

Otto Väyrynen

# KALMAN-SUOTIMEN BAYESILÄINEN TULKINTA

Kandidaatintyö  
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Marraskuu 2022

# TIIVISTELMÄ

Otto Väyrynen: Kalman-suotimen bayesiläinen tulkinta  
Kandidaatintyö  
Tampereen yliopisto  
Teknis-luonnontieteellinen tutkinto-ohjelma  
Marraskuu 2022

---

Tila- ja mittausmalleilla voidaan mallintaa erilaisten ilmiöiden käyttäytymistä. Molempiin malleihin sisältyy virheparametri, joka kuvastaa tarkasteltavan ilmiön malliin kuuluvaa satunnaisuutta. Tilan estimoimiseksi kohinaisten mittausten pohjalta on kehitetty Bayes-päätelyyn pohjautuvia suotimia, jotka edeltävien ja nykyisen mittauksen perusteella päivittää tietoa tilasta. Työssä esiteltävä Kalman-suodin on Bayes-suotimeen pohjautuva algoritmi, jolla voidaan rekursiivisesti ratkaista diskreettiaikainen lineaarisuodatusongelma. Työn tavoitteena on tarkastella Kalman-suodinta Bayes-päätelyn pohjalta ja johtaa sen keskeisimmät parametrit, joihin sisältyvät posteriori-tilaestimaatti, posteriori-kovarianssiestimaatti sekä Kalman-vahvistus. Kaavat voidaan johtaa usealla eri periaatteella. Tässä työssä sovitaan posteriori-tilaestimaatin ja posteriori-kovarianssiestimaatin kaavojen johtamisessa parhaimmaksi estimaatiksi suurimman posterioritiheyden estimaattori (MAP, maximum a posteriori). Vastaavasti Kalman-vahvistuksen kaavan johtamisessa sovitaan parhaimmaksi estimaatiksi pienimmän neliösumman estimaattori (LSE, least squared estimator).

Työssä lisäksi havainnollistetaan Kalman-suotimen toimintaa simuloimalla vakionopeusmallista kaksiulotteista satunnaiskävelyä. Simulaatiosta tarkastellaan reiteiltään samaa satunnaiskävelyä kahdessa eri tapauksessa, jotka poikkeavat toisistaan Kalman-suotimen parametreiksi asetetun alkutilan sekä tilamallivirheen kovarianssimatriisin arvojen suhteen. Molempia tapauksia verrataan keskenään erilaisten kuvaajien avulla. Tuloksista havaitaan alkutilan vaikuttavan vähäisesti Kalman-suotimen toimintakykyyn reitin estimoimisessa. Vastaavasti vakionopeusmallin tilamallivirheen kovarianssimatriisin arvo vaikuttaa estimoidun reitin käyttäytymiseen huomattavasti. Kovarianssimatriisin arvon asettaminen suuremmaksi johtaa estimoidun reitin parempaan sopeutumiskykyyn alkuperäisen reitin suunnanmuutoksissa, mutta epätarkempiin estimaatteihin lähes suorilla osuuksilla. Kovarianssimatriisin pienemmällä arvoilla saadaan päinvastaiset tulokset.

Avainsanat: Kalman-suodin, Bayes-päätely, Bayes-suodin, vakionopeusmalli

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto . . . . .	1
2.	Bayes-päätelyn ja Kalman-suotimen teoreettinen tausta . . . . .	2
2.1	Bayes-päätely . . . . .	2
2.2	Bayesin teoreema . . . . .	3
2.3	Tila ja suodatus . . . . .	4
2.4	Bayes-suodin . . . . .	6
2.5	Kalman-suodin . . . . .	8
3.	Kalman-suotimen bayesiläinen tulkinta . . . . .	11
4.	Paikannuksen simulointi Kalman-suotimella . . . . .	18
4.1	Vakionopeusmalli. . . . .	18
4.2	Simulaation toteutus, käytetyt parametrit ja simulaation analysointi . . . . .	20
5.	Yhteenveto . . . . .	25
	Lähteet . . . . .	26
	Liite A: Vakionopeusmallisen satunnaiskävelyn ja Kalman-suotimen Python-ohjelmointikielinen toteutus . . . . .	27

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

$a, e, h, s$	satunnaismuuttuja
$A^{-1}$	matriisin $A$ inversio
$A^T$	matriisin $A$ transpoosi
$\arg \max_x f(x)$	muuttujan $x$ arvo, joka maksimoi funktion $f(x)$
$\det$	determinantti
$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$	osittaisderivaatta funktiosta $f(x)$ muuttujan $x$ suhteen
$\int$	integraali välillä $]-\infty, \infty[$
$E(\cdot), \mu$	odotusarvo
$V(\cdot), \Sigma$	kovarianssi
$\mathcal{N}(e; \mu, \Sigma)$	normaalijakautunut satunnaismuuttujan $e$ tiheysfunktio odotusarvolla $\mu$ ja kovarianssilla $\Sigma$
$e \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$	satunnaismuuttuja $e$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla $\mu$ ja kovarianssilla $\Sigma$
$p(e)$	satunnaismuuttujan $e$ tiheysfunktio
$p(e, h)$	satunnaismuuttujien $e$ ja $h$ yhteisjakauma
$p(e h)$	satunnaismuuttujan $e$ tiheysfunktio ehdolla satunnaismuuttuja $h$
$\text{tr}(A)$	matriisin $A$ jälki
$\propto$	verrannollisuus
$x \in \mathbb{N}$	muuttuja $x$ on luonnollisten lukujen joukon alkio
$A$	tilansiirtomatriisi
$H$	mittausmallimatriisi
$\mathbf{H}f$	Hessen-matriisi funktiolle $f$
$I$	identiteettimatriisi
$k$	ajanhetki
$K$	Kalman-vahvistus
$\mathbb{N}$	luonnollisten lukujen joukko
$P$	posteriori-kovarianssiestimaatti

$P^-$	priori-kovarianssiestimaatti
$q$	tilamallivirhevektori
$Q$	tilamallivirheen kovarianssimatriisi
$Q_c$	Brownin liikkeen diffuusiomatriisi
$r$	mittausvirhevektori
$R$	mittausvirheen kovarianssimatriisi
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$m \times n$ kokoinen reaalimatriisi
$\mathbb{R}^n$	$n \times 1$ kokoinen reaalivektori
$\sigma_{xy}^2$	nopeuden virheen varianssi $xy$ -tasolla
$S$	innovaatiokovarianssi
$\Delta t$	ajanmuutos $t_{k-1}$ ja $t_k$ välillä
$T$	ajanjakso
$x$	tilavektori
$x_k$	tilavektori ajanhetkellä $k$
$x_{0:k}$	tilavektorien joukko $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$
$\hat{x}$	posteriori-tilaestimaatti
$\hat{x}^-$	priori-tilaestimaatti
$y$	mittausvektori
$\hat{y}$	ennustettu mittaus
$\tilde{y}$	innovaatio
$Z$	normalisaatiovakio

# 1. JOHDANTO

Monet reaali maailman ilmiöt ovat luonteeltaan hyvin monimutkaisia mallinnettavaksi sellaisenaan laskennallisiin tarkoituksiin. Usein päädytäänkin yksinkertaistamaan mallia, jotta sitä voitaisiin esimerkiksi käyttää erilaisten ilmiöiden reaaliaikaiseen analysointiin. Vakionopeusmalli on eräs esimerkki yksinkertaistetusta tilamallista, jota käytetään muun muassa paikannuksessa. Siinä kappaleen nopeus oletetaan vakioksi, mutta nopeuden muutos eli kiihtyvyys tulkitaan satunnaisilmiöksi. Satunnaisuuden estimoimiseksi käytetään työkaluna suodatusta. Suodatuksella lasketaan mittauksista saadun tiedon kautta todennäköisin tila tarkasteltavalle kohteelle tiettyä ajanhetkenä. Tässä työssä tullaan esittelemään Bayes-päätelyn kautta Kalman-suodin, jota voidaan käyttää esimerkin mukaiseen suodattamiseen.

Luvussa 2 esitellään tarvittava teoreettinen tausta Kalman-suotimen tarkasteluun. Luvun alussa käydään Bayes-päätelyn tärkeimmät periaatteet sekä Bayesin teoreema työssä käytävän matemaattisen teorian ymmärtämiseksi. Suodatusongelman ja Kalman-suotimen ymmärtämiseksi käydään tila- ja mittausmalliin kuuluvat tärkeät käsitteet. Myös Bayes-suotimen perusyhtälöt määritellään ennen sen erityistapauksen eli Kalman-suotimen käsittelyä. Tämän jälkeen esitellään Kalman-suodin ja tarkastellaan sen tärkeimpiä ominaisuuksia, algoritmin toimintaa sekä mainitaan lyhyesti joistain siihen liittyvistä laajennuksista.

Luvussa 3 johdetaan Bayes-päätelyn pohjalta kaavat Kalman-suotimen algoritmista käytettäville posteriori-tilaestimaatille, posteriori-kovarianssiestimaatille sekä Kalman-vahvistukselle.

Luvussa 4 havainnollistetaan Kalman-suotimen toimintaa Python-ohjelmointikielellä toteutetun vakionopeusmallisen kaksiulotteista satunnaiskävelyä mallintavan simulaation kautta. Työn liitteenä on simulaatiossa käytetty Python-koodi.

## 2. BAYES-PÄÄTTELYN JA KALMAN-SUOTIMEN TEOREETTINEN TAUSTA

Tämän luvun alussa tutustutaan suotimien ymmärtämiseksi Bayes-päätelyyn ja Bayes-teoreemaan. Sen jälkeen tutustutaan lineaariseen tila- ja mittaussmalliin sekä suodatukseen. Luvun lopussa esitellään Bayes-suodin ja sen erityistapaus Kalman-suodin.

### 2.1 Bayes-päätely

Bayesiläisen tilastotieteen juuret ovat vuonna 1763 julkaistussa artikkelissa "An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances". Sen kirjoitti pastori Thomas Bayes, mutta kirjoitus julkaistiin vasta hänen kuolemansa jälkeen. Bayesiläistä lähestymistapaa pidettiin pitkään keskeisenä tilastollisen päättelyn periaatteena. Kumminkin 1920-luvulla Bayes-päätely vaipui unohduksiin geneetikko ja tilastotieteilijä R. A. Fisherin siihen kohdistaman voimakkaan kritisoinnin ja hänen käytännössä perustamansa frekventistisen päättelyn myötä. Tähän myös vaikutti Fisherin esittelemät frekventistiset menetelmät, jotka auttoivat saamaan kätevästi ratkaisuja sen ajan empiirisen tieteen tutkimusongelmiin. Frekventistisen tilastotieteen perustajat olivat ehdottomasti sitä mieltä, että todennäköisyysjakaumaa tulkittaisiin ainoastaan objektiivisesti eikä se saisi olla bayesiläisen lähestymistavan mukaisesti subjektiivisen epävarmuuden kuvaus. Myöhemmin 1980-luvun lopulla kiinnostus bayesiläiseen lähestymistapaan heräsi uudelleen uusien laskentamenetelmien sekä tietokoneiden myötä. [1, s.6-7][2, s.10] [2, s.118-119]

Bayes-päätely eroaa frekventistisestä päättelystä todennäköisyysjakauman tulkinnan suhteen. Bayes-päätelyllä, jota myös välillä posteriori- tai todennäköisyyspäättelyksi kutsutaan, tarkoitetaan tarkasteltavan aineiston jakauman päivittämistä Bayes-säännön avulla, kun havaitaan sille ehdollista aineistoa [3, s.44]. Frekventistisessä päättelyssä havaittu aineisto on satunnainen ja todennäköisyysjakauman parametrit ovat vakioita sekä tuntemattomia. Siinä satunnaisuudella tarkoitetaan, että samassa olosuhteessa voidaan saada eri tuloksia aineistoa kerätessä ja todennäköisyys on tapahtuman suhteellinen osuus toistokokeessa. Bayes-päätelyssä sen sijaan todennäköisyysjakauman parametrit myös tulkitaan satunnaismuuttujiksi. [1, s.6-7] [2, s.10-11]

## 2.2 Bayesin teoreema

Bayesin teoreeman mukaan posteriorijakauma eli tiheysfunktio satunnaismuuttujalle  $e$  voidaan päivittää havaitun satunnaismuuttujan  $h$  perusteella kaavalla

$$p(e|h) = \frac{p(e)p(h|e)}{p(h)}. \quad (2.1)$$

Merkinnällä  $p(e)$  tarkoitetaan satunnaismuuttujan  $e$  tiheysfunktioita. Avataan seuraavaksi kaavan (2.1) eri osien merkityksiä.

### Priorijakauma

Priorijakauma on ennakkokäsitys havainnoitavan ilmiön tiheysfunktion parametreista. Priorijakaumaa ei saada havainnoista, vaan se on subjektiivinen ennakkokäsitys, joka muodostetaan ennen kuin aineistoa havainnoidaan [4, s. 19]. Kaavassa priorijakauma on termi  $p(e)$ , joka kuvastaa tuntemattoman satunnaismuuttujan  $e$  mahdollisia arvoja ennen kuin tiedetään mitään muusta sille ehdollisesta aineistosta [3, s.43]. Termiä  $p(e)$  kutsutaan myös prioritiedoksi [5, s.32].

### Uskottavuus

Kun havainnoidaan satunnaismuuttujalle  $e$  ehdollinen satunnaismuuttuja  $h$ , saadaan uskottavuusfunktio  $p(h|e)$  [3, s.43]. Uskottavuudella viitataan todennäköisyyteen, joka on sitä suurempi, mitä enemmän toteutunut otos tukee oletusta, että satunnaismuuttuja  $e$  on sellainen kuin on. Kun priorijakauma ja uskottavuusfunktio kerrotaan keskenään jokaisen satunnaismuuttujan  $e$  suhteen, saadaan tulokseksi normalisoimaton yhteisjakauma  $p(e, h)$  [3, s.43].

### Reunauskottavuus

Reunauskottavuus eli marginaaliuskottavuus  $p(h)$  kuvaa kuinka todennäköinen on satunnaismuuttujan  $h$  havainto, kun tiedetään prioritieto  $p(e)$ . Reunauskottavuus voidaan esittää Bayesin teoreemassa myös muodossa  $\int p(e)p(h|e) de$  [4, s.20]. Priorijakauman ja uskottavuusfunktion yhteisjakauma  $p(e, h)$  voidaan normalisoida reunauskottavuudella  $p(h)$  [3, s.43].

### Posteriorijakauma

Posteriorijakauma kuvastaa satunnaismuuttujan  $e$  tilojen mahdollisia arvoja, jotka ovat päivitetty saatujen havaintojen  $h$  perusteella [3, s.44]. Koska reunauskottavuus on vakio

ja riippumaton satunnaismuuttujasta  $e$ , voidaan kuvata Bayesin teoreemaa muodossa

$$\text{posteriori} \propto \text{priori} \times \text{uskottavuus} \quad (2.2)$$

eli posteriorijakauma on verrannollinen priorijakauman ja uskottavuusfunktion tuloon. [2, s.116]

## 2.3 Tila ja suodatus

Tilalla tarkoitetaan muuttujia, jotka kuvastavat systeemissä tarkasteltavaa ilmiötä. Esimerkiksi moottorin sisä- ja ulkolämpötila tai paikannettavan kohteen paikka ja nopeus ovat tilamuuttujia, jotka yhdessä kuvastavat tarkasteltavan ilmiön tilaa. Tilaa kuvastavien tilamuuttujien joukkoa ilmaistaan usein tilavektorin  $x$  avulla ja tilan mahdollisien arvojen joukkoa ajanjaksolle  $T$  kutsutaan tila-avaruudeksi. Stokastinen prosessi on tila-avaruuteen kuuluvien satunnaismuuttujien  $x_{0:k}$  joukko eli  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , jossa muuttuja  $k$  tarkoittaa ajanhetkeä. [6, s.415] Markovin prosessi on stokastisen prosessin eräs erityistapaus, jossa ainoastaan nykyinen tila vaikuttaa seuraavaan tilaan [6, s.268].

Usein tilan tarkastelu on aikasidonnaista ja tyypiltään joko jatkuva- tai diskreettiaikais- ta. Tarkastellaan erästä stokastista prosessia  $a$  ajanjaksolla  $T$  ja merkitään ajanottohetkeä muuttujalla  $k$ . Satunnaismuuttujaa  $a_k$  tarkastellaan diskreettiaikaisesti, jos  $k \in \mathbb{N}$  ja jatkava-aikaisesti, jos  $k \in [0, \infty[$ . Jatkuva-aikaisissa ilmiöissä käytetään usein  $a_k$  sijaan merkintää  $a(k)$ .

Jotta pystyttäisiin systeemissä tapahtumien ilmiöiden käytöstä ennustamaan, on niitä varten luotava sopiva malli. Usein tarkasteltava ilmiö on sellaisenaan liian monimutkainen ja siten usein joudutaankin tekemään yleistyksiä, jotta saataisiin leskennallisiin tarkoituksiin tarpeeksi yksinkertainen malli. Tämän pohjalta tarkastellaan tässä työssä tila- ja mittaus- mallia lineaarisille systeemeille.

Tilan riippuvuutta seuraavaan tilaan lineaarisissa systeemeissä kuvataan tilamallilla

$$x_{k+1} = A_k x_k + q_k, \quad (2.3)$$

missä  $x_k \in \mathbb{R}^n$  on tilavektori hetkellä  $k$ ,  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on tilansiirtomatriisi ja  $q_k$  on tilamallivirhevektori [5, s.43]. Tilavektori  $x_k$  pitää sisällään tilamuuttujat, kuten esimerkiksi vakionopeusmallissa paikan ja nopeuden. Tilansiirtomatriisi  $A_k$  kuvaa kuinka tila etenee seuraavaan tilaan. Tilamallivirhevektori  $q_k$  kuvastaa satunnaisia muutoksia tilassa.

Tilasta saataville havainnoille on tyypillistä, että ilmiötä pystytään tarkastelemaan erillisten mittaustulosten kautta. Mittausmalli koostuu tarkasteltavan tilan  $x_k$  mittaustulosvektorista

sekä mittausvirheestä. Lineaarille systeemeille mittausmalli esitellään muodossa

$$y_k = H_k x_k + r_k, \quad (2.4)$$

missä  $y_k \in \mathbb{R}^m$  on mittausvektori hetkellä  $k$ ,  $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  on mittausmallimatriisi ja  $r_k$  on mittausvirhevektori [5, s.43]. Mittausvektori  $y_k$  on havaittu mittauksen tulos tarkasteltavaksi otetuista tilamuuttujista. Mittausmallimatriisilla  $H_k$  rajataan nämä tilasta mitattavat tilamuuttujat ja skaalataan ne tarvittaessa esimerkiksi haluttuun yksikköön. Mittausvirhevektori  $r_k$  on esimerkiksi mittauslaitteista syntyneitä kohinaa. Kumminkin mittausvirhevektorilla voidaan kuvata myös muita virhelähteitä kuten tilamallin virheellisyyttä.

Ongelmaa, jossa on kyse alkuperäisen tilaestimaatin laskemisesta havaitun mittauksen perusteella, kutsutaan suodatusongelmaksi [7, s.142-144]. Suodatukseksi kutsutaan yleensä operaatiota, jolla erotellaan mitatusta datasta haluttava informaatio [8, s. 4]. Tämä informaatio on suodatusongelman tapauksessa alkuperäisen tilan selvittäminen. Kumminkin alkuperäistä tilaa ei voida täysin selvittää vaan sitä joudutaan estimoimaan. Tässä yhteydessä on siten mielekkäämpää puhua suodatusta operaationa, jolla ratkaistaan tilan ehdollinen tiheysfunktio aikasarjassa, josta voidaan ratkaista tarvittava tilaestimaatti [5, s.41]. Optimaalisen suodatuksen voidaan sanoa olevan tilastollinen käänteisongelma, jossa tuntemattomat aikasarjassa tarkasteltavat tilat  $x_{0:k}$  havaitaan kohinaisten mittauksen  $y_{1:k}$  kautta [4, s.8-9].

Tila- ja mittausestimaatin tehokas ratkaiseminen vaatii yleensä mallien olevan luonteeltaan Markovin prosesseja, jolloin estimaatin ratkaisemiseen ei tarvitsisi käyttää kaikkia aikaisempia tiloja. Tämä vaatii mallien suhteen oletuksia, joiden avulla pyritään saamaan malli rekursiivisesti laskettavaan muotoon. Aiemmin esitettyjen tila- ja mittausmallin tapauksessa tämä tarkoittaa virheiden  $q_k$  ja  $r_k$  olettamista keskenään riippumattomaksi valkoiseksi kohinaksi [5, s.41].

Suodattimilla pyritään ratkaisemaan tilan ehdollinen tiheysfunktio aikasarjassa. Suodattimia on useita ja niiden käyttötarkoitus riippuu usein tarkasteltavasta ilmiöstä. Tässä työssä tarkastellaan Kalman-suodinta, joka on Bayes-suotimen yksi erityistapaus. Perinteinen Kalman-suodin pyrkii antamaan rekursiivisesti ratkaisun diskreettiaikaiselle lineaarisuodatusongelmalle [4, s.7]. Seuraavaksi tutustutaan Bayes-suotimen toimintaan pohjustaen siinä esiteltyä teoriaa Kalman-suotimen ymmärtämiseksi.

## 2.4 Bayes-suodin

Bayes-suotimen tarkoituksena on laskea tilan posteriorijakauma  $p(x_k|y_{1:k})$  [4, s. 54]. Posteriorijakauman laskemiseksi voidaan johtaa Bayes-suotimen yhtälöt, jotka ovat yleistason bayesiläisen suodatinongelman ratkaisuja lineaaris-gaussisessa sekä ei-lineaarigausisessa tila-avaruudessa [4, s. 51]. Näillä yhtälöillä ei pystytä suoraan ratkaisemaan analyttisesti posteriorijakaumaa yleisessä tapauksessa vaan joudutaan käyttämään numeerisia menetelmiä sen approksimointiin [5, s. 49].

Probabilistisessa tila-avaruusmallissa voidaan määrittellä todennäköisyysjakaumat tilavektorille  $x_k$  ja mittausvektorille  $y_k$  muodossa [4, s.10]

$$x_0 \sim p(x_0), \quad (2.5)$$

$$x_k \sim p(x_k|x_{k-1}), \quad (2.6)$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k). \quad (2.7)$$

Bayes-suotimen yhtälöt voidaan jakaa tiheysfunktion ennustamiseen ja päivittämiseen tarvittaviin yhtälöihin. Ennustamisella tarkoitetaan estimoitua tilaa  $x_k$ , kun mittauksia ei ole vielä tehty ennustetulle aika-askeleelle. Ennustettua tilaestimaattia kutsutaan prioritilaksi ja tilan tiheysfunktiota priorijakaumaksi, joka on muotoa

$$p(x_k|y_{1:k-1}). \quad (2.8)$$

Päivittämisellä tarkoitetaan aiemman estimoidun tilan parantamista sitä vastaavan aika-askeleen mittauksen perusteella. Päivitettyä tilaestimaattia kutsutaan posterioritilaksi ja tilan tiheysfunktiota posteriorijakaumaksi, joka on muotoa

$$p(x_k|y_{1:k}). \quad (2.9)$$

Tähän tiivistetty Bayes-suotimen tarkoitus kuten tämän kappaleen alussa jo todettiin.

Määritellään seuraavaksi Bayes-suodatuksessa tarvittavat perusyhtälöt.

**Lause 2.1** (Bayes-suotimen yhtälöt). [4, s.54] *Aika-askeleella  $k$  tilaa  $x_k$  ennustava tiheysfunktio eli priorijakauma voidaan esittää muodossa*

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}. \quad (2.10)$$

*Aika-askeleella  $k$  tilaa  $x_k$  päivittävä tiheysfunktio eli posteriorijakauma voidaan esittää*

muodossa

$$\begin{aligned} p(x_k|y_{1:k}) &= \frac{1}{Z_k} p(y_k|x_k) p(x_k|y_{1:k-1}) \\ &= \frac{1}{Z_k} p(y_k|x_k) \int p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

missä normalisaatiokio

$$Z_k = \int p(y_k|x_k) p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k. \quad (2.12)$$

Todistus. [4, s.56]

Yhteisjakauma  $p(x_k, x_{k-1}|y_{1:k-1})$  voidaan avata muotoon

$$\begin{aligned} p(x_k, x_{k-1}|y_{1:k-1}) &= p(x_k|x_{k-1}, y_{1:k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \\ &= p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mittaushistorian  $y_{1:k-1}$  häviäminen voidaan perustella Markovin prosessin kautta [4, s.56]. Kuten aikaisemmin todettiin Markovin prosessissa ainoastaan edellinen tila vaikuttaa nykyiseen tilaan. Koska mittausmallin (2.4) mukaisesti mittaus  $y_k$  pohjautuu tilavektoriin  $x_k$ , voidaan siten tiheusfunktion  $p(x_k|x_{k-1}, y_{1:k-1})$  tapauksessa mittaukset  $y_{1:k-1}$  jättää huomiotta.

Kun integroidaan yhtälö (2.13)  $x_{k-1}$  suhteen, saadaan Chapman-Kolmogorov yhtälön avulla tulokseksi priorijakauma

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}. \quad (2.14)$$

Tiheysfunktio  $p(x_k|y_{1:k})$  voidaan ilmaista muodossa  $p(x_k|y_k, y_{1:k-1})$ , josta saadaan Bayesin säännön avulla

$$\begin{aligned} p(x_k|y_{1:k}) &= p(x_k|y_k, y_{1:k-1}) \\ &= \frac{p(y_k|x_k, y_{1:k-1}) p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \end{aligned}$$

Termi  $p(y_k|x_k, y_{1:k-1})$  saadaan muotoon  $p(y_k|x_k)$  huomioimalla mittauksen  $y_k$  ehdollinen riippumattomuus mittaushistoriasta ehdolla  $x_k$  [4, s.56].

$$\begin{aligned}
p(x_k|y_{1:k}) &= \frac{p(y_k|x_k, y_{1:k-1})p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \\
&= \frac{1}{p(y_k|y_{1:k-1})} p(y_k|x_k) p(x_k|y_{1:k-1}) \\
&= \frac{1}{Z_k} p(y_k|x_k) \int p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

missä tiheysfunktio  $p(y_k|y_{1:k-1})$  voidaan esittää normalisointivakiona  $Z_k$  kaavan (2.12) mukaisessa muodossa.

□

## 2.5 Kalman-suodin

Kalman-suodin on Rudolph E. Kalmanin vuonna 1960 kehittämä rekursiivinen ratkaisu diskreettiaikaiseen lineaarisuodatusongelmaan, joka pohjautuu pienimmän neliösumman estimaattoriin [4, s.7] [9, s.1]. Kalman-suodinta pidetään Bayes-suotimen erityistapauksena, joka olettaa tilan ilmiöiden olevan gaussisia ja lineaarisia [4, s.56] [8, s.3]. Kalman-suotimen oleellinen tarkoitus on löytää tilalle  $x_k$  paras lineaarinen harhaton estimaattori (BLUE, Best Linear Unbiased Estimator) [5, s.43] [10, s.1]. Tällä tarkoitetaan lineaarista estimaattoria, jonka varianssi on pienin verraten muihin parametrin estimaattoreihin [6, s.43]. Sillä tarkastelemme tässä estimaattoria moniulotteisen normaalijakauman kautta, puhutaan tässä tapauksessa varianssin sijaan kovarianssista. Kalman-suotimen tarkoituksena on antaa tieto siitä, miten jokainen mittaus ja ennakointi on virheellistynyt. Tämän tiedon pitää sisällään kovarianssimatriisi, jota voidaan pitää myös keskineliövirhematriisina, koska Kalman-suodin ratkaistava estimaattori on harhaton. [2, s.18] [5, s.43] [10, s.1] Kappaleessa 2.4 esitetyt ehdolliset todennäköisyydet ovat Kalman-suotimessa gaussisia ja noudattaa normaalijakaumaa parametrein

$$\text{Priori} : p(x_k|y_{1:k-1}) \sim \mathcal{N}(x_k; x_k^-, P_k^-) \quad (2.16)$$

$$\text{Uskottavuus} : p(y_k|x_k) \sim \mathcal{N}(y_k; H_k x_k, R_k) \quad (2.17)$$

$$\text{Posteriori} : p(x_k|y_{1:k}) \sim \mathcal{N}(x_k; x_k, P_k) \quad (2.18)$$

$$\text{Siirtymäfunktio} : p(x_k|x_{k-1}) \sim \mathcal{N}(x_k; x_k^-, Q_{k-1}), \quad (2.19)$$

missä  $x_k$  on odotusarvo ja  $P_k$  kovarianssimatriisi [4, s.56-57]. Vastaavasti  $x_k^-$  ja  $P_k^-$  tarkoittavat prioriarvoa odotusarvolle ja kovarianssille. Kirjallisuudessa käytetään myös merkintää  $x_{k|k-1}$  ja  $P_{k|k-1}$  vastaaville termeille. Termit  $Q_k$  ja  $R_k$  edustavat tilamalli- ja mit-

tausvirheen kovarianssimatriiseja. Kovarianssimatriisit ovat muotoa

$$q_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, Q_{k-1}) \quad (2.20)$$

$$r_k \sim \mathcal{N}(0, R_k). \quad (2.21)$$

Molempien kovarianssimatriisien oletetaan olevan positiivisesti definiittejä. Kalman-suotimen tapauksessa oletetaan myös tilamallin sekä mittausmallin virheen olevan toisistaan ja alkutilasta  $x_0$  riippumattomia sekä luonteeltaan nollakeskeistä valkoista kohinaa. Riippumattomuusoletuksen pohjalta voidaan olettaa Kalman-suotimen rekursiivisuus. [4, s.56] [5, s.41] [5, s.43]

Esitellään seuraavaksi Kalman-suotimen algoritmi:

---

### Algoritmi 1 Kalman-suotimen algoritmi

---

1. Asetetaan alkutilaksi tilaestimaatti  $\hat{x}_0$ , kovarianssimatriisi  $P_0$  sekä otettavien mittausnäytteiden määräksi  $r$
  2. Asetetaan  $k = 1$
  3. Lasketaan järjestyksessä arvot seuraaville parametreille
 

Priori-tilaestimaatti	$\hat{x}_k^- = A_{k-1}\hat{x}_{k-1}$
Priori-kovarianssiestimaatti	$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1}$
Innovaatiokovarianssi	$S_k = H_k P_k^- H_k^T + R_k$
Kalman-vahvistus	$K_k = P_k^- H_k^T S_k^{-1}$
Ennustettu mittaus	$\hat{y}_k = H_k \hat{x}_k^-$
Innovaatio	$\tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_k$
Posteriori-tilaestimaatti	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \tilde{y}_k$
Posteriori-kovarianssiestimaatti	$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$
  4. Jos  $k < r$ , lisätään  $k = k + 1$  ja palataan vaiheeseen 3
  5. Lopetetaan algoritmi
- 

Kalman-suotimen algoritmi alkaa tilaestimaatin  $\hat{x}_0$  ja kovarianssimatriisin  $P_0$  määrittelyllä. Usein nämä ovat valistuneita veikkauksia, jossa alkutilan tilaestimaatti edustaa mahdollisimman lähellä olevaa alkuarvoa ja kovarianssimatriisi kuinka paljon tilamuuttujien arvot tulevat vaihtelevaan. Priori-tilaestimaatilla  $\hat{x}_k^-$  luodaan uudelle estimaatille ennuste edellisen estimaatin perusteella tilasiirtymämatriisin mukaisesti. Samoin luodaan priori-kovarianssiestimaatti  $P_k^-$  eli ennuste tilaestimaatin epävarmuudesta edellisen kovarianssiestimaatin perusteella. Algoritmista esiintynyt innovaatiokovarianssi eli mittauksen ennusteen keskineliövirhematriisi on tärkeässä osassa Kalman-vahvistusta, mutta myös antaa itsessään informaatiota mittauksen luonteesta. Tällainen on esimerkiksi tieto siitä, onko saatu mittaus todennäköinen, jolloin voidaan mahdollisesti hylätä tai painottaa niitä vähemmän suhteessa todennäköisempiin mittaustuloksiin [5, s.45]. Kalman-vahvistuksen  $K_k$  kaavasta voidaan havaita vahvistuksen olevan verrannollinen priori-kovarianssiestimaatin suhteen ja kääntäen verrannollinen innovaatiokovarianssin suh-

teen. Toisin sanoen, jos mittaukseen sisältyy suurta epävarmuutta toisin kuin tilamallin ennusteeseen, niin Kalman-vahvistuksen arvo on pieni. Tällöin tilaestimaatin päivittäminen perustuu vahvasti malliin eikä mittauksiin ja posteriori-kovarianssiestimaatti kaavansa mukaisesti on pienellä Kalman-vahvistuksen arvolla lähellä priori-kovarianssiestimaattia.

Kalman-suotimesta on myös erilaisia variaatioita tapauksille, joissa esimerkiksi tilamalli ei ole lineaarinen. Tällöin esimerkiksi laajennetun Kalman-suotimen tapauksessa epälineaarinen tila- ja mittausmalli käsitellään Taylorin sarjan approksimaatiolla. Välillä Taylorin sarjan laskeminen on hyvin vaikeaa tai jopa mahdoton, jolloin voidaan lähestyä ongelmaa "derivaattavapaasti" niin kutsutulla hajuttomalla Kalman-suotimella. [5, s.46-48] Tässä työssä ei kumminkaan keskitytä tämän enempää Kalman-suotimen laajennuksiin.

### 3. KALMAN-SUOTIMEN BAYESILÄINEN TULKINTA

Tässä luvussa johdetaan Kalman-suotimen algoritmissä olevien posteriori-tilaestimaatin, posteriori-kovarianssiestimaatin sekä Kalman-vahvistuksen kaavat Bayes-päätelyn keinoin. Sovitaan posteriori-tilaestimaatin ja posteriori-kovarianssiestimaatin kaavojen johdattamisessa parhaimmaksi estimaatiksi suurimman posterioritiheyden estimaattori (MAP, maximum a posteriori). Kalman-vahvistuksen osuus osana posteriori-tilaestimaatin ja posteriori-kovarianssiestimaatin kaavoja tullaan esittämään niitä johdettaessa, mutta Kalman-vahvistus johdetaan myös erikseen sopien tällöin parhaimmaksi estimaatiksi pienimmän neliösumman estimaattori (LSE, least squared estimator).

MAP-estimaattorin yhtälö on muotoa [9, s.27]

$$\hat{x}_k = \arg \max_{x_k} p(x_k | y_k). \quad (3.1)$$

Tilamallin MAP-estimaatti on hetken  $k$  posteriorijakauman suurin arvo. MAP-estimaattia kutsutaan välillä kirjallisuudessa myös posteriorimoodiksi.

Johdetaan ensiksi posteriori-tilaestimaatin  $\hat{x}_k$  kaava. Tilan MAP-estimaatti voidaan saada Bayes-suotimen posteriorijakauman kaavan (2.11) mukaisesti muotoon

$$\arg \max_{\hat{x}_k} p(\hat{x}_k | y_{1:k}) = \arg \max_{\hat{x}_k} p(y_k | \hat{x}_k) p(\hat{x}_k | y_{1:k-1}). \quad (3.2)$$

Kappaleessa 2.5 on määritelty kaavan (3.2) tiheysfunktioille niiden gaussiset muodot (2.16) ja (2.17). Gaussinen muoto voidaan saattaa kaavamuotoon moniulotteisen Gaussin jakauman tiheysfunktion kaavalla. Tiheysfunktio on muotoa

$$\mathcal{N}(s; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\det(\sqrt{2\pi}\Sigma)} e^{\left(-\frac{(s-\mu)^T \Sigma^{-1} (s-\mu)}{2}\right)}, \quad (3.3)$$

missä  $s \in \mathbb{R}^n$  on satunnaismuuttuja,  $\mu \in \mathbb{R}^n$  on odotusarvo ja  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kovarianssimatriisi [3, s.56]. Satunnaismuuttujan  $s$  odotusarvolle käytetään myös merkintää  $E(s)$  ja kovarianssimatriisille  $V(s)$ . Oletetaan jatkossa kovarianssimatriisit kääntyviksi.

Sijoittamalla kaavaan (3.2) tiheysfunktioiden gaussisien muotojen kaavat, saadaan

$$\begin{aligned}
& \arg \max_{\hat{x}_k} p(y_k | \hat{x}_k) p(\hat{x}_k | y_{1:k-1}) \\
&= \arg \max_{\hat{x}_k} \frac{e^{-\frac{(y_k - H_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k)}{2}} e^{-\frac{(\hat{x}_k - A_k \hat{x}_{k-1})^T (A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} (\hat{x}_k - A_k \hat{x}_{k-1})}{2}}}{\det(\sqrt{2\pi} R_k) \det(\sqrt{2\pi (A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k)})} \\
&= \arg \max_{\hat{x}_k} e^{-(y_k - H_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k)} e^{-(\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)} \\
&= \arg \max_{\hat{x}_k} - (y_k - H_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k) \\
&\quad - (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-) \\
&= \arg \min_{\hat{x}_k} (y_k - H_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k) \\
&\quad + (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-) .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Jos lausekkeesta saatava Hessen matriisi on positiivisesti definiitti, on tällöin lausekkeen minimiarvo derivaatan nollakohta [11]. Seuraavaksi osoitetaan, että lausekkeen Hessen matriisi on positiivisesti definiitti.

Kun  $f$  on muuttujan  $z$  reaalfunktio, tällöin matriisi

$$\mathbf{H}_z f = \frac{d}{dz} \left( \frac{df}{dz} \right)^T \tag{3.5}$$

on Hessen matriisi funktiolle  $f(z)$  [11]. Asetetaan funktioksi  $f$  yhtälön (3.4) tuloksen mukaisesti

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}_k) &= (y_k - H_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k) \\
&\quad + (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-) .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tällöin reaaliarvoisten funktioiden Hessen matriisin kaavoja <sup>1</sup> käyttäen saadaan funktion  $f(\hat{x}_k)$  Hessen matriisiksi johdettua

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\hat{x}_k} f &= \mathbf{H}_{\hat{x}_k} \left[ (y_k - H_k \hat{x}_k)^T R_k^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k) \right. \\
&\quad \left. + (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-) \right] \\
&= (-H_k^T (R_k^{-1} + (R_k^{-1})^T) (-H_k)) \\
&\quad + (I^T ((P_k^-)^{-1} + ((P_k^-)^{-1})^T) I) \\
&= 2(H_k^T R_k^{-1} H_k) + 2(P_k^-)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

<sup>1</sup> $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})^T \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \mathbf{A} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}$ , kun  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$  [11]

Yleisesti tiedetään kovarianssimatriisien olevan aina symmetrisiä ja positiivisesti semidefiniittejä. Lisäksi kappaleessa 2.5 tehtiin oletus, että matriisit  $R$  ja  $Q$  ovat positiivisesti definittejä. Näiden perusteella voidaan päätellä yhtälöstä saatujen molempien termien olevan positiivisesti definittejä. Koska kahden positiivisesti definiitin neliömatriisin summa on positiivisesti definiitti on myös  $\mathbf{H}_{\hat{x}_k} f$  positiivisesti definiitti. Tämän perusteella kaavassa (3.4) johdettu viimeinen lauseke voidaan ratkaista laskemalla lausekkeen osittaisderivaatan nollakohta  $\hat{x}_k$  suhteen. Laskemalla funktion  $f(\hat{x}_k)$  osittaisderivaatta saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\hat{x}_k)}{\partial \hat{x}_k} &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \left( (y_k - H_k \hat{x}_k)^T R^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k) \right. \\
&\quad \left. + (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} (\hat{x}_k - \hat{x}_k^-) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \left( y_k^T R_k^{-1} y_k - \hat{x}_k^T H_k^T R_k^{-1} - y_k^T R_k^{-1} H_k \hat{x}_k \right. \\
&\quad \left. - \hat{x}_k^T H_k^T R_k^{-1} H_k \hat{x}_k + \hat{x}_k^T (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k - (\hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k \right. \\
&\quad \left. - \hat{x}_k^T (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- + (\hat{x}_k^-)^T (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- \right) \\
&= 2 \left( H_k^T R_k^{-1} H_k + (P_k^-)^{-1} \right) \hat{x}_k \\
&\quad - 2 \left( H_k^T R_k^{-1} y_k + (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- \right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Nyt osittaisderivaatan nollakohdaksi saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \left( H_k^T R_k^{-1} H_k + (P_k^-)^{-1} \right) \hat{x}_k \\
&\quad - 2 \left( H_k^T R_k^{-1} y_k + (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- \right) \\
\hat{x}_k &= \left( H_k^T R_k^{-1} H_k + (P_k^-)^{-1} \right)^{-1} \left( H_k^T R_k^{-1} y_k + (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- \right),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

missä termi  $H_k^T R_k^{-1} H_k + (P_k^-)^{-1}$  voidaan tulkita kääntyväksi aiemmin tehtyjen oletusten pohjalta. Yhtälön (3.9) lauseke saadaan helpommin käsiteltävään muotoon käyttämällä Woodburyn kaavaa <sup>2</sup>. Avatusta lausekkeesta voidaan laskea posteriori-tilaestimaatille  $\hat{x}_k$  sievempi muoto

---

<sup>2</sup> $(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= (H_k^T R_k^{-1} H_k + (P_k^-)^{-1})^{-1} (H_k^T R_k^{-1} y_k + (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^-) \\
&= \left( P_k^- - P_k^- H_k^T (R_k + H_k P_k^- H_k^T)^{-1} H_k P_k^- \right) (H_k^T R_k^{-1} y_k + (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^-) \\
&= (P_k^- - K_k H_k P_k^-) (H_k^T R_k^{-1} y_k + (P_k^-)^{-1} \hat{x}_k^-) \\
&= (P_k^- H_k^T R_k^{-1} - K_k H_k P_k^- H_k^T R_k^{-1}) y_k + \hat{x}_k^- - K_k H_k \hat{x}_k^- \\
&= \left( P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} (H_k P_k^- H_k^T + R_k) R_k^{-1} - \right. \\
&\quad \left. K_k H_k P_k^- H_k^T R_k^{-1} \right) y_k + \hat{x}_k^- - K_k H_k \hat{x}_k^- \\
&= (K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) R_k^{-1} - K_k H_k P_k^- H_k^T R_k^{-1}) y_k + \hat{x}_k^- - K_k H_k \hat{x}_k^- \\
&= K_k ((H_k P_k^- H_k^T + R_k) R_k^{-1} - H_k P_k^- H_k^T R_k^{-1}) y_k + \hat{x}_k^- - K_k H_k \hat{x}_k^- \\
&= K_k (H_k P_k^- H_k^T R_k^{-1} + I - H_k P_k^- H_k^T R_k^{-1}) y_k + \hat{x}_k^- - K_k H_k \hat{x}_k^- \\
&= K_k y_k + \hat{x}_k^- - K_k H_k \hat{x}_k^- \\
&= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Näin ollaan johdettu posteriori-tilaestimaatti  $\hat{x}_k$  käyttäen MAP-estimaattia. Lisäksi myös näytettiin Kalman-vahvistuksen  $K_k$  osuus johdetussa posteriori-tilaestimaatin kaavassa. Seuraavaksi johdetaan posteriori-kovarianssiestimaatti  $P_k$  lauseke. Kuten luvussa 2.5 todetaan, voidaan posteriori-kovarianssiestimaatti  $P_k$  tulkita keskineliövirhematriisiksi. Tällöin  $P_k$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_k = E [(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] , \tag{3.11}$$

missä  $x_k - \hat{x}_k$  on posteriori-estimaattorin virhe [5, s.43]. Posteriori-estimaattorin virhe voidaan avata yhtälön (3.10) tulosta käyttäen muotoon

$$\begin{aligned}
x_k - \hat{x}_k &= x_k - \hat{x}_k^- - K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
&= x_k - \hat{x}_k^- - K_k (H_k x_k + r_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
&= x_k - \hat{x}_k^- - K_k H_k (x_k - \hat{x}_k^-) - K_k r_k \\
&= (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) - K_k r_k
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sijoittamalla posteriori-estimaattorin virheen aukaistu muoto kaavaan (3.11), saadaan posteriori-kovarianssiestimaatille  $P_k$  johdettua

$$\begin{aligned}
P_k &= E \left[ \left( (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) - K_k r_k \right) \right. \\
&\quad \left. \left( (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) - K_k r_k \right)^T \right] \\
&= E \left[ (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T (I - K_k H_k)^T \right. \\
&\quad - (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) r_k^T K_k^T \\
&\quad \left. - K_k r_k (x_k - \hat{x}_k^-)^T (I - K_k H_k)^T + K_k r_k r_k^T K_k^T \right] \\
&= E \left[ (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T (I - K_k H_k)^T \right] \\
&\quad - E \left[ (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) r_k^T K_k^T \right] \\
&\quad - E \left[ K_k r_k (x_k - \hat{x}_k^-)^T (I - K_k H_k)^T \right] + E \left[ K_k r_k r_k^T K_k^T \right] \\
&= (I - K_k H_k) E \left[ (x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T \right] (I - K_k H_k)^T \\
&\quad - E \left[ (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) r_k^T K_k^T \right] \\
&\quad - E \left[ K_k r_k (x_k - \hat{x}_k^-)^T (I - K_k H_k)^T \right] + K_k E \left[ r_k r_k^T \right] K_k^T .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Odotusarvoille  $E \left[ (x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T \right]$  ja  $E \left[ r_k r_k^T \right]$  voidaan määrittellä seuraavat arvot [5, s.44] [9, s.23]

$$\begin{aligned}
E \left[ (x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T \right] &= P_k^- , \\
E \left[ r_k r_k^T \right] &= R_k .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Lisäksi koska priori-estimaattori  $x_k - \hat{x}_k^-$  on oletusten mukaisesti riippumaton mittausvirhevektorista  $r_k$  niin saadaan [5, s.44]

$$\begin{aligned}
E \left[ (I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) r_k^T K_k^T \right] &= 0 , \\
E \left[ K_k r_k (x_k - \hat{x}_k^-)^T (I - K_k H_k)^T \right] &= 0 .
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Näin yhtälö (3.13) voidaan johtaa muotoon

$$\begin{aligned}
P_k &= (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T \\
&\quad + P_k^- H_k^T [R_k + H_k P_k^- H_k^T]^{-1} (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + P_k^- H_k^T K_k^T \\
&= P_k^- - K_k H_k P_k^- ,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

mikä on sama kuin kappaleessa 2.5 esitetty vastaava kaava posteriori-kovarianssiestimaatille.

Lähestytään seuraavaksi Kalman-vahvistuksen kaavan johtamista käyttäen MAP-estimaattorin sijasta keskineliövirhematriisin  $P_k$  matriisin jäljen minimoimista. Tätä kutsutaan pienimmän neliösumman estimaattoriksi. Sillä matriisin jälki on lineaarikuvaus, saadaan kaavan (3.16) pohjalta posteriori-kovarianssiestimaatin  $P_k$  jälki muotoon

$$\begin{aligned}
\text{tr}(P_k) &= \text{tr}(P_k^-) - \text{tr}(K_k H_k P_k^-) - \text{tr}(P_k^- H^T K_k^T) \\
&\quad + \text{tr}(K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T) \\
&= \text{tr}(P_k^-) - 2 \text{tr}(K_k H_k P_k^-) \\
&\quad + \text{tr}(K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T) .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Laskemalla yhtälön (3.17) osittaisderivaatta  $K_k$  suhteen saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\text{tr}(P_k))}{\partial K_k} &= \frac{\partial(\text{tr}(P_k^-))}{\partial K_k} - \frac{\partial(2 \text{tr}(K_k H_k P_k^-))}{\partial K_k} \\
&\quad + \frac{\partial(\text{tr}(K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T))}{\partial K_k} \\
&= -2(H_k P_k^-)^T + 2K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Asettamalla edellisen yhtälön tuloksen arvo nolllaksi ja ratkaisemalla siitä Kalman-vahvistus  $K_k$  saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= -2(H_k P_k^-)^T + 2K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) \\
(H_k P_k^-)^T &= K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) \\
K_k &= (H_k P_k^-)^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
K_k &= (P_k^-)^T H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Näin ollen saatu johdettua posteriori-tilaestimaatti  $\hat{x}_k$ , posteriori-kovarianssiestimaatti  $P_k$  sekä Kalman-vahvistus  $K_k$  kappaaleessa 2.5 esitetystä muodosta. [12]

## 4. PAIKANNUKSEN SIMULOINTI KALMAN-SUOTIMELLA

Tässä luvussa havainnollistetaan Kalman-suotimen käyttöä Python-ohjelmointikielellä toteutetun simulaation kautta. Simulaatiossa käytetty Python-koodi on esiteltyä liitteessä A. Simulaatiossa mallinnetaan vakionopeusmallista satunnaiskävelyä. Satunnaiskävelyn paikka-arvoista luodaan erikseen mittausdataa, johon sisällytetään normaalijakautunutta nollakeskeistä valkoista kohinaa. Kalman-suotimella pyritään estimoimaan kohinaisesta mittausdatasta alkuperäinen reitti. Lopuksi Kalman-suotimen toimintaa ja osaa sen sisäisistä parametreistä tarkastellaan kahden tapauksen suhteen erilaisten kuvaajien kautta. Tapauksissa reitti ja virheellistyneet mittaukset ovat samat, mutta tapaukset eroavat toisistaan Kalman-suotimelle asetettujen parametrien suhteen.

### 4.1 Vakionopeusmalli

Simulaatiossa valitaan satunnaiskävelyn tilamalliksi vakionopeusmalli. Tässä käytettävä vakionopeusmalli on toteutettu pääosin lähteiden [13] [14] pohjalta. Nimestä huolimatta vakionopeusmallissa tarkasteltava kohde ei yleensä liiku vakionopeudella vaan vakionopeuteen sekoittuu satunnaista ennustamatonta kiihtyvyyttä, joka toimii tilamallivirheenä. Tarkastellaan seuraavaksi vakionopeusmalliin kuuluvien tila- ja mittausmallin parametrejä.

Mallin tilavektori  $x$  koostuu paikasta  $p$  sekä nopeudesta  $v$  ja on muotoa

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Alaindeksit  $x, y$  ja  $z$  edustavat nimensä mukaista tarkasteltavaa tasoa. Vakionopeudella liikkuvan kappaleen paikka sekä nopeus seuraavalla aika-askeleella voidaan mekaniikan perusyhtälöiden mukaisesti esittää muodossa

$$\begin{cases} p_k = p_{k-1} + \Delta t v_{k-1} \\ v_k = v_{k-1} \end{cases}, \quad (4.2)$$

jolloin vakionopeusmallin tilansiirtomatriisi on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} I & \Delta t I \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Vakionopeusmallin tilamallivirheen kovarianssimatriisi on muotoa

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} Q_c & \frac{\Delta t^2}{2} Q_c \\ \frac{\Delta t^2}{2} Q_c & \Delta t Q_c \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

missä

$$Q_c = \begin{bmatrix} \sigma_{xy}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Matriisi  $Q_c$  on Brownin liikkeen diffuusiomatriisi, jossa nopeuden virhettä  $xy$ -tasolla kuvaa termi  $\sigma_{xy}^2$  ja  $z$ -tasolla termi  $\sigma_z^2$ . Tällä tarkoitetaan nopeuden virheeseen tulleen varianssin määrää yhden aika-askeleen aikana käsiteltävällä tasolla.

Koska simulaatiossa valitaan mitattavaksi kohteen sijainti  $xy$ -tasossa, on mittausvektori muotoa

$$y = \begin{bmatrix} y_x \\ y_y \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Jotta ennustettu mittaus saataisiin haluttuun muotoon tilavektorista, on käytettävä mittaussmallimatriisia

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

jolloin paikan  $z$ -koordinaatti sekä nopeuden arvot eivät sisälly tarkasteluihin.

Mittausmallin mittausrvirheeksi valitaan normaalijakautunutta nollakeskeistä valkoista kohinaa. Tämä poikkeaa lähteiden [13] [14] mukaisesta mittausrvirheestä, koska luotavassa simulaatiossa myös mittauksessa käytettävät menetelmät poikkeavat.

## 4.2 Simulaation toteutus, käytetyt parametrit ja simulaation analysointi

Simulaation satunnaiskävely, Kalman-suotimen algoritmi sekä visualisointi on toteutettu Python-ohjelmointikielellä. Huomioitavaa on, että parametrit ovat toteutettu kolmiulotteiselle satunnaiskävelylle, vaikka simulaatio käsittelee vain kaksiulotteista tapausta. Tähän on päädytty simulaation kolmiulotteiseen tapaukseen laajentamisen helpottamiseksi, mutta samalla havainnollistaen Kalman-suodinta tässä työssä yksinkertaisemmalla tavalla. Ohjelman alussa satunnaiskävelyn liike generoidaan kulkemaan tasapituksia askelia kaksiulotteisessa tasossa. Kun alkuperäisenä reittinä toimiva polku on luotu, sekoitetaan reitin mittauspisteisiin normaalijakautunutta nollakeskeistä valkoista kohinaa, jolloin saadaan simulaatiossa käytettävät virheellistyneet mittauspisteet. Virheellistyneistä mittauspisteistä yritetään estimoida alkuperäinen reitti Kalman-suotimella käyttäen sille syötettäviä parametreja sopivin arvoin. Ohjelman lopussa visualisoidaan alkuperäistä ja Kalman-suotimen estimoimaa reittiä sekä myös Kalman-suotimen posteriori-kovarianssiestimaatin ja Kalman-vahvistuksen kehitystä ohjelman ajon aikana.

Simulaatiossa luodaan kaksi satunnaiskävelyn ja virheellistyneen mittausdatan suhteen samanlaista tapausta. Tapaukset eroavat toisistaan Kalman-suotimessa käytetyn alkutilan ja tilamallivirheen kovarianssimatriisin suhteen. Kutsutaan tapauksia jäykäksi ja joustavaksi malliksi kuvastaen myöhemmin esiteltävien estimoitujen reittien käyttäytymistä. Seuraavaksi tarkastellaan molemmille tapauksille yhteisten ja toisistaan poikkeavien parametrien arvoja. Käytettyjen yhteisten parametrien arvot ovat esiteltyinä taulukossa 4.1.

**Taulukko 4.1.** Jäykässä sekä joustavassa mallissa käytetyt yhteiset parametrit.

Parametri	Arvo
$n$	100
$\Delta t$	1
$R$	$\begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix}$
$P_0$	$\begin{bmatrix} 3^2 \cdot I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 10^2 \cdot I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$

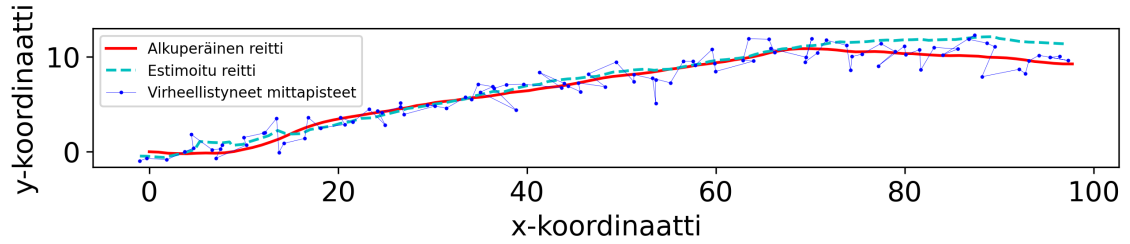
Poikkeavien parametrien arvot ovat esiteltyinä taulukossa 4.2.

**Taulukko 4.2.** Jäykässä sekä joustavassa mallissa käytetyt toisistaan poikkeavat parametrit.

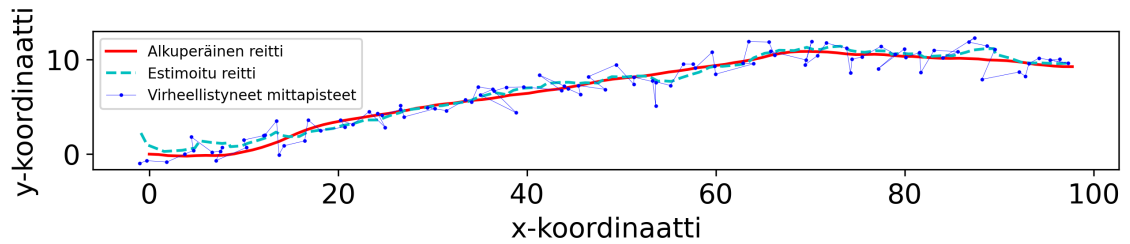
Parametri	Arvo	
	Jäykkä malli	Joustava malli
$Q_c$	$\begin{bmatrix} 0.01^2 \cdot I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1^2 \cdot I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$x_0$	$\begin{bmatrix} y_{x,0} \\ y_{y,0} \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{x,0} \\ y_{y,0} \\ 0 \\ 15 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$

Taulukossa merkintä  $y_{x,0}$  tarkoittaa ensimmäisen mittaustuloksen paikan  $x$ -koordinaattia ja  $y_{y,0}$  vastaavan  $y$ -koordinaattia.

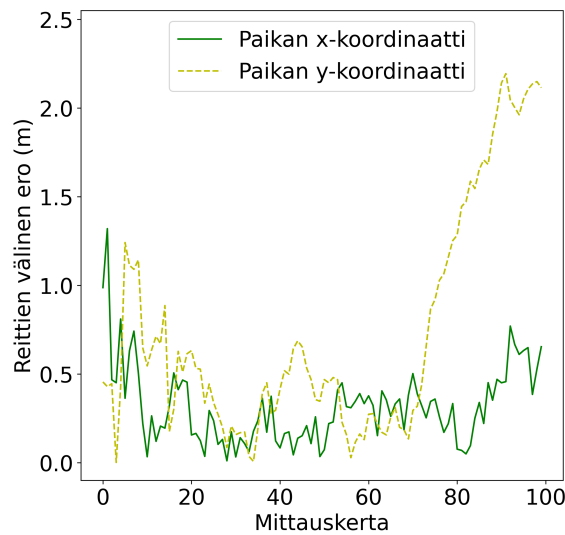
Simulaation alkuperäinen reitti, virheellistyneet mittauspisteet sekä Kalman-suotimella estimoitu reitti molemmille tapauksille on esitettyinä kuvassa 4.1. Kuvasta voidaan havaita, että tapausten väliset estimoidut reitit poikkeavan hieman toisistaan. Tätä korostavat kuvien 4.2a ja 4.2b kaaviot, joista näkee alkuperäisen ja estimoidun reitin erojen olevan erilaiset tapausten välillä. Tarkastellaan seuraavaksi estimoitujen reittien käyttäytymistä samanaikaisesti kuvia 4.1 ja 4.2 havainnoiden.



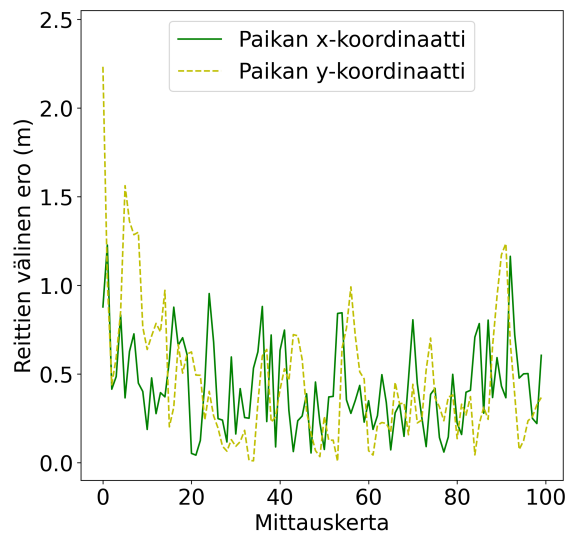
(a) Jäykkä malli



(b) Joustava malli

**Kuva 4.1.** Simuloitu vakionopeusmallinen satunnaiskävely jäykälle ja joustavalle mallille.

(a) Jäykkä malli



(b) Joustava malli

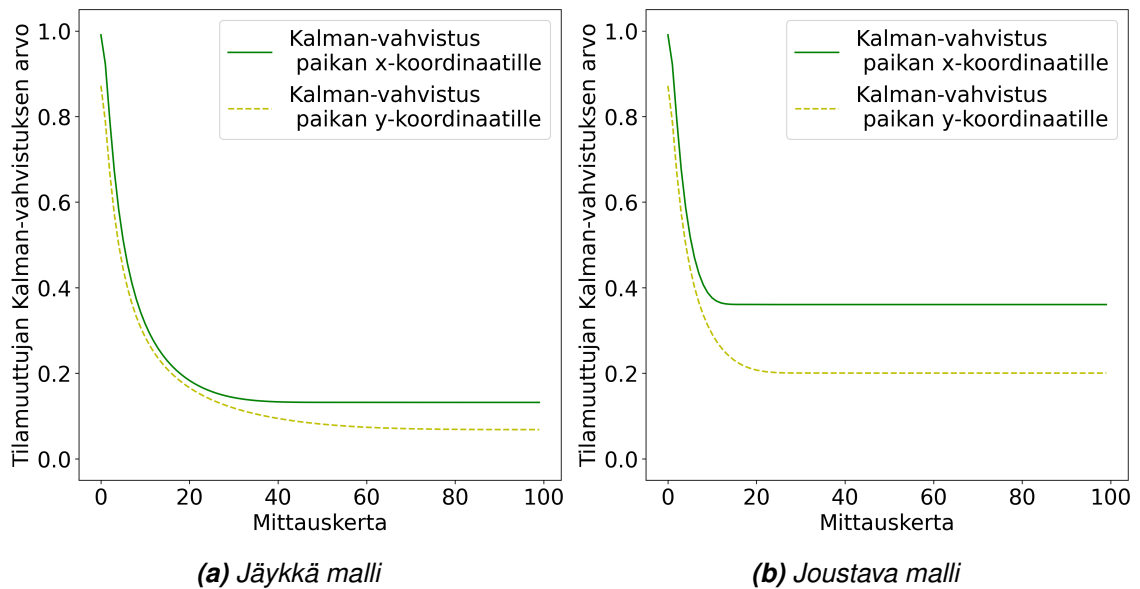
**Kuva 4.2.** Alkuperäisen ja Kalman-suotimella estimoidun reitin välinen ero paikan  $x$ - ja  $y$ -koordinaateille jäykässä ja joustavassa mallissa.

Jäykässä mallissa voidaan huomata kuvista 4.1a ja 4.2a eron olevan suurta reitin alussa, johtuen alkutilan tilaestimaatin  $x_0$  asetetusta suurista nopeuksien arvoista. Asetetusta suuresta alkuarvosta huolimatta estimoitu reitti lähestyy jo muutaman aika-askelen sisällä alkuperäistä reittiä. Reittien välinen ero pysyy suhteellisen matalana etenkin 20. ja 70. aika-askelten välillä kunnes noin 70. aika-askelen jälkeen estimoitu reitti ei ehdi tarpeeksi nopeasti sopeutua alkuperäisen reitin suunnanmuutokseen ja erot kasvavat huomattavan suuriksi.

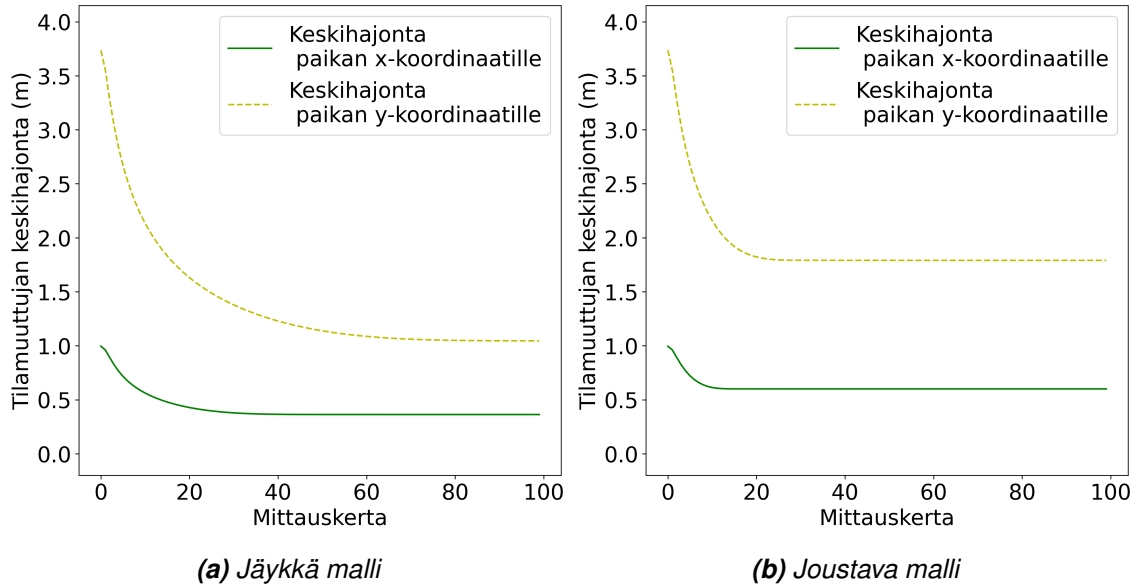
Joustavan mallin kuvista 4.1b ja 4.2b huomataan alkuperäisen ja estimoidun reitin välisen

eron pysyvän tasaisempana koko tarkasteluajana. Reittien erot eivät pääse joustavassa mallissa niin matalalle tasolle aika-askelten 20. ja 70. välillä jäykkään malliin verraten. Kumminkin estimoitu reitti sopeutuu heti suunnanmuutokseen vastoin jäykän mallin estimoidun reitin käyttäytymistä.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvien 4.3 ja 4.4 avulla tarkemmin selitystä juuri selostetuille havainnoille. Kuvassa 4.3 on piirrettynä kuvaajat Kalman-vahvistuksen arvoille kuvausten paikan  $x$ - ja  $y$ -koordinaattia eri aika-askelilla. Vastaavanlainen kuvaus on esiteltyinä posteriori-kovarianssimatriisille kuvassa 4.4. Paikan  $x$ - ja  $y$ -koordinaattia kuvastavat Kalman-vahvistuksen ja posteriori-kovarianssimatriisin arvot ovat saatu vastaavien matriisien diagonaaliarvoista. Nämä arvot peilautuvat mitattaviin suureisiin, jolloin matriisien ylempi diagonaaliarvo vastaa paikan  $x$ -koordinaattia ja alempi  $y$ -koordinaattia. Posteriori-kovarianssimatriisista otetut diagonaaliarvot eli varianssit ovat muutettu kuvan 4.4 mukaisesti vastaamaan keskihajontaa, jolloin voidaan paremmin verrata arvoja samassa yksikössä kuvan 4.2 arvoihin.



**Kuva 4.3.** Kalman-vahvistuksen diagonaaliarvot estimoidun reitin paikan  $x$ - ja  $y$ -koordinaatille jäykässä ja joustavassa mallissa.



**Kuva 4.4.** Posteriori-kovarianssiestimaatin  $P$  keskihajonnaksi muutetut diagonaaliarvot estimoidun reitin paikan  $x$ - ja  $y$ -koordinaatille jäykässä ja joustavassa mallissa.

Kappaleessa 2.5 todettiin Kalman-vahvistuksen kuvaavan luottamusta mittaustuloksen ja mallin ennusteen välillä. Kalman-vahvistuksen arvojen pieneminen tarkoittaa mittaustulosten epävarmuuden ja mallin ennusteeseen luottamisen kasvavan. Kalman-suotimen algoritmista voidaan huomata, että priori-kovarianssiestimaatti, Kalman-vahvistus ja posteriori-kovarianssiestimaatti vaikuttaa toisiinsa verrannollisesti. Tämä voidaan nähdä kuvien 4.3 ja 4.4 vastaavien mallien arvojen yhtäläisestä laskevuudesta. Näin ollen jäykässä mallissa priori-kovarianssiestimaattiin vaikuttava asetettu pienempi tilamallivirhe  $Q$  näkyy Kalman-vahvistuksen vakaan tilan pysähtymisenä pienemmän arvon kohdalle verraten joustavaan malliin ja Kalman-suodin päätyy luottamaan ennemmin mallin ennusteeseen mittausten sijaan. Tällä voidaan selittää jäykän mallin käyttäytyminen. Koska alkuperäinen reitti on lähes saman suuntainen aika-askelten 20. ja 70. välillä, pysyy estimoitu reitti lähellä alkuperäistä luottaessaan oman mallinsa ennusteeseen enemmän. Kumminkin koska epävarmuus mittauksiin on suurta, reagoi estimoitu reitti hitaasti alkuperäisen reitin suunnanmuutokseen. Vastaavasti voidaan selittää joustavan mallin käyttäytyminen. Sillä joustavassa mallissa Kalman-vahvistus saavuttaa vakaan tilan suuremman arvon kohdalla, luottaa malli enemmän mittaustuloksiin jäykkään malliin verraten. Tällöin estimoitu reitti samansuuntaisella osuudella hakeutuu enemmän alkuperäisestä reitistä poiketen virheellistyneiden mittausten suuntaan, mutta vastaavasti reagoi tehokkaasti suunnanmuutoksiin.

## 5. YHTEENVETO

Tässä työssä tutkittiin Kalman-suotimen toimintaa Bayes-päätelyn pohjalta. Työn alussa tutustuttiin Bayes-päätelyn periaatteisiin sekä lineaariseen tila- ja mittaussmalliin. Näiden johdattamana esitettiin Bayes-suodin ja sen erityistapaukseen Kalman-suodin. Kalman-suodinta käsittelevässä alikappaleessa käytiin lävitse muun muassa Kalman-suotimeen liittyviä ominaisuuksia, algoritmin vaiheet sekä Kalman-suotimen laajennukset.

Seuraavassa kappaleessa johdettiin Bayes-päätelyä käyttäen Kalman-suotimen algoritmissa esiintyvien posteriori-tilaestimaatin, posteriori-kovarianssimatriisin sekä Kalman-vahvistuksen kaavat käyttäen kahta erilaista lähestymistapaa. Posteriori-tilaestimaatti ja posteriori-kovarianssimatriisi johdetaan sopimalla parhaimmaksi estimaatiksi suurimman posteritiheyden estimaattori ja Kalman-vahvistus valitsemalla pienimmän neliösumman estimaattori parhaimmaksi estimaatiksi.

Työn lopussa annetaan esimerkkinä Kalman-suotimen toiminnasta Python-ohjelmointikielillä toteutettu simulaatio vakionopeusmallisesta kaksiulotteisesta satunnaiskävelystä. Simulaatiossa luotiin kaksi erilaista tapausta, jotka erosivat toisistaan Kalman-suotimen parametreiksi asetetun alkutilan sekä tilamallivirheen kovarianssimatriisin arvojen suhteen. Alkuperäiset reitit ja virheellistyneet mittauspisteet ovat molemmissa tapauksissa samanlaiset. Tapauksista saatuja tuloksia verrattiin keskenään erilaisten kuvaajien kautta. Vertailuissa havaittiin alkutilan vaikuttavan estimoidun reitin käyttöön hyvin vähän, kun taas tilamallivirheen kovarianssimatriisin vaikuttavan merkittävämmän. Keskeisimpänä huomiona oli, että kovarianssimatriisin pienempi arvo antoi tarkemman estimoidun reitin lähes suorilla osuuksilla, mutta reagoi hitaasti suunnanmuutoksiin siten poiketen paljon alkuperäisestä reitistä. Vastaavasti suuremmalla arvolla estimoitu reitti oli epätasaisempi, mutta reagoi tehokkaammin reitillä tapahtuviin muutoksiin.

## LÄHTEET

- [1] Bolstad, W. ja Curran, J. *Introduction to Bayesian statistics*. 3rd ed. Wiley, 2017.
- [2] Koistinen, P. *Johdatus tilastolliseen päättelyyn*. Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2013.
- [3] Murphy, K. P. *Probabilistic Machine Learning: An introduction*. MIT Press, 2022.
- [4] Sarkka, S. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Vol. 3. Cambridge University Press, 2013.
- [5] Ali-Löytty, S., Collin, J., Leppäkoski, H., Sairo, H. ja Sirola, N. *MAT-45800 Paikannuksen matematiikka, TKT-2540 Paikannuksen menetelmät*. Tampereen teknillinen yliopisto, 2008.
- [6] Everitt, B. S. ja Skrondal, A. *The Cambridge Dictionary of Statistics*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] Jazwinski, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Vol. 64. Mathematics in science and engineering. 1970.
- [8] Chen, Z. *Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond*. Vol. 182. Statistics. 2003.
- [9] Masnadi-Shirazi, H., Masnadi-Shirazi, A. ja Dastgheib, M.-A. *A Step by Step Mathematical Derivation and Tutorial on Kalman Filters*. Cornell University Library, arXiv.org, 2019.
- [10] Adam, S. C. *Kalman Filtering: A Bayesian Approach*. The John Hopkins University, 2017.
- [11] Brookes, M. *The Matrix Reference Manual*. URL: <http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/calculus.html#Hessian> (viitattu 11.11.2022).
- [12] Becker, A. *Kalman Filter: Kalman Gain*. URL: <https://www.kalmanfilter.net/kalmanGain.html> (viitattu 11.11.2022).
- [13] Ali-Löytty, S. *Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa*. Tampereen teknillinen yliopisto, Teknis-luonnontieteellinen osasto, 2004.
- [14] Ali-Löytty, S., Sirola, N. ja Piché, R. *Consistency of three Kalman filter extensions in hybrid navigation*. Proceedings of the European Navigation Conference GNSS, 2005.

## LIITE A: VAKIONOPEUSMALLISEN SATUNNAISKÄVELYN JA KALMAN-SUOTIMEN PYTHON-OHJELMOINTIKIELINEN TOTEUTUS

```

import numpy as np
import math
import random
import matplotlib.pyplot as plt

# Kalman-suodin
# Sisaantulo:
# x: Piori-tilaestimaatti
# P: Piori-kovarianssiestimaatti
# Q: Tilamallivirheen kovarianssimatriisi
# R: Tilamallivirheen kovarianssimatriisi
# H: Mittausmallimatriisi
# y: Mittaukset
# Ulostulo:
# x_arr: Tilaestimaatti jokaiselle paivitykselle
# P_arr: Kovarianssiestimaatti jokaiselle paivitykselle
# K_arr: Kalman-vahvistus jokaiselle paivitykselle
def Kalman(x, P, A, Q, R, H, y):
    x_arr = []
    P_arr = []
    K_arr = []

    for i in range (y.shape[1]):
        x = A*x # Piori x
        P = A*P*A.T + Q # Piori P
        S = H*P*H.T + R # Innovaatio kovarianssi
        K = P*H.T*np.linalg.inv(S) # Kalman-vahvistus
        x = x + K*(np.asmatrix(y[:, i]).T - H*x) # Posteriori x
        P = (np.asmatrix(np.eye(6)) - K*H)*P # Posteriori P

```

```

        x_arr.append(np.asarray(x))
        P_arr.append(np.diagonal(P))
        K_arr.append(np.diagonal(K))

    # Tallennetaan data helpommin kasiteltavaan muotoon
    x_arr = np.hstack(x_arr)
    P_arr = np.vstack(P_arr).T
    K_arr = np.vstack(K_arr).T
    return x_arr, P_arr, K_arr

# Satunnauskavelyn simulaatio
# Sisaantulo:
# n: Mittausten maara
# Ulostulo:
# p_x: Paikan x-koordinatti mittauksissa
# p_y: Paikan y-koordinatti mittauksissa
def Randomwalk(n):
    p_x = [0]
    p_y = [0]
    x = 0
    y = 0
    degree = 0
    for i in range (n-1):
        degree += random.uniform(-5, 5)
        if (degree > 45):
            degree = 40
        if (degree < -45):
            degree = -40
        radians = math.radians(degree)
        x += math.cos(radians)
        y += math.sin(radians)

        p_x.append(x)
        p_y.append(y)

    return [p_x, p_y]

n = 100 # Mittausten maara
dt = 1 # Ajanottovali

```

```

# Simuloidaan satunnaiskävely ja tallennetaan
# paikkakoordinaatit xy-tasolla
read_coordinates = Randomwalk(n)

# Luodaan mittausdata lisaamalla kohinaa paikkakoordinaatteihin
V = np.array([np.random.normal(0, 1, size=n) ,
              np.random.normal(0, 1, size=n)])
measurements = read_coordinates + V

# Tilansiirtomatriisi
A = np.block([[np.eye(3), dt*np.eye(3)],[np.zeros((3,3)), np.eye(3)]])
A = np.asmatrix(A)

# Tilamallin virheen kovarianssimatriisi
sigma_xy2 = 0.01**2 # nopeuden virheeseen tuleva varianssi xy-tasossa
sigma_z2 = 0 # nopeuden virheeseen tuleva varianssi z-tasossa
# Brownin liikkeen diffuusiomatriisi
Q_c = np.block([[sigma_xy2*np.eye(2), np.zeros((2,1))],
                [np.zeros((1,2)), sigma_z2]])
# Vakionopeusmallissa Brownin liike toimii tilamallin virheena
Q = np.block([(dt**3/3)*Q_c, (dt**2/2)*Q_c],
              [(dt**2/2)*Q_c, dt*Q_c])
Q = np.asmatrix(Q)

# Mittausmallimatriisi
# Mitataan vain p_x ja p_y arvoja
H = np.block([[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0]])
H = np.asmatrix(H)

# Mittausmallivirheen kovarianssimatriisi
R = np.block([[1**2, 0],[0, 4**2]])
R = np.asmatrix(R)

# Alkutilan kovarianssimatriisi
# Mita isompi sita suurempi epavarmuus
P0 = np.block([[np.eye(3)*3**2, np.zeros((3,3))],
               [np.zeros((3,3)), np.eye(3)*10**2]])
P0 = np.asmatrix(P0)

# Alkutilan odotusarvo
# Sisaltaa veikkauksen lahtoarvoista
x0 = np.asmatrix([measurements[0,0],measurements[1,0],0,3,4,0]).T

```

```

# Estimoidaan simulaatoidun polun
# alkuperäinen reitti Kalman-suotimella
x_arr, P_arr, K_arr = Kalman(x0, P0, A, Q, R, H, measurements)

# Piirretään kuvaajat alkuperäisestä ja
# Kalman-suotimella estimoidusta reitistä
# sekä sovitetään kohinaiset mittauspisteet
plt.rcParams.update({'font.size':15})
plt.figure()
fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
plt.plot(read_coordinates[0], read_coordinates[1], '-r',
         label = "Alkuperäinen reitti")
plt.plot(x_arr[0], x_arr[1], '--c', label = "Estimoitu reitti")
plt.plot(measurements[0], measurements[1], '-ob', linewidth=0.2,
         markersize=1, label = "Virheellistyneet mittapisteet")
plt.axis('scaled')
plt.xlabel('X-koordinaatti')
plt.ylabel('Y-koordinaatti')
plt.legend(loc="best", prop={'size':8})
plt.show()

# Piirretään kuvaaja Kalman-suotimen diagonaaliarvoista
plt.rcParams.update({'font.size':20})
plt.figure()
fig = plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(K_arr[0, :], '-g',
         label = "Kalman-vahvistus \n paikan x-koordinaatille")
plt.plot(K_arr[1, :], '--y',
         label = "Kalman-vahvistus \n paikan y-koordinaatille")
plt.ylim(-0.05, 1.05)
plt.xlabel('Mittauskerta')
plt.ylabel('Tilamuuttujan Kalman-vahvistuksen arvo')
plt.legend(loc="upper right")
plt.show()

# Lasketaan P:n diagonaaliarvosta (eli variansseista)
# keskihajonta ja piirretään kuvaaja
plt.rcParams.update({'font.size':20})

```

```

plt.figure()
fig = plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(np.sqrt(P_arr[0,:]), '-g',
         label = " Keskihajonta \n paikan x-koordinaatille ")
plt.plot(np.sqrt(P_arr[1,:]), '--y',
         label = "Keskihajonta \n paikan y-koordinaatille")
plt.ylim(-0.2, 4.15)
plt.xlabel('Mittauskerta')
plt.ylabel('Tilamuuttujan keskihajonta (m)')
plt.legend(loc="upper right")
plt.show()

```

```

# Lasketaan alkuperaisen ja Kalman-suotimella
# estimoidun reitin valinen ero ja piirretaan kuvaaja
plt.rcParams.update({'font.size':20})
plt.figure()
fig = plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(abs(x_arr[0]-read_coordinates[0]), '-g',
         label = "Paikan x-koordinaatti")
plt.plot(abs(x_arr[1]-read_coordinates[1]), '--y',
         label = "Paikan y-koordinaatti")
#plt.xlim(-1, 100)
plt.ylim(-0.1, 2.55)
plt.xlabel('Mittauskerta')
plt.ylabel('Reittien valinen ero (m)')
plt.legend(loc="upper center")
plt.show()

```