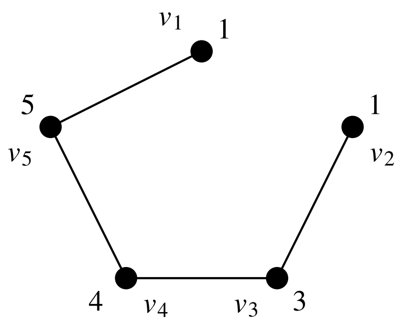
Kuva 4.8. *Esimerkki graafista $\overline{H}$.*

Olkoon e_i särmä $\{v, v_i\}, 1 \leq i \leq 5$. Tällöin graafi $\overline{H}$ on tasograafi, koska se voidaan muodostaa graafista H poistamalla ensin särmät e_3, e_4, e_5 ja sitten yhdistämällä särmät e_1 ja e_2. Samalla poistetaan mahdolliset useat särmät samojen solmujen väliltä.

Olkoon graafin H väritysfunktio c, joka antaa jokaiselle graafin H solmulle v värin $c(v)$ joukosta $\{1, 2, ...\}$ ja joka toteuttaa rajoitteen $c(v) \neq c(w)$, kun solmut v ja w ovat vierussolmuja. Olkoon myös graafin H' väritysfunktio c' ja graafin $\overline{H}$ funktio $\overline{c}$ samalla periaatteella kuin funktiossa H.

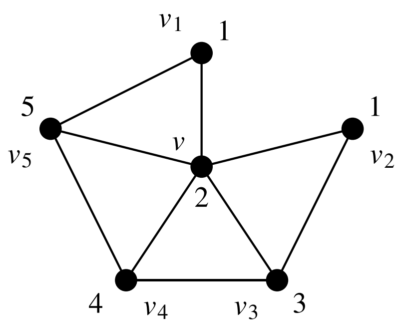
Nyt graafilla $\overline{H}$ on vain $n - 2$ solmua ja on täten 5-värinen, sillä graafi H on pienin tasograafi, joka ei ole 5-värinen. Jos $\overline{H}$ ei olisi 5-värinen, se olisi uusi pienin ei 5-värinen tasograafi.

Väritetään nyt graafi H' siten, että solmut v_1 ja v_2 väritetään samalla värillä kuin $\overline{v}$ määritelmän $c'(v_1) = \overline{c}(\overline{v}) = c'(v_2)$ mukaisesti. Muut solmut väritetään samoilla väreillä kuin graafissa $\overline{H}$ määritelmän $c'(w) = \overline{c}(w)$ mukaan. Kuvista 4.8 sekä 4.9 nähdään, että solmut v_1 ja v_2 on saman väriset kuin solmu $\overline{v}$ ja ne on väritetty värillä 1. Muut solmut $v_i, 3 \leq i \leq 5$ on väritetty värillä i.



Kuva 4.9. *Graafi H', kun solmut v_1 ja v_2 on väritetty samalla värillä kuin $\overline{v}$*

Nyt voidaan värittää graafin H solmut samalla tavalla kuin graafissa H' ja sen lisäksi solmu v sillä värillä, joka ei ole käytössä solmun v vierussolmuilla. Kuvasta 4.10 nähdään, että solmu v on nyt väritetty värillä 2, koska se ei esiinny solmun v vierussolmuilla. Olemme todistaneet oletuksen vääräksi ja siten jokainen tasograafi on 5-värinen. [5]



Kuva 4.10. *Esimerkki graafista H, jonka solmu v on väritetty ylimääräisellä värillä 2.*

□

5. YHTEENVETO

Työssä oli tarkoituksena todistaa graafiteorian viisivärityslause. Työhön valittiin kaksi todistusta, jotka olivat todistettavissa graafiteorian peruskäsitteitä apuna käyttäen.

Käsitteitä-luvun ensimmäisessä kappaleessa tutustuttiin graafiin ja sen ominaisuuksiin, kuten särmiin, solmuihin, polkuihin sekä vierussolmuihin. Toisessa kappaleessa käsiteltiin astetta. Solmun aste on solmusta lähtevien särmien lukumäärä. Myös kokonaisaste määriteltiin ja se tarkoittaa kaikkien solmujen summaa. Maksimi- ja minimiasteet tuotiin myös esille. Kolmannessa kappaleessa määriteltiin tasograafi, joka vahvasti liittyy viisivärityslauseen todistamiseen. Tässä kappaleessa määriteltiin myös alueen aste. Eulerin kaavan määritelmässä ja todistuksessa tuotiin esille laskukaava, jolla voidaan havainnollistaa, onko graafi tasograafi. Todistettiin myös Eulerin kaavan avulla osittain Kuratowskin lausetta. Neljännessä kappaleessa tuotiin esille graafin väritys, joka tarkoittaa, että graafin solmut väritetään siten, etteivät vierussolmut ole saman väriset. Määriteltiin kromaattinen- eli värityslukU, joka tarkoittaa pienintä määrää värejä, joilla jokin graafi on väritettävissä.

Kolmannessa luvussa käsiteltiin nelivärityslausetta. Esiteltiin neliväritysongelman ydin esimerkin avulla sekä sen historian vaiheita. Todettiin neliväritysongelman tulleen matemaatikoiden tietoon vuonna 1852, jolloin Francis Gutherie esitti sen. Matemaatikot ovat yrittäneet siitä lähtien todistaa sen olemassaoloa. Ongelmaan löytyi hyväksytty todistus vasta vuonna 1976. Sekin todistus on joidenkin matemaatikkojen mielestä ongelmallinen, koska se on tuotettu tietokoneavusteisesti. Kukaan ei kuitenkaan tähän päivään mennessä ole saanut todistettua sitä ilman tietokoneen apua.

Neljännessä luvussa todistettiin kahdella eri tavalla viisivärityslause. Ensimmäisessä todistuksessa näytettiin mahdollisimman vähällä solmumäärällä, kuinka kuusi solmua voidaan värittää viidellä värillä, kun yhdestä solmusta lähtevät viisi solmua, jotka kaikki ovat aluksi eri värisiä. Todistuksessa käytettiin apuna polkuja sekä osagraafeja. Todistus osoittaa, että yksi viidestä solmusta voidaan värittää jollain muulla värillä, jolloin keskimmäinen kuudes solmu voidaan värittää yli jäävällä värillä. Tämä todistus löytyy usein oppikirjateksteistä. Toisessa todistuksessa käytettiin apuna myös kuuden solmun graafiesitystä, jossa solmut on aluksi väritetty kuudella värillä. Todistuksessa ensin solmuja ja särmiä poistamalla sekä solmuja yhdistämällä ja sitten taas särmiä ja solmuja lisäämällä saadaan graafista viisivärinen. Tässä todistuksessa oli tarkoitus löytää keskimmäisen solmun naapurisolmut, jotka eivät ole keskenään naapureita ja siksi ne voitiinkin värittää samalla värillä, jolloin vapautui viides väri keskimmäisen solmun värittämiseen.

LÄHTEET

[1] R. Diestel. *Graph theory, 5th Electronic Edition 2016*. Springer, Berlin, 2006.

[2] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.

[3] J. M. Harris, J. L. Hirst ja M. J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*. Springer, New york, 2008.

[4] T. R. Jensen ja B. Toft. *Graph coloring problems*. John Wiley & Sons, New York, 1995.

[5] P. C. Kainen. A generalization of the 5-color theorem. *Proceedings of the American matematical society* 45.3 (1974), 450–453.

[6] P. Koivisto, R. Niemistö ja R. Kangaslampi. *Graafiteoriaa*. Versio 3. Tampereen yliopisto. Tampere, 2022.

[7] R. Kumar ja P. K. Pattnaik. *Graph theory*. Bengaluru : University Science Press, an imprint of Laxmi Publications Pvt Ltd, 2018.

[8] D. B. West. *Introduction to graph theory*. Pearson, Newyork, 2018.