

Arttu Viskari

# Yleistettyjen ratsujen Hamiltonin kierrokset shakkilaudoilla

# Tiivistelmä

Arttu Viskari: Yleistettyjen ratsujen Hamiltonin kierrokset shakkilaudoilla

Pro gradu -tutkielma

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma

Lokakuu 2022

---

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Hamiltonin kierrosten olemassaoloa ja ominaisuuksia erikokoisilla shakkilaudoilla. Kierroksia tutkitaan sekä tavallisen ratsun että yleistettyjen ratsujen näkökulmasta. Hamiltonin kierros on polku, joka käy läpi jokaisen solmujoukon alkion tasan kerran palaten takaisin alkusolmuunsa.

Tutkielman luvussa 2 käydään läpi tutkielmassa tarvittavia keskeisiä verkkoteorian käsitteitä. Luvussa syvennytään yhtenäisyyden käsitteeseen, komponentteihin sekä Hamiltonin verkkoon.

Tämän jälkeen, luvussa 3, käsitellään tavallisen ratsun kierroksia äärellisillä shakkilaudoilla. Näiden kierrosten olemassaololle kootaan riittävät ja välttämättömät ehdot, jotka on esitetty Schwenkin lauseessa. Schwenkin lauseen todistamiseksi rakennetaan yhdeksän ratsun kierrosta, joista laajennetaan kierrokset jokaiselle Schwenkin lauseen mukaiselle laudalle.

Luvussa 4 laajennetaan tavallisen ratsun käsitettä  $(a, b)$ -ratsuksi ja esitetään välttämättömät ehdot  $(a, b)$ -ratsun kierroksille. Luvussa 4 tarkastellaan erityisesti  $(2, 3)$ -ratsun kierrosten olemassaoloa äärellisillä shakkilaudoilla.

Luvussa 5 käsitellään  $(a, 1)$ -ratsun kierroksia neliön muotoisilla shakkilaudoilla. Luku aloitetaan käymällä läpi, kuinka kierrokset voidaan laajentaa suuremmille laudoille. Tämän jälkeen muodostetaan kierrokset perustapauksille, joista kierrosten laajentaminen suuremmille laudoille on mahdollista. Lopuksi kootaan lause, joka todistaa  $(a, 1)$ -ratsun kierrosten olemassaolon riittävän suurilla laudoilla.

Tutkielman lopuksi, luvussa 6, kootaan yhteenveto ratsun kierroksista erikokoisilla shakkilaudoilla.

Avainsanat: Verkko, Hamiltonin kierros, Hamiltonin verkko, ratsun kierros, ratsun verkko.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Verkkoteoriaa</b>	<b>5</b>
2.1	Keskeisiä määritelmiä . . . . .	5
2.2	Yhtenäisyys . . . . .	6
2.3	Aliverkot ja komponentit . . . . .	7
2.4	Hamiltonin verkko . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ratsun kierros tavallisella ratsulla</b>	<b>11</b>
3.1	Perustapaukset . . . . .	11
3.2	Schwenkin lause . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Ratsun kierros <math>(a, b)</math>-ratsuilla</b>	<b>20</b>
4.1	Välttämättömät ehdot ratsun kierrokselle $(a, b)$ -ratsulla . . . . .	20
4.2	$(2,3)$ -ratsun kierrokset . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Ratsun kierros <math>(a, 1)</math>-ratsuilla</b>	<b>32</b>
5.1	Ratsun kierrosten laajentaminen $n \times n$ -kokoisilta laudoilta suuremmille laudoille $(a, 1)$ -ratsuilla . . . . .	32
5.2	$(a, 1)$ -ratsun kierrosten muodostaminen $6a + 2 \times 6a + 2$ -kokoisille laudoille . . . . .	36
5.3	Tulos . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>46</b>
6.1	Tärkeimmät lopputulokset . . . . .	46
6.2	Lopuksi . . . . .	46
	<b>Lähteet</b>	<b>48</b>

# 1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija laskennallisesti vaativaan ongelmaan, yleistettyjen ratsujen Hamiltonin kierroksien löytämiseen erikokoisilla shakkilaudoilla. Hamiltonin kierrokseksi kutsutaan polkua, joka käy läpi jokaisen solmujoukon alkion tasan kerran palaten takaisin lopulta alkusolmuunsa. Hamiltonin kierros on saanut nimityksensä irlantilaisen matemaatikon Sir William Rowan Hamiltonin mukaan, joka kehitti Ikosian pelin vuonna 1857. Pelissä tehtävänä oli käydä läpi dodekaedrin jokainen solmu täsmälleen kerran niin, että polun alkusolmu ja loppusolmu ovat samat. Hamiltonin kierroksia tarkastellaan tutkielmassa kaksiuotteisilla shakkilaudoilla tavallisella  $(1, 2)$ -ratsulla, yleisellä  $(a, b)$ -ratsulla,  $(2, 3)$ -ratsulla sekä  $(a, 1)$ -ratsulla.  $(a, b)$ -ratsuksi kutsutaan pelinappulaa, joka liikkuu ensin  $a$  askelta vaakatasossa ja  $b$  askelta pystytasossa tai  $b$  askelta vaakatasossa ja  $a$  askelta pystytasossa shakkilaudalla. Ratsulla kuljettuja Hamiltonin kierroksia kutsutaan ratsun kierroksiksi.

Tutkielma aloitetaan pohjustamalla lukija verkkoteorian perusteisiin luvussa 2. Luvussa esitetään tarvittavat verkkoteoreettiset määritelmät ja lauseet, joita käytetään myöhemmin tutkielmassa. Tämän jälkeen, luvussa 3, tarkastellaan Hamiltonin kierroksia erikokoisilla shakkilaudoilla tavallisen ratsun tapauksessa. Luvun keskeisin tulos on Schwenkin lause, joka määrittelee millaisille laudoille on olemassa Hamiltonin kierros tavallisella ratsulla. Lauseen todistamiseksi laaditaan ratsun kierrokset pienille laudoille eli perustapauksille, joista kierrokset laajennetaan jokaiselle lauseen mukaiselle suuremmalle laudalle induktiotodistuksen avulla. Myöhemmissä luvuissa tarkastellaan muun muassa yleisen  $(a, b)$ -ratsun kierroksen välttämättömiä ehtoja,  $(2, 3)$ -ratsun kierroksen tapauksia sekä  $(a, 1)$ -ratsun kierroksen olemassaoloa. Sekä  $(2, 3)$ -ratsulle että  $(a, 1)$ -ratsulle todistetaan ratsun kierros useille erikokoisille laudoille, mutta Schwenkin lauseen kaltaista yleistä lopputulosta ei ole. Todistus kyseisille kierroksille tapahtuu Schwenkin lauseen tapaan laajentamalla jo laadittuja kierroksia induktiotodistuksen avulla. Tutkielman loppuksi on laadittu yhteenveto edellämainittujen aiheiden lopputuloksista.

Tässä tutkielmassa odotetaan lukijalta pohjatietona verkkoteorian perusteiden ymmärtämistä. Syvemmästä verkkoteorian tietämyksestä on hyötyä.

Tutkielman keskeisimpiä lähteitä ovat Allen J. Schwenkin tutkielma [9] ”Which Rectangular Chessboards Have a Knight’s tour?”, G.L. Chian ja Siew-Hui Ongin tutkielma [2] ”Generalized knight’s tours on rectangular chessboards” sekä Nina Kamčevin tutkielma [4] ”Generalised Knight’s Tours”. Näiden lähteiden lisäksi tutkielmassa on käytetty lähteinä muita diskreettiin matematiikkaan kirjoja ja ratsun kierrokseen liittyviä teoksia.

## 2 Verkkoteoriaa

Käydään tässä luvussa läpi tutkielmassa tarvittavia keskeisiä verkkoteorian määritelmiä, käsitteitä ja lauseita. Alaluvussa 2.2 läpikäytävänä aiheena on verkon yhtenäisyys, alaluvussa 2.3 verkkojen aliverkot ja komponentit sekä alaluvussa 2.4 Hamiltonin verkot. Luku pohjautuu lähteisiin [7, s. 6-41] ja [3, s. 93-116].

### 2.1 Keskeisiä määritelmiä

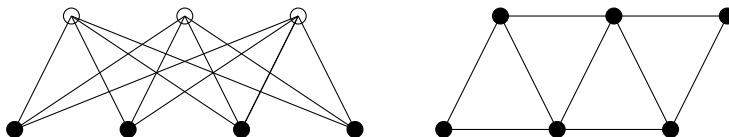
**Määritelmä 2.1.** *Verkko* on pari  $G = (V, E)$ , missä  $V$  on äärellinen joukko ja  $E$  on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja  $\{u, v\}$ , missä  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ . Joukon  $V$  alkioita kutsutaan verkon  $G$  *solmuiksi* ja joukon  $E$  alkioita verkon  $G$  *särmiksi*. *Polku* verkon solmusta  $u$  solmuun  $v$  on sellainen äärellinen jono särmiä  $(e_1, \dots, e_n)$ , että  $e_1 = \{x_0, x_1\}$ ,  $e_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$ , missä  $x_0 = u$ ,  $x_n = v$  ja  $x_0, x_1, \dots, x_n \in V$ . Solmu  $u$  on tämän polun *alkusolmu* ja solmu  $v$  *loppusolmu*. *Polun pituus* on  $n$ .

Jos polun pituus on nolla, on kyseinen polku vain solmu, jolle  $u = x_0 = v$ . Kyseistä polkua nimitetään *tyhjäksi poluksi*. Jos polun pituus on yksi eli solmujen  $u$  ja  $v$  välillä on särmä, kutsutaan solmuja *vierussolmuiksi*. Solmun  $v$  vierussolmujen joukosta käytetään merkintää  $N(v)$ . Polkua solmusta  $u$  solmuun  $v$  merkitään yleensä  $p: u \rightarrow v$  tai solmujonolla  $p: u = x_0, x_1, \dots, x_n = v$ . Polku on *suljettu*, jos alku- ja loppusolmu ovat samat eli  $x_0 = x_n$ .

**Määritelmä 2.2.** Oletetaan, että  $0 < k < n$ . Polkujen  $p_1: x_0, x_1, \dots, x_k$  ja  $p_2: x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$  *yhdisteeksi* kutsutaan polkua  $P: x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$  ja merkitään  $P = p_1 p_2$ .

**Määritelmä 2.3.** Olkoon  $G = (V, E)$  verkko ja  $x \in G$ . Nyt *solmun  $x$  aste*  $\deg_G(x)$  kertoo, kuinka monta vierussolmua  $x$ :llä on.

**Määritelmä 2.4.** Olkoon  $G = (V, E)$  verkko. Nyt  $G$  on *kaksijakoinen*, jos on olemassa  $V$ :n kaksiosainen ositus  $\{A, B\}$ , missä vain  $A$ :n ja  $B$ :n välillä on särmiä. Toisin sanoen, jos  $x, y \in A$  ja  $i, j \in B$ , niin  $\{x, y\} \notin E$  ja  $\{i, j\} \notin E$ .



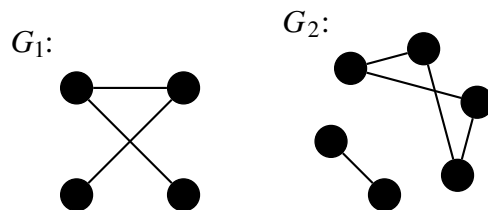
**Kuva 2.1.** Vasemmalla puolella esimerkki kaksijakoisesta verkosta ja oikealla puolella esimerkki verkosta, joka ei ole kaksijakoinen.

## 2.2 Yhtenäisyys

Jos verkon kaikki solmut ovat jollakin tavalla yhdistetyt toisiinsa särmien välityksellä, puhutaan verkon yhtenäisyydestä. Tätä käsittelemme tarkemmin seuraavaksi.

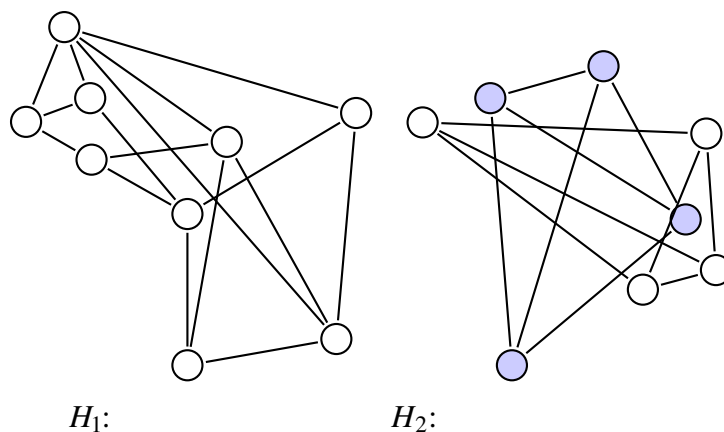
**Määritelmä 2.5.** Verkko  $G = (V, E)$  on *yhtenäinen*, jos jokaisen solmuparin välillä on polku. Verkko on *epäyhtenäinen*, jos se ei ole yhtenäinen.

Epäyhtenäisen verkon solmujoukko voidaan osittaa kahdeksi tai useammaksi epätyhjäksi osajoukoksi niin, että verkon jokaisen särmän alku- ja loppusolmu ovat tämän osituksen samassa osassa.



**Kuva 2.2.** Yksinkertaiset verkot  $G_1$  ja  $G_2$

**Esimerkki 2.6.** Kuvan 2.2 verkko  $G_1$  on selvästi yhtenäinen. Verkko  $G_2$  on puolestaan epäyhtenäinen, sillä vasemmassa alareunassa olevien solmujen ja muiden solmujen välillä ei ole särmää.



**Kuva 2.3.** Verkot  $H_1$  ja  $H_2$

**Esimerkki 2.7.** Kuvan 2.3 verkko  $H_1$  on selvästi yhtenäinen, sillä jokaisesta verkon solmusta saa muodostettua polun kaikkiin verkon solmuihin. Verkko  $H_2$  on puolestaan epäyhtenäinen, sillä yhdenkään valkoisen ja sinisen solmun välillä ei ole särmää.

**Määritelmä 2.8.** Polkua  $p_1: x_0, x_1, \dots, x_n$  kutsutaan *kierrokseksi*, jos se on suljettu ja siinä on vähintään yksi särmä. Polku tai kierros on *yksinkertainen*, jos jokaista särmää käytetään korkeintaan kerran.

Tutkielmassa oletuksena on, että kierrokset ovat yksinkertaisia.

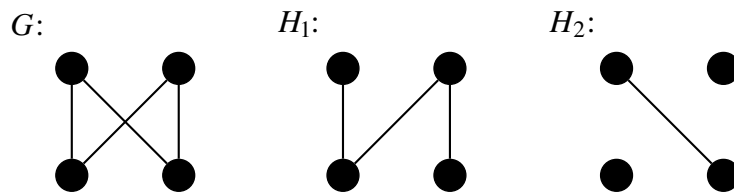
**Lause 2.9.** *Olkoon  $G$  yhtenäinen verkko. Tällöin on olemassa yksinkertainen polku jokaisen  $G$ :n solmuparin välillä.*

*Todistus.* Olkoot  $u$  ja  $v$  eri solmuja yhtenäisessä verkossa  $G = (V, E)$ . Koska  $G$  on yhtenäinen, on  $u$ :n ja  $v$ :n välillä vähintään yksi polku. Olkoon  $p: u \rightarrow v$ , jonka solmujono  $x_0, x_1, \dots, x_n$  on lyhin polku arvoilla  $u = x_0$  ja  $v = x_n$ . Oletetaan vastoin väitettä, että tämä polku ei ole yksinkertainen. Tällöin on olemassa sellaiset solmut  $x_i$  ja  $x_j$ , että  $x_i = x_j$ , missä  $0 \leq i < j$ . Tämä tarkoittaisi, että  $u$ :n ja  $v$ :n välillä olisi lyhyempi polku  $s: u \rightarrow v$ , jonka solmujono olisi  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_n$ . Tämä on ristiriita väitteen kanssa, sillä polku  $p$  on lyhin polku. Täten väite pätee.  $\square$

## 2.3 Aliverkot ja komponentit

**Määritelmä 2.10.** Olkoot  $G = (V, E)$  ja  $H = (S, R)$  verkkoja. Verkko  $H$  on verkon  $G$  *aliverkko*, jos  $S \subseteq V$  ja  $R \subseteq E$ . Jos tämän lisäksi  $S \subset V$  tai  $R \subset E$ , niin verkko  $H$  on verkon  $G$  *aito aliverkko*.

**Määritelmä 2.11.** Olkoot  $R = (V_1, E_1)$  ja  $L = (V_2, E_2)$  verkon  $G(V, E)$  aliverkkoja, joille  $x \neq y$  kaikilla  $x \in V_1$  ja  $y \in V_2$ . Verkkojen  $R = (V_1, E_1)$  ja  $L = (V_2, E_2)$  *yhdistettä* merkitään  $R + L = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ .

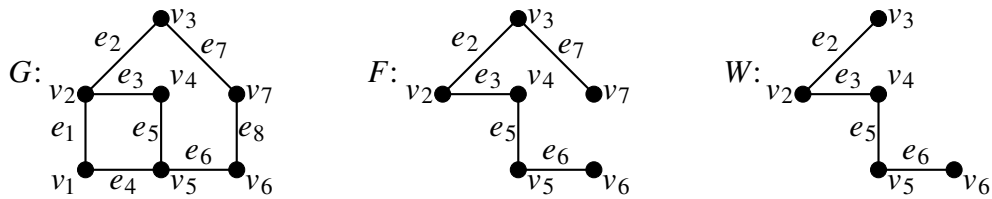


**Kuva 2.4.** Verkko  $G$  ja sen eräät aliverkot  $H_1$  ja  $H_2$

**Määritelmä 2.12.** Olkoot  $G = (V, E)$  ja  $G^* = (W, F)$  verkkoja. Jos  $F \subseteq E$  on epätyhjä särmäjoukko ja  $W \subseteq V$  on joukon  $F$  särmien päätesolmujen joukko, on  $G^*$  joukon  $F$  *särmäindusoima* verkon  $G$  aliverkko. Jos  $W \subseteq V$  on  $G$ :n epätyhjä solmujoukko ja  $F \subseteq E$  sisältää kaikki ne joukon  $E$  särmät, joiden päätesolmut ovat joukossa  $W$ , on  $G^*$  joukon  $W$  *solmuindusoima* verkon aliverkko. Särmäindusoitua aliverkkoa merkitään  $G^* = \langle F \rangle$  ja solmuindusoitua aliverkkoa  $G^* = \langle W \rangle$ .

**Määritelmä 2.13. (solmun poisto).** Olkoon  $v$  verkon  $G = (V, E)$  solmu. Tällöin  $G - v$  on solmujoukon  $V \setminus \{v\}$  indusoima verkon  $G$  aliverkko.

**Määritelmä 2.14. (särmän poisto).** Olkoon  $e$  verkon  $G = (V, E)$  särmä. Tällöin  $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ .



**Kuva 2.5.** Verkko  $G$  ja sen särmäindusoitu aliverkko  $F = \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7\}$  ja solmuindusoitu aliverkko  $W = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ .

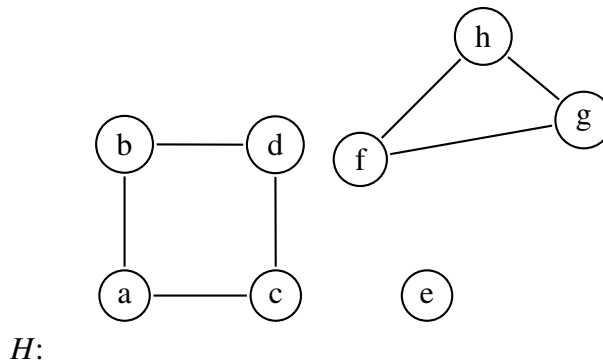
**Määritelmä 2.15. (särmän lisäys).** Olkoot  $u$  ja  $v$  verkon  $G = (V, E)$  eri solmuja ja  $e = \{u, v\}$ . Tällöin  $G + e = (V, E \cup \{e\})$ .

**Määritelmä 2.16.** Verkon  $G$  aliverkko  $H$  on *maksimaalinen* ominaisuuden  $P$  suhteen, jos

1.  $H$ :lla on ominaisuus  $P$  ja
2. aina, kun  $H$  on  $G$ :n aliverkon  $F$  aito aliverkko, ei  $F$ :llä ole ominaisuutta  $P$ .

**Määritelmä 2.17.** *Komponentti* on verkon maksimaalinen yhtenäinen aliverkko.

Jos verkko on yhtenäinen, on siinä vain yksi komponentti. Epäyhtenäisellä verkolla puolestaan komponentteja on useampia.



**Kuva 2.6.** Verkko  $H$ , jossa on kolme komponenttia.

**Esimerkki 2.18.** Tarkastellaan kuvan 2.6 verkkoa  $H$ . Nyt  $H$  on epäyhtenäinen verkko, joka koostuu kolmesta yhtenäisestä komponentista. Ensimmäinen komponentti koostuu solmuista  $a, b, c$  ja  $d$  sekä niiden välisistä särmistä, toinen komponentti koostuu tyhjästä polusta eli solmusta  $e$  ja kolmas komponentti koostuu solmuista  $f, g$  ja  $h$  sekä niiden välisistä särmistä.

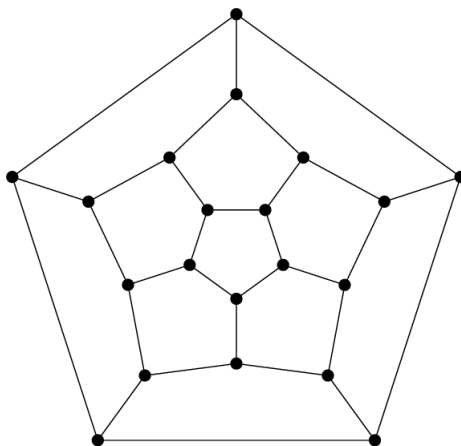
## 2.4 Hamiltonin verkko

Hamiltonin polut ja kierrokset ovat saaneet nimensä Ikosian pelistä, jonka kehitti irlantilainen matemaatikko Sir William Rowan Hamilton vuonna 1857. Tehtävänä



pelissä oli kiertää dodekaedrin (kuva 2.7) solmut särmiä pitkin siten, että jokaisessa solmussa käydään vain kerran. Hamiltonin polkujen ja kierrosten olemassaolon tutkiminen on vaativa, niin sanottu *NP-täydellinen* ongelma. Luku pohjautuu lähteisiin [7, s. 90-92], [3, s. 108-116], [1, s. 125-126] ja [10].

**Määritelmä 2.19.** Verkon  $G = (V, E)$  polku  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  on *Hamiltonin polku*, jos  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  ja kaikille  $0 \leq i < j \leq n$  pätee  $x_i \neq x_j$ . *Hamiltonin kierros* on suljettu Hamiltonin polku.



**Kuva 2.7.** Kuva dodekaedrista tasoon piirrettynä.

Jos verkossa  $G$  on Hamiltonin kierros, niin jokaiselle  $u \in G$  pätee, että  $\deg(u) \geq 2$ . Jos  $\deg(v) < 2$  jollekin  $v \in G$ , ei verkossa ole Hamiltonin kierrosta. Kun polku  $p: x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  on Hamiltonin kierros verkossa  $G$ , niin polun  $p$  indusoimassa aliverkossa kaikille solmuille  $x_i \in p$ , missä  $0 \leq i \leq n$ , pätee  $\deg(x_i) = 2$ .

**Määritelmä 2.20.** Verkkoa kutsutaan *Hamiltonin verkoksi*, jos siinä on Hamiltonin kierros.

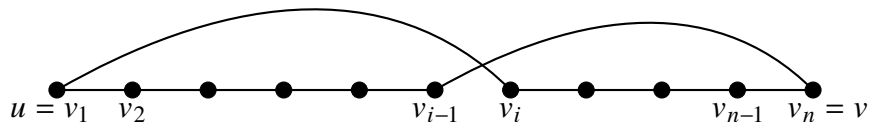
**Lause 2.21.** Olkoon  $G = (V, E)$  yhtenäinen verkko, jossa on  $n$  solmua, missä  $n \geq 3$ . Oletetaan, että  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  aina, kun  $u, v \in V$  ja  $\{u, v\} \notin E$ . Tällöin  $G$ :ssä on Hamiltonin kierros.

*Todistus.* Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa lauseen mukainen verkko  $G$ , joka ei ole Hamiltonin verkko. Lisätään särmiä  $G$ :hen siten, että saadaan maksimaalinen verkko  $G^*$ , jolla on sama perusjoukko, muttei ole Hamiltonin verkko. Koska  $G$  ei ole Hamiltonin verkko, on tällainen  $G^*$  olemassa. Täten, jos solmujen  $u, v \in G^*$  välillä ei ole särmiä, niin  $G^* + uv$ :n täytyy sisältää Hamiltonin kierros  $C$ . Nyt kierros  $C$  sisältää selvästi särmän  $e = uv$ . Täten  $C - e$  on Hamiltonin polku  $u = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$   $G^*$ :ssä.

Nyt, jos  $v_i \in N(u)$ , niin  $v_{i-1} \notin N(v)$ , sillä muuten  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{i+1}, v_i, v_1$  olisi Hamiltonin kierros  $G^*$ :ssä. Täten jokaiselle solmulle  $v_i \in V \setminus \{u\}$ , joka on vierussolmu  $u$ :n kanssa, solmu  $v_{i-1} \in V \setminus \{v\}$ :stä ei ole vierussolmu  $v$ :n kanssa. Mutta tällöin

$$\deg_{G^*}(v) \leq (n-1) - \deg_{G^*}(u).$$

Täten olisi  $\deg_{G^*}(u) + \deg_{G^*}(v) \leq n-1$ , ja edelleen  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \leq n-1$ , joka on ristiriita.  $\square$

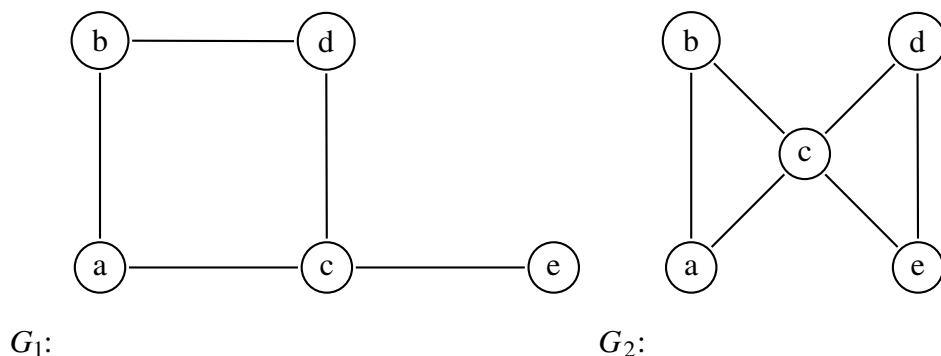


**Kuva 2.8.** Hamiltonin polku lauseen 5.22 todistukselle.

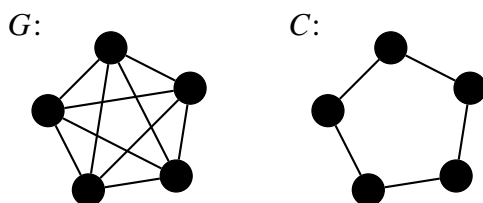
**Seuraus 2.22.** Olkoon  $G$  yhtenäinen yksinkertainen verkko, jossa on  $n$  solmua ( $n \geq 3$ ). Tällöin  $G$ :ssä on Hamiltonin kierros, jos jokaisen solmun aste on vähintään  $n/2$ .

**Esimerkki 2.23.** Osoitetaan, ettei kummassakaan kuvan 2.9 verkossa ole Hamiltonin kierrosta. Ensinnäkin verkossa  $G_1$ :ssa on solmu, jonka aste on yksi, nimittäin  $\deg_{G_1}(e) = 1$ . Täten  $G_1$ :ssä ei ole Hamiltonin kierrosta. Toisaalta  $G_1$ :ssa on Hamiltonin polku  $p: e, c, a, b, d$ .

Tarkastellaan sitten verkkoa  $G_2$ . Koska  $\deg_{G_2}(a) = \deg_{G_2}(b) = \deg_{G_2}(d) = \deg_{G_2}(e) = 2$ , täytyy kyseisiin solmuihin yhteydessä olevien särmien olla osa Hamiltonin kierrosta  $p$ , jos tällainen on olemassa. Tästä seuraa, että  $\deg_p(c) = 4$ . Tämä on ristiriita, joten  $G_2$ :ssa ei voi olla Hamiltonin kierrosta.



**Kuva 2.9.** Verkot  $G_1$  ja  $G_2$



**Kuva 2.10.** Hamiltonin verkko  $G$  ja Hamiltonin kierros  $C$

**Esimerkki 2.24.** Kuvan 2.10 verkko  $G$  on Hamiltonin verkko, sillä siinä on Hamiltonin kierros  $C$ .

## 3 Ratsun kierros tavallisella ratsulla

Yksi monista Hamiltonin kierroksiin liittyvistä ongelmista on kierrosten löytäminen äärellisillä shakkilaudoilla ratsulla liikkuen. Jos ratsulla on olemassa Hamiltonin kierros jollain äärellisellä laudalla, kutsutaan kierrosta *ratsun kierrokseksi*. Luvussa 3 käydään läpi (1,2)-ratsun tapaukset äärellisillä  $m \times n$ -kokoisilla shakkilaudoilla. (1,2)-ratsuksi kutsutaan tavallista shakkipelissä esiintyvää ratsua, joka liikkuu ensin yhden askeleen vaakatasossa ja kaksi askelta pystytasossa tai kaksi askelta vaakatasossa ja yhden askeleen pystytasossa.

Alaluvussa 3.1 käydään läpi pienimmät mahdolliset shakkilaudat, jossa ratsun kierros (1,2)-ratsulla on mahdollista. Näitä perustapauksia tarvitsemme alaluvussa 3.2, jossa esittelemme (1,2)-ratsun tapauksia käsittelevän Schwenkin lauseen. Luku pohjautuu lähteeseen [9, s. 325-332].

**Määritelmä 3.1.** *Shakkilaudat* ovat suorakulmion muotoisia  $m \times n$ -kokoisia lautoja. Lautojen *rivit* ovat vaakasuorassa olevat ruutujonot ja *sarakkeet* pystysuorassa olevat ruutujonot. Shakkilaudan ruudut ovat vuorotellen mustia ja valkoisia niin, että samanvärisiä ruutuja ei ole vierekkäin ja vasemman alakulman ruutu on musta (katso kuva 3.1). Shakkipelistä tuttu *tavallinen ratsu* liikkuu laudalla joko yhden sarakkeen ja kaksi riviä tai kaksi saraketta ja yhden rivin siirtyessään.

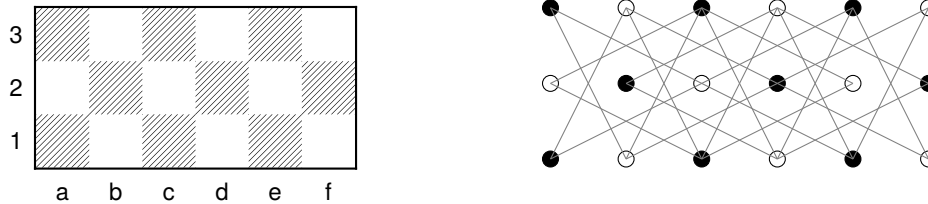
Ratsun liikkeitä kuvaava shakkilauta voidaan esittää *ratsun verkkona*  $G(m, n) = (V, E)$ , missä  $m$  on shakkilaudan sarakkeiden määrä,  $n$  rivien määrä,  $V$  shakkilaudan ruutuja vastaava solmujoukko ja  $E$  kaikista laillisista ratsun siirroista koostuva särmäjoukko. Solmujoukko  $V$  sisältää kaikki solmuparit  $(i, j)$ , missä  $0 \leq i \leq m - 1$  ja  $0 \leq j \leq n - 1$ . Verkossa  $G(m, n)$  on särmä solmujen  $(x_1, y_1) \in V$  ja  $(x_2, y_2) \in V$  välillä, jos ja vain jos ratsu voi siirtyä solmusta  $(x_1, y_1)$  solmuun  $(x_2, y_2)$ . Solmujen  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  välistä särmää voidaan merkitä viivalla  $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ . Ratsun verkossa olevaa Hamiltonin kierrosta kutsutaan *ratsun kierrokseksi*. Tutkielmassa verkkoa käsitellään karteesisen koordinaatiston tavoin eli verkon vasemman alareunan ruutu on solmu  $(0, 0)$  ja oikean yläreunan ruutu on solmu  $(m - 1, n - 1)$ . Tämä poikkeaa lähteiden [9, s. 325-332] ja [2, s. 80-98] esitystavasta, jossa koordinaatointi tapahtuu matriisien tapaan. Näissä lähteissä vasemman yläreunan ruutua käsitellään solmuna  $(1, 1)$  ja oikean alareunan ruutua solmuna  $(m, n)$ .

Koska ratsu vuorottelee mustien ja valkoisten solmujen välillä, niin ratsun verkko  $G(m, n)$  ja sitä vastaava shakkilauta ovat aina kaksijakoisia.

### 3.1 Perustapaukset

Esitellään ensin perustapaukset pienimmille  $m \times n$ -kokoisille laudoille, joilla on olemassa ratsun kierros. Perustapausten avulla ratsun kierrokset voidaan laajentaa myöhemmin suuremmille laudoille.

Tarkastellaan ratsun verkkoja  $G(6, 5)$ ,  $G(8, 5)$ ,  $G(6, 6)$ ,  $G(6, 7)$ ,  $G(8, 7)$ ,  $G(6, 8)$ ,  $G(8, 8)$ ,  $G(3, 10)$  ja  $G(3, 12)$ . Näillä verkoilla on ratsun kierros esimerkiksi kuvan 3.2 mukaisesti. Nämä perustapaukset auttavat riittävästi Schwenkin lauseen todistukseen.



**Kuva 3.1.**  $6 \times 3$ -kokoinen shakkilauta ja vastaava ratsun verkko  $G(6, 3)$ .

### 3.2 Schwenkin lause

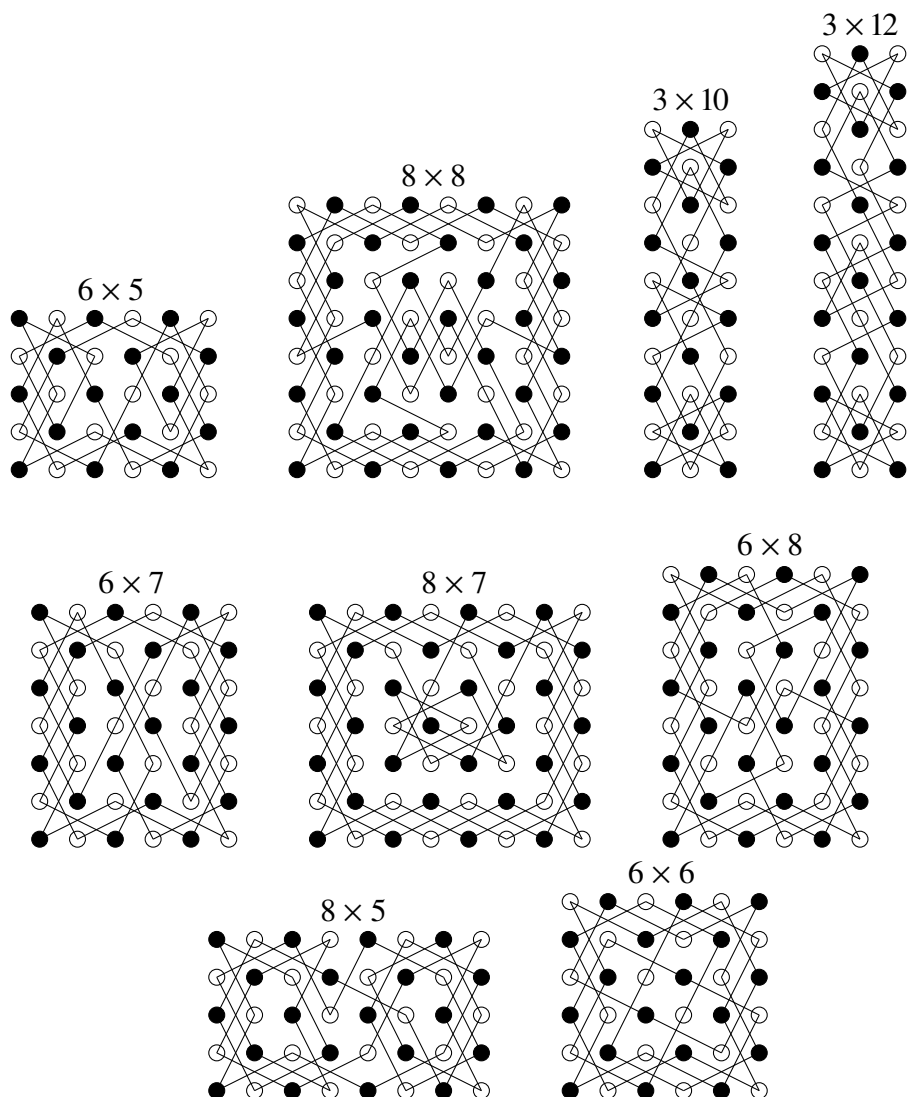
**Lause 3.2.** (Schwenk) *Olkoon  $1 \leq n \leq m$ . Tällöin  $m \times n$ -kokoisella shakkilaudalla on olemassa epätriviaali ratsun kierros, jos ja vain jos:*

1. vähintään toinen luvuista  $m$  ja  $n$  on parillinen,
2.  $n \neq 1, 2$ , ja  $4$ , ja
3.  $n \neq 3$  tai  $m \neq 4, 6$  ja  $8$ .

*Todistus.* Todistetaan ensin, että ehdot 1, 2 ja 3 pätevät tavallisella ratsulla, kun shakkilauta on  $m \times n$ -kokoinen. Tämän jälkeen käydään läpi, kuinka ratsun kierros muille laudoille rakennetaan.

Kun  $m$  ja  $n$  ovat molemmat parittomia, niin on  $G(m, n)$ :ssä myös pariton määrä ruutuja. Koska ratsun on vuoroteltava mustien ja valkoisten solmujen välillä, on solmuja oltava parillinen määrä, jotta ratsu voi suorittaa Hamiltonin kierroksen. Täten vähintään toinen luvuista  $m$  ja  $n$  on parillinen.

Triviaalisti, jos  $n = 1$ , niin ratsun verkko  $G(m, n)$  on särmätön. Tällöin ratsulla ei ole Hamiltonin kierrosta. Jos taas  $n = 2$ , niin ratsun verkko  $G(m, n)$  on epäyhtenäinen, joten verkossa ei ole Hamiltonin kierrosta. Todistetaan sitten, että ei ole olemassa ratsun kierrosta, kun  $n = 4$  (katso kuva 3.3). Oletetaan, että on olemassa ratsun kierros  $v_1 v_2 \dots v_{4m} v_1$ . Väritetään ensimmäisen ja viimeisen rivin solmut punaisiksi ja muiden rivien solmut sinisiksi. Nyt eräät siniset solmut ovat yhteydessä toisiin sinisiin solmuihin (esimerkiksi solmut  $(0, 2)$  ja  $(2, 1)$ ), kun taas punaiset solmut ovat puolestaan yhteydessä vain sinisiin solmuihin. Täten oletetussa ratsun kierroksessa punaiset solmut ovat aina yhteydessä sinisiin solmuihin särmällä. Koska kummankin värisiä solmuja on  $2m$  kappaletta, täytyy ratsun vaihdella sinisten ja punaisen solmujen välillä polkua edetessä. Solmusta  $v_1 = (0, 0)$  lähdettäessä voidaan todeta jokaisen parittoman solmun  $v_{2k+1}$  olevan punainen. Kuitenkin alkuperäisellä



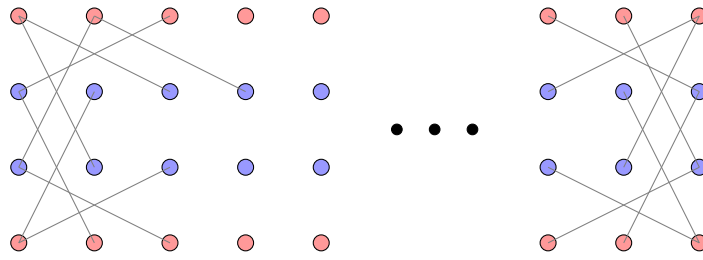
**Kuva 3.2.** Yhdeksän perustapausta ratsun kierroksille.

mustavalkoisella solmujen värityksellä jokainen pariton solmu  $v_{2k+1}$  on myös valkoinen. Siispä jokainen punainen solmu on myös valkoinen solmu. Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa, sillä selvästi punaiset solmut eivät ole yleisesti samat kuin valkoiset solmut. Täten ratsun verkossa  $G(m, 4)$  ei ole Hamiltonin kierrosta  $(1, 2)$ -ratsulla. Siis lauseen kohta 2 on voimassa.

Todistetaan sitten kohta 3. Ensinnäkään  $4 \times 3$ -kokoinen lauta ei sisällä ratsun kierrosta. Sen todistus tapahtuu kohdan 2 tavoin. Siirrytään siis tarkastelemaan suoraan verkon  $G(6, 3)$  tapausta.

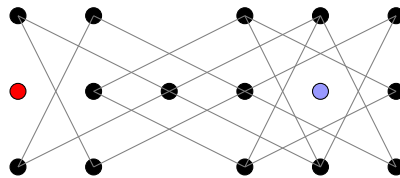
Poistettaessa solmu verkosta poistetaan myös kyseiseen solmuun yhteydessä olevat särmät. Täten, kun poistetaan  $k$  solmua Hamiltonin verkosta, jakautuu verkko enintään  $k$  komponenttiin. Nyt  $6 \times 3$ -kokoisella laudalla ei ole ratsun kierrosta, sillä poistamalla solmut  $(2, 0)$  ja  $(2, 2)$  verkosta  $G(6, 3)$  jakautuu verkko kolmeen komponenttiin kuvan 3.4 mukaisesti.

Tarkastellessa ratsun verkon  $G(8, 3)$  tapausta huomataan, että solmujen  $(0, 0)$ ,

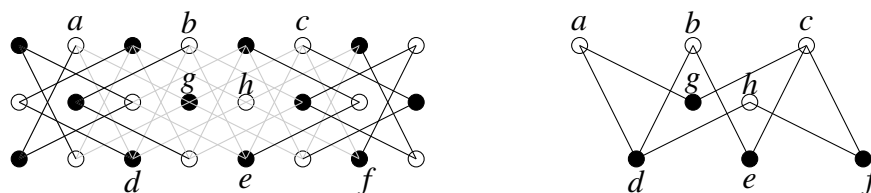


**Kuva 3.3.** Verkko  $G(m, 4)$  lauseen 3.2 todistuksen mukaisesti.

$(0,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(1,1)$ ,  $(7,0)$ ,  $(7,1)$ ,  $(7,2)$  ja  $(6,1)$  aste on kaksi. Täten kyseisiin solmuihin yhteydessä olevat särmät täytyvät olla mukana ratsun kierroksessa, kuten kuvassa 3.5. Nämä särmät muodostavat kuusi polkua, joiden täytyy sisältyä ratsun kierrokseen. Nyt solmut  $(3,1)$  ja  $(4,1)$  eivät kuulu yhteenkään polkuun, joten niiden katsotaan olevan tyhjiä polkuja. Määritetään sellainen uusi kahdeksansolmuinen aliverkko  $G^*(8, 3)$ , missä ratsun verkon  $G(8, 3)$  jokaisesta polusta toinen päätesolmu sisältyy uuteen aliverkkoon (kuten kuvassa 3.5). Aliverkkoon lisätään särmä solmujen  $i$  ja  $j$  välille, jos ratsun verkossa  $G(8, 3)$  on särmä niiden sisältävien polkujen päätepisteiden välillä. Jos siis verkossa  $G(8, 3)$  on ratsun kierros, täytyy verkon  $G^*(8, 3)$  mukainen kierros oltava mukana kyseisessä ratsun kierroksessa. Nyt verkossa  $G^*(8, 3)$  on kuitenkin kaksi solmua, joiden aste on kolme. Määritelmän 2.19 mukaan Hamiltonin kierroksessa jokaisen solmun aste on kaksi, joten tämä on ristiriita. Täten verkoissa  $G^*(8, 3)$  ja  $G(8, 3)$  ei ole ratsun kierrosta.



**Kuva 3.4.** Verkko  $G(6, 3)$ , josta on poistettu solmut  $(2, 0)$  ja  $(2, 2)$ . Poistettujen solmujen vuoksi verkko jakautuu kolmeen komponenttiin.



**Kuva 3.5.** Hamiltonin kierroksen vaaditut särmät verkossa  $G(8, 3)$  ja tästä johdettu verkko  $G^*(8, 3)$ .

Täten lauseen kohdat 1, 2 ja 3 ovat voimassa. Todistetaan pienempiä lautoja laajentamalla, että kaikilla muilla laudoilla on olemassa ratsun kierros. Seuraava apulause mahdollistaa neljän sarakkeen lisäämisen Hamiltonin kierroksen sisältävään

verkkoon  $G(m, n)$  niin, että uudessa laudassa  $G(m + 4, n)$  on olemassa Hamiltonin kierros. Apulausetta voi soveltaa sarakkeiden lisäksi myös rivien lisäämiseen.

**Apulause 3.3.** Olkoon  $3 < n \leq m$ . Jos ratsulla on verkossa  $G(m, n)$  Hamiltonin kierros, johon sisältyy särmäjoukko

$$R(m, n) = \{(m - 1, n - 1) - (m - 2, n - 3), (m - 1, n - 2) - (m - 2, n - 4), \\ (m - 1, n - 3) - (m - 2, n - 1), (0, 0) - (2, 1), (1, 0) - (3, 1), \\ (2, 0) - (0, 1), (m - 1, 0) - (m - 2, 2), (m - 1, 0) - (m - 3, 1), \\ (m - 1, 2) - (m - 2, 0), (m - 1, 1) - (m - 3, 0)\},$$

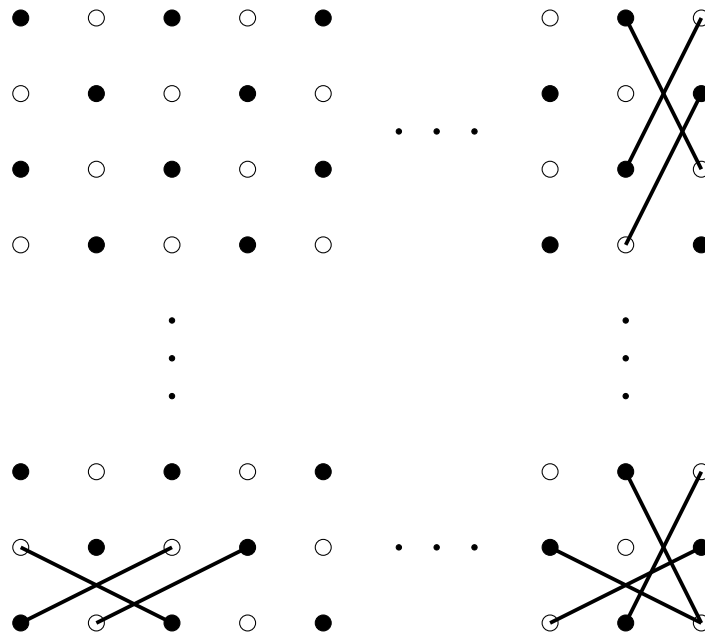
on verkossa  $G(m + 4, n)$  Hamiltonin kierros, johon sisältyy särmäjoukko  $R(m + 4, n)$ . Jos  $n = 3$ , niin sama väite pätee, kunhan

$$R(m, n) = R(m, 3) = \{(0, 0) - (2, 1), (1, 0) - (3, 1), (2, 0) - (0, 1), \\ (m - 1, 0) - (m - 2, 2), (m - 1, 0) - (m - 3, 1), \\ (m - 1, 1) - (m - 3, 0), (m - 1, 2) - (m - 2, 0)\}.$$

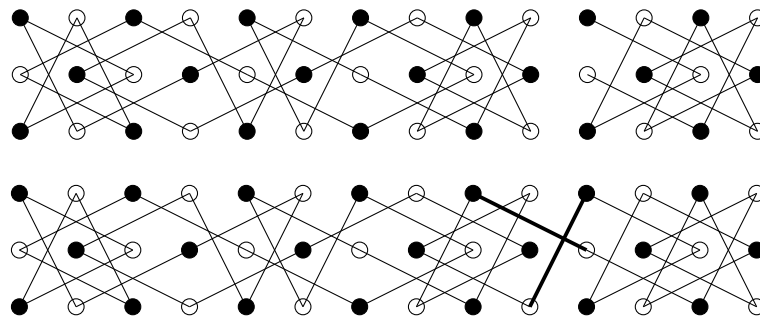
*Todistus.* Särmäjoukko  $R(m, n)$  on havainnollistettu kuvassa 3.6. Särmäjoukkoon  $R(m, 3)$  kuuluu kuvasta vain kolmen alimman rivin särmät. Tarkastellaan ensin verkon  $G(m, 3)$  tilannetta. Oletetaan, että on olemassa ratsun kierros verkossa  $G(m, 3)$ , joka sisältää särmäjoukon  $R(m, 3)$ . Lisätään kuvan 3.7 mukainen Hamiltonin polun sisältävä  $4 \times 3$ -kokoinen verkko ratsun kierroksen sisältävän verkon  $G(m, 3)$  jatkeeksi. Poistetaan särmä  $(m - 1, 0) - (m - 2, 2)$  verkosta ja lisätään poistetun särmän tilalle särmät  $(m - 1, 0) - (m, 2)$  sekä  $(m - 2, 2) - (m, 1)$ . Tämän avulla verkot yhdistyvät yhdeksi Hamiltonin kierrokseksi, joka edelleen sisältää särmäjoukon  $R(m, 3)$ . Toistamalla edellistä laajennusmenetelmää saadaan laajennettua  $m \times 3$ -kokoisille laudoille ennaltarakennettuja ratsun kierroksia äärettömän monta kertaa neljällä sarakkeella. Kuvassa 3.7 on havainnollistettu Hamiltonin kierroksen laajentaminen verkosta  $G(m, 3)$  verkkoon  $G(m + 4, 3)$  arvolla  $m = 10$ .

Kun  $n \geq 5$ , niin hyödynnetään tiettyä  $4 \times n$ -kokoista verkkoa  $H(4, n)$  (Vrt. kuva 3.8). Tämä verkko on muodostettu verkosta  $G(4, n)$  poistamalla ne särmät, jotka yhdistävät toisen ja kolmannen sarakkeen solmut sekä särmät, jotka yhdistävät kahden sarakkeen päässä toisistaan olevat solmut. Poikkeustapauksena kahta ensimmäistä riviä yhdistäviä sekä kahta viimeistä riviä yhdistäviä särmä ei poisteta. Nyt jäljelle jääneen verkon  $H(4, n)$  jokaisen solmun aste on 2. Verkon särmät muodostavat kierroksia, jotka mukailevat verkon ulkoreunaa mahdollisimman lähellä. Verkolla  $H(4, n)$  on kaksi  $2n$ -pituista kierrosta, kun  $n$  on pariton sekä neljä  $n$ -pituista kierrosta, kun  $n$  on parillinen. Todistetaan tämä seuraavaksi induktion avulla.

Kuvan 3.8 vasemmanpuoleinen verkko esittää yhden kierroksen verkossa  $H(4, 5)$ . Toinen kierros muodostuu vastaavasti heijastuksena sarakkeiden suuntaisesti. Kaksi ylimääräistä alinta riviä havainnollistavat, kuinka kierros laajennetaan verkkoon  $H(4, 7)$ . Tarkemmin sanoen kierros laajennetaan poistamalla tummennettut särmät  $(0, 3) - (2, 2)$  ja  $(1, 3) - (3, 2)$  sekä lisäämällä katkoviivalla merkityt särmät



**Kuva 3.6.** Vaaditut kymmenen särmää ratsun kierroksen laajentamiseen.



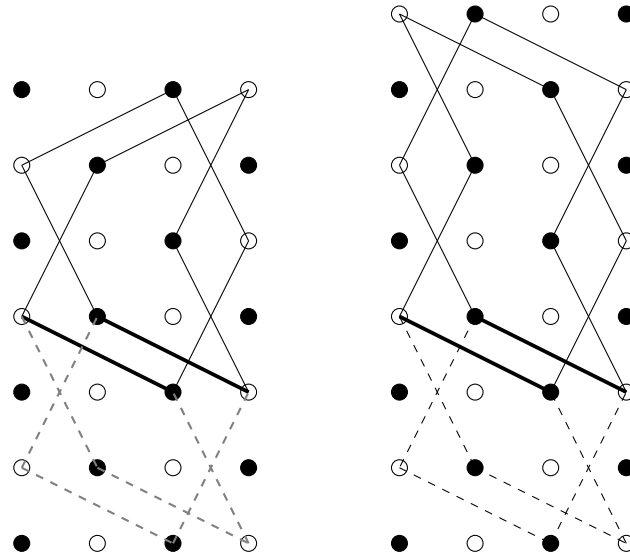
**Kuva 3.7.** Hamiltonin kierroksen laajennus verkosta  $G(m, 3)$  verkkoon  $G(m + 4, 3)$  arvolla  $m = 10$ .

$(1, 3) - (0, 1)$ ,  $(0, 1) - (2, 0)$ ,  $(2, 0) - (3, 2)$ ,  $(0, 3) - (1, 1)$ ,  $(1, 1) - (3, 0)$  ja  $(3, 0) - (2, 2)$ . Toistamalla laajentamista saadaan kaksi kierroksinen verkko  $H(4, n)$ , kun  $n$  on pariton.

Vastaavasti kuvan 3.8 oikeanpuoleinen verkko esittää kahta kierrosta verkossa  $H(4, 6)$ . Muut kaksi kierrosta muodostetaan vastaavasti heijastuksina sarakkeiden suuntaisesti. Kuten tapauksissa, missä  $n$  on pariton, verkon  $H(4, 6)$  kierroksia laajennetaan verkkoon  $H(4, 8)$  poistamalla tummennetut särmät  $(0, 3) - (2, 2)$  ja  $(1, 3) - (3, 2)$  sekä lisäämällä katkoviivalla merkityt särmät, jotka ovat samat kuin parittomien rivimäärien tapauksissa. Toistamalla laajentamista saadaan neljä kierroksinen verkko  $H(4, n)$ , kun  $n$  on parillinen.

Olkoon  $n$  pariton. Laajennetaan nyt ratsun kierrosta verkosta  $G(m, n)$  verkkoon  $G(m + 4, n)$  asettamalla edellä muodostettu verkko  $H(4, n)$  verkon  $G(m, n)$  jatkeeksi, kuten kuvassa 3.9. Poistetaan ensiksi särmät  $(m - 1, n - 1) - (m - 2, n - 3)$  ja  $(m - 1, n - 2) - (m - 2, n - 4)$  Hamiltonin kierroksesta sekä särmät  $(m, n - 4) - (m + 1, n - 2)$  ja  $(m, n - 3) - (m + 1, n - 1)$  verkosta  $H(4, n)$ . Lisätään sitten särmät  $(m - 1, n - 1) - (m +$

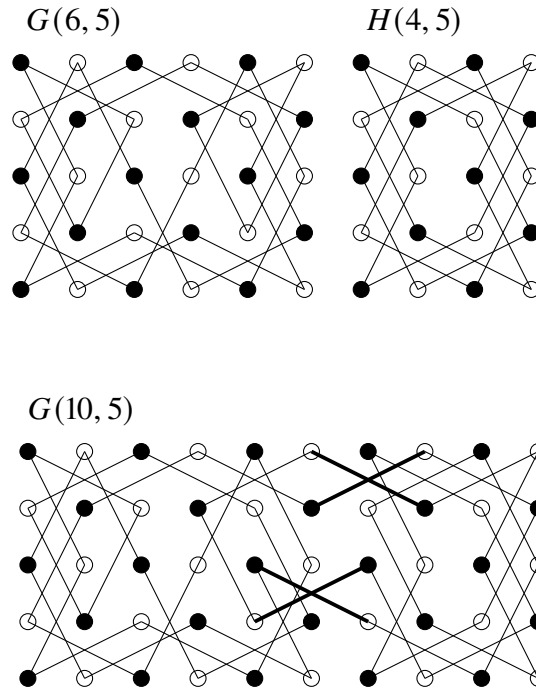




**Kuva 3.8.** Vasemmalla yksi verkon  $H(4, 5)$  kierros ja sen laajennus verkkoon  $H(4, 7)$  ja oikealla kaksi verkon  $H(4, 6)$  kierrosta ja niiden laajennukset verkkoon  $H(4, 8)$ .

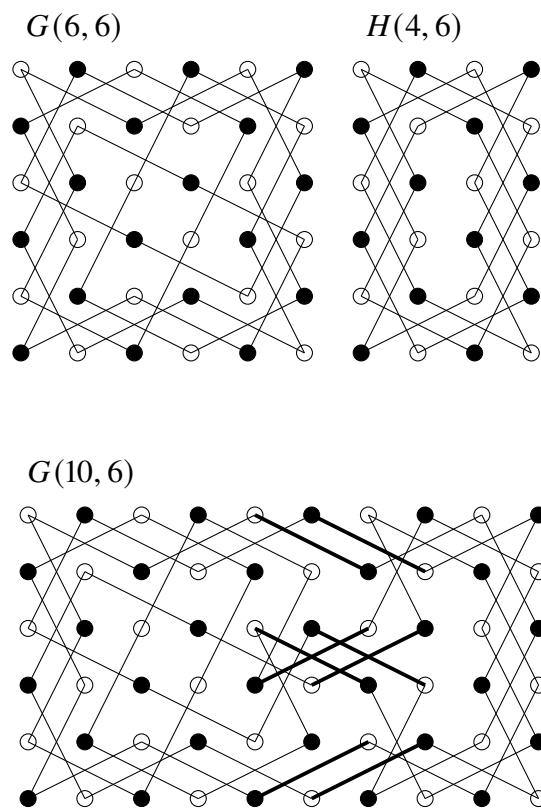
$1, n-2), (m-1, n-2)-(m+1, n-1), (m-2, n-3)-(m, n-4)$  ja  $(m-2, n-4)-(m, n-3)$ . Nyt verkon  $H(4, n)$  sisältämää kaksi kierrosta yhdistyvät verkon  $G(m, n)$  Hamiltonin kierrokseen muodostaen uuden Hamiltonin kierroksen verkkoon  $G(m+4, n)$ . Uusi Hamiltonin kierros sisältää särmäjoukon  $R(m, n)$ . Kuvassa 3.9 on havainnollistettu verkon  $G(6, 5)$  Hamiltonin kierroksen laajentaminen verkkoon  $G(10, 5)$ .

Olkoon  $n$  parillinen. Vastaavasti verkon  $G(m, n)$  Hamiltonin kierrosta voidaan laajentaa verkkoon  $G(m+4, n)$  asettamalla verkko  $H(4, n)$  verkon  $G(m, n)$  jatkeeksi, kuten kuvassa 3.10. Poistetaan ensiksi särmät  $(m-1, n-1)-(m-2, n-3), (m-2, n-1)-(m-1, n-3), (m-1, 0)-(m-2, 2)$  ja  $(m-2, 0)-(m-1, 2)$  verkosta  $G(m, n)$  sekä särmät  $(m, n-2)-(m+1, n-4), (m, n-4)-(m+1, n-2), (m, 3)-(m+1, 1)$  ja  $(m, 1)-(m+1, 3)$  verkosta  $H(4, n)$ . Tämän jälkeen uuteen verkkoon lisätään särmät  $(m-2, n-1)-(m, n-2), (m-1, n-1)-(m+1, n-2), (m-2, n-3)-(m, n-4), (m-1, n-3)-(m+1, n-4), (m-2, 2)-(m, 3), (m-1, 2)-(m+1, 3), (m-2, 0)-(m, 1)$  ja  $(m-1, 0)-(m+1, 1)$ . Jälleen huomataan, että uusi verkko  $G(m+4, n)$  sisältää särmäjoukon  $R(m, n)$ . Täten kierroksen laajentaminen suurempaan verkkoon on mahdollista. Kierroksen laajentamista verkosta  $G(m, 6)$  verkkoon  $G(m+4, 6)$  arvolla  $n = 6$  havainnollistetaan kuvassa 3.10. Nyt kaikille parittomille ja parillisille luvuille  $n$  pätee apulauseen väite.  $\square$



**Kuva 3.9.** Kierroksen laajennus verkosta  $G(6,5)$  verkkoon  $G(10,5)$ .

*Todistuksen loppu:* Apulauseen avulla voidaan todistaa Schwenkin lause loppuun. Nyt apulauseen mukaan voidaan lisätä neljä riviä tai neljä saraketta valmiisiin ratsun kierroksiin, joissa on särmäjoukko  $R(m,n)$ . Alaluvussa 3.1 muodostimme tietyt yhdeksän perustapausta, joille kierroksen laajentaminen on mahdollista. Huomataan, että tapausten  $6 \times 5$ ,  $6 \times 6$ ,  $6 \times 7$  ja  $6 \times 8$  ansiosta voidaan laajentaa ratsun kierrosta kaikille  $G(6,n)$  ja  $G(m,6)$ -kokoisille laudoille sekä tapausten  $8 \times 5$ ,  $8 \times 6$ ,  $8 \times 7$  ja  $8 \times 8$  ansiosta  $G(8,n)$  ja  $G(m,8)$ -kokoisille laudoille, kun  $m, n \geq 9$ . Lisäksi tapausten  $6 \times 5$ ,  $8 \times 5$ ,  $6 \times 7$  ja  $8 \times 7$  avulla kierrosta voidaan laajentaa kierrosta laudoille  $G(m,5)$ ,  $G(5,n)$ ,  $G(m,7)$  ja  $G(7,n)$ , kun  $m, n \geq 10$  ja  $m$  ja  $n$  ovat parittomia. Myös tapauksien  $3 \times 10$  ja  $3 \times 12$  avulla voidaan laajentaa kierrosta kaikille  $G(3,n)$  ja  $G(m,3)$ -kokoisille laudoille, kun  $m$  ja  $n$  ovat parittomia ja  $m, n \geq 14$ . Näin ollen ratsun kierros voidaan muodostaa kaikille  $m \times n$ -kokoisille laudoille lauseen ehtojen mukaisesti.  $\square$



**Kuva 3.10.** Hamiltonin kierroksen laajennus verkosta  $G(m, 6)$  verkkoon  $G(m + 4, 6)$  arvolla  $m = 6$ .

## 4 Ratsun kierros $(a, b)$ -ratsuilla

Alaluvussa 4.1 käydään läpi  $(a, b)$ -ratsun välttämättömät ehdot  $m \times n$ -kokoisille shakkilaudoille.  $(a, b)$ -ratsuksi kutsutaan ratsua, joka liikkuu ensin  $a$  askelta vaakatasossa ja  $b$  askelta pystytasossa tai  $b$  askelta vaakatasossa ja  $a$  askelta pystytasossa. Alaluvussa 4.2 tarkastellaan  $(2, 3)$ -ratsua ja sen kierrosten olemassaoloa erikokoisilla shakkilaudoilla yhtenä  $(a, b)$ -ratsun tapauksena.  $(2, 3)$ -ratsun tapauksia käsittelevä alaluku seuraa Chian tutkielmaa "Generalized knight's tours on rectangular chessboards"[2, s. 80-98] ja sen kuvat ovat muodostettu Chian tutkielman mukaisesti. Luvussa on käytetty myös lähteitä [6, s. 133.145] ja [5, s. 1-6].

**Määritelmä 4.1.** Olkoot  $a, b > 0$ . Nyt  $(a, b)$ -ratsun verkkoa merkitään verkkona  $G(m, n, a, b)$ , missä  $m$  ja  $n$  ilmaisevat sarakkeiden sekä rivien määrän. Luvut  $a$  ja  $b$  ilmaisevat ratsun liikkeiden suuruutta pysty- ja vaakasuunnassa kyseisessä verkossa. Vastaavasti  $(a, b)$ -ratsun kierrosta verkossa  $G(m, n, a, b)$  merkitään kierroksena  $C(m, n, a, b)$ .

Esimerkiksi  $(2, 3)$ -ratsun verkkoa merkitään verkkona  $G(m, n, 2, 3)$ .

**Apulause 4.2.** Olkoon  $G(m, n, a, b)$  verkko ja  $a + b$  pariton luku. Väritetään verkon solmut punaisiksi tai sinisiksi niin, että kummankin värisiä solmuja on saman verran. Oletetaan, että punaiseksi väritetyt solmut ovat yhteydessä vain siniseksi väritettyihin solmuihin ja vähintään yksi siniseksi väritetty solmu on yhteydessä toiseen siniseksi väritettyyn solmuun. Tällöin  $G(m, n, a, b)$  ei sisällä Hamiltonin kierrosta.

*Todistus.* Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa Hamiltonin kierros  $C = v_1, v_2, \dots, v_{mn}, v_1$  verkossa  $G(m, n, a, b)$ . Koska molempaan värisiä solmuja on saman verran ja punaiset solmut ovat yhteydessä vain sinisiin solmuihin, niin ratsun täytyy vuorotella punaisten ja sinisten solmujen välillä oletetussa kierroksessa  $C$ . Väritetään kaikki parittomat solmut  $v_{2r+1}$  punaisiksi ja kaikki parilliset solmut  $v_{2r}$  sinisiksi. Shakkilaudan alkuperäisellä mustavalkoisella solmujen värityksellä jokainen pariton solmu on myös valkoinen, joten jokainen punainen solmu on myös valkoinen solmu. Vastaavasti myös jokainen sininen solmu on alkuperäisellä värityksellä musta solmu. Koska oletuksen mukaan on olemassa särmä kahden sinisen solmun välillä, niin on olemassa särmä myös kahden mustan solmun välillä. Tämä on ristiriita väitteen kanssa, joten tällöin verkossa  $G(m, n, a, b)$  ei selvästikään ole Hamiltonin kierrosta.  $\square$

### 4.1 Välttämättömät ehdot ratsun kierrokselle $(a, b)$ -ratsulla

**Lause 4.3.** *Olkoon  $n \leq m$  ja  $a < b$ . Jos verkossa  $G(m, n, a, b)$  on olemassa epätriviaali ratsun kierros, niin tällöin*

1.  $a + b$  on pariton,
2.  $m$  tai  $n$  on parillinen,
3.  $n \geq a + b$ ,
4.  $m \geq 2b$  ja
5.  $\text{sy}(a, b) = 1$ .

*Todistus.* (1) Jos  $a + b$  on parillinen, niin ratsu voi liikkua vain toisen värisissä ruuduissa. Täten Hamiltonin kierros ei ole mahdollinen. Siis  $a + b$  täytyy olla pariton.

(2) Jos  $m$  ja  $n$  ovat molemmat parittomia, niin verkossa  $G(m, n)$  on pariton määrä solmuja. Lauseen 3.2 kohdan 1 todistuksen mukaisesti tällöin verkossa ei ole Hamiltonin kierrosta. Täten  $m$  tai  $n$  on parillinen.

(3) Jos  $n \leq a + b - 1$ , niin ruudun  $(0, 2)$  aste on 0 tai 1. Täten ratsun kierros verkossa  $G(m, n)$  ei ole mahdollinen. Siis  $n \geq a + b$ .

(4) Oletetaan, että  $m < 2b$ . Nyt  $\deg(b - 1, b - 1) = 0$ , joten Hamiltonin kierros ei ole mahdollinen. Täten  $m \geq 2b$ .

(5) Olkoon  $\text{sy}(a, b) = d$ , missä  $d \neq 1$ . Tällöin  $d \mid (a \pm b)$  ja  $d \mid (-a \pm b)$ . Väritetään ruutu  $(i, j)$  värillä  $k \in \{0, 1, 2, \dots, d - 1\}$ , jos  $i + j \equiv k \pmod{d}$ . Siis jokaiselle ruudulle merkitään yksi väri joukosta  $\{0, 1, 2, \dots, d - 1\}$ . Väitetään, että ratsun pitäisi päästä liikkumaan ruudusta toiseen samanvärisen ruutuun.

Oletetaan, että ratsu aloittaa ruudusta  $(i, j)$ , jonka väri on  $k$ . Tällöin  $i + j \equiv k \pmod{d}$ . Nyt ratsu voi liikkua ruutuun  $(i \pm a, j \pm b)$  tai  $(i \pm b, j \pm a)$ . Osoitetaan, että ruudut ovat samanvärisiä. Jos ratsu liikkuu ruutuun  $(i \pm a, j \pm b)$ , niin  $(i \pm a) + (j \pm b) = (i + j) \pm (a \pm b) \equiv k \pmod{d}$ . Täten ruutu on väriltään  $k$ . Jos taas ratsu liikkuu ruutuun  $(i \pm b, j \pm a)$ , niin  $(i \pm b) + (j \pm a) = (i + j) \pm (a \pm b) \equiv k \pmod{d}$ . Täten ruutu on väriltään  $k$ .

Ratsu voi siis liikkua vain toiseen samanvärisen ruutuun. Täten ratsu ei pääse liikkumaan jokaiseen ruutuun shakkilaudalla. Siispä Hamiltonin kierros verkossa  $G(m, n, a, b)$  ei ole mahdollinen, kun  $\text{sy}(a, b) \neq 1$ .

□

## 4.2 (2,3)-ratsun kierrokset

Alaluvussa 4.2 käsittelemme  $(2, 3)$ -ratsun tapauksia. Lähteestä [2, s. 80-98] poiketen verkon vasemman alareunan ruutua käsitellään solmuna  $(0, 0)$  ja oikean yläreunan ruutua solmuna  $(m - 1, n - 1)$ , missä  $m$  on sarakkeiden määrä ja  $n$  rivien määrä.

**Lause 4.4.** *Jos  $n \leq 4$  tai  $n = 6, 7, 8, 12$ , niin verkossa  $G(m, n, 2, 3)$  ei ole ratsun kierrosta.*

*Todistus.* Olkoon  $G(m, n, 2, 3)$  verkko. Kun  $n \leq 4$ , niin lauseen 4.3 kohdan 3 nojalla verkossa  $G(m, n, 2, 3)$  ei ole ratsun kierrosta.

Oletetaan sitten, että  $n = 6$ . Väritetään rivien  $n = 0, 1$  ja  $5$  solmut punaisiksi ja muut solmut sinisiksi. Tällöin punaisia ja sinisiä solmuja on verkossa sama määrä. Nyt eräät siniset solmut ovat yhteydessä toisiin sinisiin solmuihin (2 ja 4 rivien välillä), kun taas punaiset solmut ovat yhteydessä vain sinisiin solmuihin. Siispä apulauseen 4.2 nojalla  $G(m, 6, 2, 3)$  ei sisällä Hamiltonin kierrosta.

Oletetaan, että  $n = 7$ . Nyt solmujen  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 5)$  sekä  $(1, 6)$  aste verkossa  $G(m, n, 2, 3)$  on 2. Jos siis verkossa  $G(m, n, 2, 3)$  on Hamiltonin kierros, niin kyseisiin solmuihin yhteydessä olevat särmät täytyvät sisältyä kierrokseen. Havaitaan, että verkossa  $G(m, n, 2, 3)$  näistä solmuista jokainen on särmällä yhteydessä solmuun  $(3, 3)$ . Täten solmun  $(3, 3)$  aste täytyisi olla 4 oletetussa Hamiltonin kierroksessa, joka selvästikin on ristiriita. Täten verkossa  $G(m, 7, 2, 3)$  ei ole Hamiltonin kierrosta.

Oletetaan, että  $n = 8$ . Väritetään rivien  $n = 0, 1, 5$  ja  $6$  solmut punaisiksi ja muut solmut sinisiksi. Tällöin punaisia ja sinisiä solmuja on verkossa sama määrä. Nyt eräät siniset solmut ovat yhteydessä toisiin sinisiin solmuihin (2 ja 4 rivien välillä), kun taas punaiset solmut ovat yhteydessä vain sinisiin solmuihin. Siispä apulauseen 4.2 nojalla  $G(m, 8, 2, 3)$  ei sisällä Hamiltonin kierrosta.

Oletetaan,  $n = 12$ . Väritetään rivien  $n = 0, 1, 5, 6, 10$  ja  $11$  solmut punaisiksi ja muut solmut sinisiksi. Tällöin punaisia ja sinisiä solmuja on verkossa sama määrä. Nyt eräät siniset solmut ovat yhteydessä toisiin sinisiin solmuihin (2 ja 4 rivien välillä), kun taas punaiset solmut ovat yhteydessä vain sinisiin solmuihin. Siispä apulauseen 4.2 nojalla  $G(m, 12, 2, 3)$  ei sisällä Hamiltonin kierrosta.

□

**Apulause 4.5.** Olkoon  $m \neq 18$ . Tällöin verkossa  $G(m, 5, 2, 3)$  on olemassa ratsun kierros, jos ja vain jos  $m \geq 16$  on parillinen.

*Todistus.* Lauseen 4.3 kohdan 2 nojalla luvun  $m$  täytyy olla parillinen, jotta  $G(m, 5, 2, 3)$  olisi Hamiltonin verkko.

Jos  $m \leq 4$ , niin lauseen 4.3 kohdan 4 nojalla  $G(m, 5, 2, 3)$  ei ole Hamiltonin verkko.

Jos  $m = 6, 8$  tai  $12$ , niin lauseen 4.4 nojalla  $G(m, 5, 2, 3)$  ei ole Hamiltonin verkko.

Jos  $m = 10$ , niin ruudut  $(1, 2)$  ja  $(7, 2)$  ovat molemmat asteeltaan 2, ja ne pakottavat 4 siirron mittaisen kierroksen verkossa  $G(10, 5, 2, 3)$ . Täten verkko  $G(10, 5, 2, 3)$  ei ole Hamiltonin verkko.

Jos  $m = 14$ , niin oletetaan vastoin väitettä, että verkossa  $G(14, 5, 2, 3)$  on Hamiltonin kierros  $C$ . Tällöin polun  $(12, 3)$ ,  $(10, 0)$ ,  $(13, 2)$ ,  $(10, 4)$ ,  $(12, 1)$  täytyy kuulua kierrokseen  $C$ , sillä solmut  $(13, 2)$ ,  $(12, 3)$  ja  $(12, 1)$  ovat asteeltaan 2. Täten polun  $P_1 = (4, 4)$ ,  $(7, 2)$ ,  $(4, 0)$  täytyy myös kuulua kierrokseen  $C$ , koska solmun  $(7, 2)$  vierussolmut ovat  $(10, 0)$ ,  $(10, 4)$ ,  $(4, 0)$  sekä  $(4, 4)$ . Koska solmun  $(1, 2)$  aste on 2, niin polun  $P_2 = (4, 4)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(4, 0)$  täytyy myös kuulua kierrokseen  $C$ . Tällöin kuitenkin yhdistetty polku  $P_1P_2$  on 4 siirron mittainen kierros  $C$ :ssä. Tämä on ristiriita, joten  $G(14, 5, 2, 3)$  ei ole Hamiltonin verkko.

Osoitetaan sitten, että kaikilla muilla laudoilla on  $(2, 3)$ -ratsun kierros. Ensinnäkin kuvassa 4.1 on havainnollistettu  $(2, 3)$ -ratsun kierrokset verkossa  $G(m, 5, 2, 3)$ ,

kun  $m \in \{16, 20, 24, 26\}$ . Merkitään näitä kierroksina  $C(m, 5, 2, 3)$ ,  $m \in \{16, 20, 24, 26\}$ .

$C(16,5,2,3)$ :

1	36	31	42	57	18	47	6	29	12	53	22	75	70	65	24
38	45	4	33	40	79	8	15	50	59	10	77	68	27	72	63
43	56	17	2	35	30	13	54	19	48	61	66	25	52	21	74
32	41	80	37	46	5	58	11	78	7	28	71	64	23	76	69
3	34	39	44	55	16	49	60	9	14	51	20	73	62	67	26

$C(20,5,2,3)$ :

1	88	83	78	11	52	67	6	95	42	15	38	57	72	17	46	25	36	31	62
90	81	4	85	76	99	8	55	74	97	40	69	20	49	64	27	34	59	22	29
79	10	53	2	87	92	43	12	51	66	71	94	45	14	37	32	61	18	47	24
84	77	100	89	82	5	96	41	68	7	56	73	16	39	58	21	30	63	26	35
3	86	91	80	9	54	75	98	93	44	13	50	65	70	19	48	23	28	33	60

$C(24,5,2,3)$ :

1	102	97	108	73	12	113	6	95	18	69	78	12	48	93	44	59	64	83	52	29	34	39	54
104	111	4	99	106	119	8	15	88	75	10	115	90	25	46	67	80	21	62	27	36	57	32	41
109	72	13	2	101	96	17	70	77	86	117	94	19	60	65	84	49	92	43	38	55	82	51	30
98	107	120	103	112	5	74	11	114	7	24	47	68	79	22	63	26	45	58	33	40	53	28	35
3	100	105	110	71	14	87	118	9	16	89	76	85	116	91	20	61	66	81	50	31	42	37	56

$C(26,5,2,3)$ :

1	98	93	104	7	114	83	88	13	112	81	120	49	126	17	36	77	24	47	30	19	40	69	64	59	42
100	107	4	95	102	129	90	109	86	15	122	75	10	51	124	73	26	33	22	53	28	71	62	45	66	57
105	6	115	2	97	92	111	8	117	84	127	12	35	80	119	48	31	18	37	78	55	60	43	20	39	68
94	103	130	99	108	87	14	113	82	89	50	125	16	121	76	23	52	29	72	25	46	65	58	41	70	63
3	96	101	106	5	116	85	128	91	110	9	118	123	74	11	34	79	54	27	32	21	38	67	56	61	44

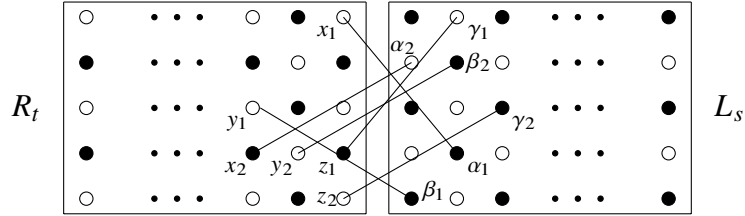
**Kuva 4.1.** Hamiltonin kierrokset  $C(16, 5, 2, 3)$ ,  $C(20, 5, 2, 3)$ ,  $C(24, 5, 2, 3)$  ja  $C(26, 5, 2, 3)$ .

Olkoot sitten verkot  $R_t$  verkon  $G(t, 5, 2, 3)$  aliverkkoja kuten kuvassa 4.3 ja  $t \in \{11, 19, 21\}$ . Nyt verkot  $R_t$  koostuvat kolmesta erillisestä polusta, joiden yhdiste sisältää verkon  $G(t, 5, 2, 3)$  jokaisen solmun. Havaitaan, että nämä kolme erillistä polkua ovat  $p_1: x_1 \rightarrow x_2$ ,  $p_2: y_1 \rightarrow y_2$  ja  $p_3: z_1 \rightarrow z_2$ , missä  $x_1 = (t - 1, 4)$ ,  $x_2 = (t - 3, 1)$ ,  $y_1 = (t - 3, 2)$ ,  $y_2 = (t - 2, 1)$ ,  $z_1 = (t - 1, 1)$  ja  $z_2 = (t - 1, 0)$ .

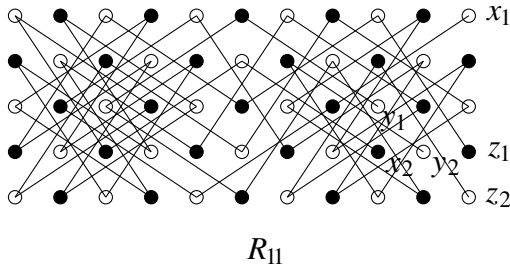
Oletetaan, että on olemassa verkon  $G(s, 5, 2, 3)$  aliverkko  $L_s$ , joka koostuu kolmesta erillisestä polusta, joiden yhdiste sisältää verkon  $G(s, 5, 2, 3)$  jokaisen solmun. Oletetaan myös, että polkujen alk- ja loppusolmut ovat  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$  ja  $\gamma_2$ . Lisäksi, kun verkko  $R_t$  asetetaan verkon  $L_s$  vasemmalle puolella, muodostuu  $(2, 3)$ -ratsulle siirto mahdollisuus solmusta  $x_i$  solmuun  $\alpha_i$ ,  $y_i$ :stä  $\beta_i$ :hin ja  $z_i$ :stä  $\gamma_i$ :hin, kun  $i = 1$  tai  $2$ . Nyt havaitaan, että jos verkon  $L_s$  kolme erillistä polkua ovat:

1.  $\alpha_1 \rightarrow \gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \beta_2, \beta_1 \rightarrow \alpha_2$ ,
2.  $\alpha_1 \rightarrow \gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \beta_1, \beta_2 \rightarrow \alpha_2$  tai
3.  $\alpha_1 \rightarrow \beta_2, \beta_1 \rightarrow \gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \alpha_2$ ,

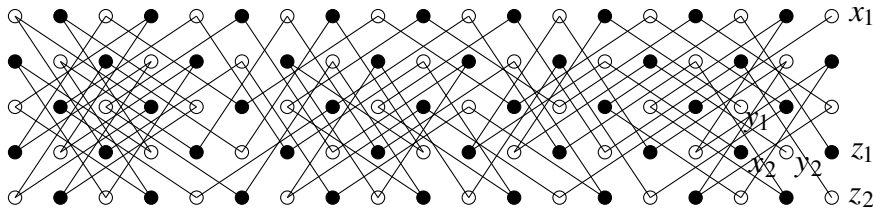
niin on olemassa Hamiltonin kierros  $R_t \oplus L_s$  verkossa  $G(t + s, 5, 2, 3)$  (kuva 4.2). Merkinällä  $R_t \oplus L_s$  tarkoitetaan tässä verkkojen yhdistettä, johon on lisätty särmiä  $R_t$ :n ja  $L_s$ :n välille niin, että  $R_t \oplus L_s$  on Hamiltonin kierros verkossa  $G(t + s, 5, 2, 3)$  (esimerkki operaatiosta  $R_t \oplus L_s$  kuvassa 4.2 olettaen, että verkoissa  $R_t$  ja  $L_s$  on Hamiltonin kierrokset).



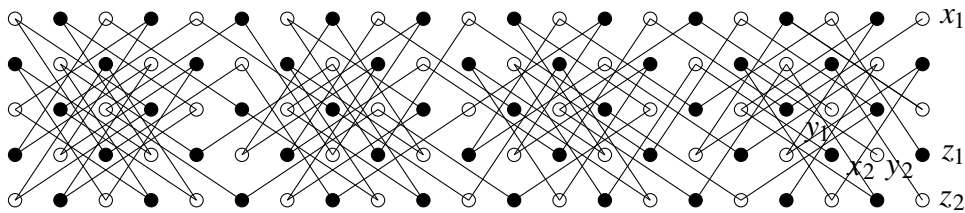
Kuva 4.2.  $R_t \oplus L_s$



$R_{11}$



$R_{19}$



$R_{21}$

Kuva 4.3. Verkot  $R_{11}$ ,  $R_{19}$  ja  $R_{21}$ .

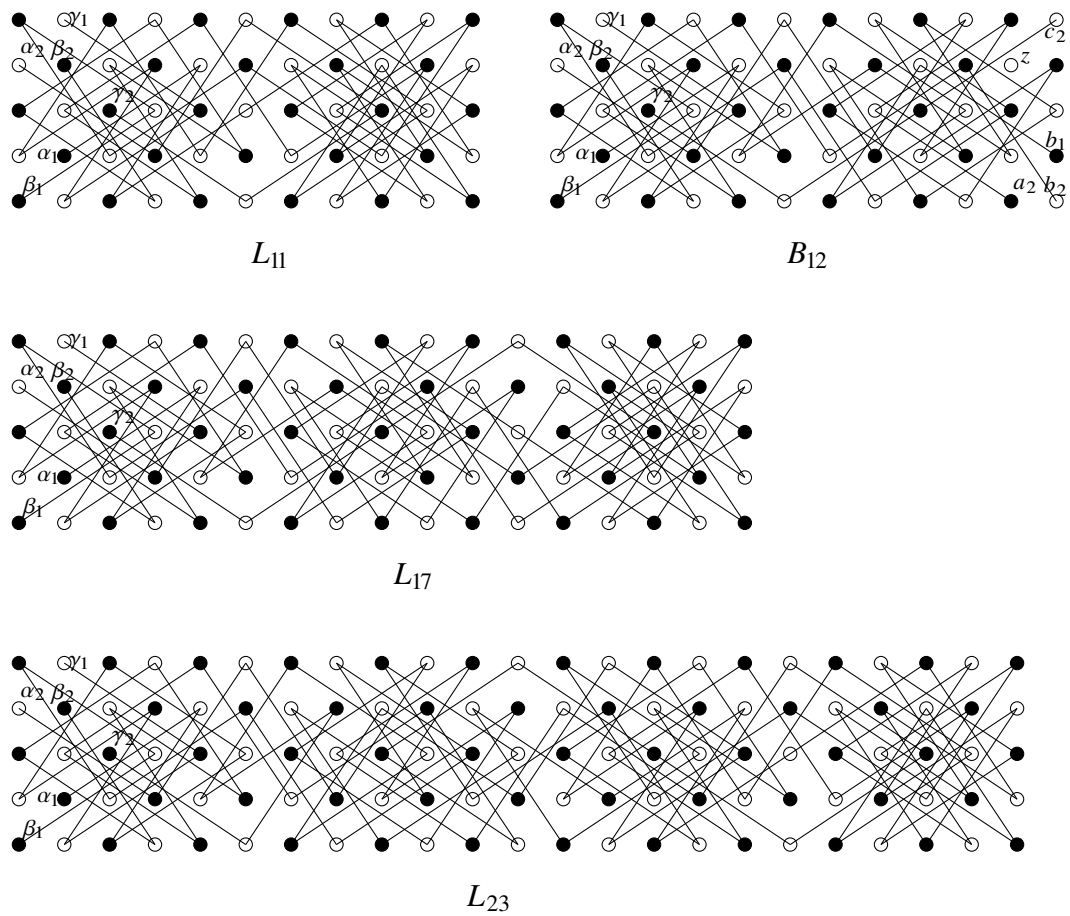
Osoitetaan nyt, että tällaisia aliverkkoja  $L_s$  on olemassa kaikilla  $s = 11 + 6k$ , missä  $k \geq 0$ . Todettakoon, että  $R_{11} \oplus L_s$  laajentaa kierrokset kaikille  $m = 22, 28, 34, \dots$ ;  $R_{19} \oplus L_s$  kaikille  $m = 30, 36, 42, \dots$ ; ja  $R_{21} \oplus L_s$  kaikille  $m = 32, 38, 44, \dots$ .

Verkot  $L_{11}$ ,  $L_{17}$  ja  $L_{23}$  ovat havainnollistettu kuvassa 4.4.  $L_{11}$  toteuttaa ehdon (3),  $L_{17}$  ehdon (1) ja  $L_{23}$  ehdon (2). Käytetään kyseisiä verkkoja verkkojen  $L_{11+6k}$  ra-



kentämiseen. Olkoon tätä varten  $B_{12}$  verkon  $G(12, 5, 2, 3)$  aliverkko, kuten kuvas-  
sa 4.4. Huomataan, että  $B_{12}$  koostuu viidestä erillisestä polusta:  $\alpha_1 \rightarrow \gamma_1, \alpha_2 \rightarrow$   
 $a_2, \beta_1 \rightarrow b_1, \beta_2 \rightarrow b_2$  ja  $\gamma_2 \rightarrow c_2$  sekä erillisestä solmusta  $z = (10, 3)$ . Täs-  
sä  $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (0, 3), \beta_1 = (0, 0), \beta_2 = (1, 3), \gamma_1 = (1, 4), \gamma_2 = (2, 2), a_2 =$   
 $(10, 0), b_1 = (11, 1), b_2 = (11, 0)$  ja  $c_2 = (11, 4)$ . Jotta saataisiin muodostettua verk-  
ko  $L_{29}$ , asetetaan  $B_{12}$  sen vasemmalle puolelle ja lisätään kuusi uutta särmää:  
 $\{z, \beta_1\}, \{z, \alpha_1\}, \{a_2, \alpha_2\}, \{b_1, \gamma_1\}, \{b_2, \beta_2\}$  sekä  $\{c_2, \gamma_2\}$ . Huomattakoon, että  $L_{29}$   
toteuttaa ehdon (1). Jatkamalla samaa menetelmää saadaan muodostettua verkot  
 $L_{17+12k}$ , jotka noudattavat ehtoa (1) kaikilla  $k \geq 0$ .

Samaan tapaan saadaan muodostettua verkot  $L_{23+12k}$ , jotka toteuttavat ehdon (2)  
kaikilla  $k \geq 0$ . Täten väite pätee.  $\square$



**Kuva 4.4.** Verkot  $L_{11}, L_{17}, L_{23}$  ja  $B_{12}$ .

**Apulause 4.6.** Verkossa  $G(m, 10, 2, 3)$  on olemassa ratsun kierros, jos ja vain jos  
 $m \geq 10$  ja  $m \neq 12$ .

*Todistus.* Apulauseen 4.5 ja lauseen 4.4 nojalla verkko  $G(m, 10, 2, 3)$  ei ole Hamil-  
tonin verkko, kun  $m \leq 8$  tai  $m = 12$ .

Olkoon  $m = 9$  ja oletetaan vastoin väitettä, että  $G(9, 10, 2, 3)$  sisältää Hamilto-  
nin kierroksen  $C(9, 10, 2, 3)$ . Tällöin polut  $(1, 8), (4, 6), (7, 8)$  ja  $(1, 0), (4, 2), (7, 0)$

sekä särmä  $\{(8, 9), (5, 7)\}$  täytyy kuulua kierrokseen  $C(9, 10, 2, 3)$ , sillä solmut  $(1, 8), (7, 8), (1, 0), (7, 0)$  ja  $(8, 9)$  ovat asteeltaan 2 verkossa  $G(9, 10, 2, 3)$ . Tämän vuoksi särmän  $\{(2, 9), (5, 7)\}$  täytyy myös kuulua kierrokseen  $C(9, 10, 2, 3)$ . Tällöin kuitenkin solmu  $(7, 4)$  ei voi kuulua kierrokseen, koska kyseiseen solmuun yhdistyy vain yksi mahdollinen särmä  $\{(5, 1), (7, 4)\}$ . Tämä on ristiriita, joten  $G(9, 10, 2, 3)$  ei ole Hamiltonin verkko.

$C(10,10,2,3)$ :

1	10	67	46	95	56	29	8	23	50
12	65	4	69	48	27	6	53	86	25
45	96	57	2	9	22	51	94	55	30
68	47	100	11	66	85	24	49	28	7
3	70	13	64	5	54	87	26	21	52
58	39	44	97	60	91	78	31	84	93
37	16	73	42	99	80	33	18	75	82
14	63	90	71	40	35	20	61	88	77
43	98	59	38	17	74	83	92	79	32
72	41	36	15	62	89	76	81	34	19

$C(14,10,2,3)$ :

1	130	39	70	31	114	75	132	51	102	55	94	89	136
128	73	28	37	68	139	20	105	134	53	92	77	18	87
71	32	113	2	131	40	101	30	95	90	137	50	103	56
38	69	140	129	74	133	52	115	76	19	88	135	54	93
27	36	127	72	29	106	67	138	21	104	17	86	91	78
112	3	8	33	110	13	122	41	100	15	96	57	62	49
11	124	43	6	35	116	81	24	47	98	59	120	83	64
126	109	26	45	4	9	22	107	66	61	118	79	16	85
7	34	111	12	123	42	99	14	121	82	63	48	97	58
44	5	10	125	108	25	46	117	80	23	84	65	60	119

$C(11,10,2,3)$ :

1	42	25	78	7	58	73	12	23	18	107
40	71	4	27	76	109	14	21	100	9	16
79	6	59	2	43	24	19	106	57	74	11
26	77	110	41	72	99	8	17	108	13	22
3	44	39	70	5	28	75	10	15	20	101
52	85	80	47	60	105	34	65	98	93	56
87	36	49	82	45	54	67	96	31	62	91
38	69	104	51	84	89	94	29	102	33	64
81	46	53	86	35	48	61	92	55	66	97
50	83	88	37	68	103	32	63	90	95	30

$C(13,10,2,3)$ :

1	116	75	46	101	58	3	118	73	18	97	88	27
114	15	120	77	44	129	104	29	42	99	60	5	86
47	102	57	2	117	74	17	96	89	26	127	72	19
76	45	130	115	14	119	100	59	4	87	28	41	98
121	78	113	16	103	30	43	128	105	6	85	90	61
56	13	48	81	38	95	108	63	40	71	20	25	126
11	110	65	50	79	54	35	124	69	22	93	106	33
112	37	122	67	52	9	82	31	24	91	62	7	84
49	80	55	12	109	64	39	94	107	34	125	70	21
66	51	10	111	36	123	68	53	8	83	32	23	92

$C(17,10,2,3)$ :

1	78	83	10	123	70	135	36	85	130	117	38	145	160	87	48	139
76	133	4	81	8	119	126	143	6	121	128	141	114	89	162	157	46
11	124	71	2	79	84	131	116	69	136	35	86	49	138	39	146	159
82	9	170	77	134	5	122	129	118	37	144	161	156	47	140	113	88
3	80	75	132	125	68	7	120	127	142	115	90	147	158	45	50	163
72	17	12	105	58	169	100	63	34	29	98	137	112	53	150	155	40
19	102	65	14	107	74	61	32	95	56	27	42	51	152	93	148	25
104	59	168	67	16	21	30	97	166	109	54	23	154	91	164	111	44
13	106	73	18	101	64	57	28	99	62	33	94	149	26	41	52	151
66	15	20	103	60	167	108	55	22	31	96	165	110	43	24	153	92

**Kuva 4.5.** Hamiltonin kierrokset  $C(10, 10, 2, 3)$ ,  $C(14, 10, 2, 3)$ ,  $C(11, 10, 2, 3)$ ,  $C(13, 10, 2, 3)$  ja  $C(17, 10, 2, 3)$ .

Seuraavaksi osoitetaan, että  $G(m, 10, 2, 3)$  on Hamiltonin verkko kaikilla muilla  $m:n$  arvoilla. Kuva 4.5 havainnollistaa Hamiltonin kierrokset  $C(m, 10, 2, 3)$  verkossa  $G(m, 10, 2, 3)$  kaikille  $m \in \{10, 11, 13, 14, 17\}$ . Huomattakoon, että  $C(m, 10, 2, 3)$

sisältää särmät  $e_1 = \{(m-1, 9), (m-3, 6)\}$ ,  $e_2 = \{(m-3, 9), (m-1, 6)\}$  ja  $e_3 = \{(m-3, 7), (m-1, 4)\}$ .

Kuva 4.6 näyttää verkon  $G(5, 10, 2, 3)$  aliverkon  $S(5, 10, 2, 3)$ , joka koostuu kolmesta erillisestä polusta:  $P_1: a_1 \rightarrow a_2$ ,  $P_2: b_1 \rightarrow b_2$  ja  $P_3: c_1 \rightarrow c_2$ , missä  $a_1 = (0, 9)$ ,  $a_2 = (2, 2)$ ,  $b_1 = (0, 8)$ ,  $b_2 = (2, 7)$ ,  $c_1 = (0, 7)$  ja  $c_2 = (2, 8)$ . Havaittakoon, että  $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) = V(G(5, 10, 2, 3))$ .

Verkkoa laajennettaessa korvataan särmät  $e_1$ ,  $e_2$  ja  $e_3$  poluilla  $P_1$ ,  $P_2$  ja  $P_3$  niin, että särmän  $e_1$  päätesolmut yhdistetään polun  $P_2$  päätesolmuihin, särmän  $e_2$  päätesolmut yhdistetään polun  $P_3$  päätesolmuihin ja särmän  $e_3$  päätesolmut yhdistetään polun  $P_1$  päätesolmuihin uusilla särmillä. Tällöin saadaan laajennettua Hamiltonin kierros verkosta  $G(m, 10, 2, 3)$  verkkoon  $G(m+5, 10, 2, 3)$  kaikille  $m \in \{10, 11, 13, 14, 17\}$ .

Asetetaan verkko  $S(5, 10, 2, 3)$  kierroksen  $C(m, 10, 2, 3)$  oikealle puolelle ja poistetaan särmä  $e_1 = \{(m-1, 9), (m-3, 6)\}$  kierroksesta  $C(m, 10, 2, 3)$ . Lisätään sitten särmät solmujen  $(m-1, 9)$  ja  $b_2$  välille sekä  $(m-3, 6)$  ja  $b_1$  välille. Seuraavaksi poistetaan särmä  $e_2 = \{(m-3, 9), (m-1, 6)\}$  verkosta  $C(m, 10, 2, 3)$  ja lisätään särmät solmujen  $(m-3, 9)$  ja  $c_1$  välille sekä  $(m-1, 6)$  ja  $c_2$  välille. Lopuksi poistetaan särmä  $e_3 = \{(m-3, 7), (m-1, 4)\}$  ja lisätään särmät solmujen  $(m-3, 7)$  ja  $a_1$  välille sekä  $(m-1, 4)$  ja  $a_2$  välille. Nyt olemme saaneet laajennettua Hamiltonin kierroksen verkosta  $G(m, 10, 2, 3)$  verkkoon  $G(m+5, 10, 2, 3)$ . Myös laajennettu Hamiltonin kierros  $C(m+5, 10, 2, 3)$  sisältää särmät  $\{(m+4, 9), (m+2, 6)\}$ ,  $\{(m+2, 9), (m+4, 6)\}$  sekä  $\{(m+2, 7), (m+4, 4)\}$ . Laajennus kierroksesta  $C(10, 10, 2, 3)$  kierrokseen  $C(15, 10, 2, 3)$  on havainnollistettu kuvassa 4.7.

Kun laajennusta jatketaan, saadaan Hamiltonin kierros muodostettua kaikille verkoille  $G(m, 10, 2, 3)$ , kun  $m \geq 10$  ja  $m \neq 12$ .  $\square$

**Apulause 4.7.** Olkoon  $k \geq 3$ . Tällöin verkossa  $G(m, 5k, 2, 3)$  on olemassa ratsun kierros, jos ja vain jos

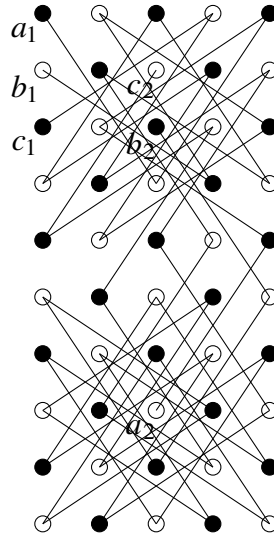
1.  $m \geq 10$  on parillinen,  $m \neq 12$  ja  $k$  on pariton, tai
2.  $m = 5, 9, 10, 11$  tai  $m \geq 13$  ja  $k$  on parillinen.

*Todistus.* Ensinnäkin lauseen 4.4 nojalla  $m \times 5k$ -laudalla ei ole ratsun kierrosta  $(2, 3)$ -ratsulla, kun  $m \leq 4$  tai  $m = 6, 7, 8, 12$ . Lisäksi, kun  $k$  on pariton, niin lauseen 4.3 nojalla  $m \times 5k$ -laudalla ei ole ratsun kierrosta  $(2, 3)$ -ratsulla, jos  $m \leq 9$  tai  $m$  on pariton.

Osoitetaan seuraavaksi, että muilla  $m \times 5k$ -laudoilla on olemassa ratsun kierros  $(2, 3)$ -ratsuilla.

*Laajennusmenetelmä(\*)* : Oletetaan, että verkossa  $G(m, n, 2, 3)$  on Hamiltonin kierros  $C(m, n, 2, 3)$ , joka sisältää särmät  $\{(0, n-1), (3, n-3)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ . Asetetaan kierroksen sisältävä verkko  $C_b = (m, n_b)$  toisen kierroksen sisältävän verkon  $C_t = (m, n_t)$  alapuolelle ja poistetaan särmä  $\{(2, 2), (5, 0)\}$  kierroksesta  $C_t$  ja särmä  $\{(0, n_b-1), (3, n_b-3)\}$  verkosta  $C_b$ . Lisätään sitten särmät solmujen  $(2, 2) \in C_t$  ja  $(0, n_b-1) \in C_b$  sekä solmujen  $(5, 0) \in C_t$  ja  $(3, n_b-3) \in C_b$  välille, jolloin saadaan

uusi Hamiltonin kierros  $C(m, n_t + n_b, 2, 3)$  verkkoon  $G(m, n_t + n_b, 2, 3)$ . Uusi kierros sisältää nyt myös särmät  $\{(0, n_t + n_b - 1), (3, n_t + n_b - 3)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ .



$S(5, 10, 2, 3)$

**Kuva 4.6.** Verkko  $S(5, 10, 2, 3)$ .

Oletetaan, että  $k$  on pariton. Oletetaan lisäksi, että  $m \geq 16$  on parillinen ja  $m \neq 18$ . Huomattakoon, että Hamiltonin kierros  $C(m, 5, 2, 3)$  apulauseen 4.5 mukaisesti sisältää särmät  $\{(0, 4), (3, 2)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ . Asettamalla kierros  $C(m, 5, 2, 3)$  toisen samanlaisen kierroksen päälle, saadaan edellisen menetelmän (\*) nojalla uusi Hamiltonin kierros verkkoon  $G(m, 10, 2, 3)$ . Kierros sisältää särmät  $\{(0, 9), (3, 7)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ . Toistamalla laajennusmenetelmää (\*) kierroksilla  $C_t = C(m, 10, 2, 3)$  ja  $C_b = C(m, 5, 2, 3)$  saadaan rakennettua Hamiltonin kierros  $G(m, 5k, 2, 3)$ , missä  $k \geq 3$ ,  $m \geq 16$  on parillinen ja  $m \neq 18$ . Kierros  $G(m, 5k, 2, 3)$  sisältää särmät  $\{(0, 5k - 1), (3, 5k + 1)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ .

Olkoon  $m \in \{10, 14, 18\}$ . Hamiltonin kierrokset  $C(10, 10, 2, 3)$ ,  $C(14, 10, 2, 3)$  ovat kuvassa 4.5 ja kierrokset  $C(14, 15, 2, 3)$ ,  $C(18, 15, 2, 3)$  kuvassa 4.8. Nyt  $C(18, 10, 2, 3)$  saadaan laajennettua apulauseen 4.6 avulla, kun taas  $C(10, 15, 2, 3)$  saadaan kiertämällä kierrosta  $C(15, 10, 2, 3)$  (kuva 4.7) 90 astetta. Havaittakoon, että kaikki nämä kierrokset  $C(m, 5s, 2, 3)$  sisältävät halutut särmät  $\{(0, 5s - 1), (3, 5s + 1)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ , kun  $s = 2, 3$  ja  $m \in \{10, 14, 18\}$ . Nyt valitsemalla  $C_t = C(m, 15, 2, 3)$  ja  $C_b = C(m, 10, 2, 3)$  ja käyttämällä laajennusmenetelmää (\*) saadaan Hamiltonin kierros verkossa  $G(m, 5k, 2, 3)$ , kun  $k \geq 3$  on pariton ja  $m = 10, 14, 18$ .

Oletetaan sitten, että  $k$  on parillinen. Nyt  $5k \equiv 0 \pmod{10}$ . Kun  $m = 5$  ja  $i \geq 2$ , niin kierros  $C(5, 10i, 2, 3)$  saadaan kiertämällä apulauseessa 4.5 rakennettua Hamiltonin kierrosta  $C(10i, 5, 2, 3)$  90 astetta.

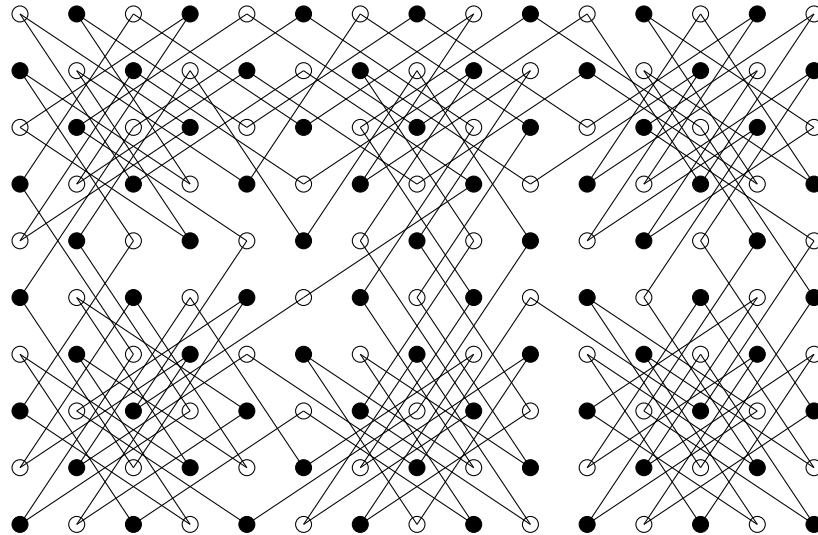
Olkoot  $m = 9$  ja  $i \geq 2$ . Nyt kuvassa 4.9 olevia kierroksia  $C(9, 20, 2, 3)$  ja  $C(9, 30, 2, 3)$  voidaan laajentaa menetelmän (\*) avulla, sillä molemmat kierroksista sisältävät särmät  $\{(0, 10i - 1), (3, 10i + 1)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$ .

Olkoon  $m \geq 12$  ja  $m \neq 12$ . Havaittakoon, että kaikki apulauseessa 4.6 rakennetut Hamiltonin sisältävät särmät  $\{(0, 10i - 1), (3, 10i + 1)\}$  ja  $\{(2, 2), (5, 0)\}$  Täten laajennusmenetelmän (\*) avulla saadaan rakennettua Hamiltonin kierros verkkoon  $G(m, 10i, 2, 3)$ , kun  $i \geq 1, m \geq 10$  ja  $m \neq 12$ . Nyt on todistettu, että väite pätee.  $\square$

Apulauseiden 4.5, 4.6 ja 4.7 nojalla voimme muodostaa seuraavan lauseen.

**Lause 4.8.** Verkossa  $G(m, 5k, 2, 3)$ , missä  $(m, 5k) \neq (18, 5)$ , on olemassa ratsun kierros, jos ja vain jos

1.  $k = 1$  ja  $m \geq 16$  on parillinen, tai
2.  $k = 2$  ja  $m \geq 10$  ja  $m \neq 12$ , tai
3.  $k \geq 3$  on pariton,  $m \geq 10$  on parillinen ja  $m \neq 12$ , tai
4.  $k \geq 4$  on parillinen ja  $m = 5, 9, 10, 11$  tai  $m \geq 13$ .



$C(15, 10, 2, 3)$

**Kuva 4.7.** Kierroksen laajennus verkosta  $G(10, 10, 2, 3)$  verkkoon  $G(15, 10, 2, 3)$ .

$C(14,15,2,3)$ :

1	154	47	172	209	32	3	156	59	22	55	34	187	158
152	27	182	45	170	5	50	29	184	57	36	19	52	189
173	206	31	2	155	48	23	208	33	186	157	60	21	54
46	171	210	153	28	183	58	169	4	51	188	159	56	35
181	44	151	26	207	30	185	6	49	20	53	190	37	18
42	67	174	205	24	97	134	65	160	109	168	117	122	61
69	132	85	180	203	40	75	106	63	162	119	136	77	124
150	25	98	43	66	7	110	167	116	121	38	17	108	191
175	204	41	68	133	64	161	96	135	76	123	62	163	118
84	179	70	131	86	105	202	39	74	107	78	125	120	137
99	144	149	176	101	166	89	8	111	164	115	192	197	16
142	87	10	147	178	95	130	81	14	113	194	91	128	199
71	102	83	12	145	140	73	104	201	196	93	138	79	126
148	177	100	143	88	9	112	165	90	129	198	15	114	193
11	146	141	72	103	82	13	94	139	80	127	200	195	92

$C(18,15,2,3)$ :

1	254	259	248	137	58	267	6	135	114	149	46	265	116	51	96	91	144
252	245	4	257	250	269	140	55	152	9	262	111	142	53	94	147	48	89
247	138	57	2	255	260	113	150	45	266	7	134	97	92	145	264	117	50
258	249	270	253	244	5	136	59	268	141	54	115	148	47	90	143	52	95
3	256	251	246	139	56	153	8	261	112	151	10	263	110	49	88	93	146
62	243	158	15	32	23	44	77	30	133	98	83	28	39	118	129	124	103
241	18	75	156	13	60	107	20	37	80	25	42	105	120	127	100	85	122
16	33	22	63	154	159	132	35	82	11	78	109	130	125	102	27	40	87
157	14	61	242	19	76	31	24	43	106	29	38	99	84	123	104	119	128
74	155	240	17	34	21	12	79	108	131	36	81	26	41	86	121	126	101
175	230	235	160	177	64	165	170	223	200	189	218	69	194	213	202	207	184
228	237	172	233	162	167	180	71	192	221	66	197	182	211	204	187	216	209
239	178	73	174	231	226	199	190	219	164	169	224	201	206	185	68	195	214
234	161	176	229	236	171	222	65	166	181	70	193	188	217	208	183	212	203
173	232	227	238	179	72	163	168	225	198	191	220	67	196	215	210	205	186

**Kuva 4.8.** Hamiltonin kierrokset  $C(14, 15, 2, 3)$  ja  $C(18, 15, 2, 3)$ .

$C(9,20,2,3)$ :

1	120	21	66	113	82	179	122	19
118	45	138	23	162	43	140	47	124
65	114	81	180	121	20	67	112	83
22	161	2	119	46	123	18	163	178
137	24	117	44	139	48	125	42	141
80	99	64	115	164	111	84	101	68
3	34	167	160	41	86	177	36	17
116	165	136	25	100	69	142	49	126
63	40	79	98	35	102	55	110	85
168	159	4	33	166	37	16	87	176
135	26	103	54	39	50	127	70	143
78	97	62	105	52	109	28	91	56
5	32	169	158	107	88	175	38	15
104	53	134	27	90	71	144	51	128
61	106	77	96	31	92	57	108	29
170	157	6	151	172	155	14	89	174
133	74	149	8	153	12	129	72	145
76	95	60	147	10	131	30	93	58
7	152	171	156	73	150	173	154	13
148	9	132	75	94	59	146	11	130

 $C(9,30,2,3)$ :

116	159	94	191	144	165	114	157	96
161	68	221	98	163	112	223	70	155
192	145	62	115	158	95	66	143	166
93	190	117	160	69	156	97	164	113
220	99	162	67	222	71	154	111	224
61	106	193	146	63	142	167	104	65
118	149	92	189	140	169	108	151	102
147	74	219	100	105	110	225	72	153
194	139	60	107	150	103	64	141	168
91	188	119	148	73	152	101	170	109
218	9	172	75	138	59	186	11	226
7	214	195	210	77	216	263	212	13
120	261	90	187	10	171	30	137	58
173	76	217	8	213	12	227	78	185
196	209	6	215	262	211	14	133	264
89	250	121	260	31	136	57	248	29
252	53	174	27	134	79	184	51	228
5	32	197	208	249	132	265	38	15
122	259	88	251	52	247	28	135	56
175	26	253	54	39	50	229	80	183
198	207	4	33	200	37	16	131	266
87	40	123	258	35	254	55	246	129
240	201	176	25	256	81	182	49	230
3	34	199	206	41	130	267	36	17
124	257	86	241	202	245	128	255	82
177	24	239	44	179	48	231	42	181
22	205	2	237	46	233	18	203	268
85	242	125	270	235	20	83	244	127
238	45	178	23	204	43	180	47	232
1	236	21	84	243	126	269	234	19

**Kuva 4.9.** Hamiltonin kierrokset  $C(9, 20, 2, 3)$  ja  $C(9, 30, 2, 3)$ .

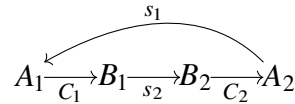
## 5 Ratsun kierros $(a, 1)$ -ratsuilla

Luvussa 5 käsittelemme  $(a, 1)$ -ratsun tapauksia  $n \times n$ -kokoisilla laudoilla. Luku aloitetaan määrittelemällä tarvittavia käsitteitä sekä laajennusmenetelmiä  $(a, 1)$ -ratsun kierroksen sisältäville laudoille. Tämän jälkeen käydään läpi, kuinka Hamiltonin kierrokset voidaan laatia tasojen välillä ja niiden avulla  $6a + 2 \times 6a + 2$ -kokoisille laudoille. Lopuksi kootaan lause 5.22, joka todistaa ratsun kierrosten olemassaolon tietynkokoisille neliönmuotoisille laudoille  $(a, 1)$ -ratsulla. Luku seuraa Nina Kamčevin tutkielmaa "Generalized knight's tours on rectangular chessboards"[4, s. 1-32] ja sen kuvat ovat Kamčevin tutkielman mukaisia.

### 5.1 Ratsun kierrosten laajentaminen $n \times n$ -kokoisilta laudoilta suuremmille laudoille $(a, 1)$ -ratsuilla

Tässä aluvuossa esittelemme tarvittavat laajennusmenetelmät, joita tarvitaan lauseen 5.22 todistamiseen. Varsinaiset  $(a, 1)$ -ratsun kierrokset laaditaan tämän aluvuun jälkeen.

**Määritelmä 5.1.** Olkoon  $G$  verkko, joka sisältää kierrokset  $C_1$  ja  $C_2$  ja oletetaan, että  $C_1$  sisältää särmän  $\{A_1, B_1\}$  ja  $C_2$  särmän  $\{A_2, B_2\}$ . Oletetaan myös, että ratsu pääsee liikkumaan ruudusta  $A_1$  ruutuun  $A_2$  ja ruudusta  $B_1$  ruutuun  $B_2$ . Merkitään näitä siirtoja särminä  $s_1 = \{A_1, A_2\}$  sekä  $s_2 = \{B_1, B_2\}$ . Nyt on mahdollista laajentaa kierroksista  $C_1$  ja  $C_2$  seuraavanlainen kierros:



Tällaista kierrosta kutsutaan kierrosten  $C_1$  ja  $C_2$  *yhdisteeksi* ja merkitään  $C = C_1 \oplus C_2$ . Yhdisteiden muodostamista kutsutaan kierrosten *ketjuttamiseksi*. Särmiä  $s_1$  ja  $s_2$  kutsutaan yhdisteen *silloiksi*.

**Määritelmä 5.2.** *Yksikkö* on solmujoukko  $\{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)\}$ , missä  $i$  ja  $j$  ovat parillisia. Yksiköt  $U$  ja  $U^*$  ovat *ekvivalentit*, jos  $U^* = (ka, la) + U$  eli yksikkö  $U^*$  saadaan vektorin  $(ka, sa)$  suuntaisella siirrolla  $U$ :sta, kun  $k, l, s \in \mathbb{N}$ .

**Määritelmä 5.3.** Tarkastellaan  $(a, 1)$ -ratsun verkkoa  $G(n, n, a, 1)$ , missä  $a$  ja  $n$  ovat parillisia. Nyt  $M$ -indusoitua aliverkkoa, missä  $M = \{(i, j) \mid a \leq i \leq n - a - 1, a \leq j \leq n - a - 1\}$  kutsutaan laudan *keskiosaksi* ja  $M$ :n komplementilla indusoitua aliverkkoa *reunaosaksi*.

**Määritelmä 5.4.** Olkoon  $G(n, n, a, 1)$   $(a, 1)$ -ratsun verkko. Tällöin ruudut voidaan jakaa  $a^2$  eri *väriin* niin, että jokainen erilainen ruutu  $(i, j)$  on oma värinsä, kun  $0 \leq i \leq a - 1$  ja  $0 \leq j \leq a - 1$ . Jokainen väri muodostaa laudan reunaosaan kierroksen  $C_{ij}$  läpikäymällä kaikki samanväriset reunaosan alkio.



**Määritelmä 5.5.**  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros on kierros, joka sisältää särmät  $\{(i, j), (i + a, j + (-1)^j)\}$ , missä  $i, j \in \{0, 1, \dots, a - 1\}$ . Jokainen näistä särmistä sisältyy kierrokseen  $C_{ij}$ .

**Esimerkki 5.6.** Tarkastellaan kuvan 5.1 verkkoa. Kuvassa on havainnollistettuna  $(4, 1)$ -ratsun määräämät  $a^2 = 4^2 = 16$  väriä  $14 \times 14$ -kokoisella laudalla. Numeroimattomat ruudut muodostavat laudan keskiosan ja numeroidut ruudut reunaosan. Jokainen väri  $ij$  muodostaa kierroksen  $C_{ij}$  laudan reunaosaa pitkin, kun  $0 \leq i \leq a - 1$  ja  $0 \leq j \leq a - 1$ . Jokainen kierros noudattaa  $(4, 1)$ -rakenteisen ratsun kierroksen kriteeriä. Katkoviivalle merkitty kierros havainnollistaa kierroksen  $C_{33}$ . Kaikki samansävyiset yksiköt ovat ekvivalentteja toistensa kanssa eli esimerkiksi kaikki vihreät yksiköt ovat ekvivalentit. Kuvaan on merkitty tarvittavat särmät  $(4, 1)$ -rakenteiseen ratsun kierrokseen mustilla viivoilla.

11	01	31	21	10	00	30	20	11	01	31	21	10	00
10	00	30	20	11	01	31	21	10	00	30	20	11	01
03	13	23	33	02	12	22	32	03	13	23	33	02	12
02	12	22	32	03	13	23	33	02	12	22	32	03	13
01	11	21	31							21	31	00	10
00	10	20	30							20	30	01	11
13	03	33	23							33	23	12	02
12	02	32	22							32	22	13	03
11	01	31	21							31	21	10	00
10	00	30	20							30	20	11	01
03	13	23	33	02	12	22	32	03	13	23	33	02	12
02	12	22	32	03	13	23	33	02	12	22	32	03	13
01	11	21	31	00	10	20	30	01	11	21	31	00	10
00	10	20	30	01	11	21	31	00	10	20	30	01	11

**Kuva 5.1.** Esimerkin 5.6 mukainen  $14 \times 14$ -kokoinen verkko.

**Apulause 5.7.** Olkoon  $G(n, n, a, 1)$   $(a, 1)$ -ratsun verkko ja  $n$  parillinen luku. Tällöin jokaiselle värille  $ij$ , missä  $0 \leq i \leq a - 1$  ja  $0 \leq j \leq a - 1$  on olemassa kierros  $C_{ij}$  verkon reunaosaa pitkin niin, että se käy läpi kaikki reunaosan samansävyiset ruudut.

*Todistus.* Tarkastellaan kuvan 5.1 sinisen yksikön kierroksia  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{10}$  ja  $C_{11}$ . Havaitaan, että kierroksiin  $C_{00}$  ja  $C_{01}$  kuuluvat ruudut sekä  $C_{10}$  ja  $C_{11}$  kuuluvat ruudut vuorottelevat keskenään pystysuunnassa reunan yläosassa sekä alaosassa. Vastaavasti kierrosten  $C_{00}$  ja  $C_{10}$  ruudut sekä  $C_{01}$  ja  $C_{11}$  ruudut vuorottelevat vaakasuunnassa reunan oikealla ja vasemmalla puolella. Koska lauta on  $n \times n$ -kokoinen ja  $n = 14$  on parillinen, niin ruudut vuorottelevat laudalla reunan yläosassa ja alaosassa yhtä monta kertaa sekä reunan vasemmalla ja oikealla puolella yhtä monta kertaa. Täten ruudut päätyvät kierroksen jälkeen aina niin, että viimeisellä siirroilla päästään siirtymään takaisin lähtöruutuun. Nyt voidaan siis muodostaa kierrokset  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{10}$  ja  $C_{11}$  niin, että kierros käy läpi kaikki samansävyiset ruudut laudan reunaosassa palaten

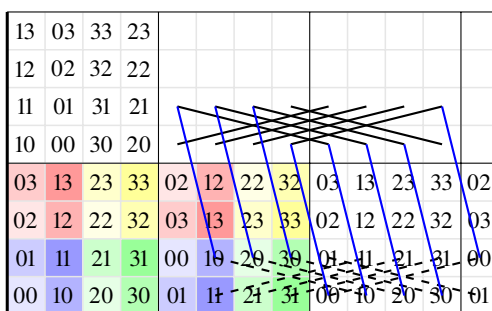
takaisin lähtöruutuunsa. Tämä pätee luonnollisesti myös muille yksiköille aina kun  $n$  on parillinen. Täten saadaan muodostettua kaikki kierrokset  $C_{ij}$ , kun  $0 \leq i \leq a - 1$ ,  $0 \leq j \leq a - 1$  ja  $n$  on parillinen.  $\square$

**Apulause 5.8.** Oletetaan, että verkossa  $G(n, n, a, 1)$  on  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros, missä  $a$  ja  $n$  ovat parillisia ja  $n \geq 2a$ . Tällöin on olemassa  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros verkossa  $G(n + 2a, n + 2a, a, 1)$ .

*Todistus.* Koska verkon  $G(n + 2a, n + 2a, a, 1)$  keskiosa on  $n \times n$ -kokoinen aliverkko, niin oletuksen nojalla voidaan muodostaa  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros  $C$  verkon  $G(n + 2a, n + 2a, a, 1)$  keskiosaan. Määritelmän 5.5 mukaan keskiosaan laadittu kierros  $C$  sisältää särmät  $\{(i+a, j+a), (i+2a, j+(-1)^j+a)\}$ , kun  $i, j \in \{0, \dots, a-1\}$ . Nämä särmät ovat esitetty kuvassa 5.2 mustilla viivoilla arvolla  $j \in \{0, 1\}$ . Nyt kaikki laudan reunaosan kierrokset  $C_{ij}$ , missä  $0 \leq i \leq a - 1$  ja  $0 \leq j \leq a - 1$  sisältää särmät  $\{(i+a+1, j), (i+2a+1, j+(-1)^j)\}$ , jotka on merkitty kuvan 5.2 tapauksessa mustilla katkoviivoilla arvoilla  $j \in \{0, 1\}$ . Koska ruudusta  $(i + a + 1, j)$  päästään siirtymään ruutuun  $(i + a, j + a)$  ja ruudusta  $(i + 2a + 1, j + (-1)^j)$  ruutuun  $(i + 2a, j + (-1)^j + a)$ , voidaan kyseisten ruutujen välille muodostaa sillat. Nämä sillat on havainnollistettu sinisillä viivoilla. Kun siis särmät  $\{(i + a, j + a), (i + 2a, j + (-1)^j + a)\}$  poistetaan kierroksesta  $C$ , särmät  $\{(i+a+1, j), (i+2a+1, j+(-1)^j)\}$  poistetaan kierroksesta  $C_{ij}$  ja tilalle lisätään särmät  $\{(i + a + 1, j), (i + a, j + a)\}$  sekä  $\{(i + 2a + 1, j + (-1)^j), (i + 2a, j + (-1)^j + a)\}$ , saadaan yhdiste

$$\left( \bigoplus_{i,j \in \{0,1,\dots,a\}} C_{ij} \right) \oplus C.$$

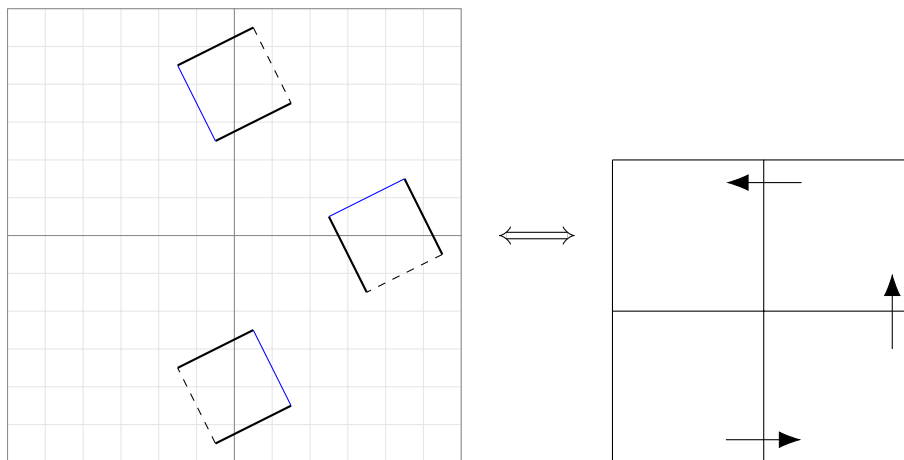
Tämä yhdiste on laajennettu  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros verkossa  $G(n + 2a, n + 2a, a, 1)$ , sillä väritettyjen alueiden väliset särmät pysyvät laudan reunaosan kierroksissa ennallaan. Täten  $(a, 1)$ -rakenteisuus periytyy verkolle  $G(n + 2a, n + 2a, a, 1)$ .



**Kuva 5.2.**  $(4, 1)$ -ratsun verkon vasen alakulma  $(n + 2a) \times (n + 2a)$ -kokoisella laudalla. Siniset viivat ovat siltoja laudan keskiosassa sijaitsevan kierroksen  $C$  ja laudan reunaosien kierrosten  $C_{ij}$  välillä ( $i = 0, \dots, a - 1$  ja  $j = 0, 1$ ).

$\square$

**Määritelmä 5.9.** Särmää  $\{(a-1, 1), (a-2, a+1)\}$  kutsutaan *A-linkiksi*. *A-linkitettyksi* ratsun kierrokseksi kutsutaan  $(a, 1)$ -ratsun kierrosta, joka sisältää *A*-linkin. Hamiltonin kierrokset  $C_i$  ja  $C_{i+1}$  voidaan *peräkkäin ketjuttaa* eli yhdistää *A*-linkkien avulla.

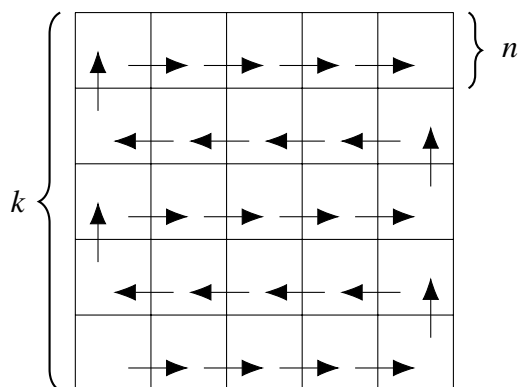


**Kuva 5.3.** Kuva havainnollistaa  $6 \times 6$ -kokoisten verkkojen yhdistämisen  $(1, 2)$ -ratsulla siltojen avulla. *A*-linkit ovat nyt merkittynä sinisillä viivoilla kuvaan. Kun *A*-linkki ja katkoviivalla merkitty särmä on korvattu silloilla, voidaan *A*-linkki tulkita käytetyksi. Kun *A*-linkki on käytetty, voidaan särmien vaihdosta merkitä siltojen suuntaisena nuolena. Kuvassa siltoja on merkitty mustilla viivoilla.

**Apulause 5.10.** Oletetaan, että verkossa  $G(n, n, a, 1)$  on  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros ja *A*-linkitetty  $(a, 1)$ -ratsun kierros, kun  $a$  ja  $n$  ovat parillisia lukuja. Tällöin jokaiselle  $k \in \mathbb{N}$  on olemassa  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros verkossa  $G(kn, kn, a, 1)$ .

*Todistus.* Aloitetaan ensin tarkastelemalla verkkoa  $G(2n, n, a, 1)$  ja oletetaan, että verkon molemmassa  $n \times n$ -kokoisessa aliverkossa on  $(a, 1)$ -ratsun kierros. Nyt oikean puoleinen aliverkko sisältää *A*-linkin  $\{(n+a-1, 1), (n+a-2, a+1)\}$  oletuksen mukaan. Lisäksi vasempaan aliverkkoon täytyy kuulua särmä  $\{(n-1, 0), (n-2, a)\}$ , sillä ruutu  $(n-1, 0)$  on kulmaruutu. Poistetaan edellä mainitut särmät  $\{(n+a-1, 1), (n+a-2, a+1)\}$  ja  $\{(n-1, 0), (n-2, a)\}$  verkosta  $G(2n, n, a, 1)$  ja lisätään tilalle sillat  $\{(n+a-1, 1), (n-1, 0)\}$  ja  $\{(n+a-2, a+1), (n-2, a)\}$ . Lisäämällä sillat verkkoon  $G(2n, n, a, 1)$  saadaan yhdistettyä kahden aliverkon  $(a, 1)$ -ratsun kierrokset yhdeksi. Sillan käyttöä voidaan merkitä siltojen suuntaisella nuolella, kuten kuvassa 5.3.

Laajennetaan seuraavaksi periaate verkoille  $G(kn, kn, a, 1)$ , jolloin  $n \times n$ -kokoisia aliverkkoja muodostuu  $k^2$  kappaletta. Kutsutaan näitä aliverkkoja nyt *peruslaudoiiksi*. Peruslaudat muodostavat nyt  $k \times k$ -kokoisen ruudukon, joka sisältää Hamiltonin polun  $P$  kuvan 5.4 nuolien mukaisesti. Oletuksen mukaan jokainen peruslauta sisältää *A*-linkitetyn ratsun kierroksen. Täten kierroksia voidaan kiertää niin, että jokainen *A*-linkki on asetettu nuolen suuntaisesti halutulla tavalla, kuten kuvasta 5.3 ilmenee. Nyt kierrokset voidaan ketjuttaa nuolten mukaisesti yksitellen, kuten kuvassa 5.4. Täten saadaan laajennettua  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros verkkoon  $G(kn, kn, a, 1)$ .



**Kuva 5.4.**  $k \times k$ -kokoinen ruudukko, missä  $k = 5$ . Nyt ruudukon solmujoukko koostuu  $n \times n$ -kokoisista peruslaudoista. Nuolet näyttävät Hamiltonin polun  $P$ .

□

**Huomautus.**  $(a, 1)$ -ratsun kierrosten  $A$ -linkkejä käytetään peruslaudoilla tasan keran. Lisäksi  $(a, 1)$ -ratsun kierroksen  $(a, 1)$ -rakenteisuus periytyy uuteen kierroksen verkosta  $G(n, n, a, 1)$  verkkoon  $G(kn, kn, a, 1)$ .

## 5.2 $(a, 1)$ -ratsun kierrosten muodostaminen $6a+2 \times 6a+2$ -kokoisille laudoille

Tässä alaluvussa muodostamme kaikki  $(a, 1)$ -ratsun kierrokset  $(a, 1)$ -rakenteisesta ratsun kierroksesta verkkoon  $G(6a+2, 6a+2, a, 1)$ . Ositetaan verkon värit ja yksiköt vastaavanlaisesti kuin alaluvussa 5.1.

**Määritelmä 5.11.** Olkoon  $G(6a+2, 6a+2, a, 1)$  verkko ja  $i, j \in \{0, 1, \dots, a-1\}$ . Tällöin  $ij$  väritettyä solmujoukkoa kutsutaan *tasoksi* ja merkitään  $L_{ij}$ :nä, kun: (vertaa kuva 5.5):

1.  $L_{ij}$  sisältää jokaisen samanvärisen solmun  $(i, j)$ .
2. Tarkastellaan ratsun verkon aliverkkoa, joka on indusoitu solmun  $(i, j)$ :n sisältävällä yksiköllä ja kaikilla ekvivalenteilla yksiköillä. Nyt kohdan (1) nojalla  $L_{ij}$  on tämän aliverkon yhtenäinen osa.

**Määritelmä 5.12.** Tasot  $L$  ja  $L^*$  ovat *vierustasot*, jos on olemassa sellaiset solmut  $(x, y) \in L$  ja  $(k, l) \in L^*$ , että niiden väliin voidaan lisätä särmä  $\{(x, y), (k, l)\}$   $(a, 1)$ -ratsulla. Jos kyseinen siirto on  $(-1, \pm a)$  tai  $(1, \pm a)$ , niin  $L$  ja  $L^*$  ovat *vierustasoja pystysuunnassa*, muulloin *vierustasoja vaakasuunnassa*. Apulause 5.16 osoittaa, että jokainen taso on vierustaso neljän muun tason kanssa.

**Määritelmä 5.13.** Jokaista solmujoukkoa  $B_{ij} = \{(x, y) \mid ia \leq x \leq (i+1)a - 1, ja \leq y \leq (j+1)a - 1\}$  kutsutaan *lohkoksi*,  $i, j \in \{0, 1, \dots, 6\}$ . Lohkot  $B_{i,6}$  ja  $B_{6,j}$

$B_{06}$	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11	
	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10	
	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03	
	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02	
	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01	
	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00	
	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13	
	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12	
	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11	
	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10	
$\vdots$										
	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03	
	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02	
	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01	
	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00	
	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13	
	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12	
	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11	
	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10	
	$B_{02}$	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03
12 02 32 22		13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02	
11 01 31 21		10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01	
10 00 30 20		11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00	
03 13 23 33		02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13	
02 12 22 32		03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12	
01 11 21 31		00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11	
00 10 20 30		01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10	
$B_{01}$		13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03
		12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02 32 22	13 03 33 23	12 02
	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01	
	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00 30 20	11 01 31 21	10 00	
	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13	
	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12 22 32	03 13 23 33	02 12	
01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11		
00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10 20 30	01 11 21 31	00 10		
$\dots$										
	$B_{00}$				$B_{10}$				$B_{60}$	

**Kuva 5.5.** Verkko  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$ , missä  $a = 4$ . Nyt esimerkiksi keltaiset ruudut muodostavat tason  $L_{33}$  (vertaa kuva 5.6), jonka vierustasot ovat  $L_{21}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{13}$  ja  $L_{31}$  (esimerkki ruudut vierustasoista on merkitty sinisellä). Harmaat ja valkoiset alueet jakavat tasot lohkoihin.

ovat vaillinaisia lohkoja. Järjestettyjä pareja  $(B_{i_1, j_1}, L_{i_2, j_2})$  käyttäen ratsun sijainti on mahdollista määrittää, sillä jokaisessa lohkoissa on korkeintaan yksi tason  $L_{ij}$  solmu.

Nyt jokaista tasoa voidaan tarkastella erikseen 2 ulotteisena uutena verkkona, kuten kuvassa 5.6. Tarkoituksena on käydä läpi koko taso ennen siirtymistä toiseen tasoon ja sitä kautta muodostaa Hamiltonin kierros koko laudalle. Tätä varten käsitellään tasoja yksittäisinä ruutuina ja muodostetaan niille Hamiltonin kierros (katso kuva 5.9).

$$\begin{array}{c}
(B_{05}, L_{33}) \left\{ \begin{array}{cccccc} 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \\ \cdot & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \\ \cdot & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \\ & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \end{array} \right. \\
(B_{01}, L_{33}) \left\{ \begin{array}{cccccc} 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \\ 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \end{array} \right. \\
(B_{00}, L_{33}) \left\{ \begin{array}{cccccc} 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 \end{array} \right. \\
\hline
(B_{10}, L_{33}) \quad \cdot \cdot \cdot \quad (B_{50}, L_{33})
\end{array}$$

**Kuva 5.6.** Kuvan 5.5 taso  $L_{33}$ . Jokainen ruutu voidaan esittää järjestetyn parina  $(B_{ij}, L_{33})$ , missä  $i, j \in \{0, 1, \dots, 5\}$ .

### 5.2.1 Hamiltonin kierroksen muodostaminen tasojen välillä

Seuraavaksi esitämme apulauseen 5.16, joka näyttää, mitkä tasot ovat tason vierustasoja. Tämän jälkeen jaamme tasoihin jaetun verkon alueisiin, joiden avustamana laadimme oppaan Hamiltonin kierroksen löytämiselle tasojen välillä.

**Määritelmä 5.14.** Verkon  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$  tasoihin jaettua verkkoa merkitään verkkona  $G_{taso}(a, a)$ . Tämä on mielekästä, sillä tasojen määrä verkossa  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$  on  $a^2$ .

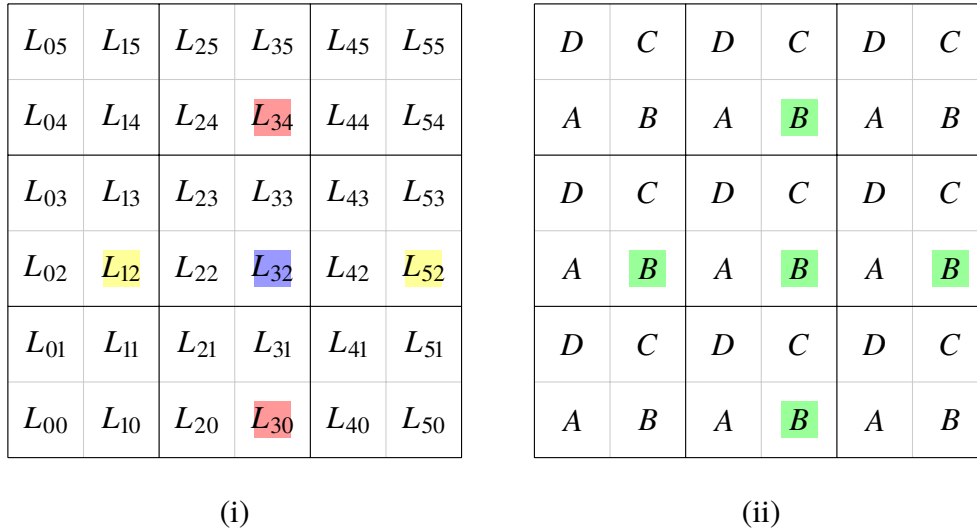
**Määritelmä 5.15.** Merkitään tason  $L_{ij}$  alueeksi  $A$ , jos  $i$  ja  $j$  ovat molemmat parillisia,  $B$ , jos  $i$  on pariton ja  $j$  on parillinen,  $C$ , jos  $i$  ja  $j$  ovat molemmat parittomia ja  $D$ , jos  $i$  on parillinen ja  $j$  on pariton. Tämä jakaa verkon  $G_{taso}(a, a)$  solmut neljään joukkoon, ja se on havainnollistettu kuvassa 5.8.

**Apulause 5.16.** Olkoon  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$  verkko. Jaetaan sen solmut tasoihin  $L_{ij}$ , missä  $i, j \in \{0, 1, \dots, a-1\}$  ja  $a$  on parillinen. Nyt verkon särmäjoukko määrittyy seuraavasti.

1. Jos  $i \geq 2$ , niin  $L_{ij}$  on pystysuunnassa tason  $L_{i-2,j}$  vierustaso.  
Jos  $i \leq a - 3$ , niin  $L_{ij}$  on pystysuunnassa tason  $L_{i+2,j}$  vierustaso.
2. Jos  $i \in \{0, 1\}$ , niin  $L_{ij}$  on pystysuunnassa tason  $L_{i-2+a,j+(-1)^j}$  vierustaso.  
Jos  $i \in \{a-2, a-1\}$ , niin  $L_{ij}$  on pystysuunnassa tason  $L_{i+2-a,j+(-1)^j}$  vierustaso.
3. Jos  $j \geq 2$ , niin  $L_{ij}$  on vaakasuunnassa tason  $L_{i,j-2}$  vierustaso.  
Jos  $j \leq a - 3$ , niin  $L_{ij}$  on vaakasuunnassa tason  $L_{i,j+2}$  vierustaso.
4. Jos  $j \in \{0, 1\}$ , niin  $L_{ij}$  on vaakasuunnassa tason  $L_{i+(-1)^i,j-2+a}$  vierustaso.  
Jos  $i \in \{a-2, a-1\}$ , niin  $L_{ij}$  on vaakasuunnassa tason  $L_{i+(-1)^i,j+2-a}$  vierustaso.



Kun  $i$  on pariton, niin todistus toimii samoin. Tosin siirtoja  $(1, \pm a)$  täytyy hyödyntää siirtymiseen lohkoista  $B_{11}$ , ja siirtoja  $(-1, \pm a)$  lohkoista  $B_{12}$ . Näin ollen apulauseen väite pätee.  $\square$



**Kuva 5.8.** Verkko  $G_{taso}(a, a)$  yksikköihin ja alueisiin jaettuna arvolla  $a = 6$ .

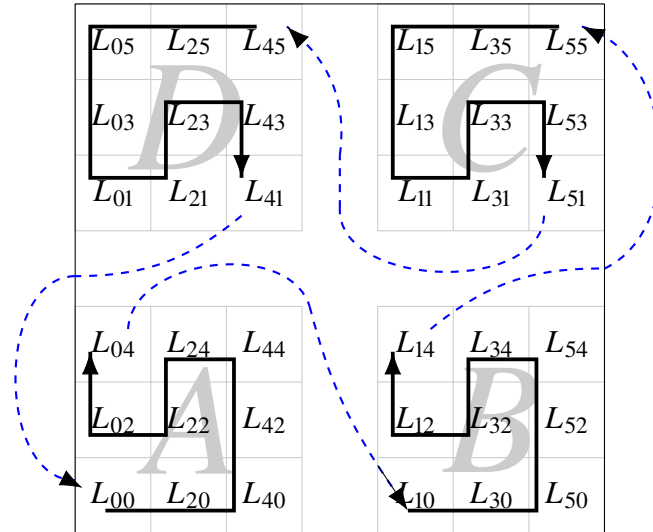
Käydään seuraavaksi edellinen apulause läpi kuvien 5.7 ja 5.8 avulla.

1. Jokaisesta alueen tasosta on mahdollista siirtyä vaakasuunnassa olevaan vierustasoon niin, että ratsu pysyy samalla alueella. Esimerkiksi taso  $L_{32}$  on pystysuunnassa vierustaso tasojen  $L_{12}$  ja  $L_{52}$  kanssa (vertaa kuvan 5.8 tason  $L_{32}$  keltaisia vierustasoja sekä kuvan 5.7 parien  $(B_{11}, L_{32})$  ja  $(B_{12}, L_{32})$  vierustasoja).
2. Jos ratsu sijaitsee jollakin tasolla  $L_{0,j}$  tai  $L_{1,j}$  ( $j \in \{0, \dots, a-1\}$ ) (kuvan 5.8(i) vasen reuna), niin ratsu voi liikkua tasoon  $L_{a-2,j+(-1)^j}$  tai  $L_{a-1,j+(-1)^j}$ . Liikkumalla johonkin näistä tasoista ratsun sijainti muuttuu alueelta toiselle vaakasuunnassa, muttei pystysuunnassa ( $A \leftrightarrow D$  ja  $B \leftrightarrow C$ ). Vastaavasti, jos ratsu sijaitsee jollakin tasolla  $L_{a-2,j}$  tai  $L_{a-1,j}$  (kuvan 5.8(i) oikea reuna), niin voidaan siirtyä verkon  $G_{taso}(a, a)$  vasemalle puolelle niin, että alue muuttuu vaakasuunnassa. Edellämäinnittuja siirtoja kutsutaan *erikoissiirroksi*.
3. Jokaisesta alueen tasosta on mahdollista siirtyä pystysuunnassa olevaan vierustasoon niin, että ratsu pysyy samalla alueella. Esimerkiksi  $L_{32}$  on vaakasuunnassa vierustaso tasojen  $L_{30}$  ja  $L_{34}$  kanssa (vertaa kuvan 5.8 tason  $L_{32}$  punaisia vierustasoja sekä kuvan 5.7 parien  $(B_{00}, L_{32})$  ja  $(B_{10}, L_{32})$  vierustasoja).
4. Jos ratsu sijaitsee jollakin tasolla  $L_{i,0}$ ,  $L_{i,1}$ ,  $L_{i,a-2}$  tai  $L_{i,a-1}$  (kuvan 5.8(i) ylä- tai alareuna), on mahdollista siirtyä yläreunasta alareunaan (vastaavasti alareunasta yläreunaan) niin, että ratsun sijainti muuttuu alueelta toiselle pystysuunnassa ( $A \leftrightarrow B$  ja  $D \leftrightarrow C$ ). Myös näitä siirtoja kutsutaan *erikoissiirroksi*.



Nyt esimerkiksi  $L_{01}$  on vierustaso tasojen  $L_{21}$  ja  $L_{03}$  kanssa kohtien (1) ja (3) nojalla sekä tasojen  $L_{a-2,0}$  sekä  $L_{1,a-1}$  vierustaso kohtien (2) ja (4) nojalla. Todistetaan seuraavaksi, että jokaisessa verkossa  $G_{taso}(a, a)$  on olemassa Hamiltonin kierros. Järjestetään tätä varten verkko  $G_{taso}(a, a)$  uudelleen edellisen apulauseen pohjalta, kuten esimerkiksi kuvassa 5.9.

**Apulause 5.17.** (Opas) Jokaiselle parilliselle luvulle  $a$  on olemassa Hamiltonin kierros verkossa  $G_{taso}(a, a)$ .



**Kuva 5.9.** Apulauseen 5.17 mukainen verkko. Katkoviivalla merkityt siirrot ovat erikoissiirtoja. Kaikki alueen tasot käydään läpi ennen kuin siirrytään toiselle alueelle erikoissiirrolla.

*Todistus.* Tarkastellaan kuvan 5.9 mukaista tasoihin jaettua verkkoa  $G_{taso}(a, a)$ , missä  $a = 6$ . Tällainen verkko koostuu neljästä  $(a/2) \times (a/2)$ -kokoisesta aliverkosta, joiden solmut ovat samalla alueella sijaitsevia tasoja. Alueiden kirjaimet näkyvät aliverkkojen taustalla. Alueelta toiselle voidaan siirtyä katkoviivan mukaisella erikoissiirrolla.

Aloitetaan Hamiltonin kierroksen muodostaminen tason  $L_{00}$  solmusta. Edetään polkua mustien nuolten mukaisesti ja käydään läpi kaikki alueen A solmut niin, että ratsu päättyy solmuun  $L_{0,a-2}$ . Alueen A solmusta  $L_{0,a-2}$  ratsu siirtyy erikoissiirrolla alueen B solmuun  $L_{10}$  ja käy mustien nuolten mukaisesti läpi kaikki B:n solmut. Tämän jälkeen ratsu siirtyy erikoissiirrolla alueen C solmuun  $L_{a-1,a-1}$ . Vastaavasti ratsu käy läpi C:n solmut, siirtyy erikoissiirrolla alueelle D, käy läpi kaikki D:n solmut päättyen solmuun  $L_{a-2,1}$ , ja palaa erikoissiirrolla alueella A sijaitsevaan lähtöpisteeseen  $L_{00}$ . Näin ollen Hamiltonin kierros on saatu muodostettua tasoihin jaettuun verkkoon  $G_{taso}(a, a)$ .  $\square$

### 5.2.2 Tasojen välisen Hamiltonin kierroksen hyödyntäminen

Vielä ei olla osoitettu, että jokaisen tason välillä on polku. Osoitetaan seuraavaksi tämä ja laaditaan lause, joka osoittaa  $(a, 1)$ -rakenteisen ratsun kierroksen olemassaolon verkossa  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$ . Käsitellään kuvan 5.5 mukaisesti lohkoja  $B_{ij}$  harmaina, kun  $i+j$  on parillinen ja valkoisina, kun  $i+j$  on pariton.

**Määritelmä 5.18.** Tarkastellaan verkon  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$  aliverkkoja, jotka sisältävät vain yhden tason. Nyt jokainen aliverkko on 2 ulotteinen verkko, jonka solmut voidaan tulkita lohkoina  $B_{ij}$  (tämä vastaa käytännössä järjestettyä paria  $(B_{i_1, j_1}, L_{i_2, j_2})$ ). Näiden aliverkkojen koko vaihtelee tasojen mukaan seuraavasti:

1. Tasot  $L_{00}, L_{10}, L_{01}$  ja  $L_{11}$  ovat  $7 \times 7$ -kokoisia aliverkkoja, kuten kuvassa 5.10 (i). Näitä tasoja kutsutaan *parittomiksi tasoiksi*. Ne sisältävät Hamiltonin polun minkä tahansa kahden harmaan lohkon välillä.
2. Tasot  $L_{ij}$ , missä joko  $i \in \{0, 1\}$  tai  $j \in \{0, 1\}$  ovat  $7 \times 6$ -kokoisia tai  $6 \times 7$ -kokoisia verkkoja (ei sisällä parittomia tasoja  $L_{00}, L_{10}, L_{01}$  ja  $L_{11}$ ), kuten kuvassa 5.10 (ii) tai 5.10 (iii).
3. Loput tasot ovat  $6 \times 6$ -kokoisia verkkoja, kuten kuvassa 5.10 (iv).

Jos tasot eivät ole parittomia (kohdat (2) ja (3)), niin ovat tasot *parillisia tasoja*. Nämä tasot sisältävät Hamiltonin polun minkä tahansa kahden erivärisen lohkon välillä.

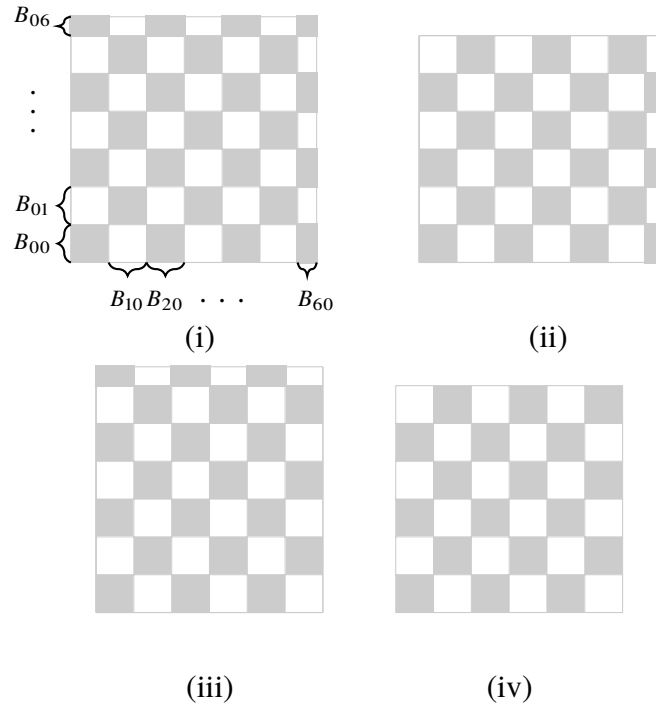
**Määritelmä 5.19.** Olkoot  $L$  ja  $L^*$  vierustasoja  $(a, 1)$ -ratsun verkossa ja  $V \in L$  ja  $V^* \in L^*$  niiden solmujoukkoja. Tällöin solmujoukon  $V$  sisältävää lohkoa sanotaan *hissiksi*  $L$ :stä  $L^*$ :ään. Kuvan 5.11 mukaisia punaisia vaakasuuntaisilla viivoilla merkittyjä lohkoja sanotaan *siirtymäalueeksi* tai *T-alueeksi* eli  $T = \{B_{ij} : i, j \in \{2, 3\}\}$ . Pystysuuntaisilla viivoilla merkittyjä lohkoja kutsutaan *T1-alueeksi* eli  $T1 = \{B_{ij} : i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\} \setminus T$ .

**Apulause 5.20.** Olkoon  $a$  parillinen ja olkoot  $L$  ja  $L^*$  vierustasoja. Tällöin  $T$ -alue sisältää hissit tasosta  $L$  tasoon  $L^*$  kummankin värisestä lohkoista.

*Todistus.* Olkoot  $L$  ja  $L^*$  sellaisia vierustasoja, että ne sijaitsevat samalla sarakkeella. Tällöin hissit tasosta  $L$  tasoon  $L^*$  ovat joko muotoa  $\{B_{ij} : j \text{ on parillinen}\}$  tai  $\{B_{ij} : j \text{ on pariton}\}$ . Nyt  $T$ -alue sisältää kaksi eriväristä lohkoa, kun  $i$  on parillinen. Nämä ovat tarvittavat hissit tasosta  $L$  tasoon  $L^*$ .

Hissit muodostuvat vastaavanlaisesti vaakatasossa, kun tasot sijaitsevat samalla rivillä. Täten väite pätee.  $\square$

**Lause 5.21.** Jos  $a$  on parillinen, niin on olemassa  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros verkossa  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$ .

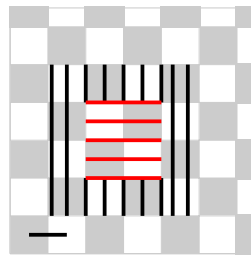


**Kuva 5.10.** Kaikille parillisille luvuille  $a$  jokaisessa tasossa verkko  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$  pienenee yhteen yllä olevista verkoista. Näiden verkkojen solmut ovat lohkoja (tai järjestettyjä pareja  $(B_{i_1, j_1}, L_{i_2, j_2})$ ).

*Todistus.* Kuva 5.11 havainnollistaa yhdessä tasossa liikkumista (A1 - A3), kun taas opas (kuva 5.9) näyttää tasojen läpikäymisen järjestyksen. Kuvat 5.5 ja 5.7 auttavat näkemään, kuinka tason vaihto (B1 - B2) vaikuttaa ratsun sijaintiin kuvassa 5.11.

Muodostetaan edellämainittujen kuvien ja seuraavien kohtien (A1-A3, B1-B2) pohjalta algoritmi, jolla saadaan lauseen väite todistettua.

A1 Oletetaan, että ratsu lähtee parillisen tason  $L$  harmaasta lohkoista, joka sijaitsee T1-alueella. Olkoon myös  $L_*$  oppaan (kuva 5.9) mukaisesti  $L$ :n jälkeen seuraava taso. Laaditaan Hamiltonin polku tasoon  $L$  niin, että polku päättyy valkoiseen hissiin  $L$ :stä  $L_*$ :n T-alueelle. Tämä hissi on apulauseen 5.20 nojalla olemassa. Lohkot  $B_{00}$  ja  $B_{10}$  ovat naapureita tässä Hamiltonin polussa, sillä lohkoilla  $B_{00}$  on vain kaksi naapuria ( $B_{01}$  ja  $B_{10}$ ) ja se ei ole päätepiste.



**Kuva 5.11.** Verkon  $G(6a + 2, 6a + 2, a, 1)$  lohkot sekä T-alue (punaiset viivat) ja T1-alue (pystysuorat viivat).

A2 Laaditaan kierros kohdan A1 tapaisesti, mutta lähdetään harmaan T1-alueen lohkon sijasta valkoisesta T1-alueen lohkoksi ja päädytään harmaaseen hissiin T-alueelle.

A3 Menetellään samalla tavalla kuin kohdassa A1, mutta käydään läpi parillisen tason sijaan pariton taso. Tällöin alla esitetyn algoritmin mukaan ratsu lähtee harmaasta lohkoksi T1-alueelta ja päättyy harmaaseen lohkoon T-alueelle.

Tarkastellaan jälleen kuvaa 5.5 ja apulausetta 5.16. Nyt hissi alueen A tasosta toiseen samalla alueella sijaitsevaan tasoon näkyy kuvassa 5.11 yhtenä vaakasuorana tai pystysuorana liikkeenä. Kun tapauksessa on erikoissiirto, niin hissi lohkoksi toiseen on kuitenkin diagonaalinen suuntainen. Tästä seuraa seuraavat kohdat.

B1 Oletetaan, että taso on käyty läpi ja ratsu on päätenyt hissi kohtaan T-alueella. Oletetaan lisäksi, että kaikkia alueen tasoja ei ole vielä käyty läpi, jolloin seuraava siirto ei ole erikoissiirto. Tällöin tasoa vaihtaessa siirrytään hissillä T-alueelta T1-alueelle vaakasuunnassa tai pystysuunnassa. Tämän seurauksena liikutaan harmaasta lohkoksi valkoiseen tai valkoisesta lohkoksi harmaaseen.

B2 Oletetaan, että alueen (A, B, C tai D) viimeinen taso on käyty läpi ja ratsu on päätenyt harmaaseen lohkoon (hissiin) T-alueelle. Täten seuraava siirto oppaan mukaan on erikoissiirto. Nyt on mahdollista siirtyä diagonaalisesti yläviistoon tai alaviistoon. Koska ainakin toinen siirtymän jälkeisistä lohkoista kuuluu T1-alueelle, niin valitsemme sen.

Algoritmi:

1. Aloitetaan ratsulla liikkuminen alkusolmusta, joka kuuluu tasoon  $L_{a-2,1}$ . Tämä solmu on luonnollisesti myös kierroksen loppusolmu. Valitaan solmu niin, että se kuuluu harmaaseen T-alueen lohkoon  $B_{33}$ , mikä on hissi tasosta  $L_{a-2,1}$  tasoon  $L_{00}$ .
2. Ratsu etenee kohdan B2 mukaisesti eli tehdään erikoissiirto T1-alueelle.
3. Toistetaan kohtia A1 - B1 niin kauan, kun ratsu on parillisella tasolla.
4. Ratsu on päätenyt parittomalla tasolla, joten edetään kohdan A3 mukaisesti.
5. Toistetaan kohtia B1 - A2 niin kauan, kunnes kaikki alueen (A, B, C tai D) tasot on käyty läpi.
6. Jos ratsu on alueella A, B tai C, niin palataan kohtaan 2. Muulloin jatketaan kohtaan 7.
7. Sopivalla polun valinnalla ollaan päästy takaisin alkusolmuun tasossa  $L_{a-2,1}$ .

Havaittakoon, että algoritmia noudattamalla ratsu päättyy kohdissa 1-6 aina harmaan lohkon sisälle, jolloin seuraava kohta on aina mahdollista toteuttaa. Havaittakoon myös, että jokainen alue (A, B, C ja D) sisältää tasan yhden parittoman tason eli kohta 4 käydään tasan neljä kertaa läpi. Itseasiassa kohdat 2-6 käydään tasan neljä kertaa läpi eli kerran jokaiselle alueelle. Koska lohkojen  $B_{00}$  ja  $B_{10}$  väliset särmät säilyvät muuttumattomina jokaisessa tasossa, niin ovat algoritmilla muodostetut kierrokset myös  $(a, 1)$ -rakenteisia.

Täten voidaan todeta, että laaditut kierrokset ovat todella Hamiltonin kierroksia, joten väite pätee. □

### 5.3 Tulos

**Lause 5.22.** *Jos  $a$  ja  $n$  ovat parillisia lukuja, joille  $n \geq a(6a + 2)$ , on olemassa  $(a, 1)$ -ratsun kierros verkossa  $G(n, n, a, 1)$ .*

*Todistus.* Olkoon  $a$  parillinen luku. Ensinnäkin lauseen 5.21 nojalla on olemassa  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros verkossa  $G(n, n, a, 1)$ , kun  $n = 6a + 2$ . Apulauseen 5.10 mukaan kyseistä verkkoa voidaan laajentaa verkkoon  $G(kn, kn, a, 1)$  niin, että laajennetussa verkossa on  $(a, 1)$ -rakenteinen ratsun kierros, kun  $k = 2, 3, 4, \dots$ . Tämän nojalla  $(a, 1)$ -rakenteiset ratsun kierrokset saadaan aina muodostettua, kun  $n = 6a + 2, 2(6a + 2), 3(6a + 2), \dots, a(6a + 2)$ .

Apulauseen 5.8 nojalla edellä laadittuja kierroksia voidaan laajentaa  $n + 2a \times n + 2a$ -kokoisille laudoille. Koska nyt  $6a + 2 \pmod{2a} \neq 2(6a + 2) \pmod{2a} \neq \dots \neq a(6a + 2) \pmod{2a}$ , niin voidaan kierrokset laajentaa kaikille parillisille arvoille  $n \geq a(6a + 2)$  näiden lautojen pohjalta. Tämä onnistuu, kun laudan kokoa laajennetaan riittävän monta kertaa. Siispä väite pätee. □

## 6 Yhteenveto

Tutkielman yhtenä keskeisimpänä kysymyksenä pohditaan, mille shakkilaudoille on olemassa yleinen  $(a, b)$ -ratsun kierros. Tämä kysymys osoittautuu kuitenkin haastavaksi, joten aiheen tarkastelua rajataan tiettyjen ratsujen tapauksiin sekä  $(a, b)$ -ratsun välttämättömiin ehtoihin. Välttämättömiksi ehdoiksi yleiselle  $(a, b)$ -ratsun kierrokselle saadaan:

1.  $\text{sy}(a, b) = 1$  ja
2.  $a + b$  on pariton,

kunhan lauta on riittävän suuri. Tulos on mielekäs, sillä tällöin ratsumies pystyy liikkumaan jokaiseen ruutuun laudalla ja ratsun kierros on näin ollen mahdollinen. Riittäviä ehtoja ei  $(a, b)$ -ratsun kierroksille tutkielmassa kuitenkaan ole.

### 6.1 Tärkeimmät lopputulokset

Luvussa 3 saatiin todistettua lause 3.2, jonka mukaan kaikille  $m \times n$ -kokoisille shakkilaudoille on olemassa epätriviaali tavallisen ratsun kierros, jos ainakin toinen luvuista  $m$  ja  $n$  on parillinen,  $m \neq 1, 2$ , tai  $4$ , sekä  $m \neq 3$  ja  $n \neq 4, 6$  tai  $8$ , missä  $1 \leq m \leq n$ .

Luvussa 4 puolestaan todettiin yleisille  $(a, b)$ -ratsuille lause 4.3. Lauseen mukaan, jos  $(a, b)$ -ratsulla on epätriviaali ratsun kierros, niin tällöin  $a + b$  on pariton,  $m$  tai  $n$  on parillinen,  $m \geq a + b$ ,  $n \geq 2b$  ja  $\text{sy}(a, b) = 1$ . Luvussa 4 todettiin myös lause 4.8, jonka mukaan  $(2, 3)$ -ratsulla on olemassa ratsun kierros  $5k \times n$ -kokoisella shakkilaudalla, missä  $(5k, n) \neq (5, 18)$ , jos ja vain jos  $k = 1$  ja  $n \geq 16$  on parillinen, tai  $k = 2$ ,  $n \geq 10$  ja  $n \neq 12$ , tai  $k \geq 3$  on pariton,  $n \geq 10$  on parillinen ja  $n \neq 12$ , tai  $k \geq 4$  on parillinen ja  $n = 5, 9, 10, 11$ , tai  $n \geq 13$ .

Luvussa 5 tärkeimmäksi lopputulokseksi saatiin lause 5.22, jonka mukaan  $(a, 1)$ -ratsulla on ratsun kierros  $n \times n$ -kokoisella laudalla, jos  $a$  ja  $n$  ovat parillisia ja  $n \geq a(6a + 2)$ .

### 6.2 Lopuksi

Vertaamalla luvun 3 tuloksia lukujen 4 ja 5 tuloksiin voidaan huomata, että Schwenkin lause on muita lopputuloksia kattavampi. Kyseinen lause todistaa tavallisen ratsun kierroksen olemassaolon jokaiselle laudalle, joka toteuttaa lauseen ehdot. Täten jokaiselle  $m \times n$ -kokoiselle laudalle saadaan varmuus siitä, onko laudalla tavallisen ratsun kierros.  $(2, 3)$ -ratsun ja  $(a, 1)$ -ratsujen tapauksissa todistetaan ratsun kierrosten olemassaolo vain tietynkokoisille laudoille, joten suurinosa laudoista jää vielä tutkimatta. Tämä johtuu yleisen tuloksen muodostamisen haastavuudesta tavallisesta poikkeaville ratsuille.

Vaikka yleistä tulosta  $(a, b)$ -ratsun kierroksille ei vaikuttaisi tällä hetkellä olevan, on ongelmaa tutkittu melko paljon. Useissa lähde-teoksissa oltiin käsitelty  $(a, b)$ -ratsujen kierroksia muun muassa rajaamalla pois lautoja, joilla ei ole ratsun kierroksia. Jos lukija haluaa perehtyä aiheeseen vielä syvemmin, suosittelen lukijaa aloittamaan tarkastelemalla lähteitä [2], [4], [6] ja [9].

# Lähteet

- [1] Balakrishnan, R - Ranganathan, K. *A Textbook of Graph Theory*. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
- [2] G.L. Chia, Siew-Hui Ong. *Generalized knight's tours on rectangular chessboards*, Discrete Applied Math. 150 [2005], s. 80–98.
- [3] Junnila, H. *Diskreettiä matematiikkaa*. Kurssimoniste, Helsingin yliopisto.
- [4] Kamčev, N. *Generalised Knight's Tours*, The Electronic Journal of Combinatorics 21.1 [2014], s. 1-32.
- [5] K. Karudilok, S. Singhun, R. Boonklurb. *Some forbidden rectangular chessboards with an (a, b)-Knight's move*, The Proceeding of the 22nd Annual Meeting in Mathematics [2017], Chiang Mai University, s. 1-6.
- [6] K. Karudilok, S. Singhun, R. Boonklurb. *Some forbidden rectangular chessboards with Generalized Knight's move*, Thai Journal of Mathematics [2019], Bangkok, s.133-145.
- [7] Koivisto, P - Niemistö, R. *Graafiteoriaa*. Kurssimoniste, Tampereen yliopisto, 2018.
- [8] Rosen, K. *Discrete mathematics and its applications*. The Random House, New York, 1988.
- [9] Schwenk, A. *Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?* Math. Magazine 64 [1991], s. 325-332.
- [10] Wikipedia. *Hamiltonian path*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian\\_path](https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path), viitattu 2.2.2022.