

Tuulia Tokola

VEKTORIANALYYSIN SOVELLUKSET FYSIKASSA

Gaussin laki sähkökentille

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Merja Laaksonen
Elokuu 2022

TIIVISTELMÄ

Tuulia Tokola: Vektorianalyysin sovellukset fysiikassa
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Elokuu 2022

Vektorianalyysiksi kutsutaan matematiikan osa-aluetta, joka keskittyy vektorikenttien differentiaali- ja integraalilaskentaan. Yksi vektorianalyysin tärkeimmistä sovellusalueista on fysiikka, jossa vektorianalyysin tuloksia tarvitaan fysikaalisten ilmiöiden matemaattisten esitysmuotojen tuottamiseen.

Tämän työn tarkoituksena on kuvata vektorianalyysin keskeisiä käsitteitä ja tuloksia ja osoittaa niiden hyödyt fysiikassa. Työ on jaettu kahteen osaan, joista ensimmäisessä tarkastellaan vektorianalyysia matematiikan näkökulmasta. Työn toisessa osassa keskitytään sen sovelluksiin fysiikassa. Matemaattisessa osassa esitellään tärkeimpiä perustietoja vektoreista ja vektorikentistä sekä parametrisoiduista käyristä ja pinnoista ja niiden ominaisuuksista. Näitä perustietoja tarvitaan, kun syvennytään vektorikenttien integraalilaskentaan. Integraalilaskennan osalta keskitytään erityisesti käyrä- ja pintaintegraaleihin sekä Gaussin lauseeseen. Työn soveltavassa osassa vektorianalyysia käytetään fysiikan ilmiöiden tarkasteluun. Sovellusalueena tässä työssä on sähkömagnetismi, josta tarkastellaan Gaussin lakia sähkökentille.

Tärkein tässä työssä tarkasteltava vektorianalyysin tulos on Gaussin lause. Sen todistus esitetään projisointuvien joukkojen tapauksessa. Gaussin lause yhdistää toisiinsa vektorikenttien differentiaali- ja integraalilaskentaa, ja näin ollen sen avulla voidaan muuntaa vektorikentän pintaintegraali skalaarikentän tilavuusintegraaliksi. Lisäksi lause havainnollistaa divergenssin käsitettä: Jos vektorikentän ajatellaan kuvaavan virtausta tai kulkeutumista, divergenssi kuvaa näiden virtausten ja kulkeutumisten lähteitä ja nieluja.

Vektorianalyysin tulosten soveltaminen Gaussin lakiin sähkökentille korostaa vektorianalyysin merkitystä fysiikassa. Ensinnäkin vuon ja divergenssin käsitteitä sekä Gaussin lausetta tarvitaan, kun esitetään Gaussin laille kaksi erilaista matemaattista esitysmuotoa. Lisäksi divergenssin käsitteen avulla havainnollistetaan Gaussin lakia sähkökentille: Suljetun pinnan sisään sulkema varaus aiheuttaa sähkökentän vuon tämän pinnan läpi. Näin ollen sähkövaraukset toimivat sähkökentän lähteinä ja nieluina.

Avainsanat: vektorianalyysi, vektorikenttä, divergenssi, Gaussin lause, Gaussin laki sähkökentille

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
2.	Vektorikentät.	2
2.1	Parametrisoidut käyrät	4
2.2	Parametrisoidut pinnat	6
2.3	Vektorikenttien integrointi	8
2.4	Gaussin lause.	10
3.	Sähköstatiikka	16
4.	Yhteenveto	24
	Lähteet.	25

LYHENTEET JA MERKINNÄT

SI	kansainvälinen yksikköjärjestelmä
Q	kokonaissähkövaraus
N	normaalivektori
Φ	pinnan parametrisointi
∇f	skalaarikentän gradientti
E	sähkökenttä
q	sähkövaraus
ε_0	tyhjiön permittiivisyys
r	vektori tai käyrän parametrisointi
F	vektorikenttä
$\nabla \cdot \mathbf{F}$	vektorikentän divergenssi
Φ	vektorikentän vuo
n	yksikkönormaalivektori
T	yksikkötangenttivektori

1. JOHDANTO

Vektorianalyysi on matematiikan osa-alue, joka tarkastelee vektorikenttiä ja niiden differentiaali- ja integraalilaskentaa. Vektoreiden keskeinen sovellusalue on fysiikka: Vektoreiden avulla käsitellään suureita, joilla on sekä suuruus että suunta. Koska vektorisuureilla on keskeinen rooli fysiikassa, vektorianalyysin tulokset muodostavat tärkeän perustan monien fysikaalisten ilmiöiden, kuten esimerkiksi sähkömagnetismin tutkimiselle ja ymmärtämiselle.

Tässä työssä tarkastellaan vektorianalyysia erityisesti integraalilaskennan näkökulmasta. Työssä esitellään vektorianalyysin tuloksia matematiikan näkökulmasta ja yhdistetään nämä tulokset fysikaalisiin sovelluksiin. Työn tavoitteena on täten kuvata ja havainnollistaa vektorianalyysin keskeistä sisältöä soveltamalla sitä Gaussin lakiin sähkökentille. Toisaalta samalla voidaan myös korostaa vektorianalyysin merkitystä fysiikan ilmiöiden tulkinnassa.

Työn alussa esitellään tärkeimpiä perustietoja vektoreista, vektorikentistä ja niiden ominaisuuksista. Lisäksi määritellään parametrisoidut käyrät ja pinnat sekä tarkastellaan niiden ominaisuuksia. Tämän jälkeen keskitytään vektorikenttien käyrä- ja pintaintegraaleihin. Määritelmien lisäksi perehdytään Gaussin lauseeseen, joka yhdistävää vektorikenttien differentiaali- ja integraalilaskentaa. Työn loppuosassa näitä vektorianalyysin tuloksia sovelletaan ja niiden hyötyjä havainnollistetaan sähkömagnetismin parissa. Fysikaalisena sovelluksena esitellään Gaussin laki sähkökentille.

2. VEKTORIKENTÄT

Fysiikassa suureet voidaan jakaa kahteen luokkaan, skalaarisuureisiin ja vektorisuureisiin. Vektorisuureilla on sekä suuruus että suunta. Graafisesti vektori on suunnattu jana, jolloin janan suunta kuvaa vektorisuureen suuntaa ja pituus suuruutta. [1, s. 774] Kaikki samansuuntaiset ja yhtä pitkät janat kuvaavat samaa vektoria riippumatta niiden sijainnista koordinaatistossa [2, s. 7].

Määritelmä 2.1. Avaruuden \mathbb{R}^n vektori \mathbf{r} on järjestetty joukko (r_1, r_2, \dots, r_n) .

Kartesisisessa koordinaatistossa avaruuden \mathbb{R}^3 vektori kuvataan usein järjestettynä joukkona (x, y, z) tai avaruuden \mathbb{R}^3 kantavektoreiden avulla muodossa $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ [2, s. 7, 10]. Tässä tekstissä tarkastellaan reaalilukualkioisia vektoreita, jotka kuuluvat avaruuteen \mathbb{R}^2 tai \mathbb{R}^3 , sillä näissä tapauksissa vektoreille saadaan sovellusten näkökulmasta hyödyllinen geometrinen tulkinta.

Määritelmä 2.2. Skalaarikenttä on funktio $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, joka kuvaa jokaisen joukon A alkion reaaliluvuksi.

Määritelmä 2.3. Vektorikenttä on funktio $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka kuvaa jokaisen määrittelyjoukon A alkion \mathbf{x} vektoriksi $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Edellisten määritelmien perusteella käsite kenttä tarkoittaa usean muuttujan funktiota. Jos funktion kuvajoukko muodostuu reaaliluvuista, kyseessä on skalaarikenttä. Vektorikenttä on vastaavasti usean muuttujan vektoriarvoinen funktio. Fysiikassa kenttien avulla kuvataan usein vektori- tai skalaarisuureen arvoja koordinaatiston eri pisteissä eli suureen arvot kuvataan paikan funktiona. [2, s. 265–266] Esitellään seuraavaksi muutamia kenttien tarkastelussa tarvittavia operaattoreita. [2, s. 273–277]

Määritelmä 2.4. Symbolia ∇ kutsutaan nablaksi, ja se määritellään muodollisesti vektorina, jonka komponentit ovat osittaisderivaattaoperaattoreita. Avaruudessa \mathbb{R}^3 vektori esitetään muodossa

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Määritelmä 2.5. Skalaarikentän $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gradientti on vektorikenttä

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Määritelmä 2.6. Vektorikentän $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ divergenssi on skalaarikenttä

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Gradientille ja divergenssille on voimassa monia erilaisia identiteettejä, joita voidaan hyödyntää lausekkeiden sieventämisessä. Muun muassa skalaari- ja vektorikentän tulon divergenssi voidaan laskea seuraavan kaavan mukaisesti. Lauseen todistus on suoraviivainen, joten se sivuutetaan. Todistus löytyy lähteestä [2, s. 283].

Lause 2.7. Oletetaan, että vektorikentän $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ komponenttifunktiot ovat derivoituvia ja skalaarifunktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva. Tällöin divergenssille on voimassa tulosääntö

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}).$$

Selvitetään seuraavassa esimerkissä radiaalisen vektorikentän divergenssi. Tätä tulosta tarvitaan myöhemmin vektorikenttien integroinnin yhteydessä.

Esimerkki 2.8. Selvitetään vektorikentän $\mathbf{F} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$ divergenssi.

Vektorikenttä on määritelty, kun vektori \mathbf{r} ei ole nollavektori, joten tarkastellaan divergenssiä vain tässä tilanteessa. Lauseen 2.7 perusteella vektorikentän divergenssi saadaan muotoon

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} (\nabla \cdot \mathbf{r}). \quad (2.1)$$

Esitetään vektori \mathbf{r} muodossa (x, y, z) . Tällöin vektorin pituus $\|\mathbf{r}\|$ on $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ja gradientiksi $\nabla(1/(\|\mathbf{r}\|^3))$ saadaan suoraan laskemalla

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \right) &= \left(\frac{-\frac{3}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5}, \frac{-\frac{3}{2} \cdot 2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5}, \frac{-\frac{3}{2} \cdot 2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} \right) \\ &= \frac{-3}{\|\mathbf{r}\|^5} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Kun hyödynnetään vektorille \mathbf{r} uudelleen samaa esitysmuotoa (x, y, z) , divergenssiksi $\nabla \cdot \mathbf{r}$ saadaan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \\ &= 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Sijoitetaan yllä esitetyt lausekkeet yhtälöön (2.1), jolloin divergenssiksi saadaan

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} &= \frac{-3\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^5} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \cdot 3 \\ &= \frac{-3\|\mathbf{r}\|^2}{\|\mathbf{r}\|^5} + \frac{3}{\|\mathbf{r}\|^3} \\ &= \frac{-3}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{3}{\|\mathbf{r}\|^3} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Näin ollen vektorikentän $\mathbf{r}/(\|\mathbf{r}\|^3)$ divergenssi on nolla aina, kun \mathbf{r} ei ole nollavektori. [2, s. 284]

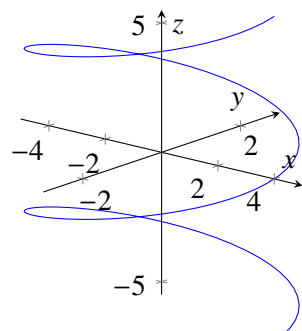
2.1 Parametrisoidut käyrät

Jos vektorin alkupisteeksi määritellään origo, vektoria kutsutaan paikkavektoriksi. Tällöin vektori kuvaa myös pistettä, johon se päättyy. [2, s. 5] Näin ollen vektoriarvoisten funktioiden arvojoukkoina muodostuu pistejoukkoja. Tarkastellaan tässä kappaleessa tällaisten pistejoukkojen muodostamia käyriä.

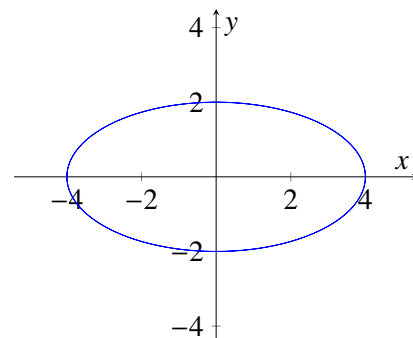
Määritelmä 2.9. Polku on kuvaus $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tämän kuvauksen arvojoukon pisteet muodostavat joukon C , jota kutsutaan käyräksi tai käyrän jäljeksi. Kuvauksen $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$ alkioita $r_i(t)$ kutsutaan komponenttifunktioiksi tai koordinaattifunktioiksi.

Edellä olevan määritelmän mukaan kuvaus parametrisoi käyrän C , eli polku kuvaa jonkin reaali-lukuvälin käyräksi C . Toisin sanoen avaruuden \mathbb{R}^3 tai tason \mathbb{R}^2 käyrä esitetään yhden parametrin avulla. Yleensä avaruudessa \mathbb{R}^3 komponenttifunktiolle käytetään merkintöjä $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$. [2, s. 124–125]

Esimerkki 2.10. Polun $\mathbf{r}(t) = (4 \cos(t), 2 \sin(t), t)$ kuvaama käyrä on elliptinen ruuvikäyrä. Polun koordinaattifunktiot ovat $x(t) = 4 \cos(t)$, $y(t) = 2 \sin(t)$ ja $z(t) = t$. Ruuvikäyrä on esitetty kuvassa 2.1. Ruuvikäyrän projektio xy -tasolle on ellipsi, jonka puoliakselit ovat 4 ja 2. Projektio on esitetty kuvassa 2.2.



Kuva 2.1. Elliptinen ruuvikäyrä.



Kuva 2.2. Ruuvikäyrän projektio xy -tasolle.

Seuraavaksi esitellään parametrisoituihin käyriin liittyviä käsitteitä, kuten käyrien sulkeutuvuutta, yksinkertaisuutta, suunnistusta ja sileyttä. Näitä ominaisuuksia hyödynnetään käyrien luokittelussa. [2, s. 354, 413] Lisäksi näitä määritelmiä tarvitaan myöhemmin vektorikenttien integrointiin liittyvien määritelmien ja lauseiden muodostamisessa.

Määritelmä 2.11. Käyrä on suljettu, jos käyrän $\mathbf{r}(t)$ alkupiste $\mathbf{r}(a)$ on sama kuin sen päätepiste $\mathbf{r}(b)$. Parametri t kuuluu välille $[a, b]$.

Määritelmä 2.12. Käyrä on yksinkertainen, jos sen parametrisointi on injektio, eli yhtäsuuruus $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ on voimassa vain, kun $t_1 = t_2$. Suljetulle yksinkertaiselle käyrälle päätepiisteet ovat kuitenkin samat.

Useat erilaiset parametrisoinnit voivat kuvata saman käyrän C . Parametrisoinnin valinta vaikuttaa kuitenkin käyrän suunnistukseen ja silyteen. Käyrän suunnistus kuvaa sitä, missä järjestyksessä käyrän pisteet piirtyvät koordinaatistoon, kun kuvauksen parametri saa järjestyksessä kaikki arvonsa [2, s. 407].

Määritelmä 2.13. (Käyrän suunnistus.) Yksinkertaisen käyrän C parametrisoinneilla $\mathbf{r}_1(t)$ ja $\mathbf{r}_2(s)$ on sama suunnistus, jos yhtäsuuruudet

$$\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(\alpha) \quad \text{ja} \quad \mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(\beta)$$

ovat voimassa, kun parametri t kuuluu välille $[a, b]$ ja parametri s kuuluu välille $[\alpha, \beta]$. Vastaavasti käyrien suunnistukset ovat vastakkaiset, jos yhtäsuuruudet

$$\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(\beta) \quad \text{ja} \quad \mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(\alpha)$$

ovat voimassa.

Tarkastellaan viimeisenä ominaisuutena vielä käyrän sileyttä.

Määritelmä 2.14. Parametrisoitu käyrä $\mathbf{r}(t)$ on sileä, jos koordinaattifunktioiden derivaattafunktiot ovat jatkuvia. Lisäksi ne eivät ole samanaikaisesti nolliä, eli tangenttivektori $\mathbf{r}'(t)$ ei ole nollavektori millään parametrin t arvolla.

Havainnollistetaan käyrän sileyttä tarkemmin tapauksessa, jossa käyrä kuuluu avaruuteen \mathbb{R}^2 . Valitaan käyrän parametrisoinniksi $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$, jolloin funktiot $x = f(t)$ ja $y = g(t)$ ovat koordinaattifunktiot. Oletetaan, että derivaattafunktiot $f'(t)$ ja $g'(t)$ ovat jatkuvia.

Tutkitaan tilannetta, jossa $f'(t)$ ei ole nolla. Tällöin funktio $f(t)$ on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, joten funktio on injektio, ja sillä on olemassa käänteisfunktio. Hyödyntämällä käänteisfunktioita saadaan parametrille t lauseke

$$t = f^{-1}(x).$$

Nyt funktio $y = g(t)$ voidaan esittää muuttujan t avulla muodossa

$$y = g(f^{-1}(x)).$$

Kun tämä yhtälö derivoidaan puolittain muuttujan x suhteen, saadaan yhtälö

$$\frac{dy}{dx} = g'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{df^{-1}(x)}{dx}.$$

Hyödyntämällä käänteisfunktion derivaatalle kaavaa

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

saadaan derivaatalle $\frac{dy}{dx}$ lauseke

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Koska derivaattafunktiot $f'(t)$ ja $g'(t)$ oletettiin jatkuviksi, myös niiden osamäärä on jatkuva, kun $f'(t)$ ei ole nolla. Vastaava päättely on voimassa käyrän normaalille, kun $g'(t)$ ei ole nolla.

Edellisten päätelmien perusteella käyrä on sileä, jos jokaiseen käyrän pisteeseen voidaan asettaa tangenttisuora ja tangenttisuoran suuntaa kuvaava funktio on jatkuva. [1, s. 648]

2.2 Parametrisoidut pinnat

Myös avaruuden \mathbb{R}^3 pinta voidaan parametrisoida esittämällä se kuvauksena kahden parametrin avulla. Tarkastellaan seuraavaksi tällaisia parametrisointeja.

Määritelmä 2.15. Parametrisoitu pinta S on kuvauksen $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ arvojen muodostama pistejoukko. Parametrisointi on muotoa

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Aiemmin todettiin, että polku kuvaa reaalilukuvälin tason tai avaruuden käyräksi. Yllä olevan määritelmän perusteella parametrisoidun pinnan tapauksessa tason \mathbb{R}^2 alue kuvataan avaruuden \mathbb{R}^3 pinnaksi. [2, s. 421, 423]

Esimerkki 2.16. Muodostetaan origokeskisen, 2-säteisen pallopinnan xy -tason alapuolelle jäävän osan parametrisointi. Hyödynnetään pallokoordinaatteja. Valitaan xy -tason vektorin ja x -akselin välistä kulmaa kuvaavaksi parametriksi u ja avaruuden vektorin ja z -akselin välistä kulmaa kuvaavaksi parametriksi v . Tällöin kuvaus

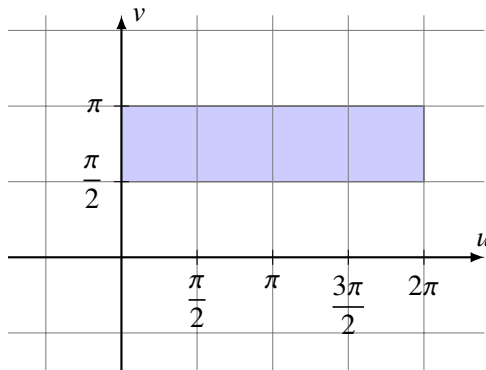
$$\Phi(u, v) = (2 \cos(u) \sin(v), 2 \sin(u) \sin(v), 2 \cos(v)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$$

parametrisoi pinnan.

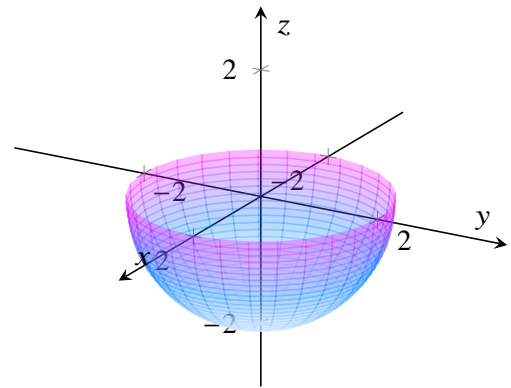
Minkä tahansa pinnalle $\Phi(u, v)$ kuuluvan pisteen etäisyys origosta on

$$\sqrt{(2 \cos(u) \sin(v))^2 + (2 \sin(u) \sin(v))^2 + (2 \cos(v))^2} = 2.$$

Tästä syystä kyseessä on varmasti origokeskisen pallopinnan osa. Lisäksi parametrien arvojoukkojen perusteella x - ja y -koordinaatit saavat arvoja väliltä $[-2, 2]$ ja z -koordinaatti saa arvoja väliltä $[-2, 0]$. Näin ollen kyseessä on xy -tason alapuolelle jäävä pallopinnan puolikas. Parametrien arvot on esitetty kuvassa 2.3 ja pinta on esitetty kuvassa 2.4.



Kuva 2.3. Pallopinnan puolikkaan muodostavan kuvauksen lähtöjoukko.



Kuva 2.4. 2-säteisen origokeskisen pallopinnan puolikas.

Tarkastellaan seuraavaksi parametrisoitujen pintojen ominaisuuksia. Pinnalle S voidaan piirtää käyriä asettamalla toinen parametriesityksen $\Phi(u, v)$ parametreista vakioksi. Kun parametri v saa vain vakioarvon v_0 , käyrä on kuvauksen $\Phi(u, v_0)$ arvojoukko. Vastaavasti, kun parametri u asetetaan vakioksi u_0 , käyrä muodostuu kuvauksen $\Phi(u_0, v)$ arvojoukosta. [2, s. 423–424]

Hyödyntämällä pinnalla kulkevia käyriä jokaiseen pinnan pisteeseen löydetään kaksi tangenttivektoria. Käyrän $\Phi(u, v_0)$ pisteiden tangenttivektorit saadaan parametriesityksen koordinaattifunktioiden osittaisderivaattojen avulla muotoon

$$\Phi_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v_0) \right).$$

Tangenttivektorit Φ_v pinnalla S olevan käyrän $\Phi(u_0, v)$ pisteisiin määritellään vastaavasti. [1, s. 1050], [2, s. 423–424]

Pinnalle S pisteeseen $\Phi(u_0, v_0)$ asetetut tangenttivektorit $\Phi_u(u_0, v_0)$ ja $\Phi_v(u_0, v_0)$ virittävät avaruuteen \mathbb{R}^3 tangenttitason, joka sivuaa pintaa tässä pisteessä. Lisäksi tangenttivektorien ristitulona saadaan tässä pisteessä sekä tangenttitasoa että pintaa vastaan kohtisuora normaalivektori

$$\mathbf{N} = \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0). \quad (2.2)$$

Jatkossa tarvitaan myös normaalivektorin suuntaista yksikkövektoria. Yksikkönormaalivektori

määritellään kaavan

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} \quad (2.3)$$

mukaisesti. [1, s. 1051–1104], [2, s. 424–425]

Tutkitaan seuraavaksi, miten tangentti- ja normaalivektorien avulla voidaan tutkia pinnan sileyttä [1, s. 1050–1051], [2, s. 425].

Määritelmä 2.17. Pinta on sileä, jos pinnan parametrisoinnin komponenttifunktioiden osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Lisäksi tangenttivektorit eivät voi olla nollavektoreita tai yhdensuuntaisia.

Koska normaalivektori on tangenttivektorien ristitulo, sileälle pinnalle voidaan asettaa normaali-vektori mihin tahansa pisteeseen, eli normaalivektori on olemassa ja se ei ole nollavektori. Graafisesti pinnan sileys tarkoittaa sitä, että pinta ei sisällä teräviä kulmia. [1, s. 1050], [2, s. 424–425] Pinnan normaalivektoria hyödynnetään myös pinnan suunnistuksen määrittelemisessä [2, s. 467, 479–480].

Määritelmä 2.18. Suunnistuvalla pinnalla S on positiivinen ja negatiivinen puoli. Pinnan normaalivektori osoittaa pinnan positiivisesta puolesta pois päin ja pinnan reunakäyrää kuljettaessa pinnan positiivinen puoli on reunakäyrän vasemmalla puolella.

2.3 Vektorikenttien integrointi

Vektorikenttien integrointia varten tarvitaan määritelmiä, joiden avulla lasketaan usean muuttujan funktioiden integraaleja. Tästä syystä määritellään seuraavaksi integraalit yli parametrisoitujen käyrien ja pintojen.

Määritelmä 2.19. Tarkastellaan sileää käyrää C , jonka suunnistuksen säilyttävä parametrisointi on $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Jos vektorikentän \mathbf{F} komponenttifunktiot ovat jatkuvia tällä käyrällä, vektorikentän käyräintegraali pitkin tätä käyrää on muotoa

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Vektori $\mathbf{r}'(t)$ on polun \mathbf{r} tangenttivektori. Tästä syystä pistetulo $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$ tarkoittaa vektorikentän projektiota käyrän tangenttivektorille jokaisessa käyrän pisteessä. [1, s. 1080–1081] Jos käyrä on yksinkertainen, tämä projektiio on skalaarifunktio, ja se integroidaan yli reaalilukuvälin, jolle parametri kuuluu [2, s. 403].

Käyrän parametrisoinnin tulee säilyttää käyrän suunnistus, sillä tangenttivektorin suunta riippuu käyrän suunnistuksesta, jolloin suunnistuksen vaihtaminen vaihtaa tangenttivektorin suunnan vastakkaiseksi. Näin ollen suunnistuksen vaihtaminen vaihtaisi myös integraalin arvon vastaluvukseen. [1, s. 1081]

Muodostetaan vektorikentän käyräintegraalille vielä muutamia hyödyllisiä esitysmuotoja. Käyrän pisteeseen $\mathbf{r}(t)$ asetettu yksikkötangentti

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

ja sen avulla saadaan esitysmuodot

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,$$

jotka kuvaavat yllä esitettyä ajatusta vektorikentän projektiosta käyrän tangenttivektorille. [1, s. 1080–1081], [2, s. 403–405].

Tarkastellaan seuraavaksi vektorikenttien integraaleja yli avaruuden \mathbb{R}^3 pintojen. Pintaintegraali määritellään lähes vastaavalla tavalla kuin käyräintegraali, mutta tangenttivektorin sijaan vektorikenttä projisoidaan tässä tapauksessa pinnan normaalivektorille.

Määritelmä 2.20. Tarkastellaan sileää ja suunnistuvaa pintaa S , jonka ulkoinen yksikkönormaali on \mathbf{n} . Jos vektorikentän \mathbf{F} komponenttifunktiot ovat jatkuvia tällä pinnalla, vektorikentän pintaintegraali on muotoa

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Vektori $d\mathbf{S}$ on pinnan normaalivektorin suuntainen ja sen pituus on pinta-alkion dS suuruus. Näin ollen pintaintegraalia laskettaessa vektorikenttä projisoidaan jokaisessa tarkasteltavassa pisteessä pinnan yksikkönormaalivektorille \mathbf{n} , ja saatu skalaarifunktio integroidaan yli pinnan S .

Myös pintaintegraalia laskettaessa tulee ottaa huomioon pinnan suunnistus. Määritelmän 2.18 mukaan suunnistuksen vaihtaminen vaihtaa normaalivektorin suunnan vastakkaiseksi. Tällöin myös integraalin arvo muuttuu vastaluvukseen. Tästä syystä pintaintegraalia laskettaessa tulee määritellä pinnalle positiivinen puoli ja sellainen normaalivektori, että se osoittaa pois päin pinnan positiivisesta puolesta. [1, s. 1105]

Muodostetaan pintaintegraalille pinnan parametrisointia $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hyödyntävät esitysmuodot. Jaetaan pinta differentiaaliin pinta-alkioihin dS , ja approksimoidaan niiden sivujen pituuksia tangenttivektorien ja parametrien differentiaalien du ja dv avulla. Koska suunnikkaan pinta-ala saadaan ristitulon normina, pinta-alkion suuruus

$$dS = \|\Phi_u du \times \Phi_v dv\|,$$

eli

$$dS = \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv.$$

Lausekkeen 2.2 mukaan tangenttivektorien ristitulo on pinnan normaalivektori \mathbf{N} . Näin ollen pinta-alkio

$$dS = \|\mathbf{N}\| du dv, \quad (2.4)$$

joten pinta-alkio dS voidaan esittää parametrisoinnin avulla. [2, s. 431]

Määritelmän 2.20 ja yhtälön (2.4) perusteella pintaintegraali voidaan laskea kaavalla

$$\iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{N}\| du dv.$$

Toisaalta lausekkeen (2.3) perusteellapinnan yksikkönormaalivektorin ja normaalivektorin pituuden tulo on pinnan normaalivektori, joten pintaintegraali voidaan laskea myös kaavan

$$\iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) du dv \quad (2.5)$$

mukaisesti. [1, s. 1104–1105], [2, s. 449]

Vektorikenttien tapauksessa pintaintegraali kuvaa virtausta tai kulkeutumista tarkasteltavan pinnan läpi normaalivektorin suuntaan, ja tätä vektorikenttien ominaisuutta kuvataan käsitteellä vuo [1, s. 1106], [2, s. 456]. Näin ollen vektorikentän vuo saadaan kaavasta

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.6)$$

2.4 Gaussin lause

Tarkastellaan seuraavaksi Gaussin lausetta, jonka avulla vektorikentän pintaintegraali voidaan muuttaa skalaarikentän tilavuusintegraaliksi. Lisäksi Gaussin lauseen avulla saadaan divergenssille sovellusten näkökulmasta hyödyllinen tulkinta.

Lause 2.21 (Gaussin lause). *Tarkastellaan avaruuden \mathbb{R}^3 rajoitettua joukkoa T , jonka reunapinta ∂T on sulkeutuva ja paloittain sileä. Reunapinnan positiivisesta puolesta pois päin osoittava yksikkönormaali on \mathbf{n} . Oletetaan, että vektorikentän \mathbf{F} osittaisderivaatat ovat jatkuvia tässä joukossa. Vektorikentän \mathbf{F} pintaintegraali yli pinnan ∂T saadaan tilavuusintegraalina yhtälön*

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (2.7)$$

mukaisesti.

Todistus. Todistetaan lause tapauksessa, jossa joukko T on xy -, xz - ja yz -projisoituva. Tämä tarkoittaa sitä, että kunkin muuttujan saamat arvot kuuluvat välille, jonka ylä- ja alaraja voidaan esittää kahden muun muuttujan funktiona.

Tarkastellaan vektorikenttää $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Kun hyödynnetään divergenssin määritelmää 2.6,

yhtälön (2.7) oikea puoli saadaan muotoon

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

Sovelletaan seuraavaksi pistetulolle osittelulakia, jolloin yhtälön (2.7) vasen puoli saadaan muotoon

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\partial T} (P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Näin ollen lause on tosi, jos yhtälö

$$\iint_{\partial T} (P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

on tosi. Tarkastellaan tätä yhtälöä komponenteittain, jolloin lause todistetaan osoittamalla yhtälöt

$$\iint_{\partial T} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dV, \quad (2.8)$$

$$\iint_{\partial T} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dV \quad (2.9)$$

ja

$$\iint_{\partial T} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dV \quad (2.10)$$

todeksi.

Tutkitaan yhtälöä (2.10). Koska joukko T on xy -projisoituva, muuttujan z arvoja rajoittavat alhaalta pinta $g(x, y)$ ja ylhäältä pinta $f(x, y)$, kun piste (x, y) kuuluu joukkoon D . Tällöin yhtälön oikean puolen tilavuusintegraali saadaan muotoon

$$\iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dy dx = \iint_D R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y)) dy dx. \quad (2.11)$$

Muokataan seuraavaksi yhtälön (2.10) vasenta puolta. Jaetaan reunapinta ∂T osiin ja lasketaan pintaintegraali erikseen jokaisen osan yli. Koska joukko T on xy -projisoituva, alhaalta ja ylhäältä rajoittavien pintojen S_1 ja S_2 parametrisoinnit ovat $g(x, y)$ ja $f(x, y)$. Toisaalta projisoituvuuden perusteella sivuilta rajoittavat pinnat ovat yhdensuuntaiset z -akselin kanssa, jolloin niiden yksikkönormaalit ovat kohtisuorassa z -akselia vastaan, tai vaihtoehtoisesti niitä ei ole. Näin ollen integraalit yli sivulta rajoittavien pintojen ovat nollija ja laskettavaksi jäävät vain integraalit yli pintojen S_1 ja S_2 . Yhtälön (2.10) vasemmaksi puoleksi saadaan

$$\iint_{\partial T} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 dS.$$

Kun yllä olevat integraalit yli pintojen S_1 ja S_2 esitetään muodossa (2.5), yllä oleva yhtälö voidaan sieventää muotoon

$$\iint_{\partial T} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D R\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_1 dy dx + \iint_D R\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_2 dy dx. \quad (2.12)$$

Selvitetään pintojen normaalivektorit \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 . Normaalien tulee osoittaa pois päin tarkasteltavasta pinnasta, jotta tarkastellaan pinnan positiivista puolta. Pintojen normaalivektorit ovat

$$\mathbf{N}_1 = \left(0, 1, \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right) \times \left(1, 0, \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}, -1\right)$$

ja

$$\mathbf{N}_2 = \left(1, 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, 1\right).$$

Sievennetään pintaintegraalia (2.12) normaalivektorien lausekkeiden avulla. Pistetulo avaruuden kantavektorin \mathbf{k} kanssa poimii normaalivektorista vain sen viimeisen alkion. Näin ollen pintaintegraaliksi saadaan

$$\iint_D \mathbf{Rk} \cdot \mathbf{N}_1 \, dy \, dx + \iint_D \mathbf{Rk} \cdot \mathbf{N}_2 \, dy \, dx = \iint_D -R(x, y, g(x, y)) \, dy \, dx + \iint_D R(x, y, f(x, y)) \, dy \, dx,$$

eli

$$\iint_D \mathbf{Rk} \cdot \mathbf{N}_1 \, dy \, dx + \iint_D \mathbf{Rk} \cdot \mathbf{N}_2 \, dy \, dx = \iint_D R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y)) \, dy \, dx.$$

Tämä pintaintegraali on sama kuin tilavuusintegraali (2.11), joten yhtälö (2.10) on tosi. Yhtälöt (2.8) ja (2.9) voitaisiin todistaa vastaavalla tavalla.

Näin ollen lause on todistettu tilanteessa, jossa joukko T on xy -, xz - ja yz -projisoituva. [2, s. 506–509] \square

Gaussin lause luo divergenssille havainnollistavan tulkinnan. Yhtälön (2.7) vasemmalla puolella on vektorikentän \mathbf{F} vuo yli pinnan ∂T , ja oikealla puolella divergenssin $\nabla \cdot \mathbf{F}$ tilavuusintegraali. Täten divergenssi kuvaa vektorikentän vuon tilavuusyksikköä kohden eli divergenssi vastaa vektorikentän vuon tiheyttä. [2, s. 511] Muotoillaan tämä tulkinta vielä täsmällisemmin seuraavan lauseen avulla.

Lause 2.22. *Tarkastellaan joukkoa Ω_ρ , joka on \mathbf{r} -keskinen, ρ -säteinen pallo. Oletetaan, että vektorikentän \mathbf{F} osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tällöin vektorikentän \mathbf{F} divergenssi pisteessä \mathbf{r} on*

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V(\Omega_\rho)} \iint_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \right).$$

Todistus. Tarkastellaan tilavuusintegraalia

$$\iiint_{\Omega_\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, dV$$

joukossa Ω_ρ , joka on \mathbf{r} -keskinen ρ -säteinen pallo. Kun tämän pallon tilavuus on $V(\Omega_\rho)$, integraalilaskennan väliarvolauseen perusteella joukosta Ω_ρ löytyy piste \mathbf{r}_0 , jolle on voimassa yhtälö

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot V(\Omega_\rho) = \iiint_{\Omega_\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, dV. \quad (2.13)$$

Jaetaan yhtälö (2.13) puolittain tilavuudella $V(\Omega_\rho)$ ja hyödynnetään Gaussin lausetta 2.21, jolloin saadaan tulos

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{V(\Omega_\rho)} \iint_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Kun pallon Ω_ρ säde ρ lähestyy nollaa, myös piste \mathbf{r}_0 lähestyy pallon keskipistettä \mathbf{r} . Koska vektorikentän \mathbf{F} osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, myös funktion $\nabla \cdot \mathbf{F}$ arvo pisteessä \mathbf{r}_0 lähestyy funktion arvoa pisteessä \mathbf{r} . Tästä syystä raja-arvotarkastelun

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V(\Omega_\rho)} \iint_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \right)$$

perusteella yhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V(\Omega_\rho)} \iint_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \right)$$

on voimassa. [2, s. 511] □

Lauseen 2.22 mukaan divergenssi kuvaa vektorikentän vuon tilavuusyksikköä kohden avaruuden eri pisteissä. Jos vektorikentän divergenssi on positiivinen, vektorikentän vuo on positiivinen, jolloin tarkastelupistettä kutsutaan vektorikentän lähteeksi. Vektorikentän virtaus tai kulkeutuminen pois päin tästä pisteestä on sitä voimakkaampaa mitä suurempi divergenssi on. Vastaavasti negatiivinen divergenssi tarkoittaa sitä, että vektorikentän vuo on negatiivinen, eli kyseessä on vektorikentän nielu. [2, s. 511]

Gaussin lause on hyödynnettävissä myös muille kuin lauseen 2.21 todistuksessa määritellyille joukoille. Tällöin tarkasteltava alue jaetaan projisoituviin joukkoihin, ja tilavuusintegraali on summa pintaintegraaleista yli kaikkien näiden pienempien joukkojen reunapintojen. [1, s. 1116], [2, s. 509] Käytetään tätä ideaa seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.23. Selvitetään vektorikentän $\mathbf{F} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$ pintaintegraali yli suljetun ja sileän pinnan ∂T .

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa piste $(0, 0, 0)$ ei kuulu joukkoon T . Tällöin vektorikentän \mathbf{F} osittaisderivaatat ovat jatkuvia joukossa T . Näin ollen Gaussin lauseen 2.21 oletukset ovat voimassa, ja pintaintegraali lasketaan vektorikentän divergenssin tilavuusintegraalina kaavan

$$\iint_{\partial T} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T \nabla \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \, dV$$

mukaisesti. Esimerkin 2.8 perusteella vektorikentän divergenssi on nolla, kun vektori \mathbf{r} ei ole nollavektori. Tästä syystä yllä olevaan yhtälöön divergenssin paikalle sijoitetaan nolla, jolloin pintaintegraaliksi saadaan

$$\iint_{\partial T} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T 0 \, dV = 0. \quad (2.14)$$

Tutkitaan pintaintegraalia seuraavaksi tilanteessa, jossa piste $(0, 0, 0)$ kuuluu joukkoon T , mutta ei sijaitse pinnalla ∂T . Tällöin ei voida suoraan soveltaa Gaussin lausetta, sillä vektorikenttää ei ole määritelty pisteessä $(0, 0, 0)$, ja näin ollen sen osittaisderivaatatkaan eivät ole jatkuvia koko joukossa T .

Merkitään joukon T reunapintaa pintana S_1 ja muodostetaan sen sisäpuolelle uusi suljettu pinta S_2 , joka sisältää pisteen $(0, 0, 0)$. Valitaan pinnaksi S_2 origokeskinen pallopinta. Määritellään seuraavaksi uusi joukko M , joka muodostuu alkuperäisen reunapinnan S_1 ja uuden pinnan S_2 väliin jäävästä alueesta. Koska uusi joukko M ei sisällä pistettä $(0, 0, 0)$, vektorikentän \mathbf{F} osittaisderivaatat ovat jatkuvia tässä joukossa, ja Gaussin lausetta 2.21 on sovellettavissa. Vektorikentän divergenssin integraali yli joukon M saadaan pintaintegraalina kaavan

$$\iiint_M \nabla \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) dS = \iint_{\partial M} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

mukaisesti.

Joukon M reunapinta muodostuu pinnoista S_1 ja S_2 . Esitetään seuraavaksi pintaintegraali summana pintaintegraaleista näiden pintojen yli. Yksikkönormaalien tulee osoittaa pois päin joukosta M . Näin ollen pinnan S_1 normaalivektorin tulee osoittaa pois päin origosta ja pinnan S_2 normaalivektorin kohti origoa. Pinta S_2 on kuitenkin origokeskinen pallopinta, ja sen positiivisesta puolesta pois päin osoittava normaalivektori suuntautuu pois päin origosta. Tästä syystä integroitaessa yli pinnan S_2 integraalin merkki vaihtuu vastakkaiseksi. Täten

$$\iiint_M \nabla \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) dS = \iint_{S_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_1 dS - \iint_{S_2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_2 dS.$$

Koska piste $(0, 0, 0)$ ei kuulu joukkoon M , voidaan soveltaa uudelleen esimerkin 2.8 tulosta. Vektorikentän divergenssi ja siten myös vektorikentän divergenssin tilavuusintegraali ovat nolliä, joten yllä oleva yhtälö sievenee muotoon

$$0 = \iint_{S_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_1 dS - \iint_{S_2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_2 dS,$$

eli

$$\iint_{S_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_1 dS = \iint_{S_2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_2 dS.$$

Origokeskisen pallopinnan S_2 yksikkönormaali \mathbf{n}_2 osoittaa pois päin origosta, ja se on muotoa $\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Sijoitetaan yksikkönormaalien lauseke yllä olevaan yhtälöön. Tällöin pintaintegraali yli pinnan S_1 on

$$\iint_{S_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_1 dS = \iint_{S_2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} dS,$$

eli

$$\iint_{S_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_1 \, dS = \iint_{S_2} \frac{\|\mathbf{r}\|^2}{\|\mathbf{r}\|^4} \, dS.$$

Yllä olevaa yhtälöä sieventämällä saadaan kaava

$$\iint_{S_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n}_1 \, dS = \iint_{S_2} \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} \, dS.$$

Pinnalla S_2 vektorin pituus $\|\mathbf{r}\|$ on pallopinnan säde. Toisaalta pintaintegraali yli suljetun pallopinnan on tämän pallopinnan pinta-ala $4\pi\|\mathbf{r}\|^2$. Näin ollen integraaliksi yli pinnan S_1 , joka on joukon T reunapinta ∂T , jää

$$\iint_{\partial T} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi. \quad (2.15)$$

Yllä olevien päätelmien (2.14) ja (2.15) perusteella saadaan siis seuraava tulos. Vektorikentän $\mathbf{F} = \mathbf{r}/(\|\mathbf{r}\|^3)$ pintaintegraali yli suljetun ja sileän pinnan ∂T on

$$\iint_{\partial T} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{kun } (0, 0, 0) \in T \\ 0, & \text{kun } (0, 0, 0) \notin T, \end{cases}$$

ja kun piste $(0, 0, 0)$ ei sijaitse pinnalla ∂T . [2, s. 512–514]

3. SÄHKÖSTATIIKKA

Sähkömagneettinen vuorovaikutus on yksi kappaleiden välisistä perusvuorovaikutuksista, ja se yhdistää hiukkasten sähköisten ja magneettisten ominaisuuksien tarkastelun. Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen edellytyksenä on sähkövaraus, joka on yksi hiukkasen perusominaisuus. [3]

Tarkastellaan aluksi Coulombin lakia, jonka avulla voidaan kuvata kahden pistemäisen sähkövarauksen välistä vuorovaikutusta. Pisteessä \mathbf{r}' sijaitsevan pistevarauksen q_1 pisteessä \mathbf{r} sijaitsevaan pistevaraukseen q_2 tyhjiössä aiheuttama sähköinen voima

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = kq_1q_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}. \quad (3.1)$$

Yhtälössä verrannollisuuskertoimen k arvo riippuu käytettävästä yksikköjärjestelmästä. Tässä tekstissä käytetään SI-yksikköjärjestelmää, jolloin verrannollisuuskertoimen k saa tyhjiössä arvokseen $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$. Vakio ϵ_0 on tyhjiön permittiivisyys. [4, s. 28–29], [5, s. 60]

Coulombin laki on voimassa kahden pistevarauksen väliselle vuorovaikutukselle. Kun tarkastellaan mielivaltaisen varausjakauman aiheuttamaa voimaa, hyödynnetään superpositioperiaatetta, jonka mukaan kahden varauksen välinen vuorovaikutus ei riipu muista ympäröivien varauksista. Näin ollen varaukseen vaikuttava kokonaisvoima lasketaan selvittämällä yksittäisten varausten tai varausalkioiden tähän varaukseen vaikuttavat voimat yhtälön (3.1) mukaisesti ja muodostamalla näiden voimien vektorisumma. [5, s. 59]

Pisteissä \mathbf{r}_i sijaitsevista varauksista q_i muodostuva diskreetti varausjakauma kohdistaa pisteessä \mathbf{r} sijaitsevaan varaukseen q kokonaisvoiman

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3}.$$

Jatkuvan varausjakauman tapauksessa vektorisumma esitetään integraalina varaustiheyden avulla. Jos varausjakauma sijaitsee avaruudessa \mathbb{R}^3 , hyödynnetään tilavuusvaraustiheyttä ρ , joka kuvaa sähkövarauksen tilavuusalkiota kohden, paikan funktiona. Tällön sähköinen voima

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV.$$

Yksi- ja kaksiulotteisissa tilanteissa voima lasketaan viiva- tai pintaintegraalina, ja tällöin tilavuusvaraustiheyden sijaan käytetään viivavaraustiheyttä λ tai pintavaraustiheyttä σ vastaavasti. [4, s. 29], [5, s. 61–63]

Coulombin laki ottaa huomioon kummankin vuorovaikutukseen osallistuvan hiukkasen varauksen suuruuden. Toisaalta voidaan myös tarkastella yksittäisen varauksen ominaisuuksia ja kykyä kohdistaa voima testivaraukseen. Tällöin ajatellaan, että varattu hiukkanen aiheuttaa ympärilleen sähkökentän, ja tämä sähkökenttä kohdistaa testivaraukseen voiman. [3, s. 719]

Sähkökentän avulla tarkastellaan siis voiman aiheuttavan varauksen tai varausjakauman ominaisuuksia ottamatta huomioon testivarauksen ominaisuuksia. Siten varauksen sähkökentän voimakkuus \mathbf{E} määritellään testivaraukseen q_0 kohdistuvan voiman \mathbf{F} ja testivarauksen suuruuden suhteena

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}.$$

Hyödynnetään Coulombin lakia (3.1) pistevarausten väliselle voimalle. Tällöin pisteessä \mathbf{r}' sijaitsevan pistevarauksen q sähkökenttä

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}. \quad (3.2)$$

Koska sähkökenttä on sähköisen voiman tapaan vektorisuure, mielivaltaisen varausjakauman muodostama kokonaissähkökenttä lasketaan yksittäisten pistevarausten sähkökenttien vektorisummana. Tällöin sähkökenttä

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3}.$$

Jos varausjakauma on jatkuva ja se voidaan esittää varaustiheyden ρ avulla, sähkökenttä lasketaan integraalina kaavan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV$$

mukaisesti. [4, s. 28–29], [5, s. 61–64]

Tarkastellaan seuraavaksi Gaussin lakia sähkökentille. Muodostetaan ensin tätä lakia kuvaavat yhtälöt ja tarkastellaan sen jälkeen lain fysikaalista tulkintaa ja hyödyntämistä varaussysteemien tutkimisessa.

Tarkastellaan pistevarauksen sähkökentän vuota yli suljetun pinnan S . Yhtälön (2.6) mukaan sähkökentän vuo on sähkökentän integraali yli tarkasteltavan pinnan, joten sille saadaan lauseke

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.3)$$

Sijoitetaan pistevarauksen sähkökentän (3.2) lauseke yllä olevaan yhtälöön (3.3). Tällöin sähkökentän vuo

$$\Phi_E = \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{n} dS,$$

ja se voidaan sieventää muotoon

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Yllä olevassa yhtälössä pinta S on suljettu, ja se sulkee sisäänsä pistevarauksen. Valitaan sellainen koordinaatisto, että pistevaraus sijaitsee koordinaatiston origossa. Merkitään tässä koordinaatistossa vektorilla \mathbf{s} pistettä, jossa sähkökenttää tarkastellaan. Pinnan parametrisointi tässä koordinaatistossa on S_s . Näillä merkinnöillä sähkökentän vuo

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_s} \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} \cdot \mathbf{n}_s dS.$$

Sovelletaan seuraavaksi esimerkin 2.23 tulosta. Koska tarkasteltava pinta sulkee sisäänsä pistevarauksen ja siten myös origon, vektorikentän $\mathbf{s}/|\mathbf{s}|^3$ pintaintegraaliksi saadaan 4π . Näin ollen tulos

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

on voimassa aina, kun pinta S sulkee sisäänsä pistevarauksen. [1, s. 1117], [2, s. 514] Tätä tulosta kutsutaan integraalimuotoiseksi Gaussin laiksi sähkökentille. [5, s. 69]

Superpositioperiaatteen nojalla Gaussin laki sähkökentille on voimassa myös muille kuin yhden pistevarauksen muodostamille systeemeille. Tarkastellaan ensin diskreetin varausjakauman tapausta. Kun yhtälöön (3.3) sijoitetaan pistevarausten sähkökenttien summa, saadaan kokonaissähkökentän \mathbf{E} vuoksi

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left(\sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Summan integraali voidaan laskea termien integraalien summana. Näin ollen

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^n \left(\iint_S q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \cdot \mathbf{n} dS \right).$$

Kun valitaan sellainen pinta S , että se sulkee sisäänsä kaikki tarkasteltavat varaukset, voidaan jokaiselle pistevaraukselle hyödyntää erikseen esimerkin 2.23 tulosta. Tällöin sähkökentän vuoksi saadaan

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Merkitään varausten summaa Q_{enc} , jolloin diskreetille varausjakaumalle Gaussin laki sähkökentille on muotoa

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}. \quad (3.5)$$

Muodostetaan vielä jatkuvaa varausjakaamaa kuvaava yhtälö. Kokonaisvaraus Q_{enc} saadaan tilavuusvaraustiheyden tilavuusintegraalina kaavalla

$$Q_{\text{enc}} = \iiint_V \rho dV. \quad (3.6)$$

Sijoitetaan varaus Q_{enc} yhtälöön (3.5). Näin ollen yhtälö

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (3.7)$$

kuvaa sähkökentän vuota jatkuvan varausjakauman tapauksessa. [5, s. 69–70]

Tarkastellaan seuraavaksi edellä esitettyjen yhtälöiden (3.4), (3.5) ja (3.7) fysikaalista tulkintaa. Yhtälöiden vasemmalla puolella oleva integraali on yhtälön (3.3) perusteella sähkökentän vuo yli suljetun pinnan S . Yhtälön oikealla puolella on pinnan sisäänsä sulkema nettovaraus. Näin ollen Gaussin lain perusteella pinnan sisäänsä sulkema nettovaraus aiheuttaa sähkökentän nettovuon läpi kyseisen pinnan. Pinnan ulkopuolelle jäävät sähkövaraukset eivät vaikuta sähkökentän vuohon. [4, s. 31], [5, s. 68]

Gaussin laki sähkökentille voidaan esittää myös differentiaaliyhtälönä. Tarkastellaan sähkökentän vuota läpi suljetun pinnan S , joka on joukon V reunapinta. Oletetaan, että sähkökentän \mathbf{E} osittaisderivaatat ovat jatkuvia tässä joukossa. Tällöin Gaussin lauseen 2.21 ehdot ovat voimassa, joten

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

Esitetään sähkökentän vuo yhtälön (3.7) mukaisesti tilavuusvaraustiheyden tilavuusintegraalina. Tällä sijoituksella saadaan yhtälö

$$\iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

Koska yllä oleva yhtälö on voimassa aina, kun V on suljetun pinnan rajaama joukko, tulee integroitavien funktioiden olla samat. Näin ollen osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

on toinen mahdollinen esitysmuoto Gaussin laille. [4, s. 33–34], [5, s. 69–70]

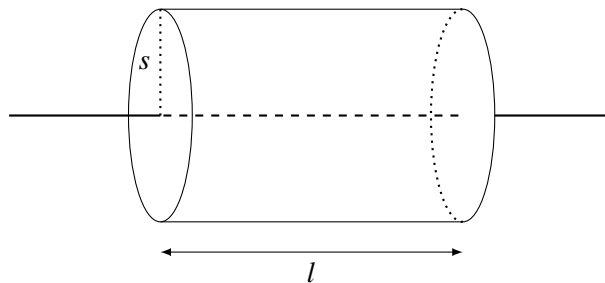
Edellä esitetty päättely ei ole sovellettavissa tilanteeseen, jossa sähkökentän \mathbf{E} osittaisderivaatat eivät ole jatkuvia. Näin ollen edellä esitettyä päättelyä ei voida suoraan hyödyntää esimerkiksi pistevarauksen sähkökentälle (3.1). Tähän tapaukseen soveltuva syvällisempi perustelu löytyy lähteestä [5, s. 71].

Differentiaaliyhtälönä esitetty Gaussin laki sähkökentille sisältää saman fysikaalisen tulkinnan kuin integraaliyhtälö. Kun hyödynnetään lauseen 2.22 mukaista fysikaalista tulkintaa divergenssille, havaitaan, että positiivinen varaus on sähkökentän lähde, sillä sähkökentän divergenssi riippuu tarkastelupisteen varaustiheydestä. Vastaavasti negatiivinen varaus on sähkökentän nielu. [2, s. 511]

Gaussin laki sähkökentille voidaan siis esittää sekä integraali- että differentiaaliyhtälönä, ja niiden fysikaalinen tulkinta on samanlainen. Näistä yhtälöistä lähinnä integraalimuoto on hyödyllinen symmetristen varaussysteemien aiheuttamien sähkökenttien selvittämisessä. Tutkitaan seuraavien esimerkkien avulla, miten integraaliyhtälöä (3.4) voidaan hyödyntää laskettaessa sähkökenttien voimakkuuksia. [5, s. 72, 75–76]

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan äärettömän pitkää johdinta, jonka viivavaraustiheys λ on vakio. Muodostetaan lauseke johtimen sähkökentän voimakkuudelle pisteessä, jonka etäisyys johtimesta on s .

Asetetaan virtajohdin x -akselille. Muodostetaan virtajohtimen ympärille kuvitteellinen suljettu pinta, ja tarkastellaan sähkökenttää tällä pinnalla. Pinta on suora ympyrälieriö, jonka pohjat ovat yz -tason suuntaiset. Lieriön pituus on l ja pohjan säde on s . Virtajohdin ja pinta on esitetty kuvassa 3.1.



Kuva 3.1. Äärettömän pitkä virtajohdin.

Lasketaan ensin kuvitteellisen pinnan sisäänsä sulkema varaus. Tässä tapauksessa tilavuusvaraustiheys ρ korvataan viivavaraustiheydellä λ ja integrointi suoritetaan yhdessä ulottuvuudessa. Varaukseksi saadaan

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^l \lambda dx = \lambda l.$$

Tarkastellaan seuraavaksi sähkökentän vuota yli lieriön pinnan. Lieriön pinta muodostuu pohjista S_1 ja S_3 sekä lieriön vaipasta S_2 . Näin ollen sähkökentän vuo

$$\Phi_E = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \iint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_3 dS.$$

Jaetaan johdin differentiaaliin osiin, jolloin se muodostuu vierekkäisistä pistevarauksista. Pistevarauksen kenttä on radiaalinen yhtälön (3.1) perusteella, ja symmetrian nojalla sähkökentän suunta on kaikkialla kohtisuorassa x -akselia vastaan. Jos varaustiheys λ on positiivinen, sähkökentän suunta on pois päin johtimesta. Negatiivisen varaustiheyden tapauksessa sähkökenttä on suoraan kohti johdinta. Sähkökentän suunnan perusteella voidaan päätellä, että lieriön vaipalla S_2 sähkökenttä ja pinnan normaali ovat yhdensuuntaiset ja lieriön pohjilla S_1 ja S_3 ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Täten yksikkönormaalivektorien \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_3 pistetulot sähkökentän kanssa ovat nollija ja yksikkönor-

maalivektorin \mathbf{n}_2 pistetulo sähkökentän kanssa on sähkökentän voimakkuus $\|\mathbf{E}\|$. Näin ollen yllä oleva yhtälö saadaan muotoon

$$\Phi_E = \iint_{S_1} 0 \, dS + \iint_{S_2} \|\mathbf{E}\| \, dS + \iint_{S_3} 0 \, dS,$$

eli

$$\Phi_E = \|\mathbf{E}\| \iint_{S_2} dS.$$

Koska lieriön vaipan pinta-ala on $2\pi ls$, vuo

$$\Phi_E = \|\mathbf{E}\| 2\pi sl. \quad (3.8)$$

Hyödynnetään seuraavaksi Gaussin lakia sähkökentälle (3.4). Koska sähkökentän vuo on yhtä suuri kuin pinnan sisäänsä sulkeman varauksen ja tyhjiön permittiivisyyden suhde, saadaan yhtälö

$$\|\mathbf{E}\| 2\pi ls = \frac{\lambda l}{\epsilon_0},$$

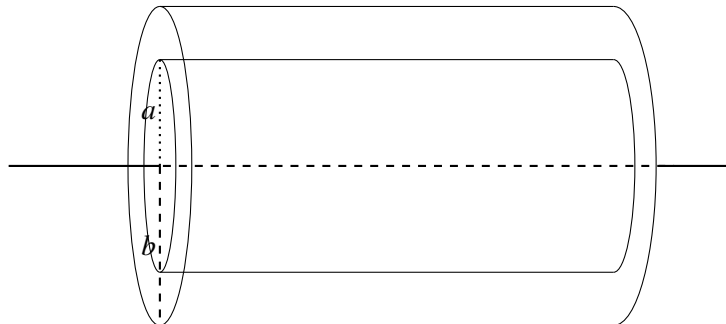
josta voidaan ratkaista sähkökentän voimakkuudeksi

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \pi s}.$$

Yllä olevan kaavan perusteella johtimen sähkökentän voimakkuus tarkastelupisteessä on sitä suurempi mitä suurempi on johtimen viivavaraustiheys. Toisaalta sähkökentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen tarkastelupisteen etäisyyteen johtimesta. [3, s. 759]

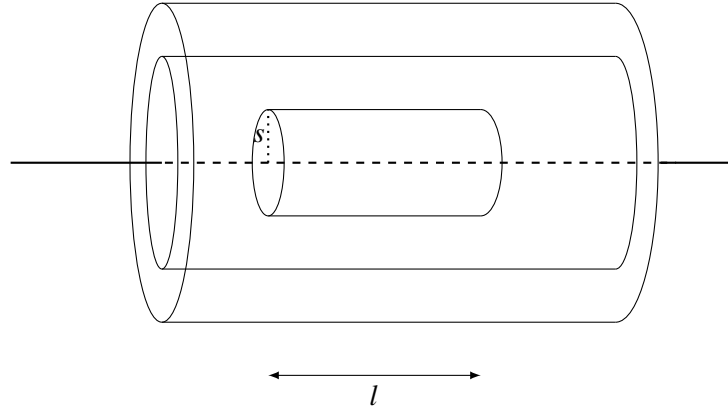
Gaussin lain (3.5) mukaan sähkökentän vuo riippuu vain pinnan sisäänsä sulkemasta kokonaisvarauksesta. Sovelletaan tätä seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan varaussysteemiä, joka muodostuu äärettömän pitkästä sylinteristä sekä sitä ympäröivästä sylinteripinnasta. Sylinteri on positiivisesti varattu, sen tilavuusvaraustiheys on ρ ja säde a . Sylinteripinta on negatiivisesti varattu. Sen pintavaraustiheys on σ ja säde b . [5, s. 76] Osa systeemistä on esitetty kuvassa 3.2.



Kuva 3.2. Äärettömän pitkä positiivisesti varattu sylinteri, jota ympäröi äärettömän pitkä negatiivisesti varattu sylinteripinta.

Määritetään ensin sähkökentän voimakkuus pienemmän sylinterin sisällä, etäisyydeellä s sylinterin akselista. Gaussin lain (3.7) perusteella tiedetään, että sähkökentän vuohon pinnan läpi vaikuttaa vain tämän pinnan sisäänsä sulkema nettovaraus. Muodostetaan esimerkin 3.1 tilannetta vastaava kuvitteellinen sylinterimäinen pinta, jonka säde on s ja pituus l . Kutsutaan tätä pintaa jatkossa Gaussin pinnaksi. Tilanne on esitetty kuvassa 3.3.



Kuva 3.3. Gaussin pinta on sylinteri, jonka säde s on pienempi kuin a -säteisen sylinterin säde.

Tilanteen geometria vastaa esimerkin 3.1 tilannetta: Vaikka tässä tapauksessa varaus on jakautunut sylinterin alueelle, päätelmät sähkökenttien ja pintojen normaalien suunnista ovat voimassa tässäkin tapauksessa, ja näin ollen sähkökentän vuo saadaan kaavasta (3.8).

Lasketaan Gaussin pinnan sisäänsä sulkema nettovaraus. Nettovaraus saadaan yhtälöstä (3.6). Koska tarkastellaan s -säteistä sylinteripintaa, jonka pituus on l , integrointi suoritetaan yli tilavuuden

$$V = \pi s^2 l.$$

Näin ollen Gaussin pinnan sisäänsä sulkema varaus

$$Q_{\text{enc}} = \rho \pi s^2 l. \quad (3.9)$$

Gaussin lain (3.5) mukaan sähkökentän vuo on yhtä suuri kuin pinnan sisäänsä sulkeman sähkövarauksen ja tyhjiön permittiivisyyden suhde. Tästä syystä yhtälöt (3.8) ja (3.9) yhdistämällä saadaan yhtälö

$$\|\mathbf{E}\| 2\pi s l = \frac{\rho \pi s^2 l}{\epsilon_0},$$

josta ratkaistaan sähkökentän voimakkuudeksi

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{\rho s}{2\epsilon_0}.$$

Sähkökentän voimakkuus sylinterin ja sylinteripinnan välissä ratkaistaan vastaavalla tavalla. Valitaan nyt sellainen sylinterin muotoinen Gaussin pinta, että sen säde s on pienempi kuin sylinteripinnan säde b , mutta suurempi kuin sylinterin säde a . Gaussin pinnan pituus on edelleen l .

Gaussin pinnan sisäänsä sulkema varaus selviää jälleen yhtälöstä (3.6). Varaus on jakautunut sylinteriin, jonka säde on a ja pituus l . Näin ollen varaus

$$Q_{\text{enc}} = \rho\pi a^2 l. \quad (3.10)$$

Nyt yhtälöt (3.8) ja (3.10) yhdistämällä saadaan yhtälö

$$\|\mathbf{E}\| 2\pi s l = \frac{\rho\pi a^2 l}{\epsilon_0},$$

josta saadaan sähkökentän voimakkuudeksi

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 s}.$$

Lasketaan lopuksi sähkökentän voimakkuus varaussysteemin ulkopuolella. Tässä tapauksessa Gaussin pinnaksi tulee valita sylinteri, jonka pituus on l , ja jonka säde s on suurempi kuin säde b .

Selvitetään ensin Gaussin pinnan sisäänsä sulkema nettovaraus. Gaussin pinta sulkee sisäänsä osan sylinteristä ja sylinteripinnasta. Sylinterin Gaussin pinnan sisään jäävä varaus saadaan kaavasta (3.10). Sylinteripinnan varaus saadaan pintaintegraalista

$$Q = \iint_A \sigma dA.$$

Kun sylinteripinnan säde on b ja pituus l , vaipan pinta-ala

$$A = 2\pi b l.$$

Näin ollen sylinteripinnan varaus

$$Q = \sigma 2\pi b l.$$

Koska sylinterin ja sylinteripinnan varaukset ovat erimerkkiset, nettovaraus saadaan niiden erotuksena. Gaussin pinnan sisään jäävä nettovaraus

$$Q_{\text{enc}} = \rho\pi a^2 l - \sigma 2\pi b l.$$

Hyödynnetään yhtälöä (3.8) ja sijoitetaan sähkökentän vuon paikalle yllä olevan nettovarauksen ja tyhjiön permittiivisyyden suhde. Sähkökentän voimakkuus saadaan täten yhtälöstä

$$\|\mathbf{E}\| 2\pi s l = \frac{\rho\pi a^2 l - \sigma 2\pi b l}{\epsilon_0},$$

eli

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho a^2}{2s} - \frac{\sigma b}{s} \right).$$

4. YHTEENVETO

Tässä työssä tarkasteltiin vektorianalyysin keskeisiä tuloksia sekä niiden soveltamista sähkömagnetismin tarkastelussa. Työn alussa esiteltiin keskeisiä vektorikenttiin sekä parametrisoituihin käyriin ja pintoihin liittyviä käsitteitä. Vektorianalyysin osalta tässä työssä keskityttiin integraalilaskentaan: työssä määriteltiin vektorikenttien viiva- ja pintaintegraalit. Tämän jälkeen todistettiin vektorikenttien differentiaali- ja integraalilaskentaa yhdistävä Gaussin lause 2.21 xy -, xz - ja yz -projisoituvissa joukoissa. Työn kolmannessa luvussa keskityttiin soveltamaan ja havainnollistamaan esiteltyjä tuloksia. Sovellusalueeksi valikoitui sähkömagnetismi ja esimerkkinä hyödynnettiin Gaussin lakia sähkökentille.

Kolmannessa luvussa havaittiin, että vektorianalyysi muodostaa keskeisen perustan erilaisten fyysisien ilmiöiden ymmärtämiselle. Vektorianalyysin tulosten avulla tutkittiin kokeellisesti havaittujen ilmiöiden matemaattisia esitysmuotoja. Lisäksi havaittiin, että vektorikenttien differentiaali- ja integraalilaskenta on välttämätöntä erilaisten fysikaalisten systeemien, kuten varausjakaumien, matemaattisessa tarkastelussa.

Vektorianalyysin tulosten avulla tutkittiin lisäksi Gaussin lain matemaattisten esitysmuotojen ja fysikaalisen merkityksen välistä yhteyttä. Lisäksi sähkökentän avulla havainnollistettiin vektorianalyysiin liittyviä käsitteitä, kuten vuota ja divergenssiä.

LÄHTEET

- [1] C. H. Edwards ja D. E. Penney. *Calculus: Early Transcendentals, Matrix Version (6th ed.)* Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [2] J. E. Marsden ja A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman & Company, New York, 1996.
- [3] H. D. Young ja R. A. Freedman. *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics (Global Edition)*. Pearson Education, 2015.
- [4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics, (2nd ed.)* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.
- [5] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics (4th ed., International ed.)* Pearson, Boston, 2013.