Hilda Mattila

Fourier-sarjojen suppenemisesta

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2022

Tiivistelmä

Hilda Mattila: Fourier-sarjojen suppenemisesta
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2022

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan Fourier-sarjoihin ja tutkitaan niiden suppenemista. Fourier-sarjat on Joseph Fourierin 1800-luvun alussa kehittämä tapa esittää jaksollinen funkio sarjakehitelmänä. Fourier-sarjoja käytetään monissa värähtelyyn liittyvissä sovelluksissa, joissa ilmiö on jaksollinen ja säännöllinen.

Tutkielman päätuloksina esitetään todistukset Fourier-sarjojen suppenemisesta normin suhteen ja suppenemisesta pisteittäin. Tutkielman luvussa 2 määritellään Fourier-sarjat ja tutkitaan niiden lineaarisuutta. Luvussa 3.1 todistetaan Fourier-sarjojen suppeneminen normin suhteen käyttäen avuksi Besselin epäyhtälöä ja Parsevalin identiteettiä. Luvussa 3.2 todistetaan Fourier-sarjan pisteittäinen suppeneminen Dirichlet'n integraaliytimiä ja Riemann-Lebesguen lemmaa hyödyntäen. Luvussa 4 tutkitaan Fourier-sarjan derivaattaa ja sen suppenemista pintapuolisesti ja todetaan, että Fourier-sarjan derivaatta suppenee.

Avainsanat: Fourier-analyysi, Fourier-sarjat, suppeneminen

Sisällys

1 Johdanto

Jaksolliset aaltofunktiot olivat 1700-luvun matemaatikoiden kiinnostuksen kohteena, ja niiden matemaattisia ominaisuuksia tutkivat esimerkiksi Leonard Euler ja Daniel Bernoulli. Ranskalainen fyysikko ja matemaatikko Joseph Fourier loi teoriansa Fourier-sarjoista 1800-luvulla, ja julkaisi teoksensa *Théorie analytique de la chaleur* vuonna 1822. [1]

Fourier-sarjat ovat tapa esittää jaksollinen funktio sarjakehitelmänä. Funktiota $f(t) = |\cos(t)|$ vastaava Fourier-sarja on

$$F.S.[f]_t = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt).$$

Eli funktio $f(t) = |\cos(t)|$ voidaan ilmaista äärettömänä summana

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos(2t) - \frac{4}{15\pi}\cos(4t) + \frac{4}{35\pi}\cos(6t)...$$

Fourier-sarjoja käytetään esimerkiksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen, värähtelyyn liittyvissä sovelluksissa ja signaalinkäsittelyssä.

Tämän tutkielman aiheena on tutkia Fourier-sarjojen suppenemista sekä normin suhteen että pisteittäin. Pro gradu-tutkielma mukailee Howellin *Principles of Fourier analysis* -kirjan lukuja 8-15 [2]. Tutkielman luvussa 2 johdatellaan Fourier-sarjoihin määrittelemällä niiden trigonometrinen ja eksponenttimuoto ja johtamalla niiden välinen yhteys käyttäen Eulerin kaavoja. Luvussa 2 todistetaan myös Fourier-sarjojen lineaarisuusominaisuus.

Luvussa 3 tutkitaan Fourier-sarjojen suppenemista ensin normin suhteen ja sitten pisteittäin. Tutkielman päätuloksina on näiden ominaisuuksien todistaminen. Luvussa 4 tutkitaan Fourier-sarjan derivaattaa ja sen suppenemista pintapuolisesti. Luvussa todistetaan, että Fourier-sarjaa voi derivoida termeittäin ja että Fourier-sarjan derivaatta suppenee.

Fourier-sarjoista voi siirtyä Fourier-muunnoksen pariin, joka on eräänlainen tapa esittää riittävän säännöllinen funktio sinimuotoisten funktioiden integraalina. Varsinkin erilaisia värähtelyyn ja jaksollisuuteen perustuvia ilmiöitä voidaan mitata ja mallintaa tietokoneen ja Fourier-muunnoksen avulla. Esimerkiksi erilaisten aineiden tunnistamiseen käytetään infrapunaspektroskopiaa, missä käytetään hyväksi Fourier-muunnosta. Fourier-muunnoksen avulla mallinnetaan infrapunavalon absorptoitumista atomien välisiin sidoksiin [3].

Tämän työn lukijalta edellytetään analyysin perusasioiden hallintaa.

2 Fourier-sarjojen perusominaisuuksia

Tässä luvussa määritellään Fourier-sarjat. Luku mukailee Howellin Principles of Fourier Analysis-kirjan lukuja 8-12 [2].

Ensin määritellään, millainen on jaksollinen funktio [4].

Määritelmä 1. *Funktio on jaksollinen, jos funktiolla on olemassa p siten, että*

$$f(t+p) = f(t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$

Jos reaalifunktio f on jaksollinen, jaksossaan jatkuva, ja jaksossaan Riemann-integroituva, se voidaan esittää Fourier-sarjana.

Määritelmä 2. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen paloittain jatkuva funktio, jonka jakson pituus on p. Olkoon $\omega_k = \frac{k}{p}$. Silloin funktiota f vastaava Fourier-sarja*

$$\begin{aligned} F.S[f]_t &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi\omega_k t) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi\omega_k t) + b_k \sin(2\pi\omega_k t)), \end{aligned}$$

missä

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_0^p f(t)\,dt \\ a_k = \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^p f(t)\cos(2\pi\omega_k t)\,dt \\ b_k = \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^p f(t)\sin(2\pi\omega_k t)\,dt. \end{cases}$$

Tätä määritelmää 2 kutsutaan joskus sinimuotoiseksi Fourier-sarjaksi. Sinimuotoisen Fourier-sarjan esityksen rinnalla käytetään myös eksponenttimuotoista Fourier-sarjaa.

Määritelmä 3. *Olkoon f jaksollinen, paloittain jatkuva funktio, jonka jakson pituus on p. Olkoon $\omega_k = \frac{k}{p}$. Tällöin funktion f Fourier-sarja*

$$F.S[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t},$$

missä c_k on vakio

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) e^{-i2\pi\omega_k t}\,dt$$

Eksponenttimuotoinen sarja on yksinkertaisempi käyttää joissakin fysiikan sovelluksissa. Johdetaan näiden kahden muodon välinen yhteys. Käyttämällä Eulerin kaavasta seuraavia identiteettejä

$$\cos\omega = \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}, \sin\omega = \frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}$$

saadaan sinimuotoisesta Fourier-sarjasta

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(2\pi\omega_k t) + b_k\sin(2\pi\omega_k t)) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\frac{e^{2\pi\omega_k t}+e^{-i2\pi\omega_k t}}{2} + b_k\frac{e^{i2\pi\omega_k t}-e^{-i2\pi\omega_k t}}{2i}) \end{aligned}$$

Ottamalla yhteinen tekijä saadaan sarja muotoon

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{i2\pi\omega_k t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + ib_k}{2}e^{-i2\pi\omega_k t}.$$

Merkitään, että

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}, \end{aligned}$$

kun k on kokonaisluku.

Sijoittamalla nämä aiempaan yhtälöön saadaan

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{i2\pi\omega_k t} + \sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}e^{-i2\pi\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i2\pi\omega_k t},$$

joka on määritelmän 3 mukaan eksponenttimuotoinen Fourier-sarja.

Tarkastellaan vielä a_k, b_k ja c_k välistä yhteyttä. Määritelmän 2 mukaan

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(2\pi\omega_k t)\,dt \\ b_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin(2\pi\omega_k t)\,dt. \end{aligned}$$

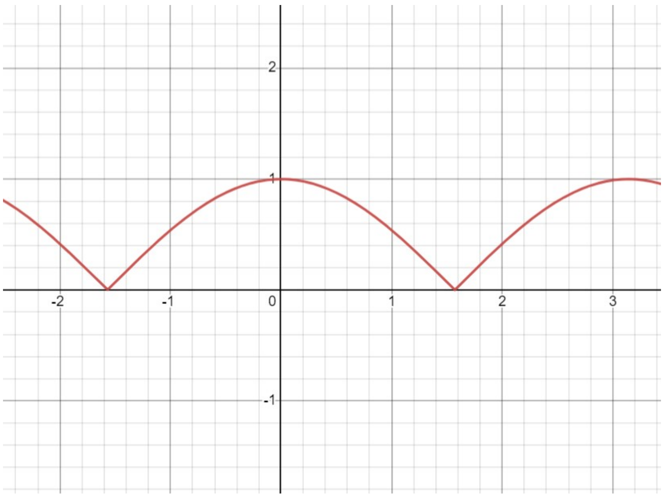
Sijoitetaan nämä c_k:n yhtälöön ja saadaan, että

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\
&= \frac{1}{2}[\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(2\pi\omega_k t)\,dt - \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin(2\pi\omega_k t)\,dt] \\
&= \frac{1}{p}\int_0^p f(t)\cos(2\pi\omega_k t) - \sin(2\pi\omega_k t)\,dt \\
&= \frac{1}{p}\int_0^p f(t)e^{-i2\pi\omega_k t}\,dt.
\end{aligned}$$

Eli eksponenttimuotoisen määritelmän 3 mukaisen Fourier-sarjan vakiokertoimet c_k on ilmaistavissa sinimuotoisen määritelmän 2 mukaisen Fourier-sarjan kertoimien a_k ja b_k avulla. [5, luku 2.5]

Tarkastellaan seuraavaksi muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 4. Määritetään funktiolle $f(t) = |\cos(t)|$ sinimuotoinen Fourier-sarja. Kuvassa 2.1 on piirrettynä funktion kuvaaja.



Kuva 2.1. Funktion $f(t) = |\cos(t)|$ kuvaaja.

Funktio $f(t) = |\cos(t)|$ on jaksollinen funktio, jonka jakson pituus $p = \pi$. Silloin siis $\omega_k = \frac{k}{\pi}$. Kun $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, niin

$$f(t) = |\cos(t)| = \cos(t),$$

ja välillä $\frac{\pi}{2} < t < \pi$

$$f(t) = |\cos(t)| = -\cos(t).$$

Määritellään ensin Fourier-sarjan kertoimet:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = \frac{1}{\pi}(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{2}{\pi}$$

Ja käyttämällä Fourier-sarjan määritelmää saadaan

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\cos(\frac{2\pi k}{p}t)\,dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(\frac{2\pi k}{\pi}t)\,dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(2kt)\,dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[\cos[(1+2k)t]+\cos[(1-2k)t]]\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+2k}\sin([1+2k]\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{1-2k}\sin([1-2k]\frac{\pi}{)}\right].
\end{aligned}
$$

Tämä saadaan vielä sievennettyä, kun

$$\sin([1\pm 2k]\frac{\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2}\pm k\pi) = \cos(\pm k\pi) = (-1)^k.$$

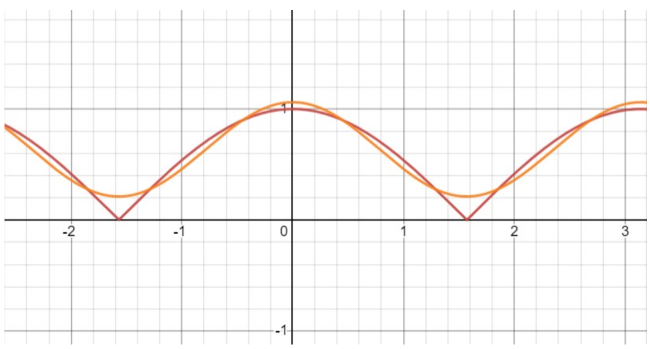
Eli

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+2k}(-1)^k + \frac{1}{1-2k}(-1)^k\right] = (-1)^k\frac{4}{\pi(1-4k^2)}.$$

Kosini on parillinen funktio, joten funktion $f(t) = |\cos(t)|$ Fourier-sarjassa ei ole sini-termejä . Silloin siis funktion f Fourier-sarja on

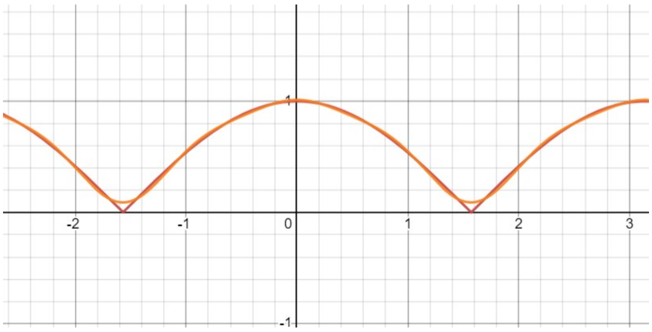
$$F.S.[f]_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(2\pi\omega_k t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kt)$$

Kuvissa 2.2, 2.3, ja 2.4 on piirretty Fourier-sarjan ensimmäisen 3, 10 ja 20 jäsenen

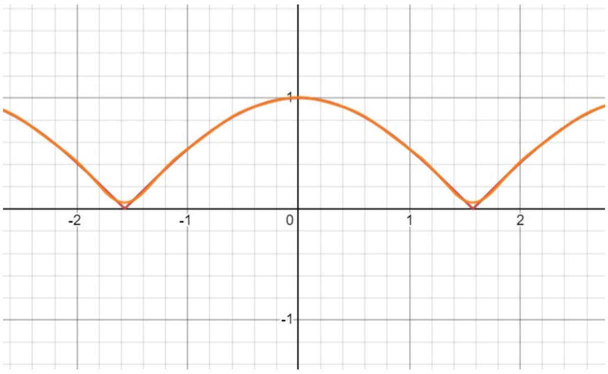


Kuva 2.2. Funktion $f(t) = |\cos(t)|$ kuvaaja punaisella, funktion Fourier-sarjan ensimmäisten kolmen jäsenen osasumma oranssilla.

osasummat.



Kuva 2.3. Kymmenen ensimmäisen jäsenen osasumma.



Kuva 2.4. 20 ensimmäisen jäsenen osasumma.

Esimerkki 5. Funktiolle $f(t) = |\sin(t)|$ Fourier-sarja muodostetaan samalla tavalla. Funktion jakson pituus on $p = \pi$, jolloin $\omega_k = \frac{k}{\pi}$. Eksponenttimuotoinen Fourier-sarja on

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2kt}$$

missä

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)e^{-i2kt}\,dt = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}.$$

Eli saadaan

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{i2kt}.$$

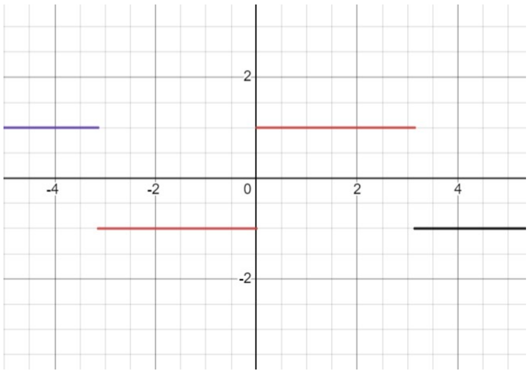
Esimerkki 6. Etumerkkifunktio $sgn(x)$ on ohjelmointia varten kehitetty funktio, joka saa arvon 1, jos $x > 0$, ja arvon -1 jos $x < 0$. Funktio siis kertoo syötteen etumerkin.

Tälle funktiolle pätee kaava

$$sgn(x) = \frac{x}{|x|}, x \neq 0.$$

Tehdään etumerkkifunktion avulla paloittain jatkuva funktio f, jonka jakson pituus $p = \pi$, eli

$$f(t) = sgn(t),\ |t| < \pi$$



Kuva 2.5. Etumerkkifunktion $f = sgn(x)$ kuvaaja, kun funktion jakson pituus on π.

ja

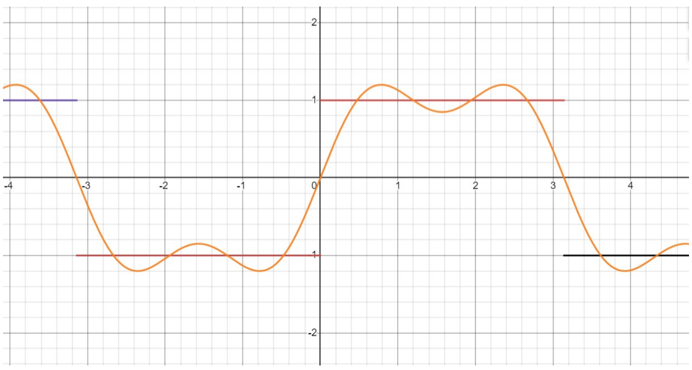
$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

Kuvassa 2.5 on piirretty etumerkkifunktion kuvaaja.

Sen Fourier-sarja on

$$F.S[f]|_t = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)t).$$

Kuvissa 2.6, 2.7 ja 2.8 on piirretty Fourier-sarjan 3, 10 ja 20 ensimmäisen jäsenen



Kuva 2.6. Etumerkkifunktion Fourier-sarjan kolmen ensimmäisen jäsenen osasumma.

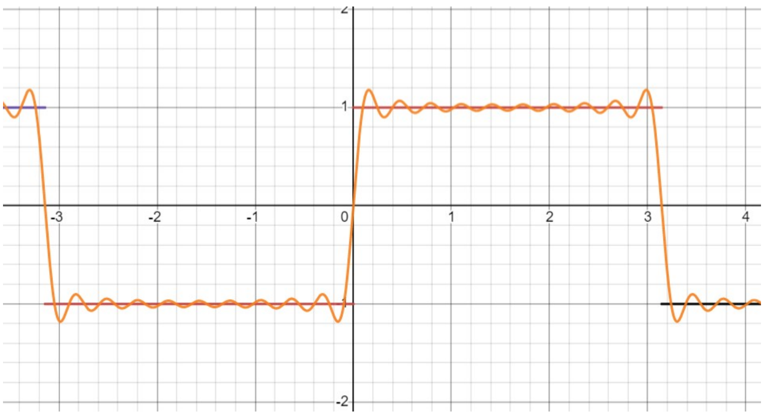
osasumman kuvaajat.

2.1 Fourier-sarjan lineaarisuus

Fourier-sarjojen suppenemista tarkastellessa tulevissa luvuissa käytetään hyväksi Fourier-sarjojen lineaarisuutta. Eli funktioiden lineaarikombinaation Fourier-sarja saadaan yksittäisten funktioiden Fourier-sarjojen lineaarikombinaationa.

Lause 7 (Lineaarisuus)**.** *Olkoot $f_n, n = 1, 2, 3, \ldots, N$, jaksollisia ja paloittain jatkuvia*

Kuva 2.7. Etumerkkifunktion 10 ensimmäisen jäsenen osasumma.



Kuva 2.8. Etumerkkifunktion 20 ensimmäisen jäsenen osasumma.

funktioita, joilla on sama jaksonpituus. Olkoot α_n vakioita $n = 1, 2, 3, \ldots, N$. Silloin

$$F.S.\left[\sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n\right]_t = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n F.S.[f_n]_t.$$

Todistus. Olkoot g ja h paloittain jatkuvia jaksollisia funktioita, joiden Fourier-sarjat ovat

$$F.S.[g]_t = a_0^g + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k^g \cos(2\pi\omega_k t) + b_k^g \sin(2\pi\omega_k t)\right]$$

ja

$$F.S.[h]_t = a_0^h + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k^h \cos(2\pi\omega_k t) + b_k^h \sin(2\pi\omega_k t)\right].$$

Olkoon $f = \gamma g + \lambda h$, jossa γ ja λ ovat vakioita. Todistetaan siis ensin, että seuraavat identiteetit pätevät:

$$\begin{aligned} a_0^f &= \gamma a_0^g + \lambda a_0^h, \\ a_k^f &= \gamma a_k^g + \lambda a_k^h \; ja \\ b_k^f &= \gamma b_k^g + \lambda b_k^h. \end{aligned}$$

Tarkastellaan ensin lukua a_0^f: Määritelmän 2 mukaan

$$a_0^f = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,dt$$

ja sijoittamalla $f = \gamma g + \lambda h$ ja ottamalla vakiokertoimet integraalin eteen saadaan

$$a_0^f = \frac{1}{p}\int_0^p (\gamma g(t) + \lambda h(t))\,dt = \gamma\frac{1}{p}\int_0^p g(t)\,dt + \lambda\frac{1}{p}\int_0^p h(t)\,dt$$

ja määritelmää uudelleen käyttäen

$$a_0^f = \gamma a_0^g + \lambda a_0^h.$$

Samalla tavalla

$$\begin{aligned}
a_k^f &= \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(2\pi\omega_k t)\,dt \\
&= \frac{2}{p}\int_0^p ((\gamma g(t) + \lambda h(t))\cos(2\pi\omega_k t))\,dt \\
&= \frac{2}{p}\int_0^p \gamma g(t)\cos(2\pi\omega_k t)\,dt + \frac{2}{p}\int_0^p \lambda h(t)\cos(2\pi\omega_k t))\,dt \\
&= \gamma\frac{2}{p}\int_0^p g(t)\cos(2\pi\omega_k t)\,dt + \lambda\frac{2}{p}\int_0^p h(t)\cos(2\pi\omega_k t))\,dt \\
&= \gamma a_k^g + \lambda a_k^h.
\end{aligned}$$

Ja kerroin $b_k^f = \gamma b_k^g + \lambda b_k^h$ saadaan samoin.

Näytetään sitten, että

$$F.S.[\gamma g + h]_t = \gamma F.S.[g]_t + F.S.[h]_t.$$

Siis että

$$\begin{aligned}
F.S.[\gamma g + h]_t &= (\gamma a_0^g + a_0^h) + \sum_{k=1}^{\infty}[(\gamma a_k^g + a_k^h)\cos(2\pi\omega_k t) + (\gamma b_k^g + b_k^h)\sin(2\pi\omega_k t)] \\
&= \gamma[a_0^g + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k^g\cos(2\pi\omega_k t) + b_k^g\sin(2\pi\omega_k t)]] \\
&\quad + [a_0^h + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k^h\cos(2\pi\omega_k t) + b_k^h\sin(2\pi\omega_k t)]] \\
&= \gamma F.S.[g]_t + F.S.[h]_t.
\end{aligned}$$

□

Lause 8 (Skaalaus)**.** *Olkoon f paloittain jatkuva ja jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on p, ja Fourier-sarja on*

$$F.S[f]|_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi\omega_k t) + b_k \sin(2\pi\omega_k t))$$

Jos funktio $g(t) = f(\alpha t)$ jollain $\alpha > 0$, niin g on paloittain jatkuva ja jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on $p' = \frac{p}{\alpha}$. (Tästä seuraa, että $\omega'_k = \frac{k}{p'} = \alpha\omega_k$.)

Funktion $g(t)$ Fourier-sarja on silloin

$$F.S[g]|_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi\omega'_k t) + b_k \sin(2\pi\omega'_k t))$$

Taajuus ja jaksonpituus muuttuvat, mutta muuten funktion f ominaisuudet säilyvät, eli sen kertoimet a_k ja b_k ovat samat.

Todistus. Olkoon f paloittain jatkuva ja jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on p, ja Fourier-sarja on

$$F.S[f]|_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi\omega_k t) + b_k \sin(2\pi\omega_k t)).$$

Olkoon paloittain jatkuva ja jaksollinen funktio $g(t) = f(\alpha t)$ jollain $\alpha > 0$, ja sen jakson pituus on $p' = \frac{p}{\alpha}$. Silloin siis $\omega'_k = \frac{k}{p'} = \alpha\omega_k$.

Koska funktio g on jatkuva ja jaksollinen, voidaan siitä muodostaa Fourier-sarja. Silloin

$$F.S[g]|_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi\omega_k\alpha t) + b_k \sin(2\pi\omega_k\alpha t))$$

jonka kertoimet ovat

$$a'_k = \frac{2}{p'}\int_0^{p'} f(\alpha t)\cos(2\pi\omega_k\alpha t)\,dt$$

ja

$$b'_k = \frac{2}{p'}\int_0^{p'} f(\alpha t)\sin(2\pi\omega_k\alpha t)\,dt.$$

Määriteltiin aiemmin, että $\alpha\omega_k = \omega'_k$, joten

$$F.S[g]|_t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi\omega'_k t) + b_k \sin(2\pi\omega'_k t)).$$

Tarkastellaan lukua a'_k:

$$a'_k = \frac{2}{p'}\int_0^{p'} f(\alpha t)\cos(2\pi\alpha\omega_k t)\,dt.$$

Sijoitetaan $\alpha t = x$, jolloin $\alpha\, dt = dx$, ja integraalin yläraja $p' = \frac{p}{\alpha}$ muuttuu p:ksi. Saadaan siis

$$a'_k = \frac{2}{\frac{p}{\alpha}} \int_0^p f(x) \cos(2\pi\omega_k x) \frac{1}{\alpha}\, dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos(2\pi\omega_k x)\, dx$$

eli $a'_k = a_k$. Kertoimet $b'_k = b_k$ saadaan samalla tavalla. $\square$

3 Fourier-sarjan suppeneminen

Tässä luvussa tarkastellaan Fourier-sarjan suppenemista ensin funktion normin suhteen ja sitten pisteittäin. Luku mukailee Howellin [2] kirjan lukuja 13 ja 14.

3.1 Fourier-sarjan suppeneminen normin suhteen

Vektoreilla normi on määritelty $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Normi voidaan muodostaa myös funktioille. Määritellään funktion normi sisätulon kautta.

Määritelmä 9 (Sisätulo)**.** *Olkoon f ja g paloittain jatkuvia funktioita ja $[\alpha, \beta]$ jokin äärellinen reaalilukuväli. Silloin funktioiden f ja g sisätulo on*

$$\langle f|g\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g^*(t)\,dt,$$

missä $g^*(t)$ on funktion arvoa $g(t)$ vastaava kompleksikonjugaatti eli liittoluku. Jos funktio g on reaalinen välillä $[\alpha, \beta]$, funktioden f ja g sisätulo on

$$\langle f|g\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)\,dt.$$

Määritelmä 10 (Funktion normi)**.** *Olkoon f funktio ja $[\alpha, \beta]$ jokin funktion väli. Funktion normi on*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle},$$

mikä tarkoittaa, että

$$\|f\| = \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t)f^*(t)\,dt\right]^{1/2} = \left[\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}.$$

Tästä määritelmästä seuraa, että funktion normi $\|f\| > 0$ aina, jos funktio f on jatkuva ja nollasta eroava välillä $[\alpha, \beta]$.

Esimerkki 11. Olkoon väli $[\alpha, \beta] = [0, p]$, missä p on mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Silloin vakiofunktion 1 normi on

$$\|1\|^2 = \left[\int_0^p |1|^2\,dx\right] = \Big/_{0}^{p} x = p.$$

Funktioiden sisätulolle on voimassa Cauchy-Schwarzin epäyhtälö [6].

Lause 12 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö funktioiden sisätulolle)**.** *Olkoon f ja g paloittain välillä $[\alpha, \beta]$ jatkuvia funktioita. Silloin*

$$|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|.$$

Määritellään sitten, mitä Fourier-sarjan suppenemisella normin suhteen tarkoitetaan.

Määritelmä 13. *Olkoon f jaksollinen, paloittain jatkuva funktio, jonka jakson pituus on p ja sen Fourier-sarja*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Sanotaan, että Fourier-sarja suppenee funktion f normin suhteen*, jos*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \|f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t}\| = 0.$$

Normin suhteen suppenemisen todistaminen etenee lemmojen avulla. Tarkastellaan ensin paloittain sileän ja jaksollisen funktion Fourier-sarjan suppenemista normin suhteen.Tavoitteena on todistaa sopivien tulosten avulla, että paloittain jatkuvan ja jaksollisen funktion Fourier-sarja suppenee normin suhteen.

Merkitään ensin, että

$$f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} = E_{MN}(t).$$

Voidaan siis kirjoittaa määritelmän 13 yhtälö muotoon

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \|E_{MN}(t)\| = 0.$$

Ja käyttämällä funktion normin määritelmää 10 voidaan kirjoittaa ylemmät yhtälöt muodossa

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \int_{jakso} \left[f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \right]^2 dt = 0$$

ja sama vähän lyhyemmin

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \int_{jakso} [E_{MN}(t)]^2 \, dt = 0.$$

Tarkastellaan sitten Fourier-sarjan itseistä (engl. absolute) suppenemista käyttämällä näitä merkintätapoja.

Lemma 14. *Jatkuvan, paloittain sileän ja jaksollisen funktion Fourier-sarja suppenee funktion normin suhteen.*

Todistus. Olkoon f jatkuva, paloittain sileä ja jaksollinen funktio. Howellin lauseen 13.7 [2, lause 13.7] perusteella on olemassa sellainen vakio B, että

$$|E_{MN}(t)| \leq \left[\frac{1}{\sqrt{|M|}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \right] B$$

kaikille $t \in \mathbb{R}$ ja $M, N \in \mathbb{Z}$ siten, että $M < 0 < N$.

Silloin

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \int_{jakso} |E_{MN}(t)|^2 \leq \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \int_{jakso} \left| \left[\frac{1}{\sqrt{|M|}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \right] B \right|^2 dt$$
$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \left| \left[\frac{1}{\sqrt{|M|}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \right] B \right|^2 p = 0 \cdot p = 0$$

missä p on jakson pituus. $\square$

Tarkastellaan sitten määritelmän 13 normia

$$\left\| f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \right\|^2,$$

ja merkitään $\sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} = S_f(t)$. Saadaan

$$\begin{aligned} \left\| f - S_f \right\|^2 &= \langle f - S_f | f - S_f \rangle \\ &= \langle f|f \rangle - \langle f|S_f \rangle - \langle S_f|f \rangle + \langle S_f|S_f \rangle \end{aligned}$$

Sijoitetaan S_f tilalle alkuperäinen summa ja tarkastellaan yhtälön termejä. Silloin siis

$$\begin{aligned} \langle f|f \rangle &= ||f||^2, \\ \langle f|S_f \rangle &= \langle f| \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \rangle = \sum_{k=M}^{N} c_k^* \langle f|e^{i2\pi\omega_k t} \rangle = \sum_{k=M}^{N} c_k^* (c_k ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2) \\ &= \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2, \\ \langle S_f|f \rangle &= \langle f|S_f \rangle^* = (\sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2)^* = \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2 \\ \langle S_f|S_f \rangle &= \langle \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} | \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \rangle = \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan erikseen lasketut termit ja saadaan

$$\begin{aligned} \left\| f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \right\|^2 &= ||f||^2 - \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2 - \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2 \\ &\quad + \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2 \\ &= ||f||^2 - \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 ||e^{i2\pi\omega_k t}||^2 \\ &= ||f||^2 - p \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Määritelmän 13 mukaan Fourier-sarja suppenee normin suhteen, jos funktion ja sen Fourier-sarjan osasummien erotusten normit lähestyvät nollaa. Eli kun

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} (||f||^2 - p\sum_{k=M}^{N} |c_k|^2) = 0.$$

Muotoillaan tästä lause, joka yhtäpitävän ehdon sille, että jaksollisen, paloittain jatkuvan funktion f Fourier-sarja suppenee normin suhteen.

Lause 15. *Olkoon f jaksollinen, paloittain jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja on*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Fourier-sarja suppenee funktion f normin suhteen jos ja vain jos

$$p\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = ||f||^2.$$

Lauseen todistamisessa käytetään avuksi Besselin epäyhtälöä, Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä ja Parsevalin identiteettiä.

Lause 16 (Besselin epäyhtälö Fourier-sarjalle)**.** *Olkoon f jaksollinen ja paloittain jatkuva funktio, jonka jakson pituus on p, ja jonka Fourier-sarja on*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Silloin

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{p} \int\limits_{jakso} |f(t)|^2\, dt$$

Todistus. Olkoon f integroituva välillä $[-p/2, p/2]$ ja

$$\int_{-p/2}^{p/2} f(t)^2\, dt < \infty,$$

ja sen Fourier-sarja

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Ennen lemmaa laskettiin auki, että

$$\left\| f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \right\|^2 = ||f||^2 - p\sum_{k=M}^{N} |c_k|^2.$$

Tiedetään myös funktion normin määritelmän 10 perusteella, että

$$\left\| f(t) - \sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \right\|^2 \geq 0,$$

joten

$$p \sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 \leq ||f||^2.$$

Kun jaetaan vielä yhtälö puolittain jakson pituudella p, saadaan

$$\sum_{k=M}^{N} |c_k|^2 \leq \frac{1}{p} ||f||^2.$$

□

Lause 17 (Parsevalin identiteetti)**.** *Olkoot f ja g kaksi paloittain jatkuvaa, jaksollista funktiota, joiden jakson pituus on sama p. Olkoon niiden funktioiden Fourier-sarjat*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{i2\pi\omega_k t} \quad ja \quad F.S.[g]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Oletetaan lisäksi, että g on jatkuva ja paloittain sileä. Silloin

1. $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k^*$$

   suppenee itseisesti ja

2. $$\langle f|g\rangle = p \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k^*$$

Todistus. Besselin epäyhtälö (lause 16) perusteella tiedetään, että

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \leq \frac{1}{p} ||f||^2 \quad ja \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|^2 \leq \frac{1}{p} ||g||^2.$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön ([2, Theorem 4.8]) perusteella voidaan arvioida, että

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k g_k^*| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k||g_k| \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{p} ||f|| \, ||g||,$$

mikä todistaa siis itseisen suppenemisen.

Nyt jokaiselle $M, N \in \mathbb{Z}$ ja $M < 0 < N$ on

$$E_{MN}(t) = g(t) - \sum_{k=M}^{N} g_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Koska g on oletuksen mukaan jatkuva ja paloittain sileä, niin lemman 14 perusteella tiedetään, että $||E_{MN}|| \to 0$ kun $(M, N) \to (-\infty, \infty)$ (Eli E_{MN} lähestyy nollaa, kun M lähestyy $-\infty$ ja N lähestyy ∞.) Cauchy-Schwarzin epäyhtälön perusteella (lause 12)

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} |\langle f|E_{MN}\rangle| \leq \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} ||f||\,||E_{MN}|| = 0$$

mutta

$$\begin{aligned}
\langle f|E_{MN}\rangle &= \int_{jakso} f(t)(g(t) - \sum_{k=M}^{N} g_k e^{i2\pi\omega_k t})^*\, dt \\
&= \int_{jakso} f(t)g^*(t)\, dt - \sum_{k=M}^{N} g_k^* \int_{jakso} f(t)e^{-i2\pi\omega_k t}\, dt \\
&= \langle f|g\rangle - \sum_{k=M}^{N} g_k^* p f_k.
\end{aligned}$$

Silloin

$$\langle f|g\rangle = \langle f|E_{MN}\rangle + p\sum_{k=M}^{N} f_k g_k^*$$

ja kun käytetään edellistä yhtälöä, saadaan

$$\langle f|g\rangle = \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \left[\langle f|E_{MN}\rangle + p\sum_{k=M}^{N} f_k g_k^*\right] = 0 + p\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k^*$$

□

Kuten on lähteessä [2, p. 170] todetaan, lauseesta 17 voidaan poistaa oletus siitä, että g on jatkuva ja paloittain sileä. Kun valitaan $g = f$ lauseessa 17, saadaan Besselin yhtälö.

Seuraus 18 (Besselin yhtälö)**.** *Olkoon f paloittain jatkuva ja jaksollinen funktio, jonka Fourier-sarja on*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Silloin

$$||f||^2 = p\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \tag{3.1}$$

Ja näillä voidaan siis todistaa lause 15, eli paloittain jatkuvan ja jaksollisen funktion Fourier-sarja suppenee normin suhteen.

Lauseen 15 todistus. Olkoon f jaksollinen, paloittain jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja on

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Määritelmän 13 perusteella Fourier-sarja suppenee normin suhteen jos

$$\left\| f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t} \right\|^2 = 0,$$

eli jos

$$||f||^2 - p \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 0.$$

Besselin epäyhtälön perusteella tiedetään, että

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{p}||f||^2$$

ja Parsevalin identiteetin avulla saadaan seurauksena Besselin yhtälö (3.1), jolloin

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{p}||f||^2.$$

Siis jaksollisen ja paloittain jatkuvan funktion f Fourier-sarja suppenee normin suhteen. □

3.2 Fourier-sarjan pisteittäinen suppeneminen

Tässä osiossa todistetaan, että Fourier-sarja suppenee pisteittäin kohti funktiota f sopivilla lisäoletuksilla.

Lause 19. *Olkoon f jaksollinen ja paloittain jatkuva ja sen Fourier-sarja*

$$F.S[f]|_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Oletetaan, että funktio f on myös paloittain sileä välillä $[a, b]$ ja t_0 on mielivaltainen piste samalta väliltä.

Silloin

1. *jos $f(t)$ on jatkuva pisteessä t_0, niin sarja $F.S[f]|_{t_0}$ suppenee ja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} = f(t_0).$$

2. *jos $f(t)$ on epäjatkuva pisteessä t_0, niin*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} = \frac{1}{2}\left[\lim_{\tau\to t_0^-} f(\tau) + \lim_{\tau\to t_0^+} f(\tau)\right].$$

Todistetaan pisteittäinen suppeneminen tarkastelemalla ensin muutamaa lemmaa.

Määritelmä 20. *Geometrisen sarjan osasumma voidaan laskea käyttämällä kaavaa*

$$\sum_{k=M}^{N} X^k = \frac{X^M - X^{N+1}}{1-X},$$

missä M ja N ovat mitkä tahansa kokonaisluvut siten, että $M < N$ ja X on mikä tahansa kompleksiluku paitsi 1 tai 0.

Aputulos 21. *Sijoittamalla geometrisen sarjan osasumman kaavaan X:n tilalle $e^{-ik\gamma x}$, saadaan*

$$\sum_{k=M}^{N} e^{-ik\gamma x} = \frac{e^{-iM\gamma x} - e^{-i(N+1)\gamma x}}{1-e^{-i\gamma x}}.$$

Yhtälö pitää paikkansa kaikilla muilla γx arvoilla, paitsi kun $\gamma x = 2\pi n$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Sijoittamalla $M = -N$, käyttämällä geometrisen sarjan osasumman kaavaa ja sinin ominaisuuksien perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\gamma x} &= \sum_{k=0}^{N} e^{ik\gamma x} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i(k+1)\gamma x} \\ &= \frac{1-e^{i(N+1)\gamma x}}{1-e^{i\gamma x}} + \frac{1-e^{-iN\gamma x}}{1-e^{i\gamma x}}\end{aligned}$$

Lemma 22. *Olkoon $p > 0$ ja M ja N kokonaislukuja siten, että $M < 0 < N$. Olkoon $\gamma = \frac{2\pi}{p}$, ja*

$$\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left[\sum_{k=M}^{N} e^{-ik\gamma x}\right] dx = p$$

sekä

$$\int_{\frac{-p}{2}}^{0} \left[\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\gamma x}\right] dx = \int_{0}^{\frac{p}{2}} \left[\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\gamma x}\right] dx = \frac{p}{2}$$

Todistus. Tarkastellaan integraalia termeittäin. Siis

$$\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left[\sum_{k=M}^{N} e^{-ik\gamma x}\right] dx = \sum_{k=M}^{N} \int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} e^{-ik\gamma x}\, dx.$$

Integroidaan ja sijoitetaan $\gamma = \frac{2\pi}{p}$, jolloin

$$\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} e^{-ik\gamma x}\, dx = \frac{2\sin(\gamma k p/2)}{\gamma k} = \frac{p\sin(\pi k)}{\pi k} = p.$$

□

Lemma 23 (Riemann-Lebesgue)**.** *Olkoon $p > 0$ ja oletetaan että g on paloittain jatkuva funktio välillä $\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}$.Olkoon $\gamma = \frac{2\pi}{p}$ ja k kokonaisluku. Silloin*

$$\lim_{k \to \pm\infty} \int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} g(x) e^{-ik\gamma x} = 0$$

Todistus. Oletetaan että g on jaksossaan jatkuva ja integroituva funktio, jonka jakson pituus on p. Merkitään

$$\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} g(x) e^{-ik\gamma x} \, dx = c_k$$

Besselin epäyhtälön 16 perusteella

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq ||g||^2 < \infty$$

eli c_k neliöiden summa on äärellinen. Silloin $c_k \to 0$, kun $k \to \infty$. □

Määritelmä 24 (Dirichlet'n ydin)**.** *Olkoon $p > 0$ ja M ja N kaksi kokonaislukua siten, että $M < N$. Niitä vastaava Dirichlet'n ydin*

$$D_{M,N}(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=M}^{N} e^{-i2\pi\omega_k x},$$

missä $\omega_k = \frac{k}{p}$.

Leevi Annala on pro gradu -tutkielmassaan [8] luvussa 2.2 todistanut Dirichlet'n ytimelle eri ominaisuuksia, joita tässä ei käydä läpi.

Valitaan $\gamma = \frac{2\pi}{p}$, ja sijoitetaan se Dirichlet'n ytimen yhtälöön ja saadaan

$$D_{M,N}(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=M}^{N} e^{-ik\gamma x}.$$

Aputuloksen 21 avulla saadaan, että

$$D_{M,N}(x) = \frac{e^{-iM\gamma x} - e^{-i(N+1)\gamma x}}{p[1 - e^{-i\gamma x}]} = \frac{e^{-i2\pi\omega} M^x - e^{-i2\pi\omega} N + 1^x}{p[1 - e^{-i2\pi\omega_1 x}]}.$$

Oletetaan, että $M < 0 < N$. Silloin Lemman 22 perusteella

$$\int_{-p/2}^{p/2} D_{M,N}(x) \, dx = 1$$

ja

$$\int_{-p/2}^{0} D_{-N,N}(x)\,dx = \int_{0}^{p/2} D_{-N,N}(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Dirichlet'n ytimet ovat Fourier-sarjan pisteittäisen suppenemisen todistamisessa olennaisia, koska jokainen Fourier-sarjan osasumma voidaan ilmaista funktion f siirron ja Dirichlet'n ytimen tulon integraalina. Todistetaan tämä seuraavaksi.

Lemma 25. *Olkoon f jaksollinen, ja jaksossaan jatkuva funktio, jonka jakson pituus on p. Silloin*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} = \int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x) D_{M,N}(x)\,dx.$$

Todistus. Olkoon f jaksollinen ja jaksossaan jatkuva funktio, jonka

$$F.S[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Millä tahansa kokonaisluvulla k ja funktion f arvolla t_0

$$\begin{aligned}
c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} &= \left(\frac{1}{p}\int_{t_0-p/2}^{t_0+p/2} f(\tau)e^{-i2\pi\omega_k\tau}\,d\tau\right)e^{i2\pi\omega_k t_0} \\
&= \frac{1}{p}\int_{t_0-p/2}^{t_0+p/2} f(\tau)e^{-i2\pi\omega_k(\tau-t_0)}\,d\tau \\
&= \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x)e^{-i2\pi\omega_k x}\,dx.
\end{aligned}$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x)e^{-i2\pi\omega_k x}\,dx \\
&= \int_{-p/2}^{p/2} \frac{1}{p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_0+x)e^{-i2\pi\omega_k x}\,dx \\
&= \int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x)\left(\frac{1}{p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega_k x}\right)dx.
\end{aligned}$$

Integraalin loppuosa on Dirichlet'n ydin (määritelmä 24), eli voidaan kirjoittaa yhtälö uudelleen muotoon

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} = \int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x) D_{M,N}(x)\,dx.$$

$\square$

Käytetään tätä juuri todistettua lemmaa hyödyksi ja todistetaan seuraavat kaksi lemmaa kerralla.

Lemma 26. *Olkoon f jaksollinen ja paloittain jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja on*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Olkoon t_0 mikä tahansa piste, jossa $f(t)$ on jatkuva. Silloin kaikille kokonaisluvuille $M < 0 < N$ pätee

$$\sum_{k=M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} = \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f(t_0)] D_{M,N}(x)\, dx + f(t_0).$$

Lemma 27. *Olkoon f jaksollinen ja paloittain jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja on*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Olkoon t_0 reaaliluku, ja

$$f_0^- = \lim_{x\to 0^-} f(t_0+x)$$

ja

$$f_0^+ = \lim_{x\to 0^+} f(t_0+x).$$

Silloin, kun N on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku,

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t_0} = \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f(x)] D_{-N,N}(x)\, dx + \frac{1}{2}[f_0^- + f_0^+],$$

missä

$$f_0(x) = \begin{cases} f_0^- \text{ kun } x < 0 \\ f_0^+ \text{ kun } x > 0. \end{cases}$$

Todistus. Todistetaan kaksi edellistä lemmaa kerralla.

Olkoon $f_0(x)$, f_0^- ja f_0^+ kuten lemmassa 27 on määritelty. Silloin

$$\int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x) D_{M,N}(x)\, dx = \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f_0(x) + f_0(x)] D_{M,N}(x)\, dx$$

$$= \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f_0(x)] D_{M,N}(x)\, dx + \int_{-p/2}^{p/2} f_0(x) D_{M,N}(x)\, dx.$$

Jos f on jatkuva pisteessä t_0, $f_0^- = f(t_0) = f_0^+$, ja $f_0(x) = f(t_0)$ kaikilla x. Määritelmän 24 mukaan Dirichlet'n ytimen arvo on 1 tällä välillä. Millä tahansa $M < 0 < N$, kun M, N ovat kokonanaislukuja, saadaan että

$$\begin{aligned}\int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x)D_{M,N}(x)\,dx &= \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f(t_0)D_{M,N}(x)\,dx + f(t_0)\int_{-p/2}^{p/2} D_{M,N}(x)\,dx. \\ &= \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f(t_0)]D_{M,N}(x)\,dx + f(t_0).\end{aligned}$$

Jos taas funktion f ei oleteta olevan jatkuva ja $M = -N$, jaetaan integraalin jakso puoliksi, ja tarkastellaan pistettä t_0 sekä oikealta että vasemmalta puolelta. Silloin määritelmän 24 ja lemman 25 perusteella

$$\begin{aligned}\int_{-p/2}^{p/2} f(t_0+x)D_{-N,N}(x)\,dx &= \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f(x)]D_{-N,N}(x)\,dx \\ &\quad + \int_{-p/2}^{0} f_0^- D_{-N,N}(x)\,dx + \int_{0}^{p/2} f_0^+ D_{-N,N}(x)\,dx \\ &= \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f(x)]D_{-N,N}(x)\,dx + \frac{1}{2}[f_0^- + f_0^+].\end{aligned}$$

□

Ja nyt päästään todistamaan näillä aputuloksilla lause 19. Eli todistetaan että jaksollisen ja paloittain jatkuvan funktion Fourier-sarja suppenee pisteittäin.

Lauseen 19 todistus. Olkoon f jaksollinen, paloittain jatkuva reaalifunktio, joka on välillä (α, β) sileä. Olkoon t_0 piste tällä välillä. Ja

$$f_0^- = \lim_{x\to 0^-} f(t_0+x)$$

ja

$$f_0^+ = \lim_{x\to 0^+} f(t_0+x).$$

ja

$$f_0(x) = \begin{cases} f_0^- \text{ kun } x < 0 \\ f_0^+ \text{ kun } x > 0. \end{cases}$$

Jos $f(t_0)$ on jatkuva pisteessä t_0, niin $f_0(x) = f(t_0)$ sekä oikealta että vasemmalta lähestyttäessä.

Olkoon $M < 0 < N$ kokonaislukuja, ja $D_{M,N}$ niitä vastaava Dirichletin ydin funktiolle f, ja

$$F.S[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Todistetaan siis, että

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to-\infty}} \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f_0(x)] D_{M,N}(x)\, dx = 0$$

Tutkitaan ensin integraalia. Dirichlet'n ytimen määritelmän 24 ja aputuloksen 21 perusteella

$$\begin{aligned}\int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f_0(x)] D_{M,N}(x)\, dx &= \int_{-p/2}^{p/2} [f(t_0+x) - f_0(x)] [\frac{e^{-iM\gamma x} - e^{-i(N+1)\gamma x}}{p[1-e^{-i\gamma x}]}]\, dx \\ &= \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} g(x) e^{-iM\gamma x} - \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} g(x) e^{-i(N+1)\gamma x}\, dx\end{aligned}$$

missä $\gamma = \frac{2\pi}{p}$ ja $g(x) = \frac{f(t_0+x)-f_0(x)}{1-e^{-i\gamma x}}$.

Eli todistetaan, että

$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_{-p/2}^{p/2} g(x) e^{-ik\gamma x}\, dx = 0.$$

Riemann-Lebesguen lemman 23 perusteella yhtälö pitää paikkansa, jos g on paloittain jatkuva välillä $(-p/2, p/2)$. Joten osoitetaan että

$$g(x) = \frac{f(t_0+x) - f_0(x)}{1 - e^{-i\gamma x}}$$

on jatkuva tällä välillä.

Tarkastellaan nimittäjää

$$1 - e^{-i\gamma x} = 1 - \cos(\frac{2\pi}{p}x) + i\sin(\frac{2\pi}{p}x).$$

Nimittäjä on siis nollasta eroava ja jatkuva kaikilla x arvoilla, kun $-p/2 \leq x < 0$ tai $0 < x \leq p/2$. Silloin siis on olemassa äärellisinä raja-arvot

$$\lim_{x\to p/2+} g(x)\ ja \lim_{x\to p/2-} g(x),$$

ja ainoat epäjatkuvuuskohdat ovat $x = 0$ tai kun $f(t_0+x)$ on hyppy.

Tarkastellaan funktion g epäjatkuvuuskohtaa kun $x = 0$. Varmistetaan, että sekin on hyppy. Osoitetaan siis, että oikealta ja vasemmalta lähestyttäessä g:n raja-arvot ovat äärellisiä.

Oikealta lähestyttäessä raja-arvo on siis

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(t_0+x) - f_0(x)}{1 - e^{-i\gamma x}}.$$

Osoittaja ja nimittäjä lähestyvät nollaa, ja koska f on paloittain sileä, voidaan käyttää l'Hôpitalin sääntöä. Silloin

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(t_0+x) - f_0(x)}{1 - e^{-i\gamma x}} &= \lim_{x\to 0+} \frac{D[f(t_0+x) - f_0(x)]}{D[1 - e^{-i\gamma x}]} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{f'(t_0+x)}{i\gamma e^{-i\gamma x}} \\
&= \frac{1}{i\gamma} \lim_{x\to 0+} f'(t_0+x).
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \frac{1}{i\gamma} \lim_{x\to 0-} f'(t_0+x)$$

Koska $f(t)$ on paloittain sileä , vasemmalta ja oikealta lähestyttäessä $f'(t)$ raja-arvot kohdassa $t = t_0$ ovat olemassa äärellisinä. Silloin myös $g(x)$ raja-arvot oikealta ja vasemmalta ovat olemassa äärellisinä kun $x = 0$. $\square$

4 Fourier-sarjan derivaatta ja sen suppeneminen

Tässä luvussa tutkitaan Fourier-sarjan derivaattaa ja sen suppenemista. Luku mukailee Howellin kirjan [2] kappaletta 15.

4.1 Derivaatta

Määritelmä 28. *Olkoon f jaksollinen ja paloittain sileä funktio, jonka Fourier-sarja ja derivaatan Fourier-sarja ovat*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t} F.S.[f']_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

missä $\omega_k = k/p$, kun p on jakson pituus. Ja niiden vakiot c_k ja d_k ovat

$$c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)e^{-i2\pi\omega_k t}dt$$

ja

$$d_k = \frac{1}{p}\int_0^p f'(t)e^{-i2\pi\omega_k t}dt$$

Lemma 29. *Olkoon f jatkuva, paloittain sileä ja jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on p ja*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

Silloin

$$F.S.[f']_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i2\pi\omega_k c_k e^{i2\pi\omega_k t} = \frac{i2\pi}{p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

Todistus. Kun f on jatkuva ja paloittain sileä funktio, voidaan käyttää osittaisintegrointia ja saadaan d_k muotoon

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{p}\int_0^p f'(t)e^{-i2\pi\omega_k t}dt \\ &= f(t)e^{-i2\pi\omega_k t}|_0^p - \int_0^p f(t)[-i2\pi\omega_k e^{-i2\pi\omega_k t}]dt \\ &= [f(p)e^{-i2\pi\omega_k p} - f(0)e^0] + i2\pi\omega_k c_k. \end{aligned}$$

Funktion f jaksollisuuden ja jatkuvuuden vuoksi

$$f(p)e^{-i2\pi\omega_k p} - f(0)e^0 = f(0)e^{i2\pi k} - f(0) = 0$$

jolloin yhtälö sievenee

$$d_k = i2\pi\omega_k c_k = \frac{i2\pi k}{p} c_k$$

□

Lause 30. *Olkoon f jaksollinen, paloittain jatkuva ja sileä funktio, jonka jakson pituus on p. Olkoon sen Fourier-sarja*

$$F.S[f]|_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Jos derivaatta f' on myös paloittain sileä, niin

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

suppenee kaikilla t arvoilla, joilla f' on jatkuva. Ja paloittain jatkuvilla funktioilla

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[c_k e^{i2\pi\omega_k t}\right] = \frac{i2\pi}{p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

Todistus. Funktio f on paloittain sileä, joten myös sen derivaatta f' on paloittain jatkuva. Kappaleessa 3 todistettiin jaksollisen ja paloittain jatkuvan funktion suppeneminen pisteittäin (lause 19). □

Esimerkki 31. Tutkitaan funktion $f(t) = |\sin(t)|$ derivaattaa.

Funktion jakson pituus $p = \pi$, jolloin $\omega = \frac{k}{\pi}$. Funktion eksponenttimuotoinen Fourier-sarja on muodostettu esimerkissä 5, ja se on

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{i2kt}$$

Funktio f on jaksossaan jatkuva ja derivoituva kaikkialla muualla paitsi välin päätepisteissä, ja sen derivaatta f' on paloittain jatkuva ja derivoituva. ($f'(t) = \cos(t)$ kun $|t| < \pi$) Silloin

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{i2kt}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{i4kt}{\pi(1-4k^2)} e^{i2kt}$$

Fourier-sarjan derivaatan suppenemisen seurauksena on, että sopiville funktioille voidaan muodostaa Fourier-sarjan korkeamman asteen derivaatta, eli derivoida n kertaa.

Seuraus 32 (Korkeamman asteen derivaatta)**.** *Olkoon f jaksollinen ja jatkuva funktio, jakson pituus p ja Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku m, ja funktio f on $(m-1)$ kertaa derivoituva ja $f^{(m-1)}$ on jatkuva ja paloittain sileä. Silloin

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^m c_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

suppenee kaikilla t:n arvoilla, joilla $f^{(m)}$ on jatkuva. Funktio on paloittain jatkuva, joten

$$f^m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dt^m}\left[c_k e^{i2\pi\omega_k t}\right] = \left(\frac{i2\pi}{p}\right)^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^m c_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

4.2 Derivaatta ja suppeneminen

Tutkitaan derivaatan Fourier-sarjan suppenemista. Seuraavan lauseen todistamista varten on hyödyllistä tutkia Fourier-sarjan vakiotermejä c_k ja derivaatan Fourier-sarjan vakiotermejä d_k.

Aputulos 33. *Olkoon f jaksollinen ja paloittain sileä funktio, jonka Fourier-sarja ja derivaatan Fourier-sarja ovat*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t} F.S.[f']_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i2\pi\omega_k t}$$

missä $\omega_k = k/p$.

Lemman 29 perusteella

$$d_k = \frac{i2\pi k}{p} c_k$$

ja

$$d_0 = \frac{i2\pi 0}{p} c_0 = 0.$$

Kun otetaan yhtälöstä puolittain itseisarvo ja ratkaistaan se c_k suhteen, saadaan

$$|c_k| = \frac{p}{|k|2\pi}|d_k|.$$

Ja määritelmän 28 avulla saadaan arvioitua, että

$$\begin{aligned} |d_k| &= |\frac{1}{p}\int_0^p f'(t)e^{-i2\pi\omega_k t}dt| \\ &\leq \frac{1}{p}\int_0^p |f'(t)e^{-i2\pi\omega_k t}|dt = \frac{1}{p}\int_0^p |f'(t)|dt \end{aligned}$$

Ja sijoittamalla tämä tulos aiempaan yhtälöön, saadaan että

$$|c_k| \leq \frac{1}{|k|2\pi}\int_0^p |f'(t)|dt.$$

Tätä aputulosta hyödyntäen todistetaan siis, että Fourier-sarjan derivaatta suppenee.

Lause 34. *Olkoon f jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on p ja*

$$F.S.[f]_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}.$$

Oletetaan, että funktio f on paloittain sileä ja jatkuva, ja olkoon

$$B = \frac{p}{2\pi}(p \int_{jakso} |f'(t)|^2 dt)^{1/2}$$

Silloin

1. *Sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ suppenee itseisesti ja jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle N pätee*
$$\sum_{k=-\infty}^{-N-1} |c_k| \leq \frac{B}{\sqrt{N}}$$
ja
$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{B}{\sqrt{N}}.$$

2. *Fourier-sarja suppenee tasaisesti funktion f suhteen, ja kaikille reaaliarvoisille t ja kaikille kokonaisluvuille M ja N pätee*
$$|f(t) - \sum_{k=-M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t}| \leq \left[\frac{1}{\sqrt{M}} + \frac{1}{\sqrt{N}}\right] B$$

Todistus. Todistetaan ensin lauseen ensimmäinen osa. Molemmat raja-arvot ovat samanlaisia, joten riittää todistaa toiselle.

Olkoon N positiivinen kokonaisluku.

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön 12 perusteella

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p}{2\pi k}|d_k| = \frac{p}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k}|d_k| = \frac{p}{2\pi}(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^{1/2}(\sum_{k=N+1}^{\infty} |d_k|^2)^{1/2}.$$

Integraalitestin perusteella

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{N}$$

sarja suppenee.

Tarkastellaan d_k Besselin epäyhtälön 16 avulla, ja saadaan

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |d_k|^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |d_k|^2 \leq \frac{1}{p} \int_{jakso} |f'(t)|^2 dt.$$

Sijoittamalla yhtälön loppuosa aiempaan yhtälöön voidaan arvioida, että

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{p}{2\pi}(\frac{1}{N})^{1/2}(\frac{1}{p}\int_{jakso} |f'(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella on vakio B. Saadaan siis, että

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \leq (\frac{1}{N})^{1/2} B = \frac{B}{\sqrt{N}}. \tag{4.1}$$

Todistetaan sitten lauseen jälkimmäinen osa.

Funktio f on jatkuva ja paloittain sileä, joten voidaan käyttää jo edellisessä luvussa todistettua lausetta 19, jonka mukaan funktio f suppenee pisteittäin kaikilla t:n arvoilla. Joten

$$\begin{aligned}
|f(t) - \sum_{k=-M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t}| &= |\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t} - \sum_{k=-M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t}| \\
&= |\sum_{k=-\infty}^{-M-1} c_k e^{i2\pi\omega_k t} + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k e^{i2\pi\omega_k t}| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{-M-1} |c_k e^{i2\pi\omega_k t}| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k e^{i2\pi\omega_k t}| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-M-1} |c_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k|
\end{aligned}$$

Käytetään yhtälöä 4.1 summan arvioimiseen, ja saadaan että

$$|f(t) - \sum_{k=-M}^{N} c_k e^{i2\pi\omega_k t}| \leq \frac{B}{\sqrt{M}} + \frac{B}{\sqrt{N}} = \left[\frac{1}{\sqrt{M}} + \frac{1}{\sqrt{N}}\right] B.$$

□

5 Yhteenveto

Luvussa 2 määriteltiin Fourier-sarjojen trigonometrinen ja eksponenttimuoto sekä todistettiin Fourier-sarjojen lineaarisuus. Lineaarisuutta käytettiin hyväksi myöhemmin luvussa 3, kun todistettiin Fourier-sarjan suppeneminen pisteittäin.

Tämän pro gradu-tutkielman päätuloksina todistettiin Fourier-sarjojen suppeneminen sekä normin suhteen että pisteittäin. Tässä tutkielmassa puhutaan vain suppenemisesta normin suhteen kuten Howellin teoksessa [2], mutta monissa muissa lähteissä puhutaan sen sijaan L^2-normin suhteen suppenemisesta [1] [7] .

Luvun 3 Fourier-sarjan pisteittäisen suppenemisen todistamisessa käytettiin Dirichlet'n ydintä ja sen ominaisuuksia.

J. Peter Lejeune-Dirichlet tutki ja todisti paloittain sileän funktion Fourier-sarjan suppenemisen pisteittäin. Muutamaa vuosikymmentä myöhemmin Lipot Fejer käytti Cesáro-summautuvuutta Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimisessa, ja muodosti vielä vahvemman todistuksen pisteittäin suppenemisesta. [1] Jatkolukemisena kannattaakin tutkia Fejer-ytimiä sekä Abel- ja Cesaro-summautuvuutta Fourier-sarjojen kautta esimerkiksi Sanna Vähämäen pro gradu -tutkielmasta *Fourier-sarjoista ja -muunnoksesta* [9].

Anders Vretbladin kirjassa *Fourier Analysis and Its Applications* [1] on lisää Dirichletin ja Fejerin todistuksista ja Fourier-analyysin historian kehittymistä, sekä esimerkkejä Fourier-sarjojen käytännön sovelluksista. Vretbladin kirjassa on myös oivia harjoitustehtäviä.

Fourier-sarjojen suppenemista tutkittaessa on havaittu Gibbsin ilmiö , eli funktion epäjatkuvuuskohtia lähestyttäessä Fourier-sarjan osasummat eroavat funktiosta noin 9% ylös- ja alaspäin. Tähän ilmiöön voi tutustua niin Vertbladin [1, s. 93] että Howellin [2, luku 13.2] teoksista, ja varsinkin fysiikan ja tekniikan sovelluksissa se otetaan huomioon. Luvun 2 esimerkin 5 kuvissa ilmiö on nähtävissä.

Tässä tutkielmassa käytiin pääpiirteittäin läpi Howellin *Principles of Fourier Analysis* -kirjan luvut 8-15 [2], ja kirjassaan Howell jatkaa Fourier-muunnokseen.

Lähteet

[1] Vretblad, Anders, (2003) Fourier Analysis and Its Applications (1st ed). Springer New York, NY https://iujfk.files.wordpress.com/2013/04/fourier-analysis-and-its-applications.pdf

[2] Howell, K.B. (2016). Principles of Fourier Analysis (2nd ed.). CRC Press.

[3] Cozzolino, D. (2013). Infrared Spectroscopy: Theory, Developments and Applications. Nova Science Publishers, Inc.

[4] Simo K., Nurmiainen, Riikka, Spåra, Mika (2000), M niinkuin matematiikka https://matta.hut.fi/matta2/isom/html/realfkt3.html

[5] Ghosh, Smarajit (2005) Signals and Systems, Pearson India

[6] Olver, Peter J, (2008) Numerical Analysis Lecture Notes. https://www-users.cse.umn.edu/~olver/num_/lnn.pdf

[7] Serov, Valery, (2014) Fourier series and the discrete Fourier transform, Oulun yliopisto https://www.oulu.fi/sites/default/files/content/files/series.pdf

[8] Annala, Leevi, (2017) Fourier'n sarjan suppeneminen, matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

[9] Vähämäki, Susanna, (2015) Fourier-sarjoista ja -muunnoksesta, matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos