Tampereen yliopisto

Panu Rytkönen

Kiintopistelogiikoista

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Toukokuu 2022

TIIVISTELMÄ

Panu Rytkönen: Kiintopistelogiikoista
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2022

Tässä tutkielmassa käsitellään kiintopistelogiikoiden ja vaativuusteorian välisiä yhteyksiä. Kiintopistelogiikoilla tarkoitetaan ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan laajennuksia, ja ne määritellään tutkielman alkupuolella. Tutkielmassa keskeisessä roolissa ovat pienin, inflatorinen ja osittainen kiintopistelogiikka. Vaativuusteorian puolelta esitellään deterministiset Turingin koneet, joita käytetään arvioimaan laskennan vaativuutta. Mielenkiinnon kohteita ovat polynomisen tilan ja polynomisen ajan vaativuusluokat PSPACE ja PTIME. Tutkielman loppupuolella todistetaan, että osittainen kiintopistelogiikka karakterisoi polynomisen tilavaativuusluokan PSPACE. Todistuksessa hyödynnetään järjestettyjä malleja koodattuna tilavaativuusluokkaan kuuluvien Turingin koneiden syötteiksi. Tällöin voidaan osoittaa, että aina kun polynomisesti tilarjoitettu Turingin kone hyväksyy jonkin järjestettyjen mallien luokan, niin on olemassa osittaisen kiintopistelogiikan lause, joka määrittelee kyseisen luokan. Toiseen suuntaan todistetaan, että jos osittaisen kiintopistelogiikan lause määrittelee jonkin järjestettyjen mallien luokan, niin on olemassa polynomisesti tilarajoitettu Turingin kone, joka hyväksyy syötteenään täsmälleen kyseisen luokan mallit. Vastaavaan tapaan todistetaan, että inflatorinen kiintopistelogiikka karakterisoi polynomisen aikavaativuusluokan PTIME.

Avainsanat: kiintopistelogiikat, vaativuusteoria, järjestetyt mallit
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman aihe on malliteorian ja vaativuusteorian välinen yhteys. Malliteoria on matemaattisen logiikan osa-alue, joka tutkii erilaisia struktuureita ja niiden ominaisuuksia. Vaativuusteoria sen sijaan on teoreettisen tietojenkäsittelytieteen osa-alue, jossa tutkitaan ratkaistavien ongelmien laskennallisia vaativuuksia käyttämällä esimerkiksi niin kutsuttuja Turingin koneita. Kuvaileva vaativuusteoria pyrkii muodostamaan edellisten välille yhteyden antamalla loogisia kuvailuja eri vaativuusluokkien ongelmille.

Ensimmäiset kuvailevan vaativuusteorian tulokset ovat 1970-luvun alkupuolelta, kun Ronald Fagin [2] osoitti eksistentiaalisen toisen kertaluvun logiikan kuvailevan täsmälleen vaativuusluokan NPTIME ongelmat. Sen jälkeen esimerkiksi Immerman [4] ja Vardi [7] ovat osoittaneet, että järjestettyihin malleihin rajoituttaessa voidaan kiintopistelogiikoilla karakterisoida vaativuusluokka PTIME. Tässä tutkielmassa esitellään todistukset sille kuinka kiintopistelogiikoilla voidaan karakterisoida polynomisia vaativuusluokkia.

Tutkielman luvussa 2 käydään läpi tutkielmassa käytettäviä merkintöjä ja kerrataan ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa. Koska ensimmäisen kertaluvun logiikan ilmaisuvoima ei riitä tutkielmassa käsiteltäviin tuloksiin, niin luvussa 3 määritellään kiintopistelogiikoita. Esitellään ensin kiintopisteoperaattorit, joita voidaan sitten käytetään uusina kaavanmuodostussääntöinä laajentamaan ensimmäisen kertaluvun logiikkaa. Tutkielmassa määritellään pienin, inflatorinen ja osittainen kiintopistelogiikka.

Luvussa 4 annetaan ensiksi yksinkertainen määritelmä Turingin koneelle, jotta päästään käsiksi laskennan vaativuusteoriaan. Tutkielma keskittyy polynomisen tilan ja polynomisen ajan vaativuusluokkiin PSPACE ja PTIME. Luettavuuden parantamiseksi annetaan lisäksi moninauhainen muunnelma Turingin koneelle, jota tullaan jatkossa käyttämään.

Lopuksi luvussa 5 yhdistetään edellisten lukujen aiheet tutkimalla kiintopistelogiikoiden ja vaativuusluokkien välisiä suhteita kuvailevan vaativuusteorian kautta. Koska Turingin koneet käsittelevät vain merkkijonoja, niin ensiksi täytyy määritellä koodaus, jonka avulla järjestettyjä malleja voidaan käyttää Turingin koneiden syötteinä. Tämän jälkeen todistetaan, että jokainen polynomisesti tilarajoitettu Turingin kone on kuvailtavissa osittaisen kiintopistelogiikan lauseella, jonka järjestettyjen mallien luokan kone hyväksyy syötteenään. Lisäksi todistetaan toiseen suuntaan, että jokaiselle osittaisen kiintopistelogiikan lauseelle on olemassa polynomisesti tilarajoitettu Turingin kone, joka hyväksyy syötteenään kyseisen lauseen järjestettyjen mallien luokan. Täten saadaan osoitettua osittaisen kiintopistelogiikan karakterisoivan vaativusluokan PSPACE. Tämän jälkeen osoitetaan vastaavaan tapaan inflatorisen kiintopistelogiikan karakterisoivan vaativuusluokan PTIME.

2 Esitietoja

Tässä luvussa annetaan tarpeellisia merkintöjä, määritelmiä ja lauseita pääaiheen tarkasteluun. Erityisesti kerrataan ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa.

2.1 Merkintöjä

Olkoon X äärellinen epätyhjä joukko. Käytetään sen alkioiden määrälle merkintää $|X|$ ja potenssijoukoille merkintää $pow(X)$.

2.2 Ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa

Aakkosto τ on epätyhjä joukko, joka koostuu relaatiosymboleista $R_1, R_2, \ldots, R_i$, funktiosymboleista $f_1, f_2, \ldots, f_j$ ja vakiosymboleista $c_1, c_2, \ldots, c_k$, missä $i, j, k \in \mathbb{N}$. Jokaisella relaatiosymbolilla R_m, $m \in \{1, \ldots, i\}$, on paikkaluku $a_m \in \mathbb{Z}_+$, joka kertoo sen monikoiden alkioiden lukumäärän. Jokaisella funktiosymbolilla $f_n, n \in \{1, \ldots, j\}$ on paikkaluku $b_n \in \mathbb{Z}_+$, joka kertoo kuinka monta parametria se ottaa syötteenä.

Aakkoston τ mallia $\mathfrak{A}$ kutsutaan τ-malliksi, joka on monikko

$$(A, R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_i^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_j^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}}),$$

missä A on mallin epätyhjä perusjoukko, $R_m^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{a_m}$ on aakkoston τ relaatiosymbolille R_m, $m \in \{1, \ldots, i\}$, annettu tulkinta mallissa $\mathfrak{A}$. Vastaavasti jokaiselle funktio- ja vakiosymbolille annetaan tulkinta. Jos aakkosto τ ei sisällä yhtään funktiosymbolia, niin sekä aakkostoa että sen malleja sanotaan *relationaalisiksi*. Mallin $\mathfrak{A}$ perusjoukokkoa merkitaan yleensä sitä vastaavalla symbolilla A, mutta käytetään myös merkintää $|\mathfrak{A}|$ tarkoittamaan mallin perusjoukon alkioiden määrää. Jos $|\mathfrak{A}| \in \mathbb{Z}_+$, niin mallia $\mathfrak{A}$ sanotaan *äärelliseksi malliksi*.

Ensimmäisen kertaluvun logiikassa *FO* käytetään aakkoston τ lisäksi muuttujasymboleja $x, y, z, \ldots$ ja termejä $t_1, t_2, \ldots$. Termit määritellään seuraavasti:

- jokainen muuttujasymboli x on termi
- jokainen vakiosymboli c on termi
- jos f on k-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä, niin $f(t_1, \ldots, t_k)$ on termi.

Ensimmäisen kertaluvun kaava $\varphi \in FO[\tau]$ muodostetaan induktiolla termeistä ja kaavoista:

- jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $t_1 = t_2$ on kaava
- jos R on k-paikkainen relaatiosymboli ja $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä, niin $R(t_1, \ldots, t_k)$ on kaava
- jos θ on kaava, niin $\neg\theta$ on kaava
- jos θ ja ψ ovat kaavoja, niin $\theta \vee \psi$ on kaava
- jos θ on kaava ja x muuttuja, niin $\exists x\theta$ on kaava.

Kaavoja, jotka ovat muotoa $(t_1 = t_2)$ tai $R(t_1, \ldots, t_k)$, sanotaan *atomikaavoiksi*. Jos relaatiosymbolin paikkalukua ei ole tarpeen korostaa niin saatetaan merkitä $R(\bar{t})$, missä $\bar{t}$ on siis relaation paikkaluvun mukainen jono termejä. Lisäksi tekstissä saatetaan käyttää lyhennysmerkintöinä seuraavia kaavoja:

$$\begin{aligned}
\theta \wedge \psi &:= \neg(\neg\theta \vee \neg\psi), \\
\theta \to \psi &:= \neg\theta \vee (\theta \wedge \psi), \\
\theta \leftrightarrow \psi &:= (\theta \to \psi) \wedge (\psi \to \theta), \\
\forall x\psi &:= \neg\exists y(\neg\psi), \\
\exists\bar{x}\psi &:= \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k \psi, \text{ missä } k \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Kaavan tai termin vapaat muuttujasymbolit saadaan rekursiivisesti kaavan φ rakenteen suhteen kuvauksella $\mathit{free}(\varphi)$ seuraavasti:

- jos x on muuttujasymboli, niin $\mathit{free}(x) = \{ x \}$
- jos c on vakiosymboli niin $\mathit{free}(c) = \emptyset$
- jos f on funktio, jonka paikkaluku on k ja $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä niin
  $\mathit{free}(f(t_1, \ldots, t_k)) := \mathit{free}(t_1) \cup \mathit{free}(t_2) \cup \cdots \cup \mathit{free}(t_k)$
- jos R on relaatiosymboli, jonka paikkaluku on k ja $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä niin
  $\mathit{free}(R(t_1, \ldots, t_k)) := \mathit{free}(t_1) \cup \mathit{free}(t_2) \cup \cdots \cup \mathit{free}(t_k)$
- jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $\mathit{free}(t_1 = t_2) = \mathit{free}(t_1) \cup \mathit{free}(t_2)$
- $\mathit{free}(\neg\theta) = \mathit{free}(\theta)$
- $\mathit{free}(\theta \vee \psi) = \mathit{free}(\theta) \cup \mathit{free}(\psi)$
- $\mathit{free}(\exists x\theta) = \mathit{free}(\theta) \setminus \{ x \}$.

Olkoon $\mathfrak{A}$ τ-malli. Määritellään tulkintafunktio $\alpha : V \to A$, missä V on muuttujasymbolien joukko. Laajennetaan tulkintafunktio kattamaan vakiosymbolit ja rekursiivisesti termit seuraavasti. Jos c on vakiosymboli, niin $\alpha(c) = c^{\mathfrak{A}}$. Olkoon f funktiosymboli, k sen paikkaluku ja $t_1, \ldots, t_k$ termejä. Tällöin

$$\alpha(f(t_1, \ldots, t_k)) = f^{\mathfrak{A}}(\alpha(t_1^{\mathfrak{A}}), \ldots, \alpha(t_k^{\mathfrak{A}}).$$

Tarskin totuusrelaatiolla määritetään induktiivisesti kaavan totuusarvo mallissa $\mathfrak{A}$ tulkinnalla α. Jos kaava on totta, niin sitä merkitään notaatiolla $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$. Totuusrelaatio määritellään seuraavasti:

- jos $\varphi := (t_1 = t_2)$, niin $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ jos ja vain jos $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$
- jos $\varphi := R(t_1, \ldots, t_k)$, niin $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ jos ja vain jos $(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k)) \in R^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A} \models \neg\theta[\alpha]$ jos ja vain jos ei päde $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$
- $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha] \vee \psi[\alpha]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$ tai $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$
- jos $\varphi := \exists x\theta$, niin $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha, a/x]$ jollain $a \in A$.

Viimeisssä kohdassa merkintä $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha, a/x]$ tarkoittaa, että tulkintafunktiota α muutetaan muuttujasymbolin x osalta asettamalla sen tulkinnaksi a.

Jos kaavan φ vapaat muuttujat ovat joukossa $\{ x_1, \dots, x_n \}$, niin merkitään $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Tämä merkintä siis sallii, että x_i, missä $i \in \{ 1, \dots, n \}$, ei esiinny vapaana kaavassa φ. Muuttujasymbolien jonoa $\bar{x}$ voidaan käyttää lyhennysmerkintänä kaavassa $\varphi(\bar{x})$, kun vapaiden muuttujasymbolien määrä on ilmeinen tai ei merkitttävässä roolissa. Kaavaa, joka ei sisällä vapaita muuttujia, sanotaan lauseeksi.

Olkoon symboli $<$ kaksipaikkainen relaatio. Tällöin $\{ < \}$-malli $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ on *järjestetty*, jos kaikilla $a, b, c \in A$, pätee:

1. ei $a <^{\mathfrak{A}} a$
2. $a <^{\mathfrak{A}} b$ tai $b <^{\mathfrak{A}} a$ tai $a = b$
3. jos $a <^{\mathfrak{A}} b$ ja $b <^{\mathfrak{A}} c$, niin $a <^{\mathfrak{A}} c$.

Olkoon lisäksi S kaksipaikkainen relaatio, *min* ja *max* vakiosymbolit perusjoukon pienimmälle ja suurimmalle alkiolle. Tällöin äärellinen $\{ <, S, min, max \}$-malli $\mathfrak{A}$ on järjestetty, jos kohtien 1-3 lisäksi kaikilla $a, b \in A$ pätee

4. $(a, b) \in S^{\mathfrak{A}}$, jos ja vain jos ($a <^{\mathfrak{A}} b$ ja kaikilla c, (jos $a <^{\mathfrak{A}} c$, niin $b <^{\mathfrak{A}} c$ tai $b = c$)), jolloin relaatiota S sanotaan seuraajarelaatioksi
5. $min^{\mathfrak{A}} <^{\mathfrak{A}} a$ tai $a = min^{\mathfrak{A}}$
6. $a <^{\mathfrak{A}} max^{\mathfrak{A}}$ tai $a = max^{\mathfrak{A}}$.

Olkoon vielä τ_0 aakkosto siten, että $\{ < \} \subseteq \tau_0 \subseteq \{ <, S, min, max \}$ ja σ aakkosto siten, että $\tau_0 \subseteq \sigma$. Nyt äärellisiä σ-malleja sanotaan järjestetyiksi, jos ne ovat järjestettyjä rajoituttaessa aakkoston τ_0 symboleihin mallin perusjoukossa. Lisäksi merkintää $a \leq b \leq c$ voidaan käyttää tarkoittamaan, että b on järjestyksen $<$ suhteen suurempi tai yhtä suuri kuin a, ja samaan aikaan b on pienempi tai yhtä suuri kuin c, kun $a, b, c \in A$.

Olkoon τ relationaalinen aakkosto ja olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ τ-malleja. Mallien sanotaan olevan *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $h : A \to B$, jolla pätee

1. kaikilla vakiosymboleilla $c \in \tau$ pätee $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$
2. kaikilla k-paikkaisilla relaatioilla R ja kaikilla jonoilla $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ pätee

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}, \text{ jos ja vain jos } (h(a_1), \dots, h(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Tällöin bijektion h sanotaan säilyttävän vakio- ja relaatiosymboleiden tulkinnat mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$, ja isomorfismia merkitään tällöin $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Olkoon φ logiikan $FO[\tau]$ lause. Merkitään lauseen φ äärellisten mallien luokkaa $Mod(\varphi)$ ja järestettyjen mallien luokkaa $ordMod(\varphi)$. Luokan K sanotaan olevan suljettu isomorfismin suhteen, jos kaikilla aakkoston τ malleilla $\mathfrak{A}$ pätee, että jos $\mathfrak{A} \in K$ ja $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{B} \in K$.

Jatkossa keskitytään äärellisiin relationaalisiin aakkostoihin, ellei toisin mainita.

3 Ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennukset

Ensimmäisen kertaluvun logiikkaa voidaan laajentaa niin sanotuilla kiintopisteoperaattoreilla, jotta saadaan ilmaisuvoimaltaan vahvempi logiikka. Esitellään ensin operaattorit ja annetaan sitten niihin liittyviä ominaisuuksia, joita voidaan hyödyntää myöhemmin.

3.1 Kiintopisteet

Määritelmä 3.1. Olkoon A äärellinen epätyhjä joukko. Kuvausta $F\colon pow(A) \to pow(A)$ sanotaan joukon A *operaattoriksi*. Olkoon sitten F tämänlainen operaattori. Jos $X \subseteq A$ ja $F(X) = X$, niin joukkoa X sanotaan operaattorin F *kiintopisteeksi*. Lisäksi jos $X \subseteq Y$ kaikilla operaattorin F kiintopisteillä Y, niin X on operaattorin F *pienin kiintopiste*, jolle käytetään merkintää $lfp(F)$.

Määritelmä 3.2. Olkoot A äärellinen epätyhjä joukko ja F sen operaattori. Tällöin

a) Jos $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$ kaikilla $X, Y \subseteq A$, niin operaattorin F sanotaan olevan *monotoninen*.

b) Jos $X \subseteq F(X)$ kaikilla $X \subseteq A$, niin operaattorin F sanotaan olevan *inflatorinen*.

Esimerkki 3.3. Olkoon $A = \{0, 1\}$. Tutkitaan eri operaattorien $F : pow(A) \to pow(A)$ kiintopisteitä joukossa A.

a) Jos $F(X) = \emptyset$ kaikilla $X \subseteq A$, niin F on monotoninen, mutta ei inflatorinen. Monotonisuus saadaan helposti, koska millä tahansa $X, Y \subseteq A$ pätee $F(X) = \emptyset = F(Y)$. Täten aina kun $X \subseteq Y$, niin selvästi $F(X) \subseteq F(Y)$. Toisaalta esimerkiksi $A \not\subseteq F(A) = \emptyset$, joten operaattori F ei ole inflatorinen. Operaattorilla F on vain yksi kiintopiste $\emptyset$, sillä kaikki joukot kuvautuvat tyhjälle joukolle. Tästä myös seuraa, että $lfp(F) = \emptyset$.

b) Jos
$$F(X) = \begin{cases} A & \text{kun } X = \emptyset \text{ tai } X = A \\ X & \text{muutoin} \end{cases}$$
niin F on inflatorinen, mutta ei monotoninen. Inflatorisuus seuraa suoraan siitä, miten F on määritelty. Olkoot $X = \emptyset$ ja $Y = \{0\}$. Nyt $X \subseteq Y$, mutta $F(X) = \{0, 1\} \not\subseteq \{0\} = F(Y)$, joten F ei ole monotoninen. Operaattorin F määritelmästä nähdään, että sen kiintopisteet ovat $\{0\}$, $\{1\}$ ja $\{0, 1\}$. Nyt huomataan, että $\{0\} \not\subseteq \{1\}$, $\{1\} \not\subseteq \{0\}$ ja $\{0, 1\} \not\subseteq \{1\}$, joten pienintä kiintopistettä ei ole olemassa.

Lause 3.4 (Tarski-Knaster). *Jos $F : pow(A) \to pow(A)$ on monotoninen operaattori, niin sillä on olemassa pienin kiintopiste.*

*Todistus (*vrt. [6, s. 191]). Olkoot F joukon A monotoninen operaattori, joukko $W = \{X \mid X \subseteq A, F(X) \subseteq X\}$ ja $Y = \cap W$. Koska A on epätyhjä ja F on sen operaattori niin vähintäänkin $F(A) \subseteq A$, jolloin $A \in W$. Siis $W \neq \emptyset$. Osoitetaan ensin, että Y on operaattorin F kiintopiste. Joukon Y määrittelystä on selvää, että Y on joukon A osajoukkojen leikkauksena myöskin joukon A osajoukko.

Olkoon $X \in W$. Nyt koska $Y \subseteq X$, niin monotonisuuden nojalla $F(Y) \subseteq F(X) \subseteq X$. Siis $F(Y) \subseteq \cap W = Y$. Edelleen jos $F(Y) \subseteq Y$, niin monotonisuudesta seuraa, että $F(F(Y)) \subseteq F(Y)$, jolloin $F(Y) \in W$. Täten $Y = \cap W \subseteq F(Y)$, joten on osoitettu, että $Y = F(Y)$.

Koska $Y \subseteq X$ aina, kun $F(X) \subseteq X$, niin erityisesti Y sisältyy operaattorin F kiintopisteisiin. Siis $lfp(F) = Y$. □

Määritelmä 3.5. Olkoon A äärellinen epätyhjä joukko ja F sen operaattori. Tällöin F indusoi jonon

$$\emptyset, F(\emptyset), F(F(\emptyset)), \ldots \tag{3.1}$$

Merkitään $F_0 = \emptyset$ ja $F_{n+1} = F(F_n)$, missä $n \geq 0$. Jos $F_n \subseteq F_{n+1}$ kaikilla $n \geq 0$ niin operaattoria F sanotaan *induktiiviseksi*. Jos on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, jolla $F(F_n) = F_n$ kaikilla $n \geq n_0$, niin merkitään tätä kiintopistettä $F_{n_0} := F_\infty$.

Esimerkki 3.6. Olkoon $A = \{ 0, 1 \}$. Joukolle A on olemassa operaattori, joka on induktiivinen, mutta ei inflatorinen eikä monotoninen.

Todistus. Olkoon F joukon A operaattori seuraavasti

$$F(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{kun } X = \emptyset \text{ tai } X = A \\ X & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Operaattori F on induktiivinen, koska jono $\emptyset, F(\emptyset), \ldots$ stabiloituu heti ensimmäisellä askeleella. Siis $F_\infty = F_0$. Operaattori ei kuitenkaan ole monotoninen, sillä esimerkiksi $\{ 0 \} \subseteq \{ 0, 1 \}$, mutta $F(\{ 0 \}) = \{ 0 \} \not\subseteq \emptyset = F(\{ 0, 1 \})$. Operaattori F ei myöskään ole inflatorinen sillä $\{ 0, 1 \} \not\subseteq F(\{ 0, 1 \}) = \emptyset$. Kiintopisteet operaattorille F ovat $\emptyset$, $\{ 0 \}$ ja $\{ 1 \}$, joita tarkastelemalla huomataan, että pienin kiintopiste on $\emptyset$. □

Lause 3.7. *Jos operaattori F on monotoninen, niin F on induktiivinen.*

*Todistus (*vrt. [1, s. 167]). Todistetaan induktiolla luvun n suhteen, että $F_n \subseteq F_{n+1}$. Olkoon F monotoninen operaattori.

Olkoon perusaskel $n = 0$. Nyt $F_0 = \emptyset$ ja $F(F_0) = F_1$. Selvästi $\emptyset \subseteq F_1$.

Induktioaskeleessa oletetaan, että väite pätee, kun $n = m \in \mathbb{N}$. Nyt oletuksen mukaan $F_m \subseteq F_{m+1}$, joten monotonisuuden nojalla $F(F_m)) \subseteq F(F_{m+1}) = F_{m+2}$. Siis $F_{m+1} \subseteq F_{m+2}$. □

Lause 3.8. *Jos operaattori F on induktiivinen, niin F_∞ on olemassa ja $F_\infty = F_{|A|}$.*

*Todistus (*vrt. [1, s. 166]). Olkoon F induktiivinen operaattori. Tällöin $F_n \subseteq F_{n+1}$, kaikilla $n \geq 0$. Nyt jokaisella jonon askeleella joukko kasvaa vähintään yhdellä alkiolla tai se stabiloituu eli saavuttaa kiintopisteen. Jälkimmäinen tapahtuu selvästi viimeistään joukolle $F_{|A|}$, koska joko $F_{|A|} = F_{|A|-1}$, eli kiintopiste on saavutettu jo aiemmin, tai $A \setminus F_{|A|} = \emptyset$ eli joukkoa $F_{|A|}$ ei ole mahdollista laajentaa joukon A alkiolla. Siis $F(F_{|A|}) = F_{|A|}$. □

Lause 3.9. *Jos operaattori F on monotoninen, niin $lfp(F) = F_\infty$.*

*Todistus (*vrt. [1, s. 167]). Olkoon F monotoninen operaattori. Lauseen 3.4 nojalla operaattorilla F on olemassa pienin kiintopiste $lfp(F)$ ja lauseiden 3.7 ja 3.8 nojalla operaattorilla F on olemassa kiintopiste $F_\infty = F_{|A|}$. Täten pienimmän kiintopisteen määritelmästä seuraa, että $lfp(F) \subseteq F_\infty$. Lisäksi koska $F_0 = \emptyset \subseteq lfp(F)$ ja F on monotoninen, niin $F(F_0) = F_1 \subseteq F(lfp(F)) = lfp(F)$. Induktiolla tästä saadaan, että millä tahansa $n \in \mathbb{N}$, ja erityisesti kun $n = |A|$, niin $F(F_n) = F_n \subseteq F(lfp(F)) = lfp(F)$. Siis $F_\infty \subseteq lfp(F)$. □

Lause 3.10. *Jos F_∞ on olemassa, niin $F_\infty = F_{2^{|A|}-1}$.*

*Todistus (*vrt. [1, s. 166]). Olkoon F joukon A operaattori. Jos operaattorilla F on jonon (3.1) mukaisesti kiintopiste, niin se löytyy viimeistään $2^{|A|}$ askeleella, sillä $|pow(A)| = 2^{|A|}$. □

Määritelmä 3.11. Olkoon A äärellinen epätyhjä joukko ja F sen operaattori. Määritellään *osittainen kiintopiste*

$$pfp(F) = \begin{cases} F_n & \text{jos } F_n = F_{n+1} \text{ jollain } n < 2^{|A|} \\ \emptyset & \text{muuten.} \end{cases}$$

3.2 Kiintopistelogiikat

Seuraavaksi voidaan tuoda kiintopisteoperaattorit ensimmäisen kertaluvun logiikan yhteyteen. Näiden operaattoreiden avulla voidaan muodostaa uusia kaavoja määrittelemään rekursiivisia ominaisuuksia. Eri kiintopisteitä käyttämällä voidaan määritellä kolme kiintopistelogiikkaa. Kiinnitetään jatkoa varten relationaalinen aakkosto τ.

Määritelmä 3.12. Olkoon R k-paikkainen relaatiosymboli, joka ei kuulu aakkostoon τ ja $\varphi(R, x_1, \ldots, x_k, S_1, \ldots, S_m, y_1, \ldots, y_n)$ aakkoston $\{\tau \cup R \cup S_1 \cup \cdots \cup S_m\}$ kaava. Relaatiosymboleja $R, S_1, \ldots, S_m$ sanotaan toisen kertaluvun muuttujiksi. Olkoot $\bar{b}$ tulkinta ensimmäisen kertaluvun muuttujille $y_1, \ldots, y_n$ ja $\bar{P} := (P_1, \ldots, P_m)$ tulkinta toisen kertaluvun muuttujille $S_1, \ldots, S_m$. Nyt kaava φ indusoi jokaiselle τ-mallille $\mathfrak{A}$ ja sen tulkinnoille $\bar{b}$ ja $\bar{S}$, operaattorin $F^{\varphi} : pow(A) \rightarrow pow(A)$

$$F^{\varphi}(U) := \{ (a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[U, a_1, \ldots a_k, \bar{P}, \bar{b}] \}, \tag{3.2}$$

missä notaatio $\varphi[U, a_1, \ldots a_k, \bar{P}, \bar{b}]$ tarkoittaa, että muuttujasymbolille R annetaan kaavassa φ tulkinta U, ja vastaavasti joukon $\{ x_1, \ldots, x_k \}$ muuttujasymboleille annetaan tulkinnat jonosta $(a_1, \ldots a_k)$.

Annetaan sitten määritelmät kahdelle kiintopistelogiikalle, joita tullaan tarvitsemaan myöhemmin vaativuusteorian puolella.

Määritelmä 3.13. Osittainen kiintopistelogiikka $FO(PFP)[\tau]$ on ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennus eli kaavat noudattavat samoja kaavanmuodostussääntöjä kuin kohdassa 2.2. Lisäksi jos R on k-paikkainen relaatiosymboli niin

$$[\mathsf{PFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})$$

on kaava, missä sekä muuttujajonon $\bar{x}$, että termijonon $\bar{t}$ pituudet ovat k. Kaavan vapaiden muuttujien määritelmä muodostetaan FO-kaavojen osalta kuten ennenkin. Lisätään PFP-kaavoille seuraava määritelmä:

$$free([\mathsf{PFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t}) = free(\bar{t}) \cup (free(\varphi) \setminus \{ R, \bar{x} \}).$$

Kun kaavan $[\mathsf{PFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})$ vapaat muuttujat ovat jonoissa $\bar{S}$ ja $\bar{y}$, ja $\bar{P}$ ja $\bar{b}$ ovat niiden tulkinnat vastaavasti, niin kaavan semantiikka määritellään seuraavasti:

$$\mathfrak{A} \models [\mathsf{PFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})[\bar{P}, \bar{b}] \text{ jos ja vain jos } (t_1[\bar{b}], \ldots, t_k[\bar{b}]) \in pfp(F^{\varphi}).$$

Määritelmä 3.14. Inflatorinen kiintopistelogiikka $FO(IFP)[\tau]$ määritellään myös ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennuksena. Jos R on k-paikkainen relaatiosymboli niin

$$[\mathsf{IFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})$$

on kaava, missä sekä muuttujajonon $\bar{x}$, että termijonon $\bar{t}$ pituudet ovat k. Kaavan vapaiden muuttujien määritelmä muodostetaan FO-kaavojen osalta kuten ennenkin. Lisätään IFP-kaavoille seuraava määritelmä:

$$free([\mathsf{IFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t}) = free(\bar{t}) \cup (free(\varphi) \setminus \{ R, \bar{x} \}).$$

Kun kaavan $[\mathsf{IFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})$ vapaat muuttujat ovat jonoissa $\bar{S}$ ja $\bar{y}$, ja $\bar{P}$ ja $\bar{b}$ ovat niiden tulkinnat vastaavasti, niin kaavan semantiikka määritellään seuraavasti:

$$\mathfrak{A} \models [\mathsf{IFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})[\bar{P}, \bar{b}] \text{ jos ja vain jos } (t_1[\bar{b}], \ldots, t_k[\bar{b}]) \in F_{\infty}^{(\varphi \vee R(\bar{x}))}.$$

Määritelmä 3.15. Olkoon $R \in \tau$ relaatiosymboli. Määritellään *FO*-kaavan positiivisuus ja negatiivisuus relaatiosymbolin R suhteen samanaikaisella rekursiolla. Olkoot $pos_R : FO \to \{0, 1\}$ ja $neg_R : FO \to \{0, 1\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&pos_R(x = y) := 0 && \text{ja } neg_R(x = y) := 0\\
&pos_R(S\bar{x}) := 0, \text{ kun } S \neq R && \text{ja } neg_R(S\bar{x}) := 0, \text{ kun } S \neq R\\
&pos_R(R\bar{x}) := 1 && \text{ja } neg_R(R\bar{x}) := 0\\
&pos_R(\neg\psi) := neg_R(\psi) && \text{ja } neg_R(\neg\psi) := pos_R(\psi)\\
&pos_R(\psi \vee \theta) := \max(pos_R(\psi), pos_R(\theta)) && \text{ja } neg_R(\psi \vee \theta) := \max(neg_R(\psi), neg_R(\theta))\\
&pos_R(\exists x\psi) := pos_R(\psi) && \text{ja } neg_R(\exists x\psi) := neg_R(\psi).
\end{aligned}$$

Jos $neg_R(\varphi) = 0$, niin relaatiosymboli R ei esiinny kaavassa φ parittoman määrän negaatioiden vaikutuksien alaisena, jolloin kaavan φ sanotaan olevan *positiivinen relaatiosymbolin R suhteen*. Vastaavasti jos $pos_R(\varphi) = 0$, niin kaavan sanotaan olevan *negatiivinen relaatiosymbolin R suhteen*.

Kaavan positiivuutta hyödyntäen voidaan määritellä vielä kolmas kiintopistelogiikka monotoniselle operaattorille. Oletus kaavan φ positiviisuudelle on olennainen pienimmän kiintopisteen olemassaololle, joten se tarvitsee todistaa, mutta annetaan ensin määritelmä.

Määritelmä 3.16. Pienin kiintopistelogiikka tai pienimmän kiintopisteen logiikka $FO(LFP)[\tau]$ on ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennus eli kaavat noudattavat samoja sääntöjä kuin kohdassa 2.2. Lisäksi jos R on k-paikkainen relaatiosymboli ja kaava $\varphi(R, \bar{x})$ on positiivinen relaatiosymbolin R suhteen, niin

$$[\mathsf{LFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})$$

on kaava, missä sekä muuttujajonon $\bar{x}$, että termijonon $\bar{t}$ pituudet ovat k. Kaavan vapaiden muuttujien määritelmä muodostetaan *FO*-kaavojen osalta kuten ennenkin. Lisätään LFP-kaavoille seuraava määritelmä:

$$free([\mathsf{LFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})) = free(\bar{t}) \cup (free(\varphi) \setminus \{R, \bar{x}\}).$$

Kun kaavan $[\mathsf{LFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})$ vapaat muuttujat ovat jonoissa $\bar{S}$ ja $\bar{y}$, ja $\bar{P}$ ja $\bar{b}$ ovat niiden tulkinnat vastaavasti, niin kaavan semantiikka määritellään seuraavasti:

$$\mathfrak{A} \models [\mathsf{LFP}_{R,\bar{x}}\varphi(R, \bar{x})](\bar{t})[\bar{P}, \bar{b}] \text{ jos ja vain jos } (t_1[\bar{b}], \ldots, t_k[\bar{b}] \in lfp(F^{\varphi}).$$

LFP-kaavan positiviisuus määritellään induktiivisesti kuten kohdassa 3.15, kun määritelmään lisätään:

$$pos_R([\mathsf{LFP}_{S,\bar{y}}\psi(S, \bar{y})]) := pos_R(\psi) \text{ ja } neg_R([\mathsf{LFP}_{S,\bar{y}}\psi(S, \bar{y})]) := neg_R(\psi).$$

Lause 3.17. *Jos $\varphi(R, \bar{x}) \in FO(LFP)$ on positiivinen relaation R suhteen, niin operaattori F^{φ} on monotoninen.*

*Todistus (*vrt. [6, s. 182]). Olkoon A äärellinen epätyhjä joukko ja F joukon A operaattori. Jos $X \subseteq Y \Rightarrow F(Y) \subseteq F(X)$ kaikilla $X, Y \subseteq A^k$, niin operaattorin F sanotaan olevan *monotonisesti laskeva*. Käytetään todistuksessa apuna seuraavaa väitettä: Jos $\varphi(R, \bar{x})$ on negatiivinen relaation R suhteen, niin operaattori F^{φ} on monotonisesti laskeva. Todistetaan väitteet samanaikaisella induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen. Olkoon $\mathfrak{A}$ $\{\tau \cup R\}$-malli, k relaation R paikkaluku ja $X \subseteq Y \subseteq A^k$. Käytetään taas merkintää $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$.

Käydään perusaskeleessa läpi atomikaavat. Olkoon ensin $\varphi := x_i = x_j$. Nyt R ei esiinny kaavassa φ, joten $neg_R(\varphi) = 0$ ja $pos_R(\varphi) = 0$ eli kaava on sekä positiivinen että negatiivinen relaatiosymbolin R suhteen. Mutta tällöinhän

$$F^\varphi(X) = \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[X, \bar{a}] \,\} = \{\, \bar{a} \mid a_i = a_j \,\} = \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[Y, \bar{a}] \,\} = F^\varphi(Y).$$

Siis F^φ on sekä monotoninen, että monotonisesti laskeva. Olkoon sitten $\varphi := S\bar{x}$. Jos $S \neq R$ niin todistus menee kuten edellä. Oletetaan siis, että $S = R$. Nyt $neg_R(\varphi) = 0$ ja $pos_R(\varphi) = 1$, joten kaava on positiivinen ja

$$F^\varphi(X) = \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[X, \bar{a}] \,\} = \{\, \bar{a} \mid \bar{a} \in X \,\} \subseteq \{\, \bar{a} \mid \bar{a} \in Y \,\} = \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[Y, \bar{a}] \,\} = F^\varphi(Y).$$

Siis F^φ on monotoninen. Täten väitteet pätevät atomikaavoille.

Olkoot induktioaskeleessa ψ ja θ kaavoja, joilla väitteet pätevät, ja todistetaan väitteet tapauksissa $\neg\psi$, $(\psi \vee \theta)$, $\exists x(\psi)$ ja $[\mathsf{LFP}_{S,\bar{y}}\psi(S, \bar{y})](\bar{t})$. Jos $F^\varphi(X) = \emptyset$ niin selvästi $F^\varphi(X) \subseteq F^\varphi(Y)$ kaikilla $Y \subseteq A$. Voidaan siis valita X siten, että $F^\varphi(X)$ sisältää ainakin yhden alkion.

Tapaus $\varphi := \neg\psi$. Kaava $\varphi(R, \bar{x})$ on positiivinen relaatiosymbolin R suhteen, jos ja vain jos ψ on negatiivinen relaatiosymbolin R suhteen. Olkoot $\bar{b} \in F^\varphi(X)$ jono muuttujasymboleja. Nyt $\mathfrak{A} \models \neg\psi[X, \bar{b}]$ eli $\mathfrak{A} \not\models \psi[X, \bar{b}]$. Koska ψ on negatiivinen relaatiosymbolin R suhteen niin induktio-oletuksen mukaan ψ on monotonisesti laskeva, jolloin $\mathfrak{A} \not\models \psi[Y, \bar{b}]$. Siis $\bar{b} \in F^\varphi(Y)$, joten $F^\varphi(X) \subseteq F^\varphi(Y)$. Negatiivinen tapaus todistetaan vastaavasti.

Tapaus $\varphi := \psi \vee \theta$. Kaava $\varphi(R, \bar{x})$ on negatiivinen relaatiosymbolin R suhteen, jos ja vain jos $\max(pos_R(\psi), pos_R(\theta) = 0$ eli kaavat ψ ja θ ovat myös negatiivisia relaatiosymbolin R suhteen. Tällöin

$$\begin{aligned}
F^\varphi(Y) &= \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[Y, \bar{a}] \,\} \\
&= \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \psi[Y, \bar{a}] \text{ tai } \mathfrak{A} \models \theta[Y, \bar{a}] \,\} \\
&= F_\psi(Y) \cup F_\theta(Y) && I.O. \\
&\subseteq F_\psi(X) \cup F_\theta(X) \\
&= F^\varphi(X).
\end{aligned}$$

Positiivinen tapaus todistetaan vastaavasti.

Tapaus $\varphi := \exists x\psi$. Kaava $\varphi(R, \bar{x})$ on positiivinen relaatiosymbolin R suhteen, jos ja vain jos ψ on positiivinen relaatiosymbolin R suhteen. Tällöin

$$\begin{aligned}
F^\varphi(X) &= \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \exists x\psi[X, \bar{a}] \,\} \\
&= \{\, \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \psi[X, \bar{a}, a], \text{ jollain } a \in A \,\}.
\end{aligned}$$

Jos $\bar{b} \in F^\varphi(X)$, niin $\mathfrak{A} \models \psi[X, \bar{b}, a]$, jollain $a \in A$. Koska ψ on positiivinen relaatiosymbolin R suhteen, niin induktio-oletuksesta saadaan, että $\mathfrak{A} \models \psi[Y, \bar{b}, a]$, joten $F^\varphi(X) \subseteq F^\varphi(Y)$. Negatiivinen tapaus todistetaan vastaavasti.

Tapaus $\varphi := [\mathsf{LFP}_{S,\bar{y}}\psi(S, \bar{y})](\bar{t})$ sivuutetaan. □

Esimerkki 3.18. Olkoot $E \in \tau$ ja $R \notin \tau$ relaatiosymboleja, joiden molempien paikkaluku on 2, ja $\varphi(R, x, y)$ kaava

$$E(x, y) \vee \exists z(E(x, z) \wedge R(z, y)).$$

Tällöin

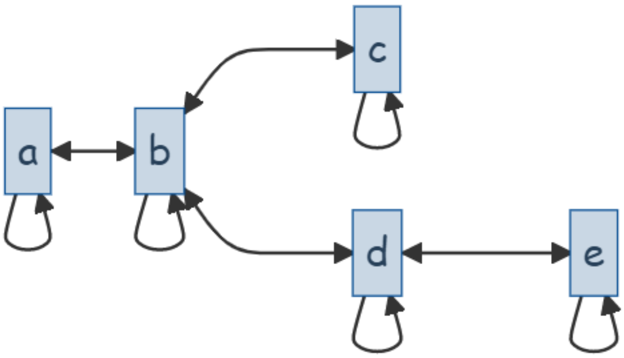
$$\begin{aligned} neg_R(\varphi) &= \max(neg_R(E(x,y)), neg_R(\exists z(E(x,z) \land R(z,y)))) \\ &= \max(0, neg_R(E(x,z) \land R(z,y))) \\ &= \max(0, \max(neg_R(E(x,z)), neg_R(R(z,y)))) \\ &= \max(0, \max(0,0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Koska kaava φ on positiivinen relaatiosymbolin R suhteen, niin voidaan muodostaa kaava $\psi(u,v) := [\mathsf{LFP}_{R,x,y}\varphi(R,x,y)](u,v)$ määrittelemään, että alkioiden u ja v välillä on äärellinen polku. Kaava ψ muodostaa relaatiosymbolin E suhteen niin kutsutun transitiivisen sulkeuman. Tämä on logiikassa FO määrittelemätön ominaisuus, ja sen avulla saadaan määriteltyä verkon yhtenäisyys yleisessä tapauksessa muodostamalla lause $\forall u \forall v \psi(u,v)$.

Olkoon $\mathfrak{A}$ äärellinen τ-malli ja $F^\varphi(X) := \{ (u,v) \in A^2 \mid \mathfrak{A} \models \varphi([X,u,v] \}$. Merkitään $F_0^\varphi := \emptyset$ ja $F_{i+1}^\varphi = F^\varphi(F_i^\varphi)$. Nyt F_i^φ, $i \in \mathbb{N}$, sisältää niiden joukon A alkioiden parit, joiden etäisyys toisistaan relaation E suhteen on vähemmän kuin n. Tällöin $F_\infty^\varphi := \bigcup_{n\geq 0} F_n^\varphi$ eli kaikilla $u,v \in A$, $(u,v) \in F_\infty^\varphi$ jos ja vain jos alkioiden u ja v välillä on äärellinen polku relaation E suhteen. Jos $F_\infty^\varphi = A \times A$, niin tällöin kaikkien joukon A alkioiden välillä on polku eli verkko on yhtenäinen. Esitetään tämä vielä konkreettisemmin esimerkin avulla.

Olkoon $A = \{ a,b,c,d,e \}$ solmujoukko, E relaatiosymboli särmille ja $\mathfrak{A} = (A, E^\mathfrak{A})$ verkko, missä $E^\mathfrak{A} = \{ (a,b),(b,c),(b,d),(d,e),(b,a),(c,b),(d,b),(e,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e) \}$

Kuva 3.1: Verkko



Tällöin

$$\begin{aligned} F_0 = F^\varphi(\emptyset) &= \{ (u,v) \mid u,v \in A, \mathfrak{A} \models \varphi[\emptyset,u,v] \} \\ &= \{ (u,v) \mid u,v \in A, \mathfrak{A} \models E(x,y) \lor \exists z(E(x,z) \land R(z,y))[\emptyset,u,v] \} \\ &= \{ (u,v) \mid \mathfrak{A} \models E(x,y)[u,v] \} \cup \{ (u,v) \mid \mathfrak{A} \models (\exists z(E(x,z) \land R(z,y)))[\emptyset,u,v] \} \\ &= E^\mathfrak{A} \cup \{ (u,v) \mid (u,z) \in E^\mathfrak{A} \text{ ja } (z,v) \in \emptyset, \text{ jollain } z \in A \} \\ &= E^\mathfrak{A}, \\ F_1 = F^\varphi(F_0) &= \{ (u,v) \mid u,v \in A, \mathfrak{A} \models E(x,y) \lor \exists z(E(x,z) \land R(z,y))[F_0,u,v] \} \\ &= E^\mathfrak{A} \cup \{ (u,v) \mid \mathfrak{A} \models (\exists z(E(x,z) \land R(z,y)))[F_0,u,v] \} \\ &= E^\mathfrak{A} \cup \{ (u,v) \mid (u,z) \in E^\mathfrak{A} \text{ ja } (z,v) \in F_0, \text{ jollain } z \in A \} \\ &= E^\mathfrak{A} \cup \{ (a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(b,e),(e,b),(c,d),(d,c) \}, \\ F_2 = F^\varphi(F_1) &= \{ (u,v) \mid u,v \in A, \mathfrak{A} \models E(x,y) \lor \exists z(E(x,z) \land R(z,y))[F_1,u,v] \} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E^{\mathfrak{A}} \cup \{ (u,v) \mid (u,z) \in E^{\mathfrak{A}} \text{ ja } (z,v) \in F_1, \text{jollain } z \in A \} \\
&= E^{\mathfrak{A}} \cup \{ (a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(b,e),(e,b),(c,d),(d,c),(a,e),(e,a),(c,e),(e,c) \}, \\
F_3 = F^{\varphi}(F_2) &= \{ (u,v) \mid u,v \in A, \mathfrak{A} \models E(x,y) \vee \exists z(E(x,z) \wedge R(z,y))[F_2,u,v] \} \\
&= F_2.
\end{aligned}
$$

Operaattorin F pienin kiintopiste $lfp(F^{\varphi}) = F_2$, mistä on nähtävissä, että $\mathfrak{A} \models \forall u \forall v \psi(u,v)$. Olkoon sitten $\mathfrak{A}' = (A, E^{\mathfrak{A}'})$, missä $E^{\mathfrak{A}'} = E^{\mathfrak{A}} \setminus \{ (d,e),(e,d) \}$. Tällöin vastaavasti muodostettu kiintopiste

$$
F_2' = E^{\mathfrak{A}'} \cup \{ (a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(c,d),(d,c) \}.
$$

Tästä voimme nähdä, ettei mistään alkiosta $x \in A \setminus \{ e \}$ ole polkua alkioon e. Tällöin esimerkiksi $\mathfrak{A}' \not\models \psi[a,e]$ ja täten $\mathfrak{A}' \not\models \forall u \forall v \psi(u,v)$.

Verkon yhtenäisyyden voisi toki ilmaista myös logiikan *FO* kaavoilla esimerkiksi yhdistelemällä disjunktiolla kaavoja $\theta_i(x,y)$, missä $i \in \mathbb{N}$ kertoisi kuinka monen askeleen pituisen polun päässä alkiot x ja y ovat toisistaan. Tämä kuitenkin johtaa siihen, että kaavat kasvavat huomattavan pitkiksi kun i kasvaa, ja yleinen tapaus vaatisi disjunktion yli äärettömän joukon $\mathbb{N}$, mikä ei ole määriteltävissä logiikassa *FO*.

Määritelmä 3.19. Olkoon K luokka τ-malleja, K' luokka järjestettyjä τ-malleja ja $\mathcal{L}$ logiikka. Luokka K on määriteltävissä logiikassa $\mathcal{L}$, jos on olemassa aakkoston τ lause $\psi \in \mathcal{L}$, jolla $K = Mod(\psi)$. Vastaavasti luokka K' on määriteltävissä logiikassa $\mathcal{L}$, jos on olemassa aakkoston τ lause $\theta \in \mathcal{L}$, jolla $K' = ordMod(\theta)$.

Määritelmä 3.20. Olkoon $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ logiikoita. Jos jokaiselle aakkostolle τ ja jokaiselle lauseelle $\varphi \in \mathcal{L}_1[\tau]$ on olemassa lause $\psi \in \mathcal{L}_2[\tau]$ siten, että $Mod(\varphi) = Mod(\psi)$, niin logiikka $\mathcal{L}_1$ on enintään yhtä ilmaisuvoimainen kuin logiikka $\mathcal{L}_2$ ja tätä merkitään $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$.

Määritelmä 3.21. Olkoon K luokka τ-malleja ja $m \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin *osaluokka* K_m sisältää ne luokan K mallit, joiden perusjoukon mahtavuus on vähintään m.

4 Johdatus Turingin koneisiin

Tässä luvussa annetaan lyhyt johdatus Turingin koneisiin, joita käytetään mallintamaan laskentaa. Annetaan ensin määritelmä koneelle, minkä jälkeen voidaan määritellä vaativuusluokat koneiden avulla.

4.1 Turingin koneen määritelmä

Kiinnitetään äärellinen epätyhjä joukko merkkejä eli *merkistö* Σ. Jos $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$, missä $k \in \mathbb{N}$, niin $a_1 a_2 \ldots a_k$ on *sana*, ja jos $k = 0$ niin kyseessä on tyhjä sana, jota merkitään symbolilla ϵ. Lisäksi jos s ja s' ovat sanoja niin myös ss' on sana. Merkitään kaikkien sanojen joukkoa Σ^* ja kaikkien epätyhjien sanojen joukkoa $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{ \epsilon \}$. Lisäksi mitä tahansa joukkoa $L \subseteq \Sigma^*$ sanotaan *kieleksi*.

Turingin kone M voidaan ajatella automaattisesti toimivana laitteena, joka lukee ja kirjoittaa vierekkäisistä soluista koostuvaa työnauhaa askel kerrallaan. Työnauha on vasemmalle päin äärellinen, oikealle ääretön ja jokainen solu sisältää joko merkistön Σ merkin tai se on tyhjä, mitä merkitään symbolilla $\square$. Asetetaan lisäksi työnauhan vasempaan reunaan jokin symboli $\alpha \notin \Sigma \cup \{ \square \}$ Koneella M on äärellinen joukko *tiloja*, Q, ja se on aina yhdessä niistä. Tilojen joukkoon kuuluu aina *alkutila* q_0, *hyväksyvät tilat* Q_a ja *hylkäävät tilat* Q_r, jotka kaikki ovat keskenään erilliset. Hyväksyvien ja hylkäävien tilajoukkojen yhdistettä sanotaan pysähtyvien tilojen joukoksi. Koneella on yksi *osoitin*, joka osoittaa yhteen soluun kerrallaan, mitä kuvataan lyhyesti sanomalla, että osoitin on kyseisessä solussa. Koneen osoittimen liikkeet ja operaatiot määrittelee *tilasiirtymäfunktio* δ, joka ottaa parametreinä koneen nykyisen tilan ja osoitetun solun symbolin, ja niiden perustella kertoo mihin tilaan kone siirtyy, minkä symbolin kone kirjoittaa nykyiseen solun ja siirtyykö koneen osoitin askeleen vasemmalle vai oikealle vai pysyykö se paikallaan.

Täsmällisemmin tilasiirtymäfunktio on osittainen kuvaus $\delta : Q \times \Delta \to Q \times \Delta \times \{ -1, 0, 1 \}$, missä $\Delta = \Sigma \cup \{ \square, \alpha \}$ on työnauhan merkistö ja joukon $\{ -1, 0, 1 \}$ alkiot määräävät koneen osoittimen seuraavan liikkeen järjestyksessä “askel vasemmalle”, “pysyy paikallaan” tai “askel oikealle”. Täten tilasiirtymäfunktiota δ ei siis välttämättä ole määritelty kaikille pareille $(q, a) \in Q \times \Delta$, jolloin merkitään $\delta(q, a) = \emptyset$. Koska jokaiselle parille on enintään yksi siirto, eli kolmikko $(q', a', i) \in Q \times \Delta \times \{ -1, 0, 1 \}$, niin konetta M sanotaan *deterministiseksi*. Lisäksi tilasiirtymäfunktio on rajoitettu vasemman reunan symbolin suhteen siten, että siitä vasemmalle ei voi siirtyä, merkkiä α ei voi korvata kuin itsellään, eikä sitä voi kirjoittaa muualle kuin vasempaan reunaan. Toisin sanoen

1. jos $\delta(q, a) = (q', \alpha, i)$, niin $a = \alpha$ ja $i \in \{ 0, 1 \}$, $q' \in Q$,
2. jos $\delta(q, \alpha) = (q', a', i)$, niin $a' = \alpha$ ja $i \in \{ 0, 1 \}$, $q' \in Q$.

Formaalisti Turingin kone on monikko $(Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, Q_a, Q_r)$, missä

- Q on äärellinen joukko tiloja,
- Σ on syötemerkistö,
- $\Delta = \Sigma \cup \{ \square, \alpha \}$ on nauhan merkistö,
- $\delta : Q \times \Delta \to Q \times \Delta \times \{ -1, 0, 1 \}$ on osittainen funktio, jota sanotaan tilasiirtymäfunktioksi,

- $q_0 \in Q$ on alkutila,
- $Q_a \subseteq Q$ on hyväksyvien tilojen joukko,
- $Q_r \subseteq Q$ on hylkäävien tilojen joukko.

Numeroidaan nauha vasemmalta alkaen $-1, 0, 1, \ldots$ *Konfiguraatio* määrittelee koneen tilan, nauhan sisällön ja koneen osoittimen sijainnin seuraavasti. Olkoot $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ koneen nauhan sisältö, missä $a_i \in \Delta$ on nauhan solussa i oleva merkki kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$ ja erityisesti $a_{-1} = \alpha$. Oletetaan, että koneen osoitin on solussa j, ja että on olemassa $n \geq j$ siten, että kaikilla $n' > n$ pätee $a_{n'} = \square$. Tällöin solun n jälkeen kaikki solut oikealle sisältävät tyhjän solun symboli, jolloin ne voidaan jättää konfiguraation merkinnästä pois, jotta konfiguraatio on aina äärellinen. Jos $q \in Q$ on koneen tila niin merkitään tätä konfiguraatiota $C = a_{-1}a_0a_1 \ldots a_{j-1}qa_ja_{j+1} \ldots a_{n-1}a_n$. Koneen laskennan seuraava askel tuottaa seuraavan konfiguraation tilasiirtymäfunktion δ mukaisesti, ja merkitään sitä $C \vdash_\delta C'$, missä *seuraajakonfiguraatio* C' määritellään seuraavasti

$$C' = \begin{cases} a_{-1}a_0 \ldots a_{j-2}q'a_{j-1}a'_ja_{j+1} \ldots a_n, \text{jos } \delta(q, a_j) = (q', a'_j, -1), \\ a_{-1}a_0 \ldots a_{j-2}a_{j-1}q'a'_ja_{j+1} \ldots a_n, \text{jos } \delta(q, a_j) = (q', a'_j, 0), \\ a_{-1}a_0 \ldots a_{j-2}a_{j-1}a'_jq'a_{j+1} \ldots a_n, \text{jos } \delta(q, a_j) = (q', a'_j, 1). \end{cases}$$

Koneen suoritus syötteellä $s = a_0 \ldots a_n$, missä $a_i \in \Sigma$ jokaisella $i \in \{0, \ldots, n\}$, alkaa *aloituskonfiguraatiolla* $C(s) = \alpha q_0 s$, missä siis α on vasemman reunan virtuaalinen symboli solussa -1, q_0 on koneen alkutila ja sana s on asetettu merkki kerrallaan nauhalla peräkkäisiin soluihin $0, \ldots, n$. Kone M pysähtyy syötteellä s, jos on olemassa jono $C_0, C_1, \ldots, C_m$, missä $m \in \mathbb{N}$, siten että $C_0 = C(s)$ ja $C_i \vdash_\delta C_{i+1}$, kaikilla $i < m$, ja koneen laskennan seuraava askel konfiguraatiolle C_m ei ole määritelty eli jos $C_m = sqas'$, missä $s, s' \in \Delta^*$, $q \in Q$ ja $a \in \Delta$, niin $\delta(q, a) = \emptyset$. Edelleen tila q määrittelee onko konfiguraatio *hyväksyvä* $q \in Q_a$, *hylkäävä* $q \in Q_r$ tai muutoin ei kumpaakaan. Kone M *hyväksyy* syötteen s, jos ja vain jos suoritus syötteellä s pysähtyy hyväksyvään konfiguraatioon, ja M *hylkää* syötteen s, jos ja vain jos suoritus syötteellä s on äärellinen ja pysähtyy hylkäävään konfiguraatioon. Kone M voi myös jatkaa suoritusta äärettömästi, jos se ei päädy koskaan pysähtyvään tilaan.

Kone M hyväksyy kielen $L \subseteq \Sigma^*$, jos kaikilla sanoilla $s \in \Sigma^*$

$$M \text{ hyväksyy syötteen } s\text{, jos ja vain jos } s \in L,$$

ja kone M ratkaisee kielen L, jos kone M hyväksyy kielen L ja

$$M \text{ hylkää syötteen } s\text{, jos ja vain jos } s \notin L.$$

4.2 Vaativuusluokat

Liitetään Turingin koneisiin seuraavaksi vaativuusluokat arvioimaan suorituksien tila- ja aikavaatimuksia. Jos $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on funktio ja Turingin kone M pysähtyy jokaisella syötteellä, jonka pituus on n, enintään $T(n)$ laskenta-askeleen jälkeen, niin koneen M aikavaatimuksen sanotaan olevan T. Erityisesti jos T on polynomifunktio ja on olemassa deterministinen Turingin kone M, joka hyväksyy kielen L aikavaatimuksella T, niin kielen L sanotaan kuuluvan vaativuusluokkaan PTIME.

Tilavaatimuksen suhteen sovitaan, että jos koneen osoitin on ollut missä tahansa suorituksen vaiheessa solussa c, niin kyseinen solu c on *vierailtu*. Olkoon sitten vastaavasti $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funktio ja M Turingin kone, joka pysähtyy jokaisella syötteellä, jonka pituus on n. Jos koneen

M osoitin on vieraillut jokaisen suorituksen aikana enintään $T(n)$ eri solussa, niin koneen M tilavaatimuksen sanotaan olevan T. Erityisesti jos T on polynomifunktio ja on olemassa deterministinen Turingin kone M, joka hyväksyy kielen L, ja jonka tilavaatimus on T, niin kielen L sanotaan kuuluvan vaativuusluokkaan PSPACE.

Oletetaan, että deterministinen Turingin kone M pysähtyy syötteellä s enintään n^k laskenta-askeleen jälkeen, missä n on syötteen s pituus ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin kone M on selvästi suorituksen aikana vieraillut enintään n^k solussa. Täten PTIME $\subseteq$ PSPACE.

4.3 Turingin koneen muunnelmia

Turingin koneet määriteltiin ottamaan syötteenä vain merkkijonoja, joten voidaksemme tarkastella predikaattilogiikan malleja Turingin koneiden avulla, on meidän ensiksi koodattava ne merkkijonoiksi. Käytetään tässä apuna Turingin koneen muunnelmaa, jossa on käytössä useita nauhoja, joista jokaiselle on omat osoittimet, jotka voivat liikkua muista lukupäistä riippumattomasti. Nauhoista osa voi olla työnauhoja, jotka on määritelty kuten ennenkin, ja osa syötenauhoja. Syötenauhojen syöteaakkoostoon lisätään uusi symboli ω, jolla merkitään syötteen loppumista eli nauhan oikeaa reunaa, minkä lisäksi syötenauhalla sallitaan vain lukuoperaatio, mikä voidaan ajatella vain tilasiirtymäfunktion lisärajoituksena, että osoitin kirjoittaa nauhalle aina saman merkin, minkä se lukee.

Toisaalta tilasiirtymäfunktion käsitettä tulee laajentaa kattamaan jokaisen nauhan laskenta-askeleet. Jos M on edellä kuvattu moninauhainen kone, jolla on k syötenauhaa ja m työnauhaa, $k, m \in \mathbb{N}$, niin

$$\delta : Q \times \underbrace{\Delta_\omega \times \cdots \times \Delta_\omega}_{k} \times \underbrace{\Delta \times \cdots \times \Delta}_{m} \to Q \times \underbrace{\Delta \times \cdots \times \Delta}_{m} \times \underbrace{\{-1,0,1\} \times \cdots \times \{-1,0,1\}}_{k+m}, \tag{4.1}$$

missä $\Delta_\omega = \Delta \cup \{\omega\}$. Tällöin koneen M konfiguraatio voidaan esittää yhtenä merkkijonona esimerkiksi, kun ensin valitaan jokin mielivaltainen järjestys nauhoille, lisätään tilasymboli jokaisen nauhan alkupäähän ylläpitämään tietoa osoittimen sijainnista, kuten yhden nauhan tapauksessakin ja lopuksi asetetaan nauhat peräkkäin järjestyksen mukaisesti. Tämän jälkeen laskenta etenee tilasiirtymäfunktion δ mukaisesti koneen M tilan ja osoittimien lukemien symbolien perusteella. Jos siirto on määritelty, niin seuraavaan konfiguraation kone M korvaa jokaisen osoittimen solun merkin uudella merkillä, siirtää osoittimia ja asettaa uudet tilat. Merkitään nauhan i. solua c_i ja j. osoitinta o_j.

Määritelmä 4.1. Olkoon M Turingin kone ja C sen konfiguraatio. Jos konfiguraation C mukaan kaikilla koneen M nauhoilla on käytössä enintään n^d solua, missä $n, d \in \mathbb{N}$, niin konfiguraatiota C sanotaan *n^d-tilarajoitetuksi konfiguraatioksi.*

Apulause 4.2. Olkoon $\mathcal{L}$ logiikka, jolla $FO \leq \mathcal{L}$, K luokka τ-malleja ja K_m määritelmän 3.21 mukainen luokan K osaluokka. Tällöin K on määriteltävissä logiikassa $\mathcal{L}$, jos ja vain jos K_m on määriteltävissä logiikassa $\mathcal{L}$. Olkoon sitten C vaativuusluokka. Tällöin vastaavasti K kuuluu vaativuusluokkaan C, jos ja vain jos K_m kuuluu vaativuusluokkaan C.

*Todistus (*ks. [1, ss. 124,132]). □

Edellisen apulauseen nojalla voidaan jatkossa rajoittua riittävän suuriin äärellisiin malleihin, kun todistetaan vaativuusluokkien karakterisointeja.

5 Kiintopistelogiikat ja vaativuusteoria

Tutkitaan seuraavaksi kiintopistelogiikoissa määriteltäviä ominaisuuksia ja niitä tunnistavien koneiden laskennallisia vaativuuksia. Tällöin logiikan mallit ja Turingin koneet muodostavat yhdessä loogisia kuvailuja vaativuusluokille. Tämä toteutetaan käyttämällä järjestettyjä malleja syötteenä edellisessä luvussa määritellyille Turingin koneille. Tällöin jonkin vaativusluokan kone hyväksyy syötteenään juuri ne mallit, jotka toteuttavat jonkin sellaisen koneen laskentaa kuvaavan kaavan. Kun tämä kaava pystytään määrittelemään jossain logiikassa, niin saadaan muodostettua yhteys vaativuusluokan ja logiikan välille. Todistuksien päälähteenä on käytetty Ebbinghausin ja Flumin teosta [1].

5.1 Järjestetyt mallit Turingin koneen syötteenä

Seuraavaksi kiinnitetään relationaalinen aakkosto $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$, missä $\tau_0 = \{ <, S, min, max \}$ ja $\tau_1 = \{ R_1, \dots R_k \}$, missä R_i on k_i-paikkainen jokaisella $i \in 1, \dots, k$, ja jokainen $k_i \in \mathbb{Z}_+$.

Määritelmä 5.1. Olkoon R jokin aakkoston τ relaatiosymboli, jonka paikkaluku on $l \in \mathbb{Z}_+$, ja $\mathfrak{A}$ järjestetty τ-malli, jonka perusjoukko on $\{ 0, \dots, n-1 \}$. Tällöin relaation $R^{\mathfrak{A}}$ alkiot voidaan asettaa *leksikograafiseen järjestykseen*, missä jokainen alkio $r < n^l$ on esitetty *n-järjestelmässä* eli

$$r = r_1 \cdot n^{l-1} + r_2 \cdot n^{l-2} + \cdots + r_{l-1} \cdot n^{l-(l-1)} + r_l, \text{ missä } 0 \leq r_i < n, \text{ kaikilla } i \in \{ 1, \dots, l \} .$$

Tällöin luvun r esitys on yksikäsitteinen (todistus sivuutetaan) ja merkitään $\overrightarrow{r_l^n} = (r_1, \dots, r_l)$. Toiseen suuntaan jono $(r_1, \dots r_l)$ kääntyy luvuksi merkinnällä $\overleftarrow{(r_1, \dots r_l)^n} = r$. Jos luku n on kontekstista selvä, niin se voidaan jättää merkitsemättä. Lisäksi jonon lyhennysmerkintää voidaan hyödyntää esimerkiksi seuraavalla tavalla $\overleftarrow{(r_1, \dots r_l)^n} = \overleftarrow{\bar{r}}$.

Esimerkki 5.2. Olkoon $A = \{ 0, 1 \}$ ja $\tau = \{ B \}$, missä B on l-paikkainen relaatio. Relaation B alkiot n-järjestelmässä vastaavat tällöin luonnolisten lukujen binäärisiä esityksiä.

Apulause 5.3. Olkoon $\mathfrak{A}$ τ-malli, jonka perusjoukko $A = \{ 0, \dots, n-1 \}$. Tällöin jokaiselle $d \in \mathbb{Z}_+$ on olemassa *FO*-kaava $\varphi_d(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \varphi_d[t_1, \dots, t_d, s_1, \dots, s_t]$, jos ja vain jos jono $(s_1, \dots, s_d)$ on jonon $(t_1, \dots, t_d)$ seuraaja leksikograafisessa järjestyksessä.

Todistus. Olkoon $d \in \mathbb{Z}_+$. Nyt jonon $(a_1, \dots a_d) \in A^d$ seuraaja leksikograafisessa järjestyksessä on se jono, joka vastaa luonnollista lukua $\overleftarrow{(a_1, \dots, a_d)} + 1$. Jonon $(a_1, \dots, a_d)$ vähiten merkitsevä numero on alkio a_d, joten jos $a_d <$ max niin seuraajarelaatiota S voidaan käyttää määrittämään kyseisen alkion seuraaja, jolloin jono $(a_1, \dots, a_{d-1}, b_d)$ muodostaa jonon $(a_1, \dots, a_d)$ seuraajan, missä $(a_d, b_d) \in S$. Jos $a_d =$ max, niin otetaan tarkasteltavaksi a_{d-1}. Jos $a_{d-1} <$ max, niin jono $(a_1, \dots, a_{d-2}, b_{d-1}, min)$ on jonon $(a_1, \dots, a_d)$ seuraaja, missä $(a_{d-1}, b_{d-1}) \in S$. Jos taas $a_{d-1} =$ max, niin otetaan tarkasteltavaksi a_{d-2}. Jatketaan tähän tapaan alkioiden tarkastelua oikealta vasemmalle, kunnes löydetään ensimmäinen alkio $a_i, i \in \{ 1, \dots, d \}$, jolle on olemassa seuraaja, jolloin jonon $(a_1, \dots, a_d)$ seuraaja on jono $(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, min, \dots, min)$, missä $(a_i, b_i) \in S$. Jos alkioita ei löydy niin $(a_1, \dots, a_d) = (\max, \dots, \max)$, jolloin jonon seuraaja ei ole määriteltävissä perusjoukon A jonolla, jonka pituus on d. Haluttu kaava on täten seuraava

(5.1)

$$\varphi_d(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d) := \bigvee_{1 \le z \le d} \Bigg(\bigwedge_{1 \le i < z} (x_i = y_i) \wedge S(x_z, y_z) \wedge \bigwedge_{z < i \le d} (x_i = max \wedge y_i = \min) \Bigg),$$

missä S on seuraajarelaatio. □

Esimerkki 5.4. Olkoon $A = \{ 0, 1 \}$, $d = 2$ ja $\mathfrak{A}$ τ-malli. Tällöin

$$\{ (\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{a}, \bar{b} \in A^d, \mathfrak{A} \models \varphi_d[\bar{a}, \bar{b}] \} = \{ (0,0,0,1), (0,1,1,0), (1,0,1,1) \} .$$

Turingin τ-malli-kone M on Turingin kone, jolla on $k + 1$ syötenauhaa ja $m \in \mathbb{Z}_+$ työnauhaa, missä merkistöön kuuluu vain yksi merkki "1" ja tyhjää solua merkitään merkillä "0". Koneen tilajoukko Q on jokin luonnolisten lukujen alkusegmentti sisältäen aloitustilan $q_0 = 0$ ja jotkin hyväksyvät tilat $Q_a \subseteq Q$ ja hylkäävät tilat $Q_r \subseteq Q$.

Kiinnitetään τ-malli $\mathfrak{A}$, jonka perusjoukko on $\{ 0, \dots, n-1 \}$, jollain $n \in \mathbb{N}$, jolla pätee $n > (k + m)$ ja $n > |Q|$. Lisäksi perusjoukko on järjestetty relaation $<^{\mathfrak{A}}$ suhteen. Syötenauhojen numeroinnin alkaessa luvusta 0, ensiksi koodataan mallin $\mathfrak{A}$ perusjoukko $n + 2$-soluiselle syötenauhalle, missä ensimmäinen ja viimeinen solu sisältävät reunamerkit α, ω vastaavasti, ja solut $0, \dots, n-1$ sisältävät merkin 1. Syötenauhalle $i \in \{ 1, \dots, k \}$ koodataan relaatio R_i, missä nauhan pituus on $n^{k_i} + 2$ sisältäen taas reunamerkit tavalliseen tapaan. Lisäksi itse relaatio on määritelmän 5.1 mukaisessa leksikograafisessa järjestyksessä, missä kun $j \in \{ 0, \dots, n^{k_i} - 1 \}$ niin solu c_j sisältää merkin 1, jos ja vain jos $\overrightarrow{j_{k_i}} \in R_i^{\mathfrak{A}}$.

Jokainen työnauha on aluksi tyhjä ja kaikki osoittimet ovat soluissa 0. Tällöin koneen M sanotaan ottavan *syötteenä mallin* $\mathfrak{A}$ ja laskenta etenee tavalliseen tapaan. Jos jokin Turingin koneen M suoritus syötteellä $\mathfrak{A}$ päättyy hyväksyvään tilaan, niin sanotaan että kone M hyväksyy syötteenään mallin $\mathfrak{A}$.

Oletetaan sitten, että M on n^d-tilarajoitettu, jollain $d \in \mathbb{Z}_+$, jolla pätee $d \ge r_i$ kaikilla $i \in \{ 1, \dots, k \}$. Olkoon C koneen M konfiguraatio, jonka mukaan koneen M nauhoilla on enintään n^d epätyhjää solua. Käytetään konfiguraation C koodaamisen apuna d-paikkaisia relaatioita $TILA^C$, $REUNA^C$, $OSOITIN^C$ ja $TYÖNAUHA^C$, missä

$$TILA^C = \{ (\bar{0}, q) \mid q \text{ on koneen tila konfiguraation } C \text{ mukaan } \}, \tag{5.2}$$

$$REUNA_j^C = \begin{cases} \{ (\bar{0}, 0) \}, \text{ kun osoitin } o_j \text{ on solussa, joka sisältää symbolin } \alpha, \\ \{ (\bar{0}, max) \}, \text{ kun osoitin } o_j \text{ on solussa, joka sisältää symbolin } \omega, \\ \emptyset, \text{ kun osoitin } o_j \text{ on nauhan missä tahansa muussa solussa,} \end{cases} \tag{5.3}$$

missä $j \in \{ 0, \dots, k + m \}$,

(5.4)

$$OSOITIN_{j'}^C = \begin{cases} \{ (\bar{0}, \overrightarrow{e_d}) \mid \text{osoitin } o_{j'} \text{ on solussa } c_e, \text{joka ei ole symboli } \omega \ \}, \text{ kun } 0 \le j' \le k \\ \{ (\bar{0}, \overrightarrow{e_d}) \mid \text{osoitin } o_{j'} \text{ on solussa } c_e \}, \text{ kun } k < j' \le k + m , \end{cases}$$

$$TYÖNAUHA_{j''}^C = \{ (\bar{0}, \overrightarrow{e_d}) \mid 0 \le e < n^d, \text{nauhan } j'' \text{ solu } c_e \text{ sisältää merkin } 1 \}, \tag{5.5}$$

missä $j'' \in \{ k + 1, \dots k + m \}$. Relaatio $TILA^C$ (5.2) määrittelee koneen M yksikäsitteisen tilan konfiguraatiossa C. Relaatio $REUNA^C$ (5.3) määrittelee jokaiselle koneen M nauhalle, osoittaako se reunasymboliin, ja jos osoittaa niin se määrittelee kumpaanko reunaan. Relaatio $OSOITIN^C$ (5.4) määrittelee jokaiselle koneen M nauhalle osoittimen sijainnin yksikäsitteisesti konfiguraation C mukaan. Relaatio $TYÖNAUHA^C$ (5.5) määrittelee jokaisen työnauhan sisällön konfiguraation C mukaan. Koska syötenauhojen sisältö ei muutu missään kohtaa koneen M suoritusta, niin niiden koodaaminen voidaan jättää pois konfiguraatiosta ja oletetaan vain, että ne ovat saatavilla joka vaiheessa. Tässä käytetty lyhennysmerkintä $\bar{0}$ tarkoittaa sopivan pitkää jonoa nollia siten, että alkio on todella d-paikkainen eli esimerkiksi relaatiossa $TILA^C$ jonon $\bar{0}$ pituus on $d-1$, ja relaatiossa $OSOITIN_{j'}^C$ jonon $\bar{0}$ pituus on $d - r_{j'}$, missä $r_{j'}$ on relaation $R_{j'}$ paikkaluku.

Konfiguraatio C voidaan esittää $(d+2)$-paikkaisena *konfiguraatiorelaationa*

$$\begin{aligned} KONF^C = \{\,(0,0)\,\} \times TILA^C \\ \cup \bigcup_{0\le j\le k+m} \{\,(1,j)\,\} \times REUNA_j^C \\ \cup \bigcup_{0\le j\le k+m} \{\,(2,j)\,\} \times OSOITIN_j^C \\ \cup \bigcup_{k<j\le k+m} \{\,(3,j)\,\} \times TYÖNAUHA_j^C, \end{aligned}$$

missä jokaisen alkion kaksi ensimmäistä lukua määrittelevät mistä relaatiosta on kyse.

Jos R on mielivaltainen $(d+2)$-paikkainen relaatio, niin voidaan tarkistaa onko koneella M olemassa n^d-tilarajoitettua konfiguraatiota C siten, että $KONF^C = R$, jolloin konfiguraatio C samaistetaan relaatioon R. Lisäksi tällöin sanotaan, että relaatio R on koneen M n^d-tilarajoitettu konfiguraatio. Jos C on hyväksyvä konfiguraatio, niin asetetaan konfiguraatio C itsensä seuraajakonfiguraatioksi.

Määritelmä 5.5. Olkoon K luokka järjestettyjä τ-malleja. Turingin kone M hyväksyy luokan K, jos kone M hyväksyy juuri ne τ-mallit, jotka kuuluvat luokkaan K.

Määritelmä 5.6. Olkoon K luokka järjestettyjä τ-malleja. Luokka K kuuluu vaativuusluokkaan PTIME, jos ja vain jos on olemassa deterministinen Turingin kone M ja polynomi p siten, että kone M hyväksyy luokan K aikavaatimuksella p. Vastaavasti luokka K kuuluu vaativuusluokkaan PSPACE, jos ja vain jos on olemassa deterministinen Turingin kone M' ja polynomi p' siten, että kone M' hyväksyy luokan K ja koneen tilavaatimus on p'.

Määritelmä 5.7. Logiikka L *karakterisoi* vaativuusluokan C, jos kaikilla aakkostoilla τ, joihin kuuluu relaatiosymboli $<$, ja kaikilla aakkoston τ järjestettyjen mallien luokilla $K \subseteq O(\tau)$ pätee

K kuuluu vaativuusluokkaan C, jos ja vain jos K on määriteltävissä logiikassa L.

5.2 PFP ja PSPACE

Tämän luvun tarkoitus on osoittaa, että osittainen kiintopistelogiikka karakterisoi vaativusluokan PSPACE. Todistusta varten annetaan ensin apulauseissa kaavoja, jotka muodostavat lopulta sopivan kiintopistekaavan. Tämä kiintopistekaava operoi relaatioilla, jotka samaistetaan Turingin koneen konfiguraatioihin, kun kyseinen kone hyväksyy järjestettyjä malleja syötteenään. Oletetaan jatkossa mallien noudattavan samaa rajoitusta riittävän suuresta perusjoukosta, kuin mitä edellisessä luvussa mallin koodauksen yhteydessä asetettiin.

Apulause 5.8. Jos M on n^d-tilarajoittunut deteministinen Turingin kone ja X on relaatio, jonka paikkaluku on $(d+2)$, niin on olemassa seuraavat kaavat

a) $\varphi_{alku}(x, y, x_1, \ldots, x_d)$, joka määrittelee koneen M alkukonfiguraation: jos $\mathfrak{A}$ on järjestetty τ-malli ja C_0 on koneen M alkukonfiguraatio, kun M ottaa syötteenä mallin $\mathfrak{A}$, niin

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{alku}[\bar{a}], \text{ jos ja vain jos } \bar{a} \in C_0.$$

b) $\varphi_{hyv}(X)$, joka määrittelee koneen M hyväksyvät konfiguraatiot: toisin sanoen

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{hyv}[C], \text{ jos ja vain jos } C \text{ on hyväksyvä konfiguraatio.}$$

*Todistus (*vrt. [1, s. 139]). Olkoon $\mathfrak{A}$ järjestetty $\tau-$malli.

a) Kun $\bar{x} = (x, y, x_1, \ldots, x_d)$, niin asetetaan

$$\begin{aligned}(5.6) \qquad \varphi_{alku}(\bar{x}) :=& (x = 0 \wedge y = 0 \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0)\\ &\vee (x = 2 \wedge 0 \leq y \leq k + m \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0).\end{aligned}$$

Tällöin joukko $\{ \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_{alku}[\bar{a}] \}$ määrittelee alkukonfiguraation. Alkukonfiguraation määritelmää täyttyy, kun joukkoon kuuluu ne jonot, joiden mukaan koneen M tila on alkutila ja kaikki osoittimet ovat nauhojen alkupäissä. Täten alkukonfiguraatiota varten ei tarvita aiempia konfiguraatioita, vaan se saadaan muodostettua mallin $\mathfrak{A}$ perusjoukon alkiojonoista, joiden pituus on $(d+2)$.

b) Asetetaan

$$(5.7) \qquad \varphi_{hyv}(X) := X(0, 0, \bar{0}, q), \text{ missä } q \in Q_a.$$

Nyt kaavan $\varphi_{hyv}(X)$ totuusarvo riippuu relaatiosymbolin X tulkinnasta. Oleellisesti kun X on n^d-tilarajoitettu konfiguraatio, niin se vastaa koneen M hyväksyvää konfiguraatiota, jos ja vain jos koneen tila kuuluu hyväksyvien tilojen joukkoon konfiguraation mukaan.

□

Annetaan seuraavaksi kaavat, jotka kuvaavat koneen laskenta-askelta yksittäisestä konfiguraatiosta seuraavaan. Laskenta-askelia kuvaavia kaavoja voidaan sitten hyödyntää kiintopistekaavan osana kuvaamaan koneen suoritusta.

Apulause 5.9. Jos M on n^d-tilarajoittunut deteministinen Turingin kone, X on relaatio, jonka paikkaluku on $(d+2)$ ja koneen M siirto

$$(5.8) \qquad (q, b_0, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_m) \mapsto_\delta (q', c'_1, \ldots, c'_m, h_0, \ldots, h_{k+m})$$

on määritelty, niin on olemassa seuraavat kaavat

a) $\varphi_{q\bar{b}\bar{c}}(X)$, joka määrittelee, että relaatio X vastaa koneen M konfiguraatiota, jossa tila, syötenauhoilta luetut arvot ja työnauhoilta luetut arvot vastaavat jonon $(q, \bar{b}, \bar{c})$ alkioita:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \varphi_{q\bar{b}\bar{c}}[C], \text{ jos ja vain jos konfiguraation } C \text{ mukaan koneen tila on } q,\\ &\text{syötenauhoilta luetut arvot ovat } \bar{b} \text{ ja työnauhoilta luetut arvot } \bar{c}.\end{aligned}$$

b) $\varphi_{\bar{h}}(X)$, jonka semantiikka on seuraava

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\bar{h}}[C], \text{ jos ja vain jos konfiguraation } C \text{ seuraajakonfiguraatio on } n^d\text{-tilarajoitettu.}$$

c) $\varphi_{q'\bar{c}'\bar{h}}(X, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{q'\bar{c}'\bar{h}}[C, \bar{a}], \text{ jos ja vain jos konfiguraatiolla } C \text{ on olemassa}$$
$$\text{jonon } (q', \bar{c}', \bar{h}) \text{ mukaisesti seuraajakonfiguraatio } C_s \text{ ja } \bar{a} \in C_s.$$

d) $\varphi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}(X, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \varphi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}[C, \bar{a}]$, jos ja vain jos konfiguraatiolla C on jonon $(q', \bar{c}', \bar{h})$ mukaan olemassa n^d-tilarajoitettu seuraajakonfiguraatio C_s ja $\bar{a} \in C_s$.

e) $\varphi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}(X, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \varphi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}[C, \bar{a}]$, jos ja vain jos konfiguraatio C vastaa jonoa $(q, \bar{b}, \bar{c})$, ja jos konfiguraatiolla C on jonon $(q', \bar{c}', \bar{h})$ mukaisesti olemassa n^d-tilarajoitettu seuraajakonfiguraatio C_s, niin $\bar{a} \in C_s$.

Todistus (vrt. [1, ss. 139-141]). Olkoon $\mathfrak{A}$ järjestetty τ-malli ja $\bar{x} = (x, y, x_1, \ldots, x_d)$ jono muuttujasymboleja. Rakennetaan todistus määrittelemällä ensin tarvittavat alikaavat käyttäen apuna uusia relaatioita, ja yhdistetään lopuksi kaava määrittelemään kohdan 5.8 laskenta-askelta. Olkoot relaatiot $LOPPU$, $SOLU$ ja $YKSI$ lyhennysmerkintöjä konfiguraation X kuvaamaalle tilanteelle seuraavasti

$$\begin{aligned} LOPPU(y, z) &:= X(1, y, \bar{0}, z) \text{ “nauhan } y \text{ osoitin lukee reunasymbolin } z\text{”} \\ SOLU(y, \bar{z}) &:= X(2, y, \bar{0}, \bar{z}) \text{ “nauhan } y \text{ osoitin on solussa } c_{\overleftarrow{\bar{z}}}\text{”} \\ YKSI(y, \bar{z}) &:= X(3, y, \bar{0}, \bar{z}) \text{ “työnauhan } y \text{ solu } c_{\overleftarrow{\bar{z}}} \text{ sisältää merkin 1”.} \end{aligned}$$

a) Asetetaan kaavaksi $\varphi_{q\bar{b}\bar{c}}(X)$ konjunktio seuraavista

$$X(0, 0, \bar{0}, q) \tag{5.9}$$

$$\bigwedge_{\substack{b_j=\alpha \\ 0\le j\le k}} LOPPU(j, 0) \tag{5.10}$$

$$\bigwedge_{\substack{b_j=\omega \\ 0\le j\le k}} LOPPU(j, max) \tag{5.11}$$

$$\bigwedge_{\substack{b_j=0 \\ 0\le j\le k}} \exists\bar{z}(SOLU(j, \bar{z}) \wedge \neg R_j(\bar{z})) \tag{5.12}$$

$$\bigwedge_{\substack{b_j=1 \\ 0\le j\le k}} \exists\bar{z}(SOLU(j, \bar{z}) \wedge R_j(\bar{z})) \tag{5.13}$$

$$\bigwedge_{\substack{c_j=\alpha \\ k<j\le k+m}} LOPPU(j, 0) \tag{5.14}$$

(5.15) $$\bigwedge_{\substack{c_j=0\\ k<j\leq k+m}} \exists\bar{z}(SOLU((k+j),\bar{z}) \wedge \neg YKSI((k+j),\bar{z}))$$

(5.16) $$\bigwedge_{\substack{c_j=1\\ k<j\leq k+m}} \exists\bar{z}(SOLU((k+j),\bar{z}) \wedge YKSI((k+j),\bar{z})).$$

Yllä kaava 5.9 tarkoittaa, että konfiguraation X mukaan koneen tila on q. Seuraavissa kohdissa on huomioitavaa, että tyhjä konjunktio on aina tosi. Kohta 5.10 tarkoittaa, että konfiguraatiossa X vasempaan reunasymboliin osoittaa juuri niiden syötenauhojen osoittimet, jotka jonossa $\bar{b}$ on määritelty lukevan reunasymboliin α, ja kohta 5.11 tarkoittaa vastaavasti oikeaan reunaan osoittavan juuri ne osoittimet, jotka lukevat reunasymbolin ω. Kohdassa 5.12 tarkistetaan, että osoittimet, jotka jonon $\bar{b}$ mukaisesti lukevat syötenauhalta merkin 0, ovat konfiguraation mukaan myös samaisen nauhan kyseisessä solussa, ja että tätä nauhaa vastaavaan syöterelaatioon ei kuulu solun järjestyslukua vastaava jono perusjoukon alkioita. Kohta 5.13 tarkistaa vastaavan, kun syötenauhalta luetaan merkki 1, mutta tällöin solua vastaava jono on kyseisen syöterelaation alkio.

Kohta 5.14 tarkoittaa, että osoittimet, jotka jonon $\bar{c}$ mukaan lukevat työnauhalta reunasymbolin α, ovat myös konfiguraation X mukaan vasemmassa reunassa. Kaava 5.15 tarkoittaa, että osoittimet, jotka jonon $\bar{c}$ mukaan lukevat työnauhalta merkin 0, ovat konfiguraation X mukaan kyseisessä solussa, ja konfiguraation X mukaan solun sisältämä merkki on myöskin 0. Vastaavasti 5.16 osoittaa saman, kun työnauhalta luettu merkki on 1.

b) Asetetaan

(5.17) $$\varphi_{\bar{h}}(X) := \bigwedge_{\substack{h_i=1\\ k<j\leq k+m}} \neg SOLU(j,\underbrace{max,\ldots,max}_{d}).$$

Tällöin kaava $\varphi_{\bar{h}}(X)$ määrittelee konfiguraatiolle X, että jonon $\bar{h}$ mukaan minkään työnauhan osoitin ei siirry soluun c_{n^d}. Erityisesti, jos X on n^d-tilarajoitettu, niin myös sen seuraajan on oltava n^d-tilarajoitettu.

c) Asetetaan kaavaksi $\varphi_{q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{x})$ disjunktio seuraavista

(5.18) $$x = 0 \wedge y = 0 \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = q'$$

(5.19) $$\bigvee_{k<j\leq k+m} x = 3 \wedge y = j \wedge \neg SOLU(j,x_1,\ldots,x_d) \wedge YKSI(j,x_1,\ldots,x_d)$$

(5.20) $$\bigvee_{\substack{c_{j'}=1\\ k<j\leq k+m}} x = 3 \wedge y = j \wedge SOLU(j,x_1,\ldots,x_d)$$

(5.21) $$\bigvee_{\substack{h_j=1\\ 0\leq j\leq k+m}} x = 2 \wedge y = j \wedge LOPPU(j,0) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$$

(5.22) $$\bigvee_{\substack{h_j=0\\ 0\leq j\leq k+m}} x = 1 \wedge y = j \wedge LOPPU(j,0) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$$

(5.23) $$\bigvee_{\substack{h_j=-1\\ 0\leq j\leq k+m}} x = 2 \wedge y = j \wedge SOLU(j,\bar{0}) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$$

$$\text{(5.24)} \qquad \bigvee_{\substack{h_j=-1\\0\le j\le k}} \Big(x = 2 \wedge y = j \wedge LOPPU(j,max) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_{d-r_j} = 0 \wedge x_{d-r_j+1} = \max \wedge \cdots \wedge x_d = max \Big)$$

$$\text{(5.25)} \qquad \bigvee_{\substack{h_j=0\\0\le j\le k}} \Big(x = 1 \wedge y = j \wedge LOPPU(j,max) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_{d-1} = 0 \wedge = 0 \wedge x_d = max \Big)$$

$$\text{(5.26)} \qquad \bigvee_{\substack{h_j=1\\0\le j\le k}} \Big(x = 1 \wedge y = j \wedge SOLU(j,\overbrace{0,\dots,0}^{d-r_j},\overbrace{max,\dots,max}^{r_j}) \wedge x_0 = 0 \wedge \cdots \wedge x_{d-1} = 0 \wedge x_d = max \Big)$$

$$\text{(5.27)} \qquad \bigvee_{0\le j\le k+m} \Big(x = 2 \wedge y = j \wedge \exists u_1,\dots,\exists u_d(\overleftarrow{x_1 \dots x_d} = (\overleftarrow{u_1 \dots u_d} + h_j) \wedge SOLU(j,u_1,\dots,u_d)) \Big).$$

Yllä kaava 5.18 määrittelee koneen M uuden tilan olevan q'. Kaava 5.19 määrittelee jokaiselle työnauhalle, että kaikkissa nauhan soluissa, joihin osoitin ei osoita kyseisen solun arvo ei muutu. Toisaalta, jos jonon $\bar{c}'$ mukaan työnauhalle kirjoitetaan merkki 1, niin kaava 5.20 määrittelee, että seuraajakonfiguraatiossa kyseisessä solussa on täten merkki 1. Kaavat 5.21 ja 5.22 määrittelevät tapaukset, joissa osoitin siirtyy nauhalla askeleen oikealla tai pysyy paikallaan vastaavasti, kun konfiguraation X mukaan osoitin on vasemmassa reunassa. Lisäksi kohta 5.23 käsittelee tapauksen, jossa konfiguraation X mukaan osoitin on vasemmalta päin ensimmäisessä solussa, joka ei ole vasen reuna, ja siirtyy sitten askeleen vasemmalle seuraajakonfiguraatiossa.

Kaava 5.24 määrittelee ne tapaukset, joissa syötenauhan osoitin siirtyy askeleen vasemmalle, kun konfiguraation X mukaan osoitin oli oikeassa reunassa, kaava 5.25 määrittelee ne tapaukset, joissa osoitin pysyy paikallaan oikeassa reunassa, ja kaava 5.26 määrittelee tapaukset, joissa osoitin oli syötteen viimeisessä alkiossa ja siirtyy sitten askeleen oikealle seuraajakonfiguraatiossa. Lopuksi kaava 5.27 määrittelee kaikki ne muut osoittimen siirtoihin liittyvät tapaukset, joissa osoitin on konfiguraation X mukaan solussa, joka ei sisällä reunasymboleja, ja lisäksi seuraajakonfiguraation mukaan se on myös jossain solussa, joka ei sisällä reunasymboleja. Merkintä $\overleftarrow{x_1 \dots x_d} = (\overleftarrow{u_1 \dots u_d} + h_j)$ on lyhennys, joka määrittelee jonojen $\bar{x}$ ja $\bar{u}$ suhteen leksikograafisessa järjestyksessä käyttämällä aiemmin kohdassa 5.3 määriteltyä kaavaa φ_d sopivasti, kun $h_j \in \{ -1, 1 \}$, ja kun $h_j = 0$, niin $\bar{x} = \bar{u}$.

d) Edellisiä hyödyntämällä voidaan muodostaa konfiguraation X seuraajalle kaava

$$\varphi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{x}) := \varphi_{\bar{h}}(X) \wedge \varphi_{q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{x}).$$

e) Lopuksi yhdistetään todistuksen kohdat a-d konfiguraation X laskenta-askeleeksi seuraavasti

$$\varphi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{x}) := \varphi_{q\bar{b}\bar{c}}(X) \wedge \varphi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{x}).$$

Nyt jos konfiguraatiolla C on olemassa n^d-tilarajoittunut seuraajakonfiguraatio, niin se on joukko $\{ \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}[C,\bar{a}] \}$, muutoin $\{ \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}[C,\bar{a}] \} = \emptyset$.

□

Annetaan vielä edellisiä apulauseita yhdistelemällä kaava, joka kuvaa yleisessä tapauksessa konfiguraatoiden välistä laskentaa.

Apulause 5.10. Jos M on n^d-tilarajoittunut deteministinen Turingin kone ja X on relaatio, jonka paikkaluku on $(d+2)$, niin on olemassa kaava $\varphi_{seur}(X, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, joka määrittelee, että jos $\mathfrak{A}$ on τ-malli ja C on n^d-tilarajoittunut konfiguraatio niin

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{seur}[C, \bar{a}], \text{ jos ja vain jos konfiguraatiolla } C \text{ on olemassa } n^d\text{-tilarajoittunut seuraajakonfiguraatio } C_s \text{ ja } \bar{a} \in C_s.$$

*Todistus (*vrt. [1, ss. 139-141]). Asetetaan

$$\varphi_{seur}(X, \bar{x}) := (\varphi_{hyv}(X) \wedge X(\bar{x})) \vee \bigvee_{\delta(q,\bar{b},\bar{c})=(q',\bar{c}',\bar{h})} \varphi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}(X, \bar{x}). \tag{5.28}$$

Tässä huomioitavaa on, että hyväksyvät konfiguraatiot asetetaan itsensä seuraajaksi, jotta jatkossa kun kaavaa käytetään kiintopistekaavan osana, niin kiintopisteeksi muodostuu hyväksyvät konfiguraatiot. □

Lause 5.11. *Olkoon $K \subseteq O(\tau)$ järjestettyjen τ-mallien luokka. Jos K kuuluu vaativuusluokkaan PSPACE, niin K on määriteltävissä logiikassa $FO(PFP)$.*

*Todistus (*vrt. [1, ss. 136-137]). Olkoon M deterministinen n^d-tilarajoittunut Turingin kone, joka osoittaa, että K kuuluu vaativuusluokkaa PSPACE, jollain sopivalla luvulla d, $\mathfrak{A}$ järjestetty τ-malli ja $|\mathfrak{A}| = n$. Asetetaan

$$\varphi(X, \bar{x}) := (\neg\exists\bar{y}X(\bar{y}) \wedge \varphi_{alku}(\bar{x})) \vee (\exists\bar{y}X(\bar{y}) \wedge \varphi_{seur}(X, \bar{x})),$$

missä X on relaatio, jonka paikkaluku on $(d+2)$, $\bar{x} = (x, y, x_1, \ldots, x_d)$, kaavan φ_{alku} määritelmä on kuten kohdassa 5.6 ja vastaavasti kaava φ_{seur} on määritelty kuten kohdassa 5.28. Tällöin kiintopistekaavan $[\mathsf{PFP}_{X,\bar{x}}\varphi(X, \bar{x})](\bar{t})$ jono $F_0^\varphi, F_1^\varphi, F_2^\varphi, \ldots$ vastaa jonoa $\emptyset, C_0, C_1, \ldots$, missä:

- konfiguraatio C_0 on aloituskonfiguraatio,
- jos C_i on n^d-tilarajoitettu hyväksyvä konfiguraatio, niin $C_i = C_{i+1} = C_{i+2} \ldots$, jolloin kiintopiste on löydetty,
- jos C_i on n^d-tilarajoitettu konfiguraatio, jolla on n^d-tilarajoitettu seuraajakonfiguraatio C_s, niin $C_{i+1} = C_s$,
- jos C_i on n^d-tilarajoitettu konfiguraatio, jolla ei ole n^d-tilarajoitettua seuraajakonfiguraatiota, niin kiintopistettä ei ole olemassa, koska $C_{i+1} = \emptyset$, $C_{i+2} = C_0$, $C_{i+3} = C_1, \ldots$

Täten kone M hyväksyy syötteenään mallin $\mathfrak{A}$, jos ja vain jos F_∞^φ on hyväksyvä konfiguraatio. Nyt jos lause ψ määritellään seuraavasti

$$\psi := \exists y \left(\bigvee_{q \in Q_a} (y = q) \wedge [PFP_{X,\bar{x}}\varphi(X, \bar{x})][0, 0, \bar{0}, y] \right),$$

niin kone M hyväksyy syötteenään mallin $\mathfrak{A}$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \psi$. Edelleen koska kone M hyväksyy vain luokan K mallit, niin $\mathfrak{A} \in K$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \psi$. Siis $K = ordMod(\psi)$, ja koska $\psi \in FO(PFP)$ niin määritelmän 3.19 mukaan luokka K on määriteltävissä logiikassa $FO(PFP)$. □

Määritelmä 5.12. Olkoon C vaativuusluokka, L logiikka ja K järjestettyjen mallien luokka jollain logiikan L lauseella. Turingin kone M *vahvasti osoittaa*, että K kuuluu vaativuusluokkaan C, jos M ratkaisee luokan K, ja aina kun $\mathfrak{A} \in O(\tau)$, niin koneen M suoritus syötteellä $\mathfrak{A}$ toteuttaa vaativuusluokan C mahdolliset tila- ja aikarajoitukset.

Lause 5.13. *Olkoon $K \subseteq O(\tau)$ järjestettyjen τ-mallien luokka. Jos K on määriteltävissä logiikassa $FO(PFP)$, niin K kuuluu vaativuusluokkaan PSPACE.*

*Todistus (*vrt. [1, ss. 146-150]). Todistetaan induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen. Perusaskel sivuutetaan (ks. [1, s. 148])]. Oletetaan, että väite pätee kaavoille ψ ja θ.

Olkoon $\varphi = \neg\psi$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa Turingin kone M_ψ, joka vahvasti osoittaa luokan *ordMod*(ψ) kuuluvan vaativuusluokkaan PSPACE. Nyt haluttu kone M antaa koneelle M_ψ saadun syötteensä ja käyttää sitä aliohjelmana. Nyt jos kone M_ψ hyväksyy syötteen, niin M hylkää syötteen ja vastaavasti, jos M_ψ hylkää syötteen, niin M hyväksyy syötteen.

Olkoon $\varphi = \psi \vee \theta$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa Turingin koneet M_ψ ja M_θ, jotka osoittavat vastaavien järjestettyjen mallien luokkien kuuluvan vaativuusluokkaan PSPACE. Täten haluttu kone M suorittaa ensin alihohjelmana M_ψ suorituksen ja hyväksyy syötteen, jos M_ψ hyväksyy. Muuten kone M tyhjentää työnauhat ja aloittaa suorituksen koneelle M_θ, jonka tulos on myös koneen M tulos.

Olkoon $\varphi(x_1, \ldots, x_l) = \exists x\psi$. Nyt induktio-oletuksen mukaan on olemassa deterministinen Turingin kone M_ψ, joka vahvasti osoittaa, että *ordMod*(ψ) kuuluu vaativuusluokkaan PSPACE. Turingin kone M kaavalle φ syötteellä $\mathfrak{A} = (A, a_1, \ldots, a_l)$, missä $A = \{ 0, \ldots, n-1 \}$ koodaa työnauhalle luvun $i = n - 1$ binäärisen esityksen laskuriksi. Sitten kone M aloittaa aliohjelman, joka käyttää konetta M_ψ syötteellä $(A, a_1, \ldots, a_l, i)$ tarkistaakseen päteekö $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_l, i]$. Jos kone M_ψ pysähtyy hyväksyvään tilaan, niin kone M hyväksyy syötteen, ja jos kone M_ψ pysähtyi hylkäävään tilaan, niin kone M vähentää laskuria i yhdellä ja aloittaa aliohjelman uudelleen. Jos laskuri on jo arvossa 0, niin kone M ei voi vähentää sitä vaan pysähtyy hylkäävään tilaan.

Olkoon $\varphi = [PFP_{X,\bar{x}}\psi(X, \bar{x})](\bar{t})$, missä relaation X paikkaluku on k. Oletetaan, että *free*$(\psi) = \{ \bar{x} \cup X \}$. Induktio-oletuksesta saadaan Turingin kone M_ψ, joka vahvasti osoittaa, että *ordMod*$(\psi) = \{ (\mathfrak{A}, R, \bar{a}) \mid \mathfrak{A} \in O(\tau), \mathfrak{A} \models \psi[R, \bar{a}] \}$ kuuluu vaativuusluokkaan PSPACE. Olkoon sitten $\mathfrak{A} \in O(\tau)$ ja $|\mathfrak{A}| = n$. Nyt lauseen 3.10 mukaan

$$F^\psi_{2^{n^k}-1} = F^\psi_{2^{n^k}} \text{ tai } F^\psi_\infty = \emptyset.$$

Turingin kone M kaavalle φ aloittaa suorituksen käyttämällä apuna laskuria ja kahta työnauhaa W, W'. Kone M koodaa ensin yhdelle työnauhalle luvun $2^{n^k} - 1$ binäärisen esityksen laskuriksi. Kone M päivittää laskuria joka kierroksen lopulla vähentäen sen arvoa yhdellä. Nauhalle W kone M koodaa relaation $R = \emptyset$, minkä jälkeen tyhjälle nauhalle W' kirjoitetaan konetta M_ψ aliohjelmana käyttäen koodaus relaatiolle $R' = \{ \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models \psi[R, \bar{a}] \}$. Tämän jälkeen kone M tarkistaa laskurin arvon ja jos se on suurempi kuin 0, niin kone M kirjoittaa nauhalle W relaation R' koodauksen, tyhjentää työnauhan W', vähentää laskurin arvoa yhdellä ja aloittaa aliohjelman uudelleen. Kun laskuri saavuttaa arvon 0, niin kone ei enää vähennä laskurin arvoa, vaan sen sijaan M tarkistaa täsmäävätkö nauhojen W ja W' sisällöt keskenään. Jos $W = W'$ niin kone M tarkistaa onko jono $\bar{t}$ relaation R alkio, jolloin M siirtyy myönteisessä tapauksessa hyväksyvään ja kielteisessä tapauksessa hylkäävään tilaan ja pysähtyy kummassakin tapauksessa. Jos taas $W \neq W'$, niin kone hylkää syötteen. □

Lause 5.14. *Logiikka $FO(PFP)$ karakterisoi vaativuusluokan PSPACE.*

Todistus. Todistus seuraa lauseista 5.11 ja 5.13. □

5.3 IFP ja PTIME

Jatketaan seuraavaksi polynomisen ajan vaativien luokkien karakterisointiin. Aikaisemmin huomattiin, että laskenta, joka vaatii polynomisen ajan, toteuttaa myös polynomisen tilavaatimuksen, joten voidaan hyödyntää edellisessä luvussa määriteltyjen apulauseiden ideaa. Konfiguraatiorelaatiota ja apukaavoja täytyy kuitenkin muokata sisältämään sekä aikaisemmat konfiguraatiot että uusi aikaparametri, joka määrittelee kuinka monen laskenta-askeleen jälkeen kyseiseen konfiguraation on päädytty. Tällöin inflatorista kiintopisteoperaattoria hyödyntämällä muodostetaan relaatio, joka sisältää koneen jonkin suorituksen kaikki konfiguraatiot aikaleimattuina.

Annetaan tätä varten ensin määritelmä aikaleimoille ja osoitetaan apulauseella, että tarvittavat kaavat ovat olemassa. Koska apulauseen perusidea noudattaa apulauseiden 5.8, 5.9 ja 5.10 todistuksia, niin sanallisia selityksiä on annettu vain kohtiin, jotka eroavat näistä oleellisesti.

Olkoot jono $C_0, C_1, \ldots$ jonkin n^d-aikarajoitetun deterministisen Turingin koneen hyväksyvä suoritus jollain syötteellä a, jonka pituus on n. Tällöin voidaan koodata jokaiselle laskenta-askeleelle C_t jono $(t_1, \ldots t_d) = \overrightarrow{t^n_d}$ merkitsemään konfiguraation aikaparametriä leksikograafisessa järjestyksessä. Edelleen koska jokainen n^d-aikarajoitetun suorituksen konfiguraatio on myös n^d-tilarajoitettu, niin voidaan yhdistää aikaparametri ja konfiguraatiorelaatio uudeksi relaatioksi R^a, jonka paikkaluku on $(2d+2)$, missä

$$R^a := \bigcup_{\substack{0 \leq t < n^d \\ C_t \, \text{määritelty}}} \{ \overrightarrow{t^n_d} \} \times C_t. \tag{5.29}$$

Tällöin alkion $\bar{b} \in R^a$ ensimmäiset d alkiota määrittelevät aikaparametrin ja loput $(d+2)$ alkiota määrittelevät konfiguraatiorelaatiota.

Olkoon R mikä tahansa relaatio, jonka paikkaluku on $(2d+2)$ ja $\bar{t}$ jono, jossa on d muuttujaa. Merkitään lyhyesti $R_{\bar{t}}$ tarkoittamaan joukkoa $\{ \bar{x} \mid (\bar{t}, \bar{x}) \in R \}$. Erityisesti, kun R on yllä olevaa muotoa, niin $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota C_t, missä $t = \overleftarrow{\bar{t}}$.

Apulause 5.15. Olkoon M deterministinen Turingin kone, joka pysähtyy enintään n^d laskenta-askeleen jälkeen jollain luvulla $d \in \mathbb{Z}_+$, kun sille annetaan syötteenä malli $\mathfrak{A}$, missä $|\mathfrak{A}| = n$. Olkoon lisäksi X relaatio, jonka paikkaluku on $(2d+2)$. On olemassa kaavat

a) $\psi_{hyv}(X, w_1, \ldots, w_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{hyv}[R, \bar{t}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa hyväksyvää konfiguraatiota.

b) $\psi_{q\bar{b}\bar{c}}(X, w_1, \ldots, w_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{q\bar{b}\bar{c}}[R, \bar{t}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota, jonka mukaan koneen tila on q, syötenauhoilta luetaan merkit $\bar{b}$ ja työnauhoilta luetaan merkit $\bar{c}$.

c) $\psi_{\bar{h}}(X, w_1, \ldots, w_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{\bar{h}}[R, \bar{t}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota, jonka mukaan koneen työnauhojen osoittimet eivät osoittimien siirtojen $\bar{h}$ jälkeen siirry soluun c_{n^d}.

d) $\psi_{q'\bar{c}'\bar{h}}(X, w_1, \ldots, w_d, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{q'\bar{c}'\bar{h}}[R, \bar{t}, \bar{a}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota, jolle on olemassa seuraajakonfiguraatio C_s, joka saadaan jonoa $(q', \bar{c}', \bar{h})$ käyttämällä, ja $\bar{a} \in C_s$.

e) $\psi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}(X, w_1, \ldots, w_d, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}[R, \bar{t}, \bar{a}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota, jolle on olemassa n^d-tilarajoittunut seuraajakonfiguraatio C_s, joka saadaan jonoa $(q', \bar{c}', \bar{h})$ käyttämällä, ja $\bar{a} \in C_s$.

f) $\psi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}(X, w_1, \ldots, w_d, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}[R, \bar{t}, \bar{a}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota, joka vastaa jonoa $(q, \bar{b}, \bar{c})$, ja sillä on olemassa n^d-tilarajoittunut seuraajakonfiguraatio C_s, joka saadaan käyttämällä jonoa $(q', \bar{c}', \bar{h})$, ja $\bar{a} \in C_s$.

g) $\psi_{seur}(X, w_1, \ldots, w_d, x, y, x_1, \ldots, x_d)$, jonka semantiikka on seuraava

$\mathfrak{A} \models \psi_{seur}[R, \bar{t}, \bar{a}]$, jos ja vain jos joukko $R_{\bar{t}}$ vastaa konfiguraatiota, jolle on olemassa n^d-tilarajoittunut seuraajakonfiguraatio C_s, ja $\bar{a} \in C_s$.

*Todistus (*vrt. [1, ss. 137-141]). Olkoot $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_d)$ ja $\bar{x} = (x, y, x_1, \ldots, x_d)$ jonot muuttujasymboleita.

a) Asetetaan
$$\psi_{hyv}(X, \bar{w}) := X(\bar{w}, 0, 0, \bar{0}, q), \text{ missä } q \in Q_a.$$

Olkoot $LOPPU$, $SOLU$ ja $YKSI$ uusia relaatioita, joita käytetään lyhentämään relaation X alkioita seuraavasti:
$$\begin{aligned} LOPPU(\bar{w}, y, z) &:= X(\bar{w}, 1, y, \bar{0}, z) \\ SOLU(\bar{w}, y, \bar{z}) &:= X(\bar{w}, 2, y, \bar{0}, \bar{z}) \\ YKSI(\bar{w}, y, \bar{z}) &:= X(\bar{w}, 3, y, \bar{0}, \bar{z}). \end{aligned}$$

b) Määritellään sitten relaatiolle X kaava $\psi_{q\bar{b}\bar{c}}(X, \bar{w})$ kuvaamaan aikaparametriä $\bar{w}$ vastaavaa konfiguraatiota konjunktiona seuraavista kaavoista
$$\begin{aligned} & X(\bar{w}, 0, 0, \bar{0}, q) \\ & \bigwedge_{\substack{b_j=\alpha \\ 0\le j\le k}} LOPPU(\bar{w}, j, 0) \\ & \bigwedge_{\substack{b_j=\omega \\ 0\le j\le k}} LOPPU(\bar{w}, j, max) \\ & \bigwedge_{\substack{b_j=0 \\ 0\le j\le k}} \exists \bar{z}(SOLU(\bar{w}, j, \bar{z}) \wedge \neg R_j(\bar{z})) \\ & \bigwedge_{\substack{b_j=1 \\ 0\le j\le k}} \exists \bar{z}(SOLU(\bar{w}, j, \bar{z}) \wedge R_j(\bar{z})) \\ & \bigwedge_{\substack{c_j=\alpha \\ k< j\le k+m}} LOPPU(\bar{w}, j, 0) \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{\substack{c_j=0\\k<j\leq k+m}} \exists\bar{z}(SOLU(\bar{w},(k+j),\bar{z}) \wedge \neg YKSI(\bar{w},(k+j),\bar{z}))$$

$$\bigwedge_{\substack{c_j=1\\k<j\leq k+m}} \exists\bar{z}(SOLU(\bar{w},(k+j),\bar{z}) \wedge YKSI(\bar{w},(k+j),\bar{z})).$$

c) Asetetaan

$$\psi_{\bar{h}}(X,\bar{w}) := \bigwedge_{\substack{h_i=1\\k<j\leq k+m}} \neg SOLU(\bar{w},j,\underbrace{max,\ldots,max}_{d}).$$

d) Olkoon sitten $\psi_{q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{w},\bar{x})$ kaava, joka määrittelee aikaparametriä $\bar{w}$ vastaavan konfiguraation seuraajakonfiguraation disjunktiona seuraavista kaavoista:

$$x = 0 \wedge y = 0 \wedge X(\bar{w},0,0,\bar{0},q')$$

$$\bigvee_{k<j\leq k+m} x = 3 \wedge y = j \wedge \neg SOLU(\bar{w},j,x_1,\ldots,x_d) \wedge YKSI(\bar{w},j,x_1,\ldots,x_d)$$

$$\bigvee_{\substack{c_{j'}=1\\k<j\leq k+m}} x = 3 \wedge y = j \wedge SOLU(\bar{w},j,x_1,\ldots,x_d)$$

$$\bigvee_{\substack{h_j=1\\0\leq j\leq k+m}} x = 2 \wedge y = j \wedge LOPPU(\bar{w},j,0) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$$

$$\bigvee_{\substack{h_j=0\\0\leq j\leq k+m}} x = 1 \wedge y = j \wedge LOPPU(\bar{w},j,0) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$$

$$\bigvee_{\substack{h_j=-1\\0\leq j\leq k+m}} x = 2 \wedge y = j \wedge SOLU(\bar{w},j,\bar{0}) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_d = 0$$

$$\bigvee_{\substack{h_j=-1\\0\leq j\leq k}} \Big(x = 2 \wedge y = j \wedge LOPPU(\bar{w},j,max) \wedge \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_{d-r_j} = 0 \\ \wedge\, x_{d-r_j+1} = max \wedge \cdots \wedge x_d = max\Big)$$

$$\bigvee_{\substack{h_j=0\\0\leq j\leq k}} x = 1 \wedge y = j \wedge LOPPU(\bar{w},j,max) \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_{d-1} = 0 \wedge x_d = max$$

$$\bigvee_{\substack{h_j=1\\0\leq j\leq k}} \Big(x = 1 \wedge y = j \wedge SOLU(\bar{w},j,\overbrace{0,\ldots,0}^{d-r_j},\overbrace{max,\ldots,max}^{r_j}) \\ \wedge\, x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_{d-1} = 0 \wedge x_d = max\Big)$$

$$\bigvee_{0\leq j\leq k+m} \Big(x = 2 \wedge y = j \wedge \exists u_1,\ldots,\exists u_d(\overleftarrow{x_1\ldots x_d} = (\overleftarrow{u_1\ldots u_d} + h_j) \\ \wedge\, SOLU(\bar{w},j,u_1,\ldots,u_d))\Big).$$

e) Nyt voidaan muodostaa seuraajakonfiguraation määrittelevä kaava

$$\psi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{w},\bar{x}) := \psi_{\bar{h}}(X,\bar{w}) \wedge \psi_{q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{w},\bar{x}).$$

f) Asetetaan

$$\psi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{w},\bar{x}) := \psi_{q\bar{b}\bar{c}}(X,\bar{w}) \wedge \psi_{\bar{h}\wedge q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{w},\bar{x}).$$

g) Hyödyntämällä kohtien a-f kaavoja voidaan muodostaa seuraavanlainen kaava

$$\psi_{seur}(X,\bar{w},\bar{x}) := (\psi_{hyv}(X,\bar{w}) \wedge X(\bar{w},\bar{x})) \vee \bigvee_{\delta(q,\bar{b},\bar{c})=(q',\bar{c}',\bar{h})} \psi_{q\bar{b}\bar{c}\mapsto q'\bar{c}'\bar{h}}(X,\bar{w},\bar{x}). \tag{5.30}$$

Tällöin $\psi_{seur}(X,\bar{w},\bar{x})$ määrittelee, että relaation X aikaparametriä $\bar{w}$ vastaa konfiguraatio, joka on hyväksyvä konfiguraatio, tai sillä on olemassa n^d-tilarajoitettu seuraajakonfiguraatio, joka saadaan tilasiirtymäfunktion δ avulla. Hyväksyvän konfiguraation tapauksessa konfiguraatio on myös itsensä seuraajakonfiguraatio.

□

Lause 5.16. *Olkoon $K \subseteq \mathcal{O}(\tau)$ luokka järjestettyjä τ-malleja. Jos K kuuluu vaativuusluokkaan PTIME, niin K on määriteltävissä logiikassa $FO(IFP)$.*

*Todistus (*vrt. [1, ss. 137-138]). Olkoon M deterministinen Turingin kone, joka osoittaa, että K kuuluu vaativuusluokkaan PTIME. Oletetaan, että kone M pysähtyy enintään n^d laskenta-askeleen jälkeen, jollain sopivalla luvulla d, kun $\mathfrak{A}$ on järjestetty τ-malli ja $|\mathfrak{A}| = n$. Asetetaan

$$\varphi(X,\bar{w},\bar{x}) := (w_1 = 0 \wedge \cdots \wedge w_d = 0 \wedge \varphi_{alku}(\bar{x})) \vee \exists v_1 \ldots \exists v_d(\varphi_d(\bar{v},\bar{w}) \wedge \psi_{seur}(X,\bar{v},\bar{x})),$$

missä X on relaatio, jonka paikkaluku on $(2d+2)$, $\bar{w} = (w_1,\ldots,w_d)$, $\bar{x} = (x,y,x_1,\ldots,x_d)$, φ_{alku} on määritelty kuten kohdassa 5.6, φ_d on määritelty kohdassa 5.3 ja ψ_{seur} on annettu edellisen apulauseen kohdassa 5.30. Kone M hyväksyy syötteenään mallin $\mathfrak{A}$, jos ja vain jos koneen M suoritus syötteellä $\mathfrak{A}$ on päätynyt hyväksyvään konfiguraatioon viimeistään $(n^d - 1)$ laskenta-askeleen jälkeen. Hyödynnetään nyt tietoa siitä, että koodauksessa hyväksyvä konfiguraatio asetetaan itsensä seuraajaksi, jolloin vaikka kone olisi pysähtynyt ennen $(n^d - 1)$ askelta, niin relaatio X sisältää $(n^d - 1)$ konfiguraatiota aina kun kone päätyy hyväksyvään tilaan. Tällöin käyttämällä inflatorista kiintopistekaavaa $[\mathsf{IFP}_{X,\bar{w},\bar{x}}\varphi](\bar{t},\bar{a})$, missä jonon $\bar{t}$ pituus on d ja jonon $\bar{a}$ pituus on $(d+2)$, saadaan määriteltyä lause θ, missä

$$\theta := \exists y\Big(\bigvee_{q\in Q_a}(y = q) \wedge [\mathsf{IFP}_{X,\bar{w},\bar{x}}\varphi][\underbrace{max,\ldots,max}_{d},0,0,\bar{0},y]\Big),$$

jolloin voidaan muodostaa seuraavanlainen ekvivalenssiketju

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \in K, &\text{ jos ja vain jos kone } M \text{ hyväksyy syöteenään mallin } \mathfrak{A},\\ &\text{ jos ja vain jos } \mathfrak{A} \models \theta.\end{aligned}$$

Siis $K = ordMod(\theta)$, ja koska θ on logiikan $FO(IFP)$ lause, niin määritelmän 3.19 perusteella K on määriteltävissä logiikassa $FO(IFP)$. □

Lause 5.17. *Olkoon $K \subseteq \mathcal{O}(\tau)$ luokka järjestettyjä τ-malleja. Jos K on määriteltävissä logiikassa $FO(IFP)$, niin K kuuluu vaativuusluokkaan PTIME.*

*Todistus (*vrt. [1, s. 149]). Todistetaan induktiolla logiikassa $FO(IFP)$ määriteltävän kaavan φ suhteen, että $ordMod(\varphi)$ kuuluu vaativuusluokkaan PTIME. Atomikaavojen ja kaavojen $\neg\theta$, $(\psi \vee \theta)$ ja $\exists x\theta$ tapaukset todistetaan vastaavaan tapaan kuin lauseen 5.13 todistuksessa.

Todistetaan tapaus $\varphi := [IFP_{X,\bar{x}}\theta(X,\bar{x})](\bar{t})$, kun oletetaan, että väite pätee kaavalle θ. Tällöin on olemassa deterministinen Turingin kone M_θ, joka vahvasti osoittaa, että luokka $ordMod(\theta) = \{ (\mathfrak{A}, R, \bar{a}) \mid \mathfrak{A} \in O(\tau), \mathfrak{A} \models \theta[R, \bar{a}] \}$ kuuluu vaativuusluokkaan PTIME.

Olkoon M deterministinen Turingin kone ja k relaation X paikkaluku. Koneella M on kaksi työnauhaa W ja W', joista ensimmäiselle se kirjoittaa relaation $R = \emptyset$ koodauksen. Sitten kone M aloittaa alihohjelman, joka käyttää konetta M_θ laskemaan relaation

$$R' = \{ \bar{a} \mid \mathfrak{A} \models (\theta \vee X(\bar{x}))[R, \bar{a}] \},$$

jonka koodauksen se kirjoittaa työnauhalle W'. Sen jälkeen kone M vertaa työnauhoja keskenään, ja jos ne täsmäävät, niin kone M tarkistaa onko jono $\bar{t}$ relaation R alkio, jolloin myönteisessä tapauksessa kone siirtyy hyväksyvään tilaan ja pysähtyy, kun taas kielteisessä tapauksessa kone siirtyy hylkäävään tilaan ja pysähtyy. Jos taas oli niin, että $W \neq W'$, niin kone kirjoittaa saadun relaation R' työnauhalle W, tyhjentää työnauhan W' ja aloittaa aliohjelman alusta. Lauseen 3.8 nojalla aliohjelmaa suoritetaan enintään n^k kertaa. □

Lause 5.18. *Logiikka FO(IFP) karakterisoi vaativuusluokan PTIME.*

Todistus. Todistus seuraa lauseista 5.16 ja 5.17. □

Kirjallisuutta

[1] Ebbinghaus, H. D. ja Flum, J. *Finite Model Theory.* Berlin: Springer, 1999.

[2] Fagin, R. *Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets.* Complexity of Computation, R. Karp, ed., SIAM-AMS Proceedings, 7, 1974, 43–73.

[3] Hopcroft, J. E., Motwani, R. ja Ullman, J. D. *Introduction To Automata Theory, Languages, and Computation.* 3rd Edition. Boston: Pearson/ Addison-Wesley, 2007.

[4] Immerman, N. *Relational Queries Computable in Polynomial Time*. Information and Control 68, 1986, 86-104. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(86)80029-8.

[5] Immerman, N. *Descriptive complexity.* New York: Springer, 1999.

[6] Libkin, L. *Elements of Finite Model Theory.* Berlin: Springer, 2012.

[7] Vardi, M. Y. *The complexity of relational query languages.* Proceedings of the fourteenth annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '82). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1982, 137–146. https://doi.org/10.1145/800070.802186