

Juho Lundahl

NIVELVARSIROBOTIN SUORAN JA KÄÄNTEISEN KINEMATIIKAN LASKENTA

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Elokuu 2022

TIIVISTELMÄ

Juho Lundahl: Nivelvarsirobotin suoran ja käänteisen kinematiikan laskenta
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Konetekniikan tutkinto-ohjelma
Elokuu 2022

Kinematiikka eli geometrinen liikeoppi tutkii kappaleen liikettä ottamatta kantaa liikkeen syihin tai kappaleeseen vaikuttaviin voimiin. Robotin rakenne koostuu nivelistä ja tukivarsista, joiden liikettä käsitellään usean jäykän kappaleen liikkeenä kolmiulotteisessa avaruudessa. Liikkeen kinemaattinen laskenta jaetaan pääasiallisesti kahteen eri laskentamenetelmään. Näitä ovat käänteinen kinematiikka ja suora kinematiikka. Suoralla kinematiikalla ratkaistaan robotin työkalun asento ja sijainti, kun kulmamuuttujat tunnetaan. Käänteisen kinematiikan laskennassa sen sijaan ratkaistaan kulmamuuttujat, kun tunnetaan työkalun sijainti ja asento. Tutkielman tarkoituksena on perehtyä edellä mainittuihin kinemaattisiin malleihin ja erityisesti niiden matemaattiseen ratkaisuun.

Tutkielmassa muodostetaan käänteiskinemaattinen malli kuuden vapausasteen kiertyväniveli-selle robotille. Ensin esitellään kinemaattisen mallin ymmärtämisen kannalta välttämättömiä perusasioita, kuten homogeenisia siirrosmatriiseja, niiden laskutoimituksia ja avaruuden koordinaatiston esittämistä matriisina. Tutkielmassa tutustutaan robotin suoran kinemaattisen mallin ja käänteiskinemaattisen mallin muodostamiseen ja johdetaan laskennan kannalta oleelliset yhtälöt. Lopuksi laskenta suoritetaan tarkoitukseen soveltuvalla laskentaohjelmistolla, sovelletaan laskennan tuloksia robotin kinemaattisen rakenteen 3D-malliin ja tarkastellaan laskennan toimivuutta käytännössä. Tutkielman aineistona käytetään robotiikan, matematiikan ja mekaniikan alan kirjallisuutta.

Avainsanat: käänteinen kinematiikka, suora kinematiikka, nivelvarsirobotti, käsivarsirobotti

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
1.1	Työn tavoitteet	2
1.2	Tutkimuksen rajaus	2
2.	Robotin liikkeen matemaattinen mallinnus	4
2.1	Avoimen kinemaattisen rakenteen liike	4
2.2	Koordinaatistomuunnokset	4
2.2.1	Rotaatiomatriisit	4
2.2.2	Rotaatio koordinaattiakselin ympäri	6
2.2.3	ZYZ- rotaatio.	8
2.2.4	Homogeeniset siirromatriisit	8
2.3	Suora kinematiikka	10
2.3.1	Siirromatriisien yhdistäminen kinemaattiseksi ketjuksi	10
2.3.2	Denavit-Hartenberg -menetelmä	10
2.3.3	Kuuden vapausasteen suora kinematiikka	12
2.4	Käänteinen kinematiikka	14
2.4.1	Kolmen vapausasteen käänteinen kinematiikka tasotapauksessa	14
2.4.2	Kuuden vapausasteen käänteinen kinematiikka	17
3.	Robotin käänteisen kinematiikan laskenta ja tulokset	23
3.1	Käänteisen kinematiikan ohjelmallinen toteutus	23
3.2	Käänteinen kinematiikka Matlabilla	23
3.3	Laskennan testaus 3D-mallilla	27
3.4	Käänteinen kinematiikka C++ koodina	29
4.	Yhteenveto	30
	Lähteet	31

LYHENTEET JA MERKINNÄT

${}^{i-1}T_i$	Homogeeninen siirromatriisi niveleltä $i-1$ niveleen i . Nivelet numeroidaan edeten robotin jalustasta työkaluun päin kasvavalla numeroinnilla alkaen luvusta 1
$\text{Atan2}(y,x)$	Atan2 -funktio laskee origosta pisteeseen (x,y) piirretyn säteen ja x -akselin välisen kulman. Atan2 -funktiolla saadaan laskettua oikeat tulokset kaikille kulman arvoille väliltä $[0, 2\pi]$
$C(\phi)$	Kulman ϕ kosini, tavanomaisesta $\cos(\phi)$ lyhennetty merkintä
$S(\phi)$	Kulman ϕ sini, tavanomaisesta $\sin(\phi)$ lyhennetty merkintä

1. JOHDANTO

Jatkuva paine kasvattaa teollisuuden tuottavuutta tinkimättä työn laadusta on saanut aikaan siirtymän entistä vahvemmin automatisoidun valmistuksen piiriin [3, s. 1]. Tästä on seurannut nykyaikaisen teollisuusrobotin kehitys. Robotiikkaa sovelletaan nykyään useilla aloilla, suurimpina auto-, elektroniikka- ja metalliteollisuus. Maailman valmistavan teollisuuden keskiarvo vuonna 2018 oli 85 robottia 10 000:tta työntekijää kohden maailman kärkimaiden keskiarvon ollessa yli 700 robottia 10 000:tta työntekijää kohden [5, s. 10-11].

Yksinkertaisimmillaan robotti on mekaaninen kone, joka siirtää työkalunsa tai tarttujansa sijaintia halutulla tavalla. Robot Institute of America on määritellyt robotin uudelleenohjelmoitavaksi monikäyttöiseksi laitteeksi, joka suorittaa monenlaisia tehtäviä liikuttamalla materiaaleja, osia, työkaluja tai muita työtehtävään tarkoitettuja laitteita sille ohjelmoidulla tavalla [8, s.4]. Robotteja valjastetaan teollisuudessa muun muassa lavaukseen, pakkaukseen, hitsaukseen, maalaukseen, kokoonpanoihin ja materiaalin työstöön [8, s.5]. Tärkeimpinä ja sopivimpina työtehtävinä robotille voidaan pitää sellaisia tehtäviä, jotka ovat liian raskaita, toisteisia tai vaarallisia ihmisen suoritettavaksi. Myös robotin tehokkuus ja kyky työskennellä vuorokauden ympäri väsymättä on monelle yritykselle peruste robotin käyttöön.

Robotit voidaan jakaa liikkuvaan alustaan kiinnitettyihin robotteihin eli *mobiilirobotteihin* ja kiinteään jalustan robotteihin eli *robottimanipulaattoreihin* [9, s. 5]. Robottimanipulaattorin taas voidaan ajatella koostuvan neljästä osasta [6, s. 14] [4, s. 7]. Nivelillä toisiinsa kiinnitetyistä tukivarsista koostuu robotin mekaaninen rakenne. Robotin nivelten ja tukivarsien liikkeet mahdollistavat servotoimilaitteet, eli sähköisesti, hydraulisesti tai pneumaattisesti toimivat moottorit. Robotin sensorit mittaavat robotin nivelten asematietoja sekä ympäristöä. Ohjausyksikkö eli robotin tietokone käsittelee robotin asematietoja ja ohjaa robotin servotoimilaitteita ennalta määrätyllä tai ympäristöön reagoivalla tavalla. Aseman mittaus ja sen pohjalta laskettu ohjaus ovatkin tehtävistä suoriutumisen kannalta robotin tärkeimpiä toiminnallisuuksia. Jotta robotti voi hoitaa työtehtävää, sen täytyy olla kykenevä suorittamaan liikkeet tarkasti, toistettavasti, nopeasti ja pienellä virhetodennäköisyydellä. Tämä motivoi robotin liikkeen kinematiikan laskentaan, joka voidaan toteuttaa monella eri tavalla riippuen robotin rakenteesta ja toiminnallisista vaatimuksista.

Robotin suhteellisen monimutkaisen kinemaattisen rakenteen takia ohjauksen yhdeksi perusongelmaksi muodostuu yksittäisten nivelten ohjaus siten, että työkalu saadaan haluttuun paikkaan ja asentoon. Nykyaikaisen tietokoneiden suuren laskentatehon avulla yksittäisen nivelen ohjauksen laskentaa voitaisiin suorittaa numeerisesti iteroimalla, sen ollessa kuitenkin tarpeettoman hidasta robotin usean vapausasteen ja laskennan monimutkaisuuden vuoksi [9, s. 91]. Tämän takia robotin työkalun reittiä nivelten kulmien funktiona pyritään mallintamaan geometrisilla ja algebrallisilla menetelmillä, jotka pienentävät laskentatehon tarvetta ja sitä kautta nopeuttavat laskentaa ja robotin tehtävistä suoriutumista.

Työssä tutkitaan matemaattisen mallin muodostamista suoran ja käänteisen kinematiikan keinoin ja näiden matemaattisten mallien perusteita. Tarkemmin tutustutaan jäykän kappaleen aseman ja asennon laskentaan ja homogeenisten siirrosmatrisien muodostamista kinemaattiselle ketjulle. Työssä myös testataan johdettujen matemaattisten mallien toimivuutta robotin virtuaalisella mallilla.

1.1 Työn tavoitteet

Tämän kandidaatintutkielman tavoitteena on muodostaa toimiva käänteiskinemaattinen malli käsivarsirobotille ja testata sen toimivuutta. Matemaattista mallia tullaan soveltamaan työn aikana tai myöhemmin suunniteltavaan pienoiskäsivarsirobottiin. Työssä tutkitaan käänteisen ja suoran kinematiikan etuja robotin ohjauksessa. Työssä tutkitaan myös muodostetun käänteiskinemaattisen mallin soveltuvuutta mikrokontrollerin ohjelmistoon ja sen toimintaa käytännössä. Robotin manipulaattori tullaan rakentamaan 3D-tulostetuista muoviosista, nivelten liikuttamiseen käytetään askelmootoreita ja nivelen asennon takaisinkytkentään käytetään inkrementaalisia kulma-antureita. Kinematiikan laskenta ja ohjaus suoritetaan Arduino Mega 2560-kontrollerilla.

1.2 Tutkimuksen rajaus

Tutkimuksen matemaattisessa osuudessa keskitytään kiertyväniveliseen robottiin ja sen kinematiikkaan. Kiertyvänivelinen robotti eli niin sanottu käsivarsirobotti on yksi monikäyttöisimmistä roboteista laajan työalueensa ja usean vapausasteen ansiosta. Jokainen kiertyvä nivel robotin rakenteessa vastaa yhtä vapausastetta. Työkalu on mahdollista ohjata mihin tahansa asentoon ja paikkaan peruskoordinaatistossa kyseisen robotin työalueen sisällä kuudella vapausasteella. Aina robotti ei kuitenkaan tarvitse kuutta vapausastetta, sillä esimerkiksi hitsausrobotin hitsauslangan kiertymällä ei ole käytännön merkitystä tehtävän kannalta [6, s. 18]. Käytännössä kuuden vapausasteen robotteja kuitenkin suositaan, jotta eri robottimallien määrä pystytään minimoimaan ja sama robotti pystytään valjastamaan erilaisiin työtehtäviin.

Kinematikka tarkoittaa liikkeen tutkimista ottamatta kantaa liikkeen syihin [7, s. 15]. Robottikäsi on kinematiikan näkökulmasta tarkasteltuna usean jäykän kappaleen muodostaman ketjun liikettä, ja tällaista ketjua kutsutaan avoimeksi kinemaattiseksi rakenteeksi [4, s. 6]. Nivelvarsirobotin tapauksessa usein keskitytään mallintamaan avoimen kinemaattisen rakenteen pään liike nivelkulmien funktiona, sillä yleensä robotin työkalu tai tarttuja on ainoastaan robotin viimeisen tukivarren päässä.

2. ROBOTIN LIIKKEEN MATEMAATTINEN MALLINNUS

2.1 Avoimen kinemaattisen rakenteen liike

Nivelvarsirobotin mekaaninen rakenne koostuu tukivarsista ja nivelistä, joilla peräkkäiset tukivarret yhdistetään toisiinsa. Nivelet ovat tyypillisesti joko lineaarisesti liukuvia (engl. prismatic joint) tai kiertyviä (engl. revolute joint)[1, s. 5]. Yksittäisen tukivarren liikettä avaruudessa voidaan kinematiikan näkökulmasta käsitellä jäykän kappaleen liikkeenä. Robotin *työalueeksi* kutsutaan sitä aluetta robotin peruskoordinaatistossa, mihin robotin työkalu voi liikkua. Työalue määräytyy robotin mekaanisen rakenteen ja nivelten rajoitteiden perusteella [9, s. 3]. Nivelvarsirobotissa kaikki nivelet ovat kiertyviä, ja työalue esimerkiksi kuuden vapausasteen nivelvarsirobotilla on pallomainen alue peruskoordinaatistonsa origon ympärillä [1, s. 5].

Robotin kinemaattinen laskenta jaetaan yleisesti kahteen eri päätyyppiin: suoran ja käänteisen kinematiikan ongelmaan [4, s. 32]. Suoran kinematiikan ongelman tapauksessa kiertyvien nivelten laskentaa varten otetaan käyttöön homogeeniset siirrosmatriisit, jotka kuvaavat nivelen koordinaatiston kiertymistä ja siirtymää suhteessa peruskoordinaatistoon. Homogeenisiä siirrosmatriiseja ketjuttamalla nivelestä seuraavaan saadaan selville seuraavan nivelen asento ja lopulta kinemaattisen ketjun pään asento ja paikkavektori peruskoordinaatistossa [6, s. 26]. Käänteistä kinematiikkaa sovelletaan silloin, kun robotin tukivarsien asennon ainut määrittävä tekijä on robotin työkalun paikka ja asento [3, s. 52]. Käänteisen kinematiikan ongelmalla voi olla useita ratkaisuja riippuen robotin vapausasteista, nivelten mekaanisista rajoitteista ja työkalun halutusta paikasta peruskoordinaatistossa [9, s. 91]. Molempien ongelmien ratkaisua voidaan robottien suunnittelussa yksinkertaistaa sijoittamalla niveliä edellisen nivelen koordinaatiston akselille, jolloin siirrosmatriisit ja niiden laskenta yksinkertaistuvat.

2.2 Koordinaatistomuunnokset

2.2.1 Rotaatiomatriisit

Jäykän kappaleen asema on täysin määritetty kolmiulotteisessa avaruudessa, kun sen asento ja paikka on määritetty.

Olkoon $O - xyz$ ortonormaali peruskoordinaatisto, ja \mathbf{x}, \mathbf{y} ja \mathbf{z} sen koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit. Mielivaltaisen pisteen O' paikka koordinaatistossa $O - xyz$ voidaan kuvata vektoreiden \mathbf{x}, \mathbf{y} ja \mathbf{z} avulla kaavan

$$\mathbf{o}' = x\mathbf{d}'_x + y\mathbf{d}'_y + z\mathbf{d}'_z \quad (2.1)$$

mukaisesti, missä d'_x, d'_y, d'_z ovat vektorin $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$ komponentit peruskoordinaatiston akselien suunnassa. Tällöin pisteen O' paikka voidaan kirjoittaa (3×1) vektorina

$$O' = \begin{bmatrix} d'_x \\ d'_y \\ d'_z \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Jotta jäykän kappaleen asentoa pisteessä O' voitaisiin kuvata, on mielekästä määrittää kappaleelle oman koordinaatistonsa ortonormaali kanta. Olkoon siis $O' - x'y'z'$ sellainen ortonormaali koordinaatisto, jonka origo on pisteessä O' ja x', y' ja z' sen kantavektorit. Näiden kantavektoreiden suhde peruskoordinaatistoon $O - xyz$ voidaan kuvata kaavan 2.1 mukaisesti

$$\mathbf{x}' = x\mathbf{x}'_x + y\mathbf{x}'_y + z\mathbf{x}'_z \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}' = y\mathbf{y}'_x + y\mathbf{y}'_y + z\mathbf{y}'_z \quad (2.4)$$

$$\mathbf{z}' = x\mathbf{z}'_x + y\mathbf{z}'_y + z\mathbf{z}'_z. \quad (2.5)$$

Jokainen koordinaatiston akseli on siis määritetty suhteessa peruskoordinaatistoon, jolloin on määritetty koko koordinaatiston asento. Noudattamalla jo esitettyä notaatiota 2.1, voidaan yksikkövektorit yhdistää 3×3 -matriisiksi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

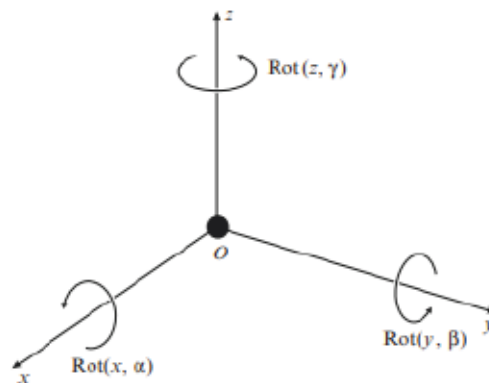
jota kutsutaan rotaatiomatriisiksi. Käytännössä rotaatiomatriisi kuvaa jokaisen kantavektorin komponentit peruskoordinaatistossa. Rotaatiomatriisin sarakkeet ovat siis keskenään ortogonaalisia vektoreita ja ne muodostavat koordinaatiston orientaation peruskoordinaatistoon nähden. Tällä matriisilla voidaan kuvata rotaatiota minkä tahansa mielivaltaisen koordinaatiston asentoa suhteessa peruskoordinaatistoon. [9, s. 39 - 41] [4, s 16-18]

[2, s. 163-164]

Avoimen kinemaattisen ketjun muodostuessa useasta ketjuun liitetystä jäykästä kappa-leesta, voidaan rotaatiomatriisin avulla osoittaa nivelen kohdalta kiertyneen tukivarren suunta, jonka pituudesta muodostetaan *translaatiomatriisi*, joka kuvaa koordinaatiston ori-gon siirtymää kolmiulotteisessa avaruudessa suhteessa peruskordinaatiston origoon.

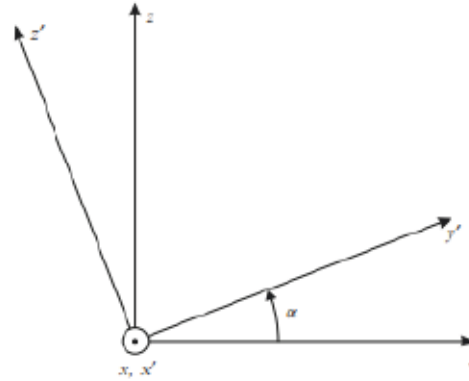
2.2.2 Rotaatio koordinaattiakselin ympäri

Avaruustapauksessa koordinaatiston mielivaltaisen asennon esittämiseen tarvitaan kol-me kulmamuuttujaa [6]. Näin ollen, mikä tahansa koordinaatiston rotaatio saadaan esitet-tyä kolmen rotaation yhdistelmänä, niin kutsuttujen perusrotaatiomatriisien avulla. Perus-rotaatiomatriisit muodostetaan pyörittämällä koordinaatistoa omien akseleidensa ympäri niin, että haluttu orientaatio saavutetaan (kuva 2.1).



Kuva 2.1. Oikeakätinen koordinaatisto ja sen positiiviset pyörimissuunnat [1, s. 10]

Perusrotaatiot $R_{x,\alpha}$, $R_{y,\beta}$ ja $R_{z,\gamma}$ määritellään rotaationa pyörivän koordinaatiston x , y ja z akseleiden ympäri. Kulmat α , β ja γ määritellään kulmina, jotka muodostuvat pyörivän koordinaatiston kahden muun akselin ja niitä vastaavien peruskordinaatiston akselien välille, kun koordinaatistoa pyöritetään yhden akselin suhteen [1, s. 11] (2.1).



Kuva 2.2. Koordinaatiston rotaatio x -akselin ympäri ja kulman α havainnollistus [1, s. 11]

Perusrotaatiomatriiseiksi koordinaatiston akselien ympäri voidaan muodostaa kappaleen 2.2.1 mukaisella menettelyllä seuraavanlaiset matriisit 2.7 - 2.9.

$$R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} C(\gamma) & -S(\gamma) & 0 \\ S(\gamma) & C(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} C(\beta) & 0 & S(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -S(\beta) & 0 & C(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha) & -S(\alpha) \\ 0 & S(\alpha) & C(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Näiden kolmen rotaatiomatriisin avulla pyörähdyksiä koordinaatiston akselien ympäri voidaan ketjuttaa kertomalla matriiseja toisillaan. Koska matriisitulo ei ole vaihdannainen, huomiota on kiinnitettävä matriisikertolaskun järjestykseen. Pyörähdyksen suhteen kiinnittää koordinaatistoa kuvaava matriisi kerrotaan oikealta pyörähdystä kuvaavalla matriisillä, silloin kun koordinaatisto pyörii oman akselinsa suhteen [3, s. 31]. Voidaan suoraan todeta, että koska matriisin jokainen sarake kuvaa yksikkövektoria, jokaisen matriisin sarakkeen kuvaavan vektorin pituuden täytyy olla yksi. Voidaan myös todeta, että koordinaatisto, jolla ei ole rotaatiota peruskoordinaatiston suhteen, voidaan kuvata identiteettimatriisina I_3 akselien ollessa yhteneviä peruskoordinaatiston vastaavien akselien kanssa.

2.2.3 ZYZ- rotaatio

Koordinaatisto on mahdollista saada mihin tahansa asentoon ketjuttamalla kolme perusrotaatiota, joita vastaa kolme kulmamuuttujaa ϕ , v , ψ [9, s. 48]. Näitä kulmia kutsutaan Eulerin kulmiksi. Niiden akselien yhdistelmiä, joiden suhteen koordinaatisto pyörähtää on monia, kuten ZYX-rotatio ja ZYZ-rotatio. Nivelvarsirobotin tapauksessa mahdollisista rotaatioiden ketjutuksista olennaisin on ZYZ-kulmilla tehtävä rotaation kuvaus. ZYZ-rotatio kuvataan seuraavasti:

1. Koordinaatistoa kierretään peruskoordinaatiston z-akselin suhteen kulma ϕ .
2. Rotaation tulokseksi saatua koordinaatistoa x'y'z' kierretään y'-akselin suhteen kulma v .
3. Kahden rotaation tulokseksi saatua koordinaatistoa x''y''z'' kierretään akselin z'' suhteen kulma ψ .

Rotaatiota voidaan kuvata perusrotaatiomatriiseilla kertomalla rotaatiot järjestyksessään

$$R_{z,\phi}R_{y',v}R_{z'',\psi} \quad (2.10)$$

ZYZ-kulmien laskenta on hyödyllistä robotin ranteen kinematiikan laskennassa. Ranteen orientaatiomuunnokselle voidaan laskea myös *käänteinen ratkaisu*, eli laskea nivelkulmat, kun on annettu koordinaatiston haluttu rotaatio. Orientaatiomuunnoksen käänteinen laskenta robotin ranteen ZYZ-kulmille on esitelty yhtälöissä 2.63 - 2.70 ja esimerkki kulmien laskennasta kappaleessa 3.2.

2.2.4 Homogeeniset siirromatriisit

Niin kuin on todettu, jäykän kappaleen asema peruskoordinaatistossa on täysin määrätty silloin, kun sen *translaatio* eli siirtymä ja *rotaatio* eli asento ovat määritetty. Translaatio määritetään paikkavektorilla peruskoordinaatiston origosta kappaleen koordinaatiston origoon, ja rotaatio määritetään kappaleeseen kiinnitettyllä rotaatiomatriisilla. Näiden tekijöiden lisäksi koordinaattimuunnoksessa pitää ottaa huomioon perspektiivimuunnos f_{1x3} , joka on muotoa $[0, 0, 0]$ ja mittakaavamuunnos w , joka on robotiikkasovelluksissa tyypillisesti muotoa $[1]$ [3, s. 27-28]. Kaikki nämä tiedot yhdistämällä saadaan muodostettua koordinaatistomuunnos, jota kutsutaan homogeeniseksi siirromatriisiksi T .

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R_{3x3} & p_{3x1} \\ \hline - & - \\ f_{1x3} & 1x1 \end{array} \right] \quad (2.11)$$

Näin ollen perusrotaatiomatriisit 2.7 - 2.9 saadaan laajennettua seuraavin siirrosmatriisimuotoihin 2.12 - 2.14

$$\mathbf{R}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} C(\gamma) & -S(\gamma) & 0 & 0 \\ S(\gamma) & C(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} C(\beta) & 0 & S(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S(\beta) & 0 & C(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha) & -S(\alpha) & 0 \\ 0 & S(\alpha) & C(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Homogeeniseksi translaatiomatriisiksi kutsutaan matriisiä, joka kuvaa koordinaatiston translaation, mutta jolla ei ole rotaatiota. Perustranslaatiomatriisi T_{tran} on muotoa

$$\mathbf{T}_{tran} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

jossa p_n kuvaa siirtymää p akselin n suuntaan. Robottikäsi on hyvä esimerkki usean nivelen ja nivelvarren aiheuttamasta ketjutetusta rotaatiosta ja translaatiosta peruskoodinaatiston suhteen. Usean nivelen rotaation ja translaation yhdistelmä voidaan kuvata näiden matriisien kertolaskuna. Määritettäessä robotin työkalun koordinaatiston sijaintia ja asentoa tällä tavalla, kutsutaan ratkaisua *suoran kinematiikan ongelman* ratkaisuksi. [9, s. 41]

2.3 Suora kinematiikka

2.3.1 Siirromatriisien yhdistäminen kinemaattiseksi ketjuksi

Suoran kinematiikan ongelma tarkoittaa robotin työkalun orientaation ja paikan ratkaisemista, kun robotin nivelkulmat tunnetaan. Käytännössä jokaisen nivelen kiertymisen aiheuttama orientaation muutos peruskoordinaatistoon nähden niveltä seuraavassa tukivarressa kuvataan 4×4 kokoisella homogeenisella rotaatiomatriisilla. Tukivarren pituuden aiheuttama koordinaatiston translaatio seuraavaan niveleen kuvataan homogeenisellä translaatiomatriisilla. Koordinaatistomuunnos, joka kuvaa sekä translaatiota että rotaatiota, kutsutaan homogeeniseksi siirromatriisiksi [3, s. 11-15, s]. Matriisitulon luonteesta johtuen homogeenisille siirromatriiseille pätevät seuraavat laskusäännöt

1. Peruskoordinaatisto määritellään siten, että sillä ei ole rotaatiota eikä translaatiota. Näin ollen peruskoordinaatistoa kuvaa yksikkömatriisi I_4 [3, s. 31].
2. Jos koordinaatisto liikkuu/pyörii oman akselinsa ympäri, se kerrotaan oikealta (engl. postmultiply) sopivalla homogeenisella siirromatriisilla [3, s. 31].
3. Jos koordinaatisto liikkuu/pyörii peruskoordinaatiston akselien suhteen, kerrotaan se vasemmalta (engl. premultiply) sopivalla siirromatriisilla [3, s. 31].

Näitä sääntöjä soveltamalla voidaan johtaa suora kinemaattinen malli mille tahansa kinemaattiselle ketjulle, kun kulmamuuttujat ja varsien pituudet tunnetaan. Jos nivelten väliset homogeeniset siirromatriisit ${}^{i-1}T_i$ ovat määritetty, saadaan siirromatriisi robotin peruskoordinaatistosta työkalun koordinaatistoon kertomalla siirromatriisit keskenään edellä esitettyjen muunnossääntöjen mukaisesti [6, s. 24]. Kun nivelten väliset siirromatriisit tunnetaan, kuuden vapausasteen robotille saadaan siirromatriisi

$${}^0T_6 = I_4 {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6. \quad (2.16)$$

Kahden peräkkäisen nivelen $i-1$ ja i siirromatriisin ${}^{i-1}T_i$ muodostamiseen on olemassa *Denavit-Hartenberg-menetelmä*, joka suoraviivaistaa siirromatriisin laskentaa.

2.3.2 Denavit-Hartenberg -menetelmä

Denavit-Hartenberg -menetelmä (engl. Denavit-Hartenberg representation) koostuu nivelten paikallisten koordinaatistojen asettelun säännöstöstä ja systemaattisesta tavasta muodostaa siirromatriisi samalla tavalla kinemaattisen ketjun jokaiselle nivelelle [4, s. 31]. Muunnoksen esittelivät vuonna 1955 Jacques Denavit ja Richard Hartenberg. Denavit-Hartenberg-metodin etu on sen universaalius, sillä muunnoksen muodostaminen etenee samalla tavalla riippumatta siitä, onko robotissa kiertyviä vai lineaarisia niveliä.

Denavit-Hartenberg- menetelmän rajoittavina sääntöinä koordinaatiston asettelulle robotin rakenteessa ovat:

1. z-akseli sijoitetaan nivelen akselin kohdalle tukivarren työkalun puoleiseen päähän.
2. Muodostettavan koordinaatiston ${}^{i-1}T_i$ x-akseli on kohtisuorassa seuraavaan koordinaatiston ${}^iT_{i+1}$ z-akseliin nähden [3, s. 36]

Kun koordinaatistot on määritelty edellä mainittujen sääntöjen mukaisesti, muunnosta varten määritetään neljä *Denavit-Hartenberg-parametria* θ , α , a ja d seuraavasti [4, s. 235]:

1. θ on akselin x_{i-1} ja akselin x_i välinen kulma akselin z_i rotaation suhteen.
2. α on akselin z_{i-1} ja akselin z_i välinen kulma akselin x_i rotaation suhteen.
3. a on akselien z_i ja z_{i-1} välinen lyhin etäisyys akselin x_i suunnassa.
4. d on akselien x_i ja x_{i-1} välinen lyhin etäisyys akselin z_i suunnassa.

Kiertyvällä ja lineaarisella nivelellä on kummallakin yksi vapausaste, josta seuraa, että parametrit a ja α ovat vakioita [9, s. 63]. Määritettyjen koordinaatistojen avulla voidaan todeta, että jokaisen nivelen kulmamuuttuja θ aiheuttaa rotaatiota akselin z_{i-1} ympäri. Robotin tukivarsi taas aiheuttaa translaation d akselin z_{i-1} suunnassa. Homogeeninen siirrosmatriisi saadaan kertomalla perusrotaatiomatriisia 2.12 perustranslaatiomatriisilla 2.15, josta saadaan matriisi

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C(\theta) & -S(\theta) & 0 & 0 \\ S(\theta) & C(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Rotaatiolle α akselin x_{i-1} suhteen ja translaatiolle a_i akselin x_{i-1} suunnassa saadaan siirrosmatriisiksi koordinaatistosta i' koordinaatistoon i

$${}^{i'}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C(\alpha) & -S(\alpha) & 0 \\ 0 & S(\alpha) & C(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

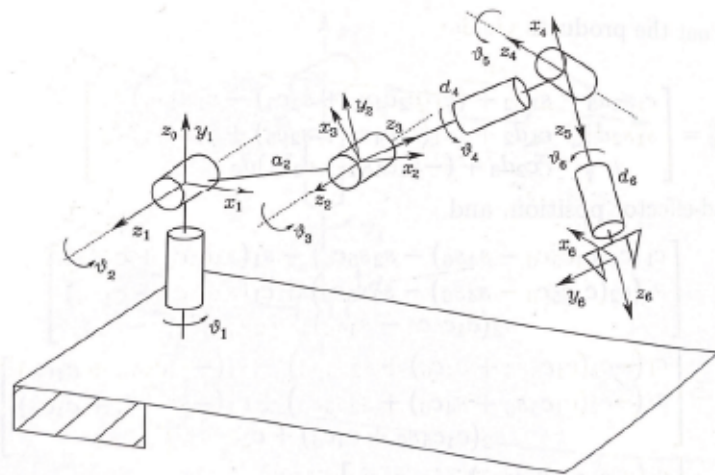
Näistä saadaan kertomalla matriisi 2.17 oikealta matriisilla 2.18 yleinen muoto Denavit-Hartenberg- muunnokselle niveleltä $i-1$ nivelelle i .

$${}^i\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C(\theta_i) & -S(\theta_i)C(\alpha_i) & C(\theta)S(\alpha_i) & a_1C(\theta) \\ S(\theta_i) & C(\theta_i)C(\alpha_i) & -S(\alpha_i) & d_iC(\theta_i) \\ 0 & S(\alpha_i) & C(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Yleisesti laskennassa käytetty tapa on taulukoida manipulaattorin jokaisen nivelen Denavit-Hartenberg-parametrit, joista voidaan määrittää jokaisen nivelen homogeeninen siirromatriisi suoraviivaisesti sijoittamalla nivelen Denavit-Hartenberg -parametrit matriisiin 2.19 [9, s. 63-64].

2.3.3 Kuuden vapausasteen suora kinematiikka

Kuuden vapausasteen robotille voi johtaa suoran kinematiikan mallin määrittämällä jokaisen nivelen Denavit-Hartenberg -parametrit, sijoittamalla ne yksitellen matriisiin 2.19, ja kertomalla saadut yksittäisten nivelten muunnosmatriisit kaavan 2.16 mukaisesti.



Kuva 2.3. Kuuden vapausasteen robottikäsivarsi [9, s. 78]

Tukivarsi	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	0	$\pi/2$	0	θ_3
4	0	$-\pi/2$	d_4	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

Taulukko 2.1. Kuuden vapausasteen kiertyvänivelisen robotin(2.3) Denavit-Hartenberg -parametrit taulukoituna [9, s. 78].

Tällä tavalla laskettuna työkalun paikalle ja orientaatiolle peruskoordinaatistossa saadaan ratkaisu

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Työkalun rotaatiomatriisin kantavektorit \mathbf{n} , \mathbf{s} ja \mathbf{a} kirjoitettuna kokonaisuudessaan ovat

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} C_1(C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6) + S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ S_1(C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6) - C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_{23}S_5S_6 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} C_1(-C_{23}(C_4C_5C_6 + C_4S_6) + S_{23}S_5C_6) + S_1(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ S_1(-C_{23}(C_4C_5C_6 + S_4S_6) + S_{23}S_5C_6) - C_1(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ -S_{23}(C_4C_5C_6 + S_4S_6) - C_{23}S_5S_6 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_1S_4S_5 \\ S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \\ S_{23}C_4S_5 - C_{23}C_5 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ja paikkavektorille \mathbf{p} saadaan ratkaisu

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_2 C_1 C_2 + d_4 C_1 S_{23} + d_6 (C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_1 S_4 S_5) \\ a_2 S_1 C_2 + d_4 S_1 S_{23} + d_6 (S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5) \\ a_2 S_2 - d_4 C_{23} + d_6 (S_{23} C_4 S_5 - C_{23} C_5) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Ratkaisun voi myös johtaa kaksivaiheisena ilman Denavit-Hartenberg-parametreja. Tällöin suoran kinematiikan laskenta jaetaan kahteen osaan, ranteen paikan laskentaan ja ranteen orientaatiomuunnokseen. Käänteisen kinematiikan laskennan kannalta oleellinen siirrosmatriisi on näin johdettu siirros robotin peruskoordinaatistosta ranteen koordinaatistoon, joka saa muodon

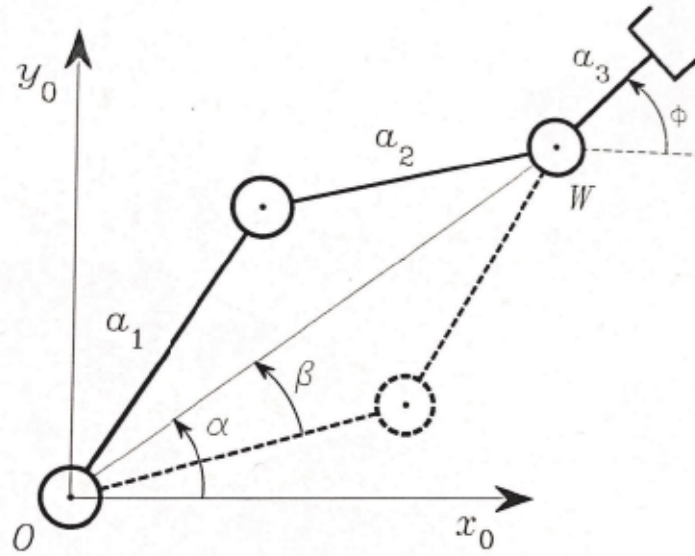
$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & C_1 S_{23} & S_1 & C_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & -C_1 & S_1 a_2 C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

2.4 Käänteinen kinematiikka

Robotin liike pyritään useimmissa robotiikkasovelluksissa määrittämään sen pohjalta, mihin robottikäsivarren päässä sijaitseva tarttuja, työkalu tai siirrettävä esine pyritään saamaan robotin peruskoordinaatistossa. Robotin täytyy siis pystyä laskennallisesti muuttamaan peruskoordinaatistonsa paikkatieto nivelkulmien arvoiksi siten, että työkalu saavuttaa halutun orientaation ja sijainnin. Tällöin kyse on käänteisen kinematiikan ongelmasta [4]. Siirrosmatriiseja kertomalla käänteisen kinematiikan ongelmaa ei voida suoraan ratkaista, mutta geometrinen ja algebrallinen ratkaisu ovat olemassa.

2.4.1 Kolmen vapausasteen käänteinen kinematiikka tasotapauksessa

Ennen ongelman tarkastelemista kolmiulotteisessa avaruudessa, on syytä pohjustaa ongelma tasotapauksessa. Käänteisen kinematiikan ongelman tapauksessa täytyy siis selvittää nivelten kulmamuuttujat ν_1 , ν_2 ja ν_3 , kun annetaan työkalun koordinaatit x ja y ja työkalun orientaatio, eli tässä tapauksessa se kulma ϕ , jonka työkalu muodostaa akselin x_0 kanssa [8, s. 67]. Tasotapauksessa kolmen nivelen käänteisellä kinematiikalla on kaksi mahdollista ratkaisua (kuva 2.4).



Kuva 2.4. Tasotapauksen mahdolliset ratkaisut [8, s. 69]

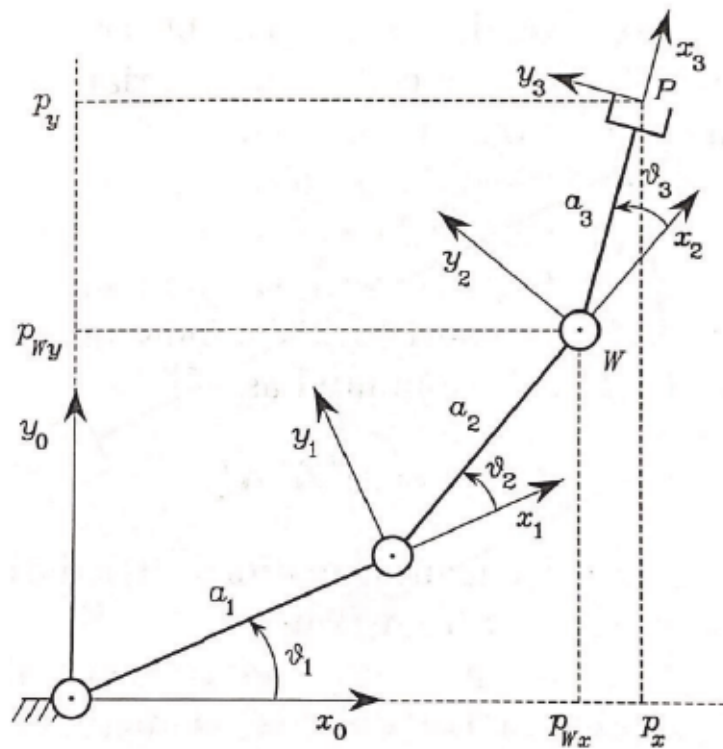


Fig. 2.20. Three-link planar arm

Kuva 2.5. Havainnollistus kulmamuuttujista robotin rakenteessa[9, s. 69]

Kulmamuuttujat ν_1 , ν_2 ja ν_3 määritellään siis poikkeamana edellisen tukivarren akseliin.

Näin voidaankin suoraan määrittää yhteys

$$\phi = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3. \quad (2.26)$$

Määritetään robotin nivelen 2 paikka xy -koordinaatistossa. Geometrian perusteella voidaan kirjoittaa yhtälöt 2.27 ja 2.28.

$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (2.27)$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 c_{12} \quad (2.28)$$

Yhtälöissä 2.27 ja 2.28 $[p_x, p_y]$ on robotin työkalulle määritetty sijainti tasokoordinaatistossa, ϕ työkalun orientaatio akseliin x_0 nähden, s_1 kulman 1 sini ja c_{12} kulman 1 ja 2 summan sini.

Neliöimällä ja summaamalla yhtälöt 2.27 ja 2.28 saadaan

$$p_{Wy}^2 + p_{Wx}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2, \quad (2.29)$$

josta ratkaistuna muuttujan c_2 suhteen saadaan

$$c_2 = \frac{p_{Wy}^2 + p_{Wx}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}. \quad (2.30)$$

Kosinifunktion luonteen perusteella ratkaisu on olemassa vain kun $-1 < c_2 < 1$, muulloin annettu piste on robotin työalueen ulkopuolella ja ratkaisua käänteisen kinematiikan ongelmalle ei ole. Trigonometrian peruslauseen nojalla kulman sini voidaan kirjoittaa muodossa

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}, \quad (2.31)$$

jonka positiivinen ratkaisu kuvaa tilannetta, jossa robotin kyynärniveli on alhaalla ja negatiivinen ratkaisu tilannetta, jossa kyynärniveli on ylhäällä (kuva 2.4). Näin ollen tiedettäessä kulman sini ja kosini, voidaan kulma ν_2 laskea kaavalla

$$\nu_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2). \quad (2.32)$$

Kun ν_2 on määritetty, ratkaistaan yhtälöistä 2.27 ja 2.28 kulmamuuttujat s_1 ja c_1 .

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{W_y} - a_2 s_2 p_{W_x}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \quad (2.33)$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{W_x} - a_2 s_2 p_{W_y}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \quad (2.34)$$

Kun tunnetaan kulman sini ja kosini, kulma ν_1 saadaan laskettua kaavalla

$$\nu_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1). \quad (2.35)$$

Koska työkalun orientaatio on määritetty, saadaan kolmannen nivelen kulmamuuttuja yhtälöstä 2.26. Jos orientaatiota ei ole määritetty, saadaan käänteisen kinematiikan ongelmaan ääretön määrä ratkaisuja. [8, s. 67-69] [9, s. 92-94]

2.4.2 Kuuden vapausasteen käänteinen kinematiikka

Tyypillinen robotin mekaaninen rakenne on usein tehty mahdollisimman yksinkertaiseksi kinemaattisten laskujen näkökulmasta. Usein robottikäsi jaetaan laskennassa kahteen osaan, niin kutsuttuun *käsivarteeseen*, jonka laskentaa esiteltiin kappaleessa 3.3.1, ja *ranteeseen* (engl. spherical wrist). Valinta laskennasta johtuu siitä, että käänteisen kinematiikan ongelman ratkaisu on yleisesti suhteellisen monimutkainen. Äärellinen määrä ratkaisuja on olemassa, jos robotin rakenne täyttää vähintään toisen seuraavista ehdoista:

1. Kolmen perättäisen kiertyvän nivelen akselit leikkaavat yhteisessä pisteessä. Esimerkkinä tästä toimii robotin kolminivelin rakenne.
2. Kolmen perättäisen nivelen akselit kiertymisen suhteen ovat yhdensuuntaiset. [9, s. 94]

Seuraavissa kappaleissa käänteisen kinematiikan laskenta perustuu kuvan(2.3) mukaiseen käsivarteeseen. Robotin peruskoodinaatistosta työpäähän päin laskettaessa kolme ensimmäistä niveltä muodostava käsivarren ja kolme viimeistä ranteen. Laskenta jaetaan näiden rakenteiden rajaamana kahteen osaan.

Suoran kinematiikan laskennalla voidaan johtaa peruskoodinaatistosta kolmanteen nivelen homogeeninen siirros

$${}^0T_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3, \quad (2.36)$$

jonka ratkaisu tutkittavalle käsivarrelle on

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Siirrosatriisin paikkavektorista saadaan yhtälöt kolmannen nivelen koordinaateille p_{W_x} , p_{W_y} ja p_{W_z} .

$$p_{W_x} = c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \quad (2.38)$$

$$p_{W_y} = s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \quad (2.39)$$

$$p_{W_z} = a_2 s_2 + a_3 s_{23}. \quad (2.40)$$

Samoin kuin tasotapauksessa, ratkaisu etenee neliöimällä ja summaamalla pisteet. Näin saadaan

$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + p_{W_z}^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c_3, \quad (2.41)$$

josta ratkaistaan kulman 3 kosini

$$c_3 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + p_{W_z}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}. \quad (2.42)$$

Ratkaisu kosinifunktion määrittelyjoukon kannalta vaatii, että $-1 < c_3 < 1$ tai $|a_2 - a_3| \leq \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + p_{W_z}^2} \leq a_2 + a_3$, muulloin piste on robotin työalueen ulkopuolella. Tästä seuraa trigonometrian nojalla

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2}, \quad (2.43)$$

josta saadaan ratkaisu kulmamuuttujalle ν_3 kaavalla

$$\nu_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3). \quad (2.44)$$

Yhtälölle 2.44 saadaan kaksi ratkaisua 2.45 ja 2.46.

$$\nu_{3,I} = \text{Atan2}(s_3, c_3), \quad (2.45)$$

$$\nu_{3,II} = -\nu_{3,I}. \quad (2.46)$$

Kun kulmamuuttuja ν_3 on ratkaistu, saadaan kulmamuuttuja ν_2 ratkaistua summaamalla ja neliöimällä 2.38 ja 2.38, josta saadaan

$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = (a_2 c_2 + a_3 c_{23})^2, \quad (2.47)$$

joka edelleen saa muodon

$$a_2 c_2 + a_3 c_{23} = \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}. \quad (2.48)$$

Yhtälöt 2.40 ja 2.48 yhdistettynä yhtälöpariksi ja kulman ν_3 määrittelyjoukoissa 2.45 2.46 yhtälöpari saa ratkaisut

$$c_2 = \frac{\pm \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} (a_2 + a_3 c_3) + p_{W_z} 3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2 a_2 a_3 c_3}, \quad (2.49)$$

$$s_2 = \frac{p_{W_z} (a_2 + a_3 c_3) \pm \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2 a_2 a_3 c_3}. \quad (2.50)$$

Yhtälöparin ratkaisusta voidaan ratkaista kulmamuuttuja ν_2 yhtälöstä

$$\nu_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2), \quad (2.51)$$

joka saa ratkaisut

$$\nu_{2,I} = \text{Atan2}(p_{W_z} (a_2 + a_3 c_3) - a_3 s_3^+ \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}, \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} (a_2 + a_3 c_3) + p_{W_z} 3 s_3) \quad (2.52)$$

$$\nu_{2,II} = \text{Atan2}(p_{W_z} (a_2 + a_3 c_3) + a_3 s_3^+ \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}, \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} (a_2 + a_3 c_3) + p_{W_z} 3 s_3) \quad (2.53)$$

, joissa $s_3^+ = \sqrt{1 - c_3^2}$, ja

$$\nu_{2,III} = \text{Atan2}(p_{W_z} (a_2 + a_3 c_3) + a_3 s_3^+ \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}, \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} (a_2 + a_3 c_3) + p_{W_z} 3 s_3), \quad (2.54)$$

$$\nu_{2,IV} = \text{Atan2}(p_{wz}(a_2 + a_3c_3) - a_3s_3^-\sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}, \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}(a_2 + a_3c_3) + p_{W_z}3s_3), \quad (2.55)$$

joissa $s_3^- = -\sqrt{1 - c_3^2}$.

Ratkaisu kulmalle ν_1 saadaan sijoittamalla 2.48 yhtälöihin 2.38 ja 2.39 seuraavat arvot

$$p_{W_x} = \pm c_1 \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}$$

$$p_{W_y} = \pm s_1 \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}$$

joista ratkaistussa muodossa saadaan laskettua kulmamuuttujan ν_1 kaksi ratkaisua yhtälöillä

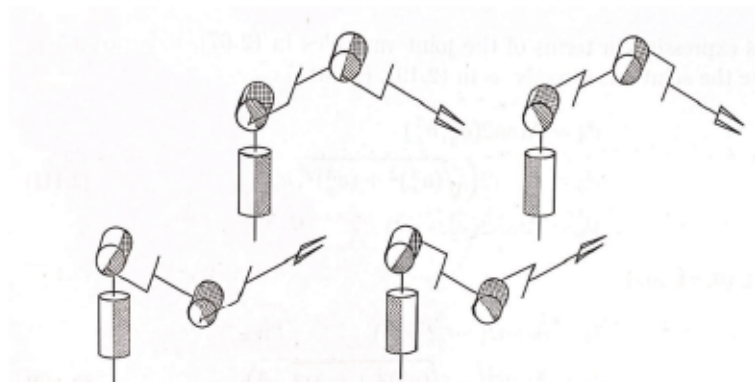
$$\nu_{1,I} = \text{Atan2}(p_{W_y}, p_{W_x}) \quad (2.56)$$

$$\nu_{1,II} = \text{Atan2}(-p_{W_y}, -p_{W_x}) \quad (2.57)$$

Niin kuin voidaan kuvasta 2.6, käsivarren orientaatiolle saadaan neljä eri ratkaisua. Ratkaistut orientaatiot saavat muodon

$$(\nu_{1,I}, \nu_{2,I}, \nu_{3,I}), (\nu_{1,I}, \nu_{2,III}, \nu_{3,II}), (\nu_{1,II}, \nu_{2,II}, \nu_{3,I}) \text{ ja } (\nu_{1,II}, \nu_{2,IV}, \nu_{3,II}). \quad (2.58)$$

Ratkaisut kuvaavat neljää eri orientaatiota: olkavarsi oikealla ja kyynärvarsi alhaalla, olkavarsi oikealla ja kyynärvarsi ylhäällä, olkavarsi vasemmalla ja kyynärvarsi alhaalla, ja olkavarsi vasemmalla ja kyynärvarsi ylhäällä [8, s. 73].



Kuva 2.6. Avaruustapauksen mahdolliset ratkaisut, kun ranteen sijainti peruskooordinaatistossa on määritetty [8, s. 73]

Suoralla kinematiikalla voidaan johtaa ranteen nivelille siirrosmatrisit 2.59 - 2.61.

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 1 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & 1 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Nämä siirrosmatrisit kuvaavat yksittäisen nivelen i muunnosta edellisestä nivelestä $i-1$ muodossa ${}^{i-1}A_i$. Ranteen siirrosmatrisiksi nivelestä 3 niveleen 6 saadaan

$${}^3A_6 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Suoralla kinematiikalla ei voida kuitenkaan käänteisen kinematiikan orientaatiomuunnosta laskea. Kuitenkin tunnettaessa työkalun orientaatio ja ranteen orientaatio, voidaan rotaatiomatriisi 3A_6 ratkaista yhtälöstä

$${}^3A_6 {}^3A_6 = {}^0A_6. \quad (2.63)$$

Kun rotaatiomatriisi koordinaatistosta 3 koordinaatistoon 6 tunnetaan, voidaan kulma-
muuttujat ν_4 , ν_5 ja ν_6 laskea suoraan ZYZ-kulmina [9, s. 49-52, s. 99-100]. ZYZ-kulmilla
tarkoitetaan rotaatioiden ketjuttamista niin, että koordinaatistoa pyöritetään koordinaatis-
ton z-akselin ympäri, sitten pyörähtäneen koordinaatiston y-akselin ympäri ja lopuksi vielä
kerran z-akselin ympäri. Jotta ZYZ-kulmien avulla johdettu laskenta soveltuisi nivelvarsi-
robotin ranteen orientaatiomuunnoksen laskentaan, ranteen koordinaatisto täytyy muun-
taa perusrotaatiomuunnoksilla oikean suuntaiseksi. Aiemmin käsitellyn mukaan pyörivän

koordinaatiston z-akseli asetetaan aina nivelen akselin suuntaiseksi. Myös vakiotranslaatiomuunnos tarvitsee sovittaa tämäntyyppiseen laskentaan, sillä käytännön tapauksessa robotin työkalulla on yleensä joku tunnettu pituus robotin työkalukoordinaatiston akselin suunnassa. Esimerkki tämäntyyppisestä vakiokoordinaatistomuunnoksesta on esitellään tämän tutkielman kappaleessa 3.2.

Kun yhtälöstä 2.63 ratkaistun rotaatiomatriisin 3A_6 alkioit esitetään selkeyden vuoksi merkinnöillä

$${}^3A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

niin ranteen orientaatiomuunnoksen ZYZ-kulmat laskettua käänteismuunnoksella. Kulmamuuuttujien ratkaisut on esitelty yhtälöissä 2.65 - 2.70.

$$\nu_{4,I} = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \quad (2.65)$$

$$\nu_{5,I} = \text{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \quad (2.66)$$

$$\nu_{6,I} = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \quad (2.67)$$

$$\nu_{4,II} = \text{Atan2}(-r_{23}, r_{13}) \quad (2.68)$$

$$\nu_{5,II} = \text{Atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \quad (2.69)$$

$$\nu_{6,II} = \text{Atan2}(-r_{32}, r_{31}) \quad (2.70)$$

Ranteen halutun orientaation toteuttavia ratkaisuja kulmamuuuttujille on kaksi kappaletta, jolloin ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$(\nu_{4,I}, \nu_{5,I}, \nu_{6,I}) \text{ tai } (\nu_{4,II}, \nu_{5,II}, \nu_{6,II}). \quad (2.71)$$

3. ROBOTIN KÄÄNTEISEN KINEMATIIKAN LASKENTA JA TULOKSET

3.1 Käänteisen kinematiikan ohjelmallinen toteutus

Käänteisen kinematiikan mallin laskenta on toteutettu Matlab-ohjelmistolla matriisilaskennan helppouden vuoksi ja laskennan toimivuus on tarkistettu Siemens NX-ohjelmistossa rakennetulla 3D-mallilla. Robotin ohjelmiston on tarkoitus laskea tarttujalle määritellyn pisteen ja asennon toteuttavat kulmamuuuttajat. Lisäksi sen on pystyttävä valitsemaan mahdollisista ratkaisusta sopivin robotin nykyisen paikan ja suoritettavan toiminnon perusteella. Kuuden vapausasteen kiertyvänivelisellä robotilla käänteisen kinematiikan ratkaisuja on kahdeksan, kun määritetty piste on robotin työalueen sisäpuolella.

3.2 Käänteinen kinematiikka Matlabilla

Käänteisen kinematiikan laskennan testaukseen valittiin Mathworks MATLAB r2022a-laskentaohjelmisto. Laskennassa käytetty ohjelmakoodi ja siitä saadut tulokset ovat selkeyden vuoksi esitetty kuvamuotoisena kuvassa 3.1. Laskentaan ja tulosten tarkasteluun on valittu käytettäväksi neljän merkitsevän desimaalin tarkkuus.

```

clear all
format short
a1 = 100; % Robotin tukivarsien pituudet
a2 = 100;
a3 = 50;
tyokalu_pituus = 20;
% Työkalun haluttu orientaatio suhteessa
% peruskoordinaatistoon
% Testausta varten valittu satunnaissuuntainen koordinaatisto
% neljän desimaalin tarkkuudella

R06 = [-0.1219, -0.9917,  0.0406;
       -0.1241, -0.0253, -0.9919;
        0.9847, -0.1260, -0.1200];
% Perusrotaationatriisit
rotz = @(gamma)[cos(gamma), -sin(gamma), 0;
               sin(gamma),  cos(gamma), 0;
                0           ,0           ,0];

roty = @(beta)[cos(beta), 0, sin(beta);
               0,1,0;
               -sin(beta), 0, cos(beta)];

rotx = @(alpha)[1,0,0;
               0,cos(alpha), -sin(alpha);
               0, sin(alpha),  cos(alpha)];
pwx = 100; % Haluttu ranteen paikka peruskordinaatiston x-suunnassa
pwy = 50;  % Haluttu ranteen paikka peruskordinaatiston y-suunnassa
pwz = 120; % Haluttu ranteen paikka peruskordinaatiston z-suunnassa

% Työkalu on työkalun orientaation(engl. end-effector frame)
% z-akselin suuntainen.
% Näin ollen halutulle ranteen koordinaatiston paikalle
% pitää tehdä työkalun pituuden mittainen siirros työkalun
% orientaation z-akselin suunnassa, jotta ohjataan
% työkalun sijaintia ranteen sijainnin sijaan.

ranteen_siirros = R06(:,3);
pwx = pwx - ranteen_siirros(1)*tyokalu_pituus

pwx = 99.1880

pwy = pwy - ranteen_siirros(2)*tyokalu_pituus

pwy = 69.8380

pwz = pwz - ranteen_siirros(3)*tyokalu_pituus

pwz = 122.4000

```

Kuva 3.1. Laskennassa käytetty Matlab-koodi ja esimerkkilaskennan tulokset

```

% Jalustan vakiosiiirros, kun jalustan korkeus on 100
% peruskoordinaatiston z-akselin suunnassa.
pwz = pwz - a1;

c3 = (pwx^2 + pwy^2 + pwz^2 - a2^2 - a3^2) / (2*a2*a3);
s3i = sqrt(1-c3^2);
s3ii = -sqrt(1-c3^2);

V3i = rad2deg(atan2(s3i, c3));
V3ii = rad2deg(atan2(s3ii, c3));

c2i = (a2 + a3*c3)*sqrt(pwx^2 + pwy^2) + pwz*a3*s3i;
c2ii = -(a2 + a3*c3)*sqrt(pwx^2 + pwy^2) + pwz*a3*s3i;

c2iii = (a2 + a3*c3) * sqrt(pwx^2 + pwy^2) + pwz*a3*s3ii;
c2iv = -sqrt(pwx^2 + pwy^2)*(a2 + a3*c3) + pwz*a3*s3ii;

s2 = pwz*(a2+ a3*c3) +sqrt(pwx^2+pwy^2)*a3*s3i;

V2i = rad2deg(atan2( (a2+ a3*c3)*pwz - a3*s3i*sqrt(pwx^2+pwy^2), c2i));
V2ii = rad2deg(atan2( (a2+ a3*c3)*pwz - a3*s3i*sqrt(pwx^2+pwy^2), c2ii));

V2iii = rad2deg(atan2(s2, c2iii));
V2iv = rad2deg(atan2(s2, c2iv));

V1i = rad2deg(atan2(pwy/sqrt(pwx^2 + pwy^2), pwx/sqrt(pwx^2 + pwy^2)));
V1ii = rad2deg(atan2(-pwy/sqrt(pwx^2 + pwy^2), -pwx/sqrt(pwx^2 + pwy^2)));

% Vaihtoehtoisia ratkaisuja saadaan neljä kappaletta
Or1 = [V1i, V2i, V3i]

Or1 = 1x3
    35.1493   -12.4968    74.2324

Or2 = [V1ii, V2iii, V3ii]

Or2 = 1x3
    35.1493    33.4209   -74.2324

Or3 = [V1ii, V2ii, V3i]

Or3 = 1x3
   -144.8507  -165.4658    74.2324

Or4 = [V1ii, V2iv, V3ii]

Or4 = 1x3
   -144.8507   150.5704   -74.2324

% Suora kinematiikka ratkaisulle 1

```

Kuva 3.2. Laskennassa käytetty Matlab-koodi ja esimerkkilaskennan tulokset

Kuva 3.3. Laskennassa käytetty Matlab-koodi ja esimerkkilaskennan tulokset

```

c1 = cos(deg2rad(V1i));
c12 = cos(deg2rad(V1i + V2i));
c2 = cos(deg2rad(V2i));
c23 = cos(deg2rad(V2i + V3i));
s1 = sin(deg2rad(V1i));
s12 = sin(deg2rad(V1i + V2i));
s2 = sin(deg2rad(V2i));
s23 = sin(deg2rad(V2i + V3i));

T03 = [c1*c23, -c1*s23, s1, c1*(a2*c2 + a3*c23);
       s1*c23, -s1*s23, -c1, s1*(a2*c2 + a3*c23);
       s23, c23, 0, a2*s2+a3*s23;
       0,0,0,1];
R03 = T03(1:3,1:3)

```

```

R03 = 3x3
    0.3872    -0.7202    0.5757
    0.2726    -0.5071   -0.8177
    0.8808    0.4735     0

```

```

% Ranteen orientaatio käännetään perusrotaatioilla sen suuntaiseksi,
% että saadaan laskettua ranteen orientaatiomuunnos ZYZ-kulmilla
R03 = R03*rotx(pi/2)*roty(pi/2);
% Ratkaistaan siirrosmatrissi ranteen koordinaatistosta työkalun
% koordinaatistoon. Ratkaisu yhtälöstä R03*R36 = R06

```

```
R36 = R03\R06
```

```

R36 = 3x3
    0.6170    0.6674    0.4169
    0.0313   -0.5502    0.8344
    0.7863   -0.5019   -0.3604

```

```

r11 = R36(1,1);r21 = R36(2,1);r31 = R36(3,1);
r12 = R36(1,2);r22 = R36(2,2);r32 = R36(3,2);
r13 = R36(1,3);r23 = R36(2,3); r33 = R36(3,3);

```

```
V4 = rad2deg(atan2(r23, r13))
```

```
V4 = 63.4518
```

```
V5 = rad2deg(atan2(sqrt(r13^2 + r23^2), r33))
```

```
V5 = 111.1249
```

```
V6 = rad2deg(atan2(r32, -r31))
```

```
V6 = -147.4508
```

```
V4ii = rad2deg(atan2(-r23, -r13))
```

```
V4ii = -116.5482
```

```
V5ii = rad2deg(atan2(-sqrt(r13^2 + r23^2), r33))
```

```

V511 = -111.1249
V611 = rad2deg(atan2(-r32, r31))
V611 = 32.5492

% Jokaiselle neljälle käsivarren asennolle saadaan kaksi ranteen
% ratkaisua, joten yhteensä käänteisen kinematiikan
% ongelmalle saadaan kuudella vapausasteella kahdeksan ratkaisua.

Or1 = [V1i, V2i, V3i, V4, V5, V6]

Or1 = 1x6
    35.1493   -12.4968    74.2324    63.4518   111.1249   -147.4568

Or2 = [V1i, V2i, V3i, V4ii, V511, V611]

Or2 = 1x6
    35.1493   -12.4968    74.2324   -116.5482   -111.1249    32.5492

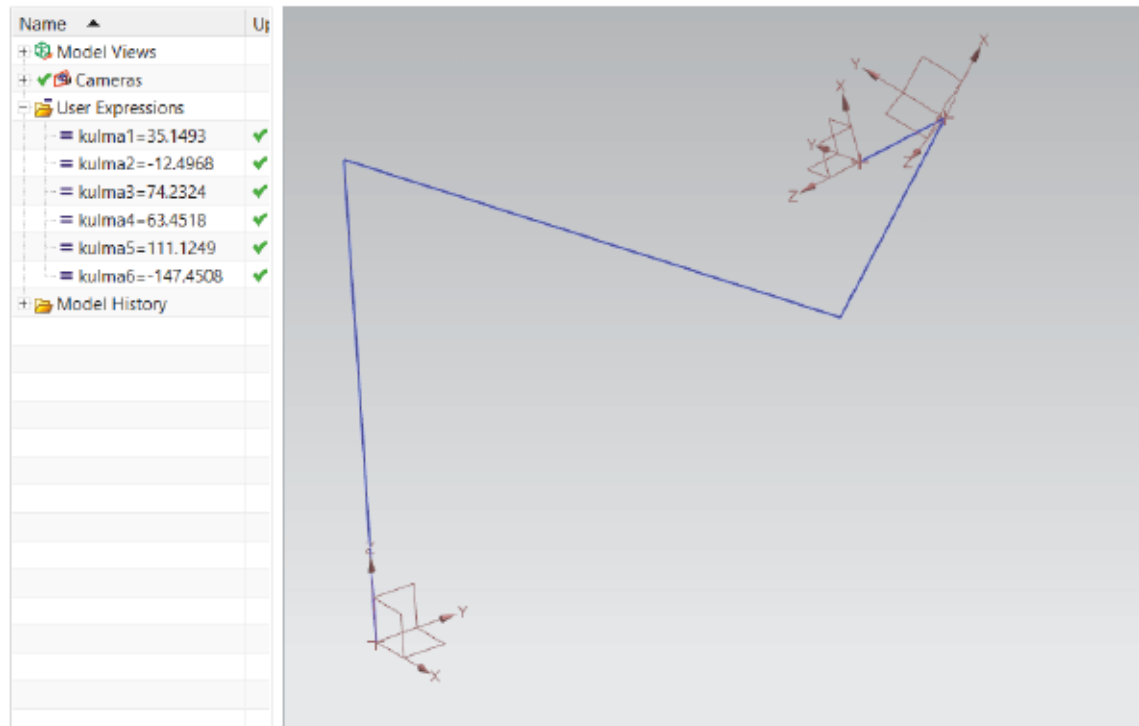
% Asetetaan malliin ratkaisuvaihtoehto Or1.

```

Kuva 3.4. Laskennassa käytetty Matlab-koodi ja esimerkkilaskennan tulokset

3.3 Laskennan testaus 3D-mallilla

Laskennan oikeellisuuden testausta varten tehtiin 3D-malli, joka yksinkertaistaa robotin kinemaattisen rakenteen niveliksi ja tukivarsiksi (kuva 3.5). Nivelkulmamuuttujat toimivat 3D-mallissa samalla tavalla kuin kiertyvänivelisen robotin käsivarressa ja ranteessa. Mallista on mahdollista tarkastella minkä tahansa nivelen koordinaatiston paikkaa ja orientaatiota, joista laskennan kannalta oleelliset ranteen ja työkalun orientaatiot ovat esitellyt kuvassa 3.6.



Kuva 3.5. Kinemaattisen ketjun 3D-malli, jonka nivelkulmiksi on asetettu Matlabilla lasketut kulmamuuttujat. Kuvassa näkyvissä myös robotin peruskoordinaatisto, ranteen koordinaatisto ja työkalun koordinaatisto.

Laskennan testauksessa (kuva 3.1) alkuarvoiksi annettiin satunnainen rotaatio ja asema. Työkalun rotaatiolle ja paikalle annettiin yhtälöissä 3.1 ja 3.2 esitellyt arvot.

$$\text{Rotaatio} = \begin{bmatrix} -0.1219 & -0.9917 & 0.0406 \\ -0.1241 & -0.0253 & -0.9919 \\ 0.9847 & -0.1260 & -0.1200 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\text{Paikka} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 120 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Kuvassa 3.6 on esitettyä 3D-mallista saadut koordinaatistojen tiedot, kun malliin on sovellettu laskettuja kulmamuuttujia. Saadut tulokset on esitetty kahtena taulukkona, joista voi lukea kinemaattisen ketjun ranteen koordinaatiston paikan ja asennon sekä työkalun koordinaatiston paikan ja asennon. Yksittäinen taulukko vastaa siirromatriisia peruskoordinaatistosta ranteen tai työkalun koordinaatistoon. Taulukkoa luettaessa on kuitenkin huomattava, että kantavektoreiden komponentit luetaan vasemmalta oikealle eikä ylhäältä alas kuten siirromatriisin tapauksessa. Voidaan todeta, että valitun pyöristystarkkuuden rajoissa saadut tulokset ovat oikeat.

Origin location in Absolute Coordinate System and WCS						
Origin Location [mm]	X	99.999987887	Y	49.999179031	Z	119.999955725
	X_C	99.999987887	Y_C	49.999179031	Z_C	119.999955725
X-axis Vector (Y-Z Plane) in Absolute Coordinate System and WCS						
X-axis Vector	X	-0.121938966	Y	-0.124126689	Z	0.984745375
	X_C	-0.121938966	Y_C	-0.124126689	Z_C	0.984745375
Y-axis Vector (X-Z Plane) in Absolute Coordinate System and WCS						
Y-axis Vector	X	-0.991706773	Y	-0.025349718	Z	-0.125996301
	X_C	-0.991706773	Y_C	-0.025349718	Z_C	-0.125996301
Z - axis Vector(X - Y Plane) in Absolute Coordinate System and WCS						
Z-axis Vector	X	0.040602521	Y	-0.991942517	Z	-0.120006159
	X_C	0.040602521	Y_C	-0.991942517	Z_C	-0.120006159

Origin location in Absolute Coordinate System and WCS						
Origin Location [mm]	X	99.187937468	Y	89.838029370	Z	122.400078914
	X_C	99.187937468	Y_C	89.838029370	Z_C	122.400078914
X-axis Vector (Y-Z Plane) in Absolute Coordinate System and WCS						
X-axis Vector	X	0.387193038	Y	0.272621848	Z	0.880771752
	X_C	0.387193038	Y_C	0.272621848	Z_C	0.880771752
Y-axis Vector (X-Z Plane) in Absolute Coordinate System and WCS						
Y-axis Vector	X	-0.720167121	Y	-0.507068237	Z	0.473541044
	X_C	-0.720167121	Y_C	-0.507068237	Z_C	0.473541044
Z - axis Vector(X - Y Plane) in Absolute Coordinate System and WCS						
Z-axis Vector	X	0.575709014	Y	-0.817654653	Z	0.000000000
	X_C	0.575709014	Y_C	-0.817654653	Z_C	0.000000000

Kuva 3.6. 3D-mallista haetut tiedot ranteen ja työkalun koordinaatistoista. Kuvassa ylhäällä työkalun koordinaatisto ja paikka, ja kuvassa alhaalla ranteen koordinaatisto ja paikka. Taulukkoa luettaessa on huomattava, että koordinaatiston yksikkövektorit luetaan näkymässä vasemmalta oikealle, ei ylhäältä alas kuten homogeenisen siirromatriisin tapauksessa.

3.4 Käänteinen kinematiikka C++ koodina

Käänteinen kinematiikka on tarkoitus sovittaa C++ koodiksi. Neljän vapausasteen kinematiikan voi sovittaa hyvinkin suoraviivaisesti, sillä matriisilaskentaa ei tarvita työkalun ranteen orientaation yksinkertaisuuden vuoksi. Arduinon ohjelmisto tunnistaa tarpeelliset funktiot, kuten Atan2-funktion. Kuuden vapausasteen käänteiseen kinematiikkaan matriisi toteutetaan kaksiulotteisena taulukkona (engl. array), jonka alkoina on liukulukuja (engl. double). Matriisilaskenta C++ koodiin täytyy suorittaa joko valmiiden kirjastojen tai ohjelmistoon rakennettujen funktioiden avulla, sillä käänteisen kinematiikan laskuoperaatiot edellyttävät vähintään matriisien kertolaskua ja matriisin käänteismatriisiksi muuttamista.

Myös Mathworksin Simulink-työkalun toimivuutta ohjelmiston tekemisessä tullaan tutki-
maan. Simulinkin mallipohjaisen ohjelmistosuunnittelun edut perustuvat laajaan kirjasto-
on, matriisilaskennan helppouteen ja mallintamisen nopeuteen verrattuna normaaliin
C++-ohjelmointiin. Simulink mahdollistaa C++-koodin generoimisen mallista, joten toiminta
esimerkiksi Arduinon kanssa on mahdollista. Ohjelmakoodia ei esitellä tässä tutkiel-
massa.

4. YHTEENVETO

Tässä tutkielmassa käsiteltiin nivelvarsirobotin kinemaattista mallinnusta ja erityisesti nivelkulmamuuttujien laskentaa. Työssä perehdyttiin myös näiden mallien perusteisiin, kuten homogeenisiin siirrosmatriiseihin, jotka ovat robotin kinematiikan ymmärtämisen kannalta hyvin keskeinen asia. Työssä johdettiin käänteiskinemaattinen malli kuuden vapausasteen kiertyvänivelisen robotin nivelkulmamuuttujille ja testattiin mallin toimivuutta robotin kinemaattista rakennetta vastaavalla 3D-mallilla. Mallia testattiin useilla eri asennoilla ja työkalun paikoilla, joista yksi esiteltiin kokonaisuudessaan tutkielmassa. Tutkielman perusteella voidaan todeta laskenta toimivaksi ja että käänteiskinemaattinen malli on mahdollista sovittaa rakennettavan pienoiskäsivarsirobotin kontrollerin ohjelmistoon. Käänteisen kinematiikan ohjelmallista toteutusta C++-koodina tullaan kehittämään edelleen projektin edetessä ja ohjelmaa testattaessa.

Robotin toiminnan virtuaalista mallinnusta nivelkulmamuuttujien yleisen ratkaisun johtamisen jälkeen voidaan laajentaa robotin dynamiikkaan, rakenteen optimointiin ja ohjelmiston algoritmien kehittämiseen.

LÄHTEET

- [1] Tadej Bajd et al. *Robotics*. Vol. 43. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] Sabri Cetinkunt. *Mechatronics with experiments*. John Wiley & Sons, 2015.
- [3] King Sun Fu ja CS George Gonzalez Ralph Lee. *Robotics: Control Sensing. Vis.* Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [4] Reza N Jazar. *Theory of applied robotics: kinematics, dynamics, and control*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Isak Karabegović ja Lejla Banjanović-Mehmedović. *Industrial Robots: Design, Applications and Technology*. Nova Science Publishers, Incorporated, 2020.
- [6] Risto Kuivanen. *Robotiikka*. 1999.
- [7] Tapio Salmi ja Simo Virtanen. *Dynamiikka 1, Kinematiikka*. Pressus, 2002.
- [8] Lorenzo Sciavicco ja Bruno Siciliano. *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [9] Bruno Siciliano et al. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, 2010.