Tampereen yliopisto

Jussi Pasanen

ÄÄRELLISULOTTEISEN LTI-SYSTEEMIN STABIILIUS

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Prof. Petteri Laakkonen
Toukokuu 2022

TIIVISTELMÄ

Jussi Pasanen: Äärellisulotteisen LTI-systeemin stabiilius
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Toukokuu 2022

Tässä kandidaatin työssä käsitellään lineaaristen aikainvarianttien systeemien stabiiliutta, jota voi olla sisäistä ja ulkoista. Stabiilius liittyy systeemin käyttäytymiseen ja sille on olemassa useita karakterisointeja. Stabiilin systeemin voidaan ajatella olevan jossain mielessä rajoitettu. Sisäinen stabiilius kuvaa systeemin sisäisen käyttäytymisen rajallisuutta ja ulkoinen stabiilius kuvaa systeemin vastauksia ulkoisen käyttäjän systeemille syöttämiin signaaleihin. Työn tavoite on esitellä lukijalle stabiiliuden tyypeistä eksponentiaalinen stabiilius sekä BIBO-stabiilius ja lisäksi kertoa näiden välisestä yhteydestä.

Työssä osoitetaan, että systeemin eksponentiaalinen stabiilius on sidonnainen sen tilamatriisin ominaisarvojen reaaliosiin. Jos kaikki ominaisarvot ovat reaaliosaltaan aidosti negatiivisia, niin systeemi on eksponentiaalisesti stabiili. Eksponentiaalisesti stabiili systeemi palaa tasapainopisteeseensä sen tasapainoa häirittäessä. Tätä voidaan soveltaa esimerkiksi auton vakionopeudensäätimessä, joka palaa maaston muutosten aiheuttamista nopeuden muutoksista huolimatta aina kuljettaman säätämään vakionopeuteen. Systeemin BIBO-stabiilius on riippuvainen sille määritellyn siirtomatriisin navoista. Jos kaikki siirtomatriisin navat ovat aidosti negatiivisia reaaliosaltaan, niin systeemi on BIBO-stabiili. BIBO-stabiili systeemi antaa rajoitetun mittaussignaalin vastauksena rajoitettuun ohjaussignaaliin, sekä lisäksi pienet muutokset ohjaussignaalissa aiheuttavat pienen muutoksen mittaussignaaliin. Tätä voidaan soveltaa esimerkiksi seurantajärjestelmissä, jossa saadun tuloksen toivotaan seuraavan tarkasti järjestelmälle annettua syöttöä.

Systeemin tilamatriisin ominaisarvojen ja siirtofunktion napojen välillä on sellainen yhteys, että tilamatriisin ohjattavat ja tarkkailtavat ominaisarvot ovat siirtofunktion napoja. Systeemin ollessa täysin ohjattava ja tarkkailtava näiden joukot ovat identtiset. Tästä seuraa, että täysin ohjattavan ja tarkkailtavan systeemin tapauksessa stabiiliuden tyyppien välillä on oltava molemminpuolinen yhteys. Eli systeemin on oltava myös ulkoisesti stabiili, jos se on sisäisesti stabiili sekä päin vastoin. Jos systeemi ei ole täysin ohjattava ja tarkkailtava, niin BIBO-stabiiliudesta ei seuraa eksponentiaalinen stabiilius. Eksponentiaalisesta stabiiliudesta kuitenkin seuraa aina BIBO-stabiilius.

Avainsanat: LTI-systeemi, eksponentiaalinen stabiilius, BIBO-stabiilius, systeemiteoria, LTI-systeemin stabiilius

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ALKUSANAT

Haluaisin erityisesti kiittää kandiohjaajaani Petteri Laakkosta mielenkiintoisen aiheen keksimisestä sekä erinomaisesta ohjaamisesta läpi työn eri vaiheiden. Haluan myös kiittää hyvää ystävääni Robertia vertaistuesta työtä tehdessäni.

Tampereella, 14. toukokuuta 2022

Jussi Pasanen

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO

Säätöteoria on systeemiteorian ala, joka käsittelee dynaamisia ohjausjärjestelmiä ja niiden ominaisuuksia. Tällaisia ohjausjärjestelmiä voidaan kuvata matemaattisesti systeemien avulla, jotka ovat abstrakteja kuvauksia ohjausjärjestelmän käyttäytymisestä. Erilaisia ohjausjärjestelmiä esitellään lähteessä [6] ensimmäisen luvun alussa. Erilaisia ohjausjärjestelmiä voi olla esimerkiksi jousen päähän asetettu massa, johon on liitetty säädeltävä vaimennin, tai lämpötilaa säätelevä ohjaussauva kemiallisessa reaktorissa. Systeemin käyttäytyminen riippuu ajanhetkestä sekä mahdollisista syöttösignaaleista, joita ulkoinen käyttäjä voi syöttää systeemille. Systeemien toiminnasta onkin oleellista tietää se, onko systeemi stabiili, eli pysyykö sen tila tai siitä tehty mittaus rajoitettuna rajoitetuilla syötteillä. Suljetun systeemin tulee olla stabiili, jotta voidaan varmistaa takaisin kytkettyjen säädinten toimiminen[7].

Sisäisesti stabiili systeemi palaa tasapainopisteeseensä sen tilaa häirittäessä ja ulkoisesti stabiili systeemi rajoitettujen mittaussignaalien lisäksi vastaa pieniin ohjaussignaalin muutoksiin pienellä mittaussignalin muutoksella[2]. Stabiiliutta käsitellessä keskitytään vain äärellisulotteisiin lineaarisiin aikainvarientteihin systeemeihin, eli LTI-systeemeihin, koska niitä voidaan käsitellä matriisilaskennan ja differentiaaliyhtälöiden keinoin. Tämä mahdollistaa aiheeseen tutustumisen kandidaattitason matematiikan avulla. Ääretönulotteisia systeemejä käsitellessä nämä matematiikan keinot eivät ole enään mahdollisia, vaan näitä systeemejä tulisi käsitellä funktioanalyysin eri keinoin[2].

Systeemin stabiiliudella on eri tyyppejä[7]. Näistä stabiiliuden tyypeistä tässä tekstissä käsitellään eksponentiaalista stabiiliutta sekä BIBO-stabiiliutta, joka on lyhenne sanoista "Bounded input, bounded output". Näistä eksponentiaalinen stabiilius kuvaa systeemin sisäistä käyttäytymistä välittämättä ulkoisen käyttäjän antamista syötteistä. BIBO-stabiilius taas kuvaa systeemin ulkoista käyttäytymistä, eli se kertoo systeemin mittauksen rajoittuneisuudesta siihen syötetyn ohjaussignaalin suhteen. Näistä stabiiliuden tyypeistä voidaankin käyttää myös nimityksiä systeemin sisäinen ja ulkoinen stabiilius.

Stabiiliuden tyyppien läpikäymisen lisäksi tekstissä perehdytään näiden välisiin yhteyksiin. Työssä esitellyt stabiiliuden tyypit kuvaavat systeemin käyttäytymistä eri tilanteissa, mutta näiden käyttäytymisten välille voidaan löytää selkeä yhteys. Eksponentiaalisesti stabiili systeemi on aina BIBO-stabiili, mutta BIBO-stabiili systeemi ei ole välttämättä eksponentiaalisesti stabiili. Työssä esitellään millaisten ehtojen vallitessa nämä stabiiliuden tyypit ovat yhtenevät.

Työn tavoitteena on esitellä lukijalle säätöteorian perusteita ja erityisesti stabiiliuden käsitteitä. Lukijalta odotetaan perustietoja matriisilaskennasta ja differentiaaliyhtälöistä. Työ on jakautunut kahteen osaan. Aluksi luvussa 2 käydään läpi oleellisia pohjatietoja aiheen ymmärtämiseksi ja erityisesti esitellään tarvittavat perustiedot stabiiliuden käsitteen ymmärtämiseksi. Tämän jälkeen luvussa 3 lukijalle esitellään eksponentiaalisen stabiiliuden sekä BIBO-stabiiliuden määritelmät sekä niihin liittyviä tuloksia ja käydään läpi näiden stabiiliuden tyyppien välinen yhteys. Työn lopuksi luvussa 4 käydään läpi yhteenveto työstä.

2. ESITIETOJA

Tässä tekstissä tarkastellaan lineaaristen aikainvarianttien systeemien stabiiliuutta, joten on oleellista ymmärtää mitä LTI-systeemit ovat ja miten niitä tutkitaan. Tämän lisäksi niiden stabiiliuden tyyppien käsittelemiseen tarvittavia matematiikan keinoja on tärkeä ymmärtää, jotta todistusten seuraaminen on luontevaa. Tässä kappaleessa esitellään yleisesti mitä LTI-systeemit ovat, mitä ominaisuuksia niillä on sekä millaisia matematiikan keinoja tarvitsee ymmärtää niiden käsittelemiseksi. Lopuksi käydään läpi myös eri stabiiliuden tyyppien yhteyteen vahvasti liittyvät systeemien ohjattavuus ja tarkkailtavuus, sekä Kalman hajotelma, jolla LTI-systeemit voidaan jakaa osiin ohjattavuuden ja tarkkailtavuuden perusteella. Käydään aluksi läpi matriisieksponentti, joka on erittäin oleellinen käsite aiheen ymmärtämiseksi.

2.1 Matriisieksponentti

Työssä esiintyy useaan otteeseen eksponentissa sijaitseva matriisi, joten matriisieksponentin käsittelyn ymmärtäminen on oleellinen pohjatieto lukijalle. Tässä kappaleessa käydään läpi sen määritelmä ja lisäksi esitellään Jordanin matriisi, jota tarvitaan eksponentiaalisen stabiiliuden käsittelyssä. Matriisieksponentti määritellään lähteessä [4]

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!},$$

joka muuntaa matriisieksponentin äärettömäksi summaksi, joka helpottaa matriisiarvoisten differentiaaliyhtälöiden käsittelemistä.

Olkoon X taas jokin matriisi. Tälle matriisille X voidaan löytää Jordanin matrisi J, siten että $P^{-1}XP = J$, jossa P on matriisin X ominaisvektoreista muodostettu ei-singulaarinen matriisi [4]. Tällöin $e^X = Pe^J P^{-1}$, jossa Jordanin matriisi J muodostuu lähteen [8] mukaan seuraavasti

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_k \end{bmatrix},$$

jossa J_j on jotain ominaisarvoa λ vastaava Jordanin neliömatriisi

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}, \text{ tai } J_j = [\lambda_j].$$

Myöhemmin tekstissä eksponentiaalista stabiiliutta käsitellessä tulee vastaan tilanne, jossa Jordanin neliömatriisi on eksponentissa, joten käydään läpi tässä, miten tällainen tilanne on kätevä käsitellä. Olkoon tilanne, jossa on termi e^J, jossa J on jokin n-ulotteinen Jordanin neliömatriisi. Tehdään Jordanin neliömatriisille hajotelma, joka on esitetty lähteessä [2]

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= D_\lambda + N. \end{aligned}$$

Tässä hajotelmassa Jordanin neliömatriisista siis saadaan kahden matriisin summa, joka helpottaa eksponentissa sijaitsevan matriisin käsittelyä. Hajotelma voidaan sijoittaa termiin e^J

$$e^J = e^{D_\lambda + N} = e^{D_\lambda + N} = e^{D_\lambda} e^N = e^\lambda e^N.$$

Viimeinen muoto saadaan käyttäen tulosta $e^{D_\lambda} = e^\lambda I$, joka seuraa helposti matriisieksponentin määritelmästä.

2.2 LTI-systeemit

LTI-systeemi on systeemiteoriassa käytetty abstrakti kuvaus, joka ottaa sisäänsä annetun ohjaussignaalin ja palauttaa tätä vastaavan mittaussignaalin. Tämän lisäksi LTI-systeemeihin sisältyy tuntematon ajasta riippuva tilafunktio, jota systeemin ulkoinen käyttäjä ei tunne. LTI-systeemit esitetään usein muodossa

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1a}$$

$$y = Cx + Du, \tag{2.1b}$$

jossa A, B, C ja D ovat kerroinmatriiseja, $x(t)$ on systeemin tilafunktio, $u(t)$ on sille annettu ohjaussignaali ja $y(t)$ on systeemin antama mittaussignaali. Matriisista A käytetään myös nimitystä tilamatriisi.

Systeemin lineaarisuudella tarkoitetaan sitä, että jos systeemille annetuilla ohjaussignaaleilla u_1 ja u_2 saadaan niitä vastaavat mittaussignaalit y_1 ja y_2, niin ohjaussignaalien lineaarikombinaatiolla $\alpha u_1 + \beta u_2$ saadaan mittaussignaalien vastaava lineaarikombinaatio $\alpha y_1 + \beta y_2$. Tässä α ja β ovat vapaavalintaiset reaaliset skalaarit. Systeemi on aikainvariantti jos syöttösignaaleilla u_1 ja u_2, joiden välinen aikaero on T, saadaan mittaussignaalit y_1 ja y_2, joiden välinen aikaero on T, mutta ne ovat muuten identtisiä. Aikainvarianteille systeemeille on oleellista, että niiden kerroinmatriisit eivät ole riippuvaisia ajasta, vaan ne ovat kaikki vakiomatriiseja.

LTI-systeemeille voidaan löytää yleinen ratkaisu ratkaisemalla $x(t)$ yhtälöstä (2.1a). Tämän ratkaisun ymmärtäminen on oleellista tulevien lauseiden ymmärtämiseksi, joten käydään tämän yhtälön, ja täten myös LTI-systeemin, ratkaisu nopeasti läpi. Ratkaisun muodostaminen jäljittelee lähdettä [3, s. 87]. Aloitetaan ratkaisun määrittäminen esittelemällä seuraava ominaisuus

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Tarkastellaan nyt rajattua systeemiä (2.1a) ja kerrotaan yhtälön molemmat puolet termillä e^{-At}

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t),$$

josta huomataan tulon derivaatta ja saadaan

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t).$$

Integroidaan tämä tulos välillä $[0, t]$, ja saadaan

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-A\tau}Bud\tau,$$

josta seuraa

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bud\tau.$$

Kerrotaan tämä tulos termillä e^{At} ja saadaan lopputuloksena LTI-systeemin yleinen ratkaisu

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bud\tau \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bud\tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

LTI-systeemien stabiiliuden tutkimiseksi tarvitaan niiden impulssivastematriisia $h(t)$ sekä siirtomatriisia $H(s)$. Nämä määritellään lähteessä [2] ja ne ovat

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \tag{2.3}$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{2.4}$$

Impulssivastematriisin ja siirtomatriisin yhtälöiden johtamiset sivuutetaan, koska vain lopputulos on oleellinen LTI-systeemien stabiiliuden kannalta. On kuitenkin on mainitsemisen arvoista, että impulssivastematriisi $h(t)$ on aikatason esitys, joka kuvaa systeemin vastetta ideaaliseen pulssiin, joka tapahtuu äärettömän lyhyessä ajassa. Siirtomatriisi $H(s)$ on taajuustason esitys systeemin vasteestaa taajuuden sisääntuloon. Impulssivastematriisin ja siirtomatriisin välillä on sellainen yhteys, että siirtomatriisi on impulssivastematriisin Laplace-muunnos. Siirtomatriisilla on olemassa kompleksinen napa s_p, jos jotain matriisin alkiota ei ole määritelty kyseisessä pisteessä. Napojen käsite esiintyy BIBO-stabiiliuden yhteydessä. Seuraavaksi lukijalle esitellään systeemin ohjattavuuden ja tarkkailtavuuden käsitteet, jotka ovat oleellisia stabiiliuden tyyppien välistä yhteyttä käsitellessä.

2.3 Ohjattavuus ja tarkkailtavuus

Systeemin ohjattavuus ja tarkkailtavuus kertovat sen rakenteellisista ominaisuuksista ja niiden ymmärtäminen auttaa stabiiliuden tyyppien välisten yhteyksien ymmärtämiseen. Seuraavaksi käydään ohjattavuuden ja tarkkailtavuuden määritelmät sekä työn kannalta oleellisia tuloksia, joiden todistukset kuitenkin sivuutetaan.

Ohjattavuus kuvaa koko systeemin (2.1) ominaisuutta, mutta se koskee vain osaa (2.1a). Tämä johtuu siitä, että vain kerroinmatriisit A ja B vaikuttavat systeemin ohjattavuuteen myöhemmin määriteltävän ohjattavuusmatriisin pohjalta. Systeemin ohjattavuudesta puhuessa voidaankin puhua matriisiparin (A, B) ohjattavuudesta, joka tarkoittaa samaa asiaa kuin systeemin ohjattavuus.

Määritelmä 2.1. Systeemi (2.1) ohjattava, jos systeemin tila x saadaan mistä tahansa alkutilasta x_0 haluttuun lopputilaan jollain ohjausvektorilla u rajallisessa ajassa $t > 0$.

Ohjattavuutta voidaan käsitellä lähteessä [6] esitellyn ohjattavuusmatriisin avulla

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

Tämän avulla voidaan asettaa ehto ohjattavuudelle.

Lause 2.2. *Systeemi* (2.1) *ja sen matriisipari* (A, B) *ovat ohjattavia, jos ja vain jos ohjausmatriisi* C *on täysiasteinen.*

Aivan kuin ohjattavuus, niin tarkkailtavuus käsittelee koko systeemin ominaisuutta. Kuitenkin sen käsittelemiseen riittää alla esitellyn tarkkailusysteemin käsitteleminen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \qquad x(0) = x_0 \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

koska vain kerroinmatriisit A ja C vaikuttavat systeemin tarkkailtavuuteen myöhemmin määriteltävän tarkkailtavuusmatriisin pohjalta. Aivan kuten systeemin ohjattavuudesta voidaan puhua matriisiparin (A, B) ohjattavuutena, niin systeemin tarkkailtavuudesta voidaan puhua matriisiparin (A, C) tarkkailtavuutena.

Määritelmä 2.3. Systeemi (2.1) on tarkkailtava, jos jokainen alkutila x_0 voidaan yksiselitteisesti määrittää tunnetun mittausfunktion $y(t)$ avulla rajatulla aikavälillä.

Tarkkailtavuutta voidaan käsitellä lähteessä [6] esitellyn tarkkailtavuusmatriisin avulla

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Tämän avulla voidaan asettaa ehto tarkkailtavuudelle.

Lause 2.4. *Systeemi* (2.1) *ja sen matriisipari* (A, C) *ovat tarkkailtavia jos, ja vain jos tarkkailtavuusmatriisi* O *on täysiasteinen.*

Ohjattavuuden ja tarkkailtavuuden käsitteitä tullaan tarvitsemaan, kun halutaan käsitellä eksponentiaalisen stabiiliuden ja BIBO-stabiiliuden välisiä yhteyksiä. Toinen oleellinen tieto näiden stabiiliuden tyyppien yhteyksien käsittelemiseksi on se, että matriisin A ohjattavat ja tarkkailtavat ominaisarvot ovat siirtomatriisin $H(s)$ napoja. Tämä yhteys todetaan seuraavassa kappaleessa Kalmanin hajotelman yhteydessä.

2.4 Kalmanin hajotelma

Kalmanin hajotelmalla LTI-systeemit voidaan jakaa siten, että systeemin ohjattava ja tarkkailtava aliavaruus voidaan tunnistaa. Tämä tapahtuu muunnosmatriisin Q avulla, jolla voidaan muodostaa alkuperäisestä systeemistä similaarinen osiin jaettu systeemi. Matriisin Q muodostamisen ja tähän liittyvät taustaoletukset voi löytää lähteestä [2], mutta tässä esitellään tästä lähteestä vain Kalmanin hajotelmaa koskeva lause. Tämä lauseen todistus ei ole oleellinen LTI-systeemien stabiiliuden kannalta, joten sen läpikäynti sivuutetaan.

Lause 2.5. *Mikäli systeemi* (2.1) *ei ole ohjattava ja tarkkailtava, niin voidaan löytää sellainen ei-singulaarinen matriisi Q siten, että*

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\hat{C} = CQ = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

jossa

(i) Matriisipari (A_c, B_c) on ohjattava, jossa

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ ja } B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Matriisipari (A_o, C_o) on tarkkailtava, jossa

$$A_o = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix} \text{ ja } C_o = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 \end{bmatrix}.$$

(iii) Kolmikko (A_{11}, B_1, C_1) *on sellainen, että* (A_{11}, B_1) *on ohjattava ja* (A_{11}, C_1) *on tarkkailtava.*

Matriisin Q avulla tehty similaarisuusmuunnos on muuttanut tilavektorien avaruutta siten, että ohjattavan aliavaruuden R_r vektorit, tarkkailemattoman aliavaruuden $R_{\bar{o}}$ vektorit sekä näiden leikkauksen $R_r \cap R_{\bar{o}}$ vektorit ovat kaikki tiettyä muotoa. Jotta tämä nähdään, on muodostettava ohajttavuusmatriisi ja tarkkailtavuusmatriisi, jotka ovat

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} \hat{C}^T & (\hat{C}\hat{A})^T & \dots & (\hat{C}\hat{A}^{n-1}) \end{bmatrix}^T . [2] \tag{2.10}$$

Ohjattavuusmatriisin $\hat{C}$ kuva-avaruus on systeemin ohjattava aliavaruus ja tarkkailtavuusmatriisin $\hat{O}$ nolla-avaruus on systeemin tarkkailematon aliavaruus. Tämän seurauksena kaikki ohjattavat tilat ovat muotoa $[x_1^T, x_2^T, 0, 0]^T$ ja kaikki tarkkailtavat tilat ovat muotota $[x_1^T, 0, x_3^T, 0]^T$.[2] Näiden tilojen avulla pystytään helposti näkemään mitkä tilat ovat ohjailtavia ja mitkä tarkkailtavia. Esimerkiksi tila $[]0, 0, 0, x_4^T]^T$ ei ole selvästikkään ohjattava eikä myöskään tarkkailtava.

Matriisit $\hat{A}$ ja A ovat similaarisia, eli niillä on samat ominaisarvot ja siten matriisien A_{11}, A_{22}, A_{33} sekä A_{44} ominaisarvot ovat matriisin A ominaisarvoja, jolloin saadaan lähteissä [2] ja [5] esitetty yhteys

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - \hat{A}| = |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}||\lambda I - A_{33}||\lambda I - A_{44}|. \tag{2.11}$$

Tarkastellaan nyt LTI-systeemin (2.1) similaarista systeemiä, jolla on kerroinmatriisit $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\}$, jolloin

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + \hat{D}u. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Tästä systeemistä voidaan nyt huomata, että syöttösignaali u ei vaikuta komponentteihin $\hat{x}_3$ sekä $\hat{x}_4$, joten ne eivät ole ohjattavia. Tämän lisäksi komponentit $\hat{x}_2$ ja $\hat{x}_4$ eivät vaikuta ulostuloon, joten ne eivät ole tarkkailtavia. [2]

Aikaisemman pohjalta voidaan nyt todeta seuraava matriisin A tai $\hat{A}$ ominaisarvoista:

i Matriisin A_{11} ominaisarvot ovat ohjattavia ja tarkkailtavia.

ii Matriisin A_{22} ominaisarvot ovat ohjattavia mutta tarkkailemattomia.

iii Matriisin A_{33} ominaisarvot ovat ohjaamattomia mutta tarkkailtavia.

iiii Matriisin A_{44} ominaisarvot ovat ohjaamattomia sekä tarkkailemattomia.

Tarkastellaan nyt systeemin 2.1 siirtomatriisia, joka osoittautui samaksi kuin systeemin (2.12) siirtomatriisi, ja katsotaan miten edellä mainitut matriisin A ominaisarvot näkyvät similaarisen systeemin siirtomatriisissa.

$$\begin{aligned}
H(s) &= CQ(sI - Q^{-1}AQ)^{-1}Q^{-1}B \\
&= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & sI - A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & sI - A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & sI - A_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

josta termi $(sI - \hat{A})^{-1}$ on

$$\begin{bmatrix} (sI - A_{11})^{-1} & 0 & -A_{13}A_{11}^{-1}A_{33}^{-1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1}A_{22}^{-1} & (sI - A_{22})^{-1} & (A_{11}^{-1}A_{22}^{-1}A_{33}^{-1}A_{44}^{-1})(A_{11}A_{24}A_{43} - A_{11}A_{23}A_{44} + A_{13}A_{21}A_{44}) & -A_{24}A_{22}^{-1}A_{44}^{-1} \\ 0 & 0 & (sI - A_{33})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -A_{43}A_{33}^{-1}A_{44}^{-1} & (sI - A_{44})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Jatketaan nyt aikaisempaa siirtomatriisin selvittämistä.

$$\begin{aligned}
H(s) &= \begin{bmatrix} C_1(sI - A_{11})^{-1} & 0 & -C_3A_{13}A_{11}^{-1}A_{33}^{-1} + C_3(sI - A_{33})^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1.
\end{aligned}$$

Nähdään, että siirtomatriisiin jää jäljelle vain systeemin ohjattava ja tarkkailtava osa. Tämän pohjalta voidaan tehdä johtopäätös, että kun tarkkaillaan BIBO-stabiiliutta siirtomatriisin avulla, tarkastellaankin oikeasti ohjattavan ja tarkkailtavan alisysteemin siirtomatriisia.

Tässä voisi vielä lyhyesti ottaa esille LTI-systeemin tilamatriisin ominaisarvojen sekä tämän siirtomatriisin napojen välisen yhteyden. Olkoon $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$ matriisin A ominaisarvojen joukko ja $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ siirtomatriisin napojen joukko, jolloin näiden joukkojen välille voidaan löytää lähteessä [2] esitelty yhteys

$$\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\} \supset \{s_1, s_2, ..., s_m\}. \tag{2.13}$$

Nämä joukot ovat samat, jos matriisin A kaikki ominaisarvot ovat ohjattavia ja tarkkailtavia, koska siirtomatriisin $H(s)$ navat ovat juurikin matriisin A ohjattavia ja tarkkailtavia ominaisarvoja. Ominaisarvot, jotka eivät ole ohjattavia ja tarkkailtavia, kumoutuvat, kun tarkastellaan siirtomatriisia $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Tämän pohjalta voidaan siis nähdä, että siirtomatriisia laskiessa todellakin lasketaan ohjattavan ja tarkkailtavan alisysteemin siirtomatriisia.[2]

3. LTI-SYSTEEMIN STABIILIUS

Jotta LTI-systeemin tarkastelu olisi järkevää, on oleellista tietää sen tilafunktion $x(t)$ käyttäytymisestä sekä sen syöttö- ja mittaussignaalin välisestä yhteydestä. Tässä kappaleessa käsitellään LTI-systeemien mahdollisista stabiiliuksista eksponentiaalista stabiiliutta sekä BIBO-stabiiliutta, sekä näiden välistä yhteyttä.

Eksponentiaalinen stabiilius kuvaa systeemin sisäistä käyttäytymistä, eli sen tilafunktion $x(t)$ suppenemista ja rajallisuutta ajan t kasvaessa rajatta. BIBO-stabiilius on lyhennetty sanaparista "bounded input, bounded output", ja tarkoittaakin sitä, että systeemin mittaussignaali $y(t)$ on rajattuna olemassa jokaisella rajoitetulla ohjaussignaalilla $u(t)$.

3.1 Eksponentiaalinen stabiilius

Eksponentiaalinen stabiilius on systeemin (2.1) ominaisuus, joka kertoo sen tilan käyttäytymisestä, kun sitä ei yritetä ohjata ohjaussignaalilla. Tällöin voidaankin ajatella, että ohjaussignaaliksi on asetettu nolla, eikä välitetä myöskään mittaussignaalista. Näiden pohjalta voidaan keskittyä rajattuun systeemiin

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

jolla on tasapainopiste pisteessä $x = 0$. Tämä systeemi on identtinen aikaisemmin mainittuun LTI-systeemiin (2.1), mutta siitä on poistettu mittausfunktio ja on tehty oletus, että syöttösignaali $u(t)$ on identtisesti nolla. Nämä eivät vaikuta systeemin sisäiseen stabiiliuteen ja siksi on järkevää poistaa ne systeemistä tarkastelun yksinkertaistamisen vuoksi [2].

Eksponentiaalisen stabiiliuden tutkimiseksi tarvitsee tutkia systeemin (3.1) tasapainopisteen $x = 0$ laatua. Tämä tapahtuu matriisin A ja sen ominaisarvojen $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ avulla [6]. Näiden pohjalta muodostetaan määritelmä.

Määritelmä 3.1. Systeemi (2.1) on eksponentiaalisesti stabiili, jos on olemassa $\sigma, M > 0$ siten, että

$$\|x(t)\| \leq M\|x_0\|e^{-\sigma t}.$$

Systeemin (3.1) ratkaisu on $x(t) = e^{At}x_0$, jonka avulla voidaan aloittaa tutkimaan, onko systeemi eksponentiaalisesti stabiili. Tämä on sama ratkaisu, joka ratkaistiin esitiedoissa, mutta koska syöttösignaali on asetettu nollaksi, supistuu ratkaisun jälkimmäinen termi pois. Käytetään tätä ratkaisua nyt tulevan lauseen todistamiseen, jonka todistus jäljittelee lähteen [8, s. 30-32] todistusta.

Lause 3.2. *Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja eksponentiaalisesti stabiilille systeemille, joka on muotoa* (3.1)

(i) $e^{At}x_0 \to 0$ *eksponentiaalisesti, kun* $t \to 0$ *mielivaltaisella alkuarvolla* x_0.

(ii) $\omega(A) = sup\{Re\ \lambda | \lambda \in \sigma(A)\} < 0$*, jossa* $\sigma(A)$ *on matriisin* A *ominaisarvot.*

Todistus. Tutkitaan rajattua systeemiä

$$\frac{dw}{dt} = Jw, \quad w(0) = z \in \mathbb{C}^n,$$

jossa J on Jordanin neliömatriisi. Nyt jokaiselle $a = a_1 + ia_2$ merkitään $\|a\| = |a_1| + |a_2|$ missä a_1 ja a_2 ovat reaalilukuja. Tehdään hajotelmat vektorille $w(t)$ ja alkuarvolle z matriisin J blokkien mukaisesti, jotta saadaan ne sarjaksi vektoreita $w_1(t), ..., w_r(t)$ ja $z_1, ..., z_r$. Tässä jokainen $w_i(t)$ vastaa alkuarvoa z_i. Näiden avulla voidaan muodostaa

$$\dot{w}_k = J_k w_k, \quad w_k(0) = z_k, \quad k = 1, 2, ..., r. \tag{3.2}$$

Määrittäköön $j_1, ..., j_r$ matriisien $J_1, ..., J_r$ dimensiot siten, että $\sum j_i = n$. LTI-systeemin yleistä ratkaisua soveltamalla saadaan systeemille (3.2) ratkaisu $w_k = z_k e^{J_k t}$.

Nyt, jos $j_k = 1$, niin $w_k(t) = e^{\lambda_k t} z_k, t \geq 0$. Tästä ja huomiosta $\|e^{ibt}\| = 1$ aina, kun b on reaaliluku, seuraa

$$\begin{aligned}
\|w_k(t)\| &= \|e^{\lambda_k t} z_k\| \\
&= \|e^{(a_k + ib_k)t} z_k\| \\
&= \|e^{a_k t} e^{ib_k t} z_k\| \\
&= \|e^{a_k t}\| \|e^{ib_k t}\| \|z_k\| \\
&= e^{a_k t} \|z_k\| \\
&= e^{(\mathrm{Re}\ \lambda_k)t} \|z_k\|.
\end{aligned}$$

Jos $j_k > 1$, niin $w_k(t) = e^{J_k t} z_k, \quad t \geq 0$. Tätä tulosta voidaan muokata matriisilaskennasta tutuilla laskusäännöillä ja tekemällä esitiedoissa esitelty hajotelma $J_k = D_{\lambda_k} + N_k$ Jordanin neliömatriisille. Tällä Jordanin matriisin hajotelmalla voimme sieventää termiä $e^{J_k t}$ käyttämällä matriisilaskennasta tuttuja ominaisuuksia $e^{D_{\lambda_k} t} = e^{\lambda_k t} I$ sekä $N_k^m = 0$, kun $m \geq j_k$. Tämän pohjalta päädymme tilanteeseen

$$w_k(t) = e^{\lambda_k t} \sum_{m=0}^{j_k - 1} (N_k)^m z_k \frac{t^m}{m!},$$

josta seuraa kolmioepäyhtälöä käyttämällä lähteen [6] mukaisesti

$$\|w_k(t)\| \leq e^{(\mathrm{Re}\lambda_k)t}\|z_k\| \sum_{m=0}^{j_k-1} (N_k)^m \frac{t^m}{m!}.$$

Asetetaan nyt $\omega_0 = \omega(A)$, eli matriisin A ominaisarvojen reaaliosien joukon pienin yläraja ja summataan vektorien $w_k(t)$ euklidiset normit yhteen. Näin aikaisempien tuloksien pohjalta saadaan

$$\sum_{k=1}^{r} \|w_k(t)\| \leq e^{\omega_0 t} q(t) \sum_{k=1}^{r} \|z_k\|,$$

jossa $q(t)$ on polynomi, jonka aste voi suurimmillaan olla $\max(j_k - 1), k = 1, 2, ..., r$.

Nyt jos $\omega > \omega_0$ ja

$$M_0 = \sup\{q(t)e^{(\omega_0-\omega)t}\}, t \geq 0,$$

niin nähdään, että M_0 on selvästi rajoitettu ja

$$\sum_{k=1}^{r} \|w_k(t)\| \leq M_0 e^{\omega t} \sum_{k=1}^{r} \|z_k\|, \quad t \geq 0.$$

Tämän pohjalta voidaan valita uusi vakio M_1 siten, että

$$\|w(t)\| \leq M_1 e^{\omega t}\|z\|.$$

Muistetaan esitiedoista, että jos matriisi A voidaan esittää muodossa $A = PJP^{-1}$, niin $e^A = Pe^J P^{-1}$. Tämän avulla saadaan lopputulos

$$\|e^{At}\| = \|Pe^J P^{-1}\| \leq M_1 e^{\omega t}\|P\|\|P^{-1}\|\|z\|, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Tämän tuloksen pohjalta voidaan määritellä $M = M_1\|P\|\|P^{-1}\|$.

Tehdään nyt oletus, että $\omega_0 \geq 0$. Tällöin on oltava olemassa ominaisarvo $\lambda = \alpha + i\beta$ siten, että Re $\lambda \geq 0$ ja nollavektorista eroava ominaisvektorivektori $v = v_1 + iv_2$ siten, että

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A(v_1 + iv_2) &= (\alpha + i\beta)(v_1 + iv_2). \end{aligned}$$

On olemassa funktio

$$w(t) = w_1(t) + iw_2(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}a, \quad t \geq 0,$$

joka on systeemin (3.1) ratkaisu ja tällöin myös sen reaali- ja imaginääriosat ovat ratkaisuja. Tehdään nyt oletus, että $\beta = 0$, $a_2 = 0$ ja α on jokin nollasta eroava positiivinen reaaliluku ja a_1 on nollasta eroava vektori. Tällöin ratkaisu $z(t)$ saadaan muotoon

$$z(t) = a_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + ia_2 e^{(\alpha+i\beta)t} = a_1 e^{\alpha t}.$$

Nyt nähdään selvästi, että $\|z(t)\| = e^{\alpha t}\|a_1\|$ ei ole rajoitettu muuttujan t kasvaessa, vaan nähdään että $\lim_{t\to\infty}\|z(t)\| = \infty$.

Olkoon nyt $\omega_0 < 0$, jolloin voidaan löytää $\omega_0 < \omega < 0$. Tällöin määritelmän 3.1 ja epäyhtälön (3.3) pohjalta voidaan löytää vakio M ratkaisulle $x(t)$, jolloin

$$\|x(t)\| \leq Me^{-|\omega|t}\|x_0\|.$$

□

Edellisestä todistuksesta siis nähtiin, että systeemi on eksponentiaalisesti stabiili, jos ja vain jos kaikki tilamatriisin ominaisarvot ovat reaaliosaltaan aidosti negatiivisia. Tämän seurauksena muodostetaan vielä seuraava lause, joka on lause 3.2 hieman ymmärrettävämmin.

Seuraus 3.3. *Systeemi* (3.1) *on eksponentiaalisesti stabiili jos ja vain, jos matriisin A jokaisella ominaisarvolla λ on aidosti negatiivinen reaaliosa.*

Sisäisestä stabiiliudesta voidaan mainitä vielä, että jos matriisilla A on ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolla, niin systeemi on stabiili siinä mielessä, että sen ratkaisu on rajoitettuna olemassa, mutta se ei lähesty nollaa ajan t kasvaessa. Tämä voidaan nähdä sijoittamalla $\alpha = 0$ yllä selvitettyyn ratkaisuun. Eksponentiaalinen stabiilius vaatii sen, että ratkaisun raja-arvo lähestyy nollaa, kun $t \to \infty$. Tällaista systeemiä, jonka kerroinmatriisilla A on ominaisarvojen joukossa yksi tai useampia nollia, kutsutaan marginaalisesti stabiiliksi.Seuraavaksi havainnollisetaan eksponentiaalista stabiiliutta seuraavalla laskuesimerkillä.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -3x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_0, \\ y &= [1, 1]x\end{aligned}$$

Tästä saadaan tilamatriisi systeemille ja voidaan selvittää, onko se eksponentiaalisesti stabiili. Tämä tapahtuu yksinkertaisesti laskemalla kerroinmatriisin ominaisarvot.

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix} - \lambda I\right) &= (-3-\lambda)(1-\lambda)+8\\ &= \lambda^2+2\lambda+5.\end{aligned}$$

Tästä saadaan karakteristinen yhtälö $\lambda^2+2\lambda+5=0$, jonka ratkaisut $\lambda=-1\pm 2i$ ovat tilamatriisin A ominaisarvot. Ominaisarvoilla on aidosti negatiiviset reaaliosat, eli systeemi on eksponentiaalisesti stabiili ja tilafunktio siis suppenee kohti nollaa.

3.2 BIBO-stabiilius

Sisäisen stabiiliuden lisäksi systeemillä (2.1) voi olla ulkoista stabiiliutta. Tässä kappaleessa keskitymmekin kyseisen systeemin syöttösignaalin ja mittaussignaalin väliseen käyttäytymiseen. Ulkoisella stabiiliudella tarkoitetaan sitä, että jokaisella rajoitetulla ohjaussignaalilla $u(t)$ saadaan mittaussignaalista $y(t)$ rajoitettu arvo. Tätä kutsutaan "bounded input, bounded output-stabiiliudeksi, eli BIBO-stabiiliudeksi. Määritellään aluksi BIBO-stabiilius lähteen [2] mukaisesti

Määritelmä 3.5. Systeemi (2.1) on BIBO-stabiili, jos voidaan löytää aidosti positiivinen vakio c siten, että ehdoista $x(0)=0$ sekä

$$\|u(t)\| \le 1, \quad t \ge 0,$$

seuraa $\|y(t)\| \le c$ jokaisella $t \ge 0$.

BIBO-stabiiliuden tutkimiseksi tarvitaan esitiedoissa määritettyjä systeemin impulssivastematriisia

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad t \ge 0, \tag{3.4}$$

ja siirtomatriisia

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D. \tag{3.5}$$

Muodostetaan nyt ehto BIBO-stabiiliudelle. Tämän lauseen todistamiseksi tarvitaan aikaisemmin annettua määritelmää 3.5 sekä systeemille määriteltyjä impulssivastematriisia sekä siirtomatriisia. Lauseen todistus jäljittelee lähteen [2] todistusta.

Lause 3.6. *Systeemi* (2.1) *on BIBO-stabiili, jos ja vain jos voidaan löytää äärellinen vakio* $L > 0$, *joka toteuttaa ehdon*

$$\int_0^t \|h(t-\tau)\| d\tau \leq L. \tag{3.6}$$

Todistus. Aloitetaan yhtälön $\dot{x} = Ax + Bu$ ratkaisulla, joka määriteltiin jo esitiedoissa

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Sijoitetaan tämä tulos systeemin (2.1) mittaussignaaliin, josta saadaan tulos

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + Du.$$

Tästä voidaan huomata, että impulssifunktio $h(t)$ esiintyy mittausfunktion lauseessa. Tämän ja alkuehdon $x(0) = 0$ pohjalta saadaan mittausfunktion lauseeksi

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Tutkitaan nyt mittausfunktion rajallisuutta aikaisemmin asetettujen alkuehtojen nojalla.

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &= \left\| \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \int_0^t \|h(t-\tau)u(\tau)\| d\tau \\
&\leq \int_0^t \|h(t-\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \\
&\leq \int_0^t \|h(t-\tau)\| d\tau \leq L.
\end{aligned}$$

Eli systeemi (2.1) on BIBO-stabiili.

Lauseen toiseen suuntaan todistamiseksi keskitytään ensin yksiulotteiseen tapaukseen, jossa ollaan $\mathbb{R}$-avaruudessa. Tehdään vastaoletus, että systeemi (2.1) on BIBO-stabiili, mutta ei ole olemassa äärellistä vakiota L siten, että lauseen 3.6 ehto toteutuisi.

Toinen tapa ilmaista edellä mainittu asia on väittää, että jokaiselle rajalliselle vakiolle L on olemassa sellainen ajanhetki $t_1 = t_1(L)$, että

$$\int_0^{t_1} |h(t_1-\tau)| d\tau > L.$$

Valitaan nyt syöttösignaaliksi seuraava paloissa määritelty funktio

$$u(t) = \begin{cases} 1, \text{ jos } h(t-\tau) > 0, \\ 0, \text{ jos } h(t-\tau) = 0, \\ -1, \text{ jos } h(t-\tau) < 0, \end{cases}$$

$0 \geq t \geq t_1$. Nyt $|u(t)| \leq 1$ ja ajanhetkellä $t = t_1$

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} h(t_1-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} |h(t_1-\tau)|d\tau.$$

Nyt nähdään aikaisemman vastaoletuksen perusteella, että $\int_0^{t_1} |h(t_1-\tau)|d\tau > L$, joka on ristiriidassa sen kanssa, että systeemi olisi BIBO-stabiili. Tämä siis tarkoittaa, että vakion L on löydyttävä, jotta systeemi olisi BIBO-stabiili.[2]

Tämä tulos voidaan yleistää nyt äärellisulotteiselle tapaukselle käsittelemällä kaikkia syöttö- ja mittaussignaalipareja erikseen yksiulotteisina tapauksina. Jos jokaiselle parille löytyy vakio L_i, joka rajaa mittaussignaalialkion, on systeemi BIBO-stabiili.

Merkitään impulssivastematriisia alkioittain $h(t) = (h_{ij}(t))$. Nyt on voimassa

$$\int_0^\infty \|h(t-\tau)\|d\tau \leq L,$$

jos ja vain jos

$$\int_0^t |h_{ij}(t-\tau)|d\tau \leq L_{ij}$$

toteutuu jokaiselle alkiolle $h_{ij}(t)$. Jos $\int_0^\infty \|h(t-\tau)\|d\tau$ ei ole rajattu, niin tämä tarkoittaa, että jokin alkio $\int_0^\infty |h_{ij}(t-\tau)|d\tau$ ei ole rajattu. Olkoon nyt $y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$ ja valitaan $u(t) = e_j u_0(t)$, missä u_0 on kuin u yksiulotteisessa tapauksessa. Nyt

$$\|y(t)\| \geq |y_i(t)| = |e_i^T \int_0^t h(t-\tau)u(t)d\tau| = \int_0^t |h_{ij}(t-\tau)|d\tau,$$

josta seuraa

$$\|y(t)\| \geq L_{ij}.$$

Täten huomataan, että mikäli ehto (3.6) ei ole voimassa, niin $\|y(t)\|$ voidaan aina valita vakioita L_{ij} suuremmiksi. Tästä voidaan helposti nähdä, että systeemi ei tällöin olisi BIBO-stabiili, mikäli ehto (3.6) ei ole voimassa.

□

BIBO-stabiiliudelle voidaan nyt aikaisemman perusteella asettaa ehdoksi

$$\int_0^\infty \|h(t)\|dt < \infty. \tag{3.7}$$

Käsitellään vielä systeemin siirtomatriisia $H(s)$. Jos kaikilla siirtomatriisin $H(s)$ navoilla on negatiiviset reaaliosat, niin jokainen impulssivastematriisin alkio koostuu summasta eksponentteja, joissa eksponentissa on negatiivinen reaaliosa. Tämän seuruksena

$$\int_0^\infty \|h(t)\|dt \tag{3.8}$$

on rajoitettu ja jokainen siirtomatriisin $H(s)$ realisaatio antaa tulokseksi BIBO-stabiilin systeemin.[2]

Tämän lisäksi, jos (3.8) on rajoitettu, niin jokaisella impulssivastematriisin termillä on oltava eksponentissa negatiivinen reaaliosa. Tällöin myös siirtomatriisin navoilla on oltava negatiiviset reaaliosat.[2] Tämä yhteys voidaan todentaa lähteen [1] sivun 157 yhtälöistä (4.36) sekä (4.38), joiden avulla nähdään impulssivastematriisissa $Ce^{At}B$ esiintyvien eksponenttien olevan täsmälleen siirtomatriisin $C(sI - A)^{-1}B$ navoissa. Voimme nyt tämän pohjalta muodostaa vielä yhden lauseen BIBO-stabiiliudelle, jonka jälkeen käsitellään BIBO-stabiiliutta vielä esimerkin kautta.

Lause 3.7. *Systeemi* (2.1) *on BIBO-stabiili jos ja vain, jos kaikilla siirtomatriisin $H(s)$ navoilla on aidosti negatiiviset reaaliosat*

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

jossa

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Systeemille voidaan nyt selvittää siirtomatriisi, jonka napoja tarkastelemalla saadaan selville, onko systeemi BIBO-stabiili. Lasketaankin nyt siirtomatriisi annettujen kerroinmatriisien avulla, jolloin tulokseksi saadaan

$$
\begin{aligned}
H(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2s+5}{(s+2)(s+1)}.
\end{aligned}
$$

Huomataan, että siirtomatriisilla on navat $s_1 = -1$ ja $s_2 = -2$, mikä tarkoittaa sitä, että systeemi on BIBO-stabiili. Lisäksi voidaan laskea matriisin A ominaisarvoiksi $\lambda_2 = -2$ sekä $\lambda_2 = -1$. Systeemi on siis myös eksponentiaalisesti stabiili. Käsitellään ulkoisen ja sisäisen stabiiliuden välistä yhteyttä enemmän seuraavassa kappaleessa.

3.3 Ulkoisen ja sisäisen stabiiliuden yhteys

Vaikka LTI-systeemin ulkoinen ja sisäinen stabiilius käsittelevätkin eri tyyppistä stabiiliutta, voidaan niiden välille löytää yhteys, joka toteutuu jokaiselle äärellisulotteiselle LTI-systeemille. Tämä yhteys ei päde identtisesti molempiin suuntiin joka tapauksessa, mutta tietyillä toteutuneilla ehdoilla voidaan sanoa, että toinen stabiilius viittaa siihen, että systeemi on myös toisella tapaa stabiili. Tästä selkeinpänä osoituksena on se, että jos systeemi on eksponentiaalisesti stabiili, niin sen on aina oltava myös BIBO-stabiili. Toisaalta jos systeemi onkin BIBO-stabiili, niin se ei välttämättä kerro eksponentiaalisesta stabiiliudesta. Tähänkin on kuitenkin tilanteita, missä BIBO-stabiilius viittaa eksponentiaaliseen stabiiliuuteen, mutta tästä myöhemmin. Seuraava lause ja sen todistus ovat lähteestä [2].

Lause 3.9. *Jos systeemi* (2.1) *on eksponentiaalisesti stabiili, niin se on myös BIBO-stabiili.*

Todistus. Olkoon $x = 0$ systeemin (2.1) eksponentiaalisesti stabiili ratkaisu. Tällöin

$$\left\| \int_0^t h(t-\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|h(t-\tau)d\tau\|$$
$$= \int_0^t \|Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\|d\tau$$
$$\leq \|C\|\|B\| \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|d\tau + \|D\|.$$

Nyt, koska systeemin ratkaisu $x = 0$ on eksponentiaalisesti stabiili, voidaan löytää kertoimet $M > 0$ ja $\alpha > 0$ siten, että $\|e^{A(t-\tau)}\| \leq Me^{-\alpha(t-\tau)}, t \geq \tau$. Tällöin

$$\int_0^t \|h(t-\tau)\|d\tau \leq \int_0^t \|C\|\|B\|Me^{-\alpha(t-\tau)}d\tau + \|D\|$$
$$= \|C\|\|B\|M \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau + \|D\|$$
$$= \|C\|\|B\|M \frac{e^{\alpha\tau} - e^{\alpha(\tau-t)}}{\alpha} + \|D\|.$$

Nyt voidaan määritellä

$$L = \|C\|\|B\|M \frac{e^{\alpha\tau} - e^{\alpha(\tau-t)}}{\alpha} + \|D\|,$$

jolloin lauseen 3.6 pohjalta systeemi on BIBO-stabiili.

□

Tämä yhteys ei kuitenkaan päde toiseen suuntaan, eli BIBO-stabiili systeemi ei välttämättä ole eksponentiaalisesti stabiili. Tämän ymmärtämiseksi on hyvä muistuttaa mieleen eksponentiaalisen stabiiliuden ja BIBO-stabiiliuden ehdot, jotka määriteltiin lauseissa 3.2 sekä 3.7. Eli lyhyesti systeemi on eksponentiaalisesti stabiili, jos matriisin A ominaisarvoilla on aidosti negatiiviset realiosat ja BIBO-stabiili, jos siirtomatriisin $H(s)$ napojen reaaliosat ovat aidosti negatiivisia. Tutkitaan aluksi esimerkin kautta systeemiä, joka on BIBO-stabiili, mutta ei eksponentiaalisesti stabiili. Perustelut tälle tulevat esimerkin jälkeen, johon numeeriset arvot on otettu lähteestä [2]

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan systeemiä

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx,$$

jossa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla matriisin A ominaisarvot, saadaan $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$ ja nähdään, että toinen ominaisarvoista on positiivinen. Tämä tarkoittaa sitä, että systeemi ei ole sisäisesti stabiili. Tarkastellaan kuitenkin vielä siirtomatriisia ja selvitetään, onko systeemi BIBO-stabiili.

$$\begin{aligned}
H(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s-1)-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} -2s+4 & -2+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{s-2}{(s-2)(s+1)} \\
&= \frac{1}{(s+1)}
\end{aligned}$$

Huomataan, että siirtomatriisilla on yksi napa $s_1 = -1$, jolla on selkeästi negatiivinen reaaliosa. Systeemi on siis BIBO-stabiili, mutta ei eksponentiaalisesti stabiili.

Kuten jo esitiedoissa kerrottiin, niin tilamatriisin A ominaisarvojen ja siirtomatriisin napojen s välille voidaan löytää yhteys

$$\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\} \supset \{s_1, s_2, ..., s_m\}.$$

Ohjattavan ja tarkkailtavan systeemin tapauksessa nämä joukot ovat täysin identtiset, koska kuten jo aikaisemmin esitiedoissa on mainittu, siirtomatriisin navat ovat systeemin ohjattavan ja tarkkailtavan alisysteemin kerroinmatriisin ominaisarvoja. BIBO-stabiilius kertookin varmasti jotain eksponentiaalisesta stabiiliudesta, jos systeemi on täysin ohjattava ja havaittava. Eli on syytä uskoa, että esimerkin 3.10 systeemi ei ole täysin ohjattava tai tarkkailtava. Esitellään vielä eksponentiaalisen stabiiliuden ja BIBO-stabiiliuden välistä yhteyttä seuraavan lähteestä [1] poimitun lauseen kautta, ennen kuin jatketaan aikaisemman esimerkin käsittelyä.

Lause 3.11. *Olkoon LTI-systeemi* (2.1) *ohjattava ja tarkkailtava. Tällöin systeemi on BIBO-stabiili jos, ja vain jos systeemi on eksponentiaalisesti stabiili.*

BIBO-stabiiliuden ja systeemin siirtomatriisin napojen välinen yhteys on jo osoitettu aikaisemmin tekstissä. Koska kerroinmatriisin A ohjailtavat ja tarkkailtavat ominaisarvot ovat siirtomatriisin $H(s)$ napoja, niin voidaan helposti nähdä, että ohjattava ja tarkkailtava systeemi voi olla BIBO-stabiili vain silloin kun kaikki nämä ominaisarvot ovat reaaliosaltaan aidosti negatiivisia. Eli toisin sanoen ohjailtava ja tarkkailtava systeemi voi olla BIBO-stabiili pelkästään silloin kuin kyseinen systeemi on myös eksponentiaalisesti stabiili.

Käsitellään nyt edellisen esimerkin 3.10 systeemiä lauseen 3.11 kautta. Esimerkissä oli systeemi, joka oli BIBO-stabiili, mutta ei eksponentiaalisesti stabiili. Tutkitaan kyseisen systeemin ohjattavuutta ja tarkkailtavuutta muodostamalla ohjattavuusmatriisi C sekä tarkkailtavuusmatriisi O.

Esimerkki 3.12. Esimerkin 3.10 systeemin ohjattavuusmatriisiksi saadaan

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

joka on selkeästi täysiasteinen, koska sen sarakeavaruus on lineaarisesti riippumaton. Systeemi on siis ohjattava, mutta systeemin tarkkailtavuusmatriisi

$$O = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

on selkeästi vajaa-asteinen, koska sen sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvaisia. Systeemi ei ole siis ohjattava. Tämä onkin odotettua, koska lauseen 3.11 mukaisesti ei eksponentiaalisesti stabiili systeemi voi olla BIBO-stabiili vain, jos sillä on ominaisarvo, jolla on negatiivinen reaaliosa, joka ei ole ohjattavissaa tai tarkkailtavissa.

Muutetaan nyt saman esimerkin kerroinmatriisia C, jotta systeemistä saadaan ohjattavan lisäksi tarkkailtava, ja katsotaan miten se vaikuttaa systeemin stabiiliuuden tyyppeihin. Olkoon

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tarkkailtavuusmatriisi on nyt täysiasteinen, eli systeemi on ohjailtava ja tarkkailtava. Muodostetaan nyt uusi siirtomatriisi, mutta ohitetaan laskemisen välivaiheet, koska ne ovat hyvin samanlaiset esimerkissä 3.10 lasketun siirtomatriisin välivaiheisiin. Siirtomatriisiksi saadaan

$$H(s) = \frac{s}{(s-2)(s+1)}.$$

Huomataan, että siirtomatriisilla on nyt navat $s_1 = -1$ ja $s_2 = 2$, joista s_2 on reaaliosaltaan positiivinen. Systeemi ei siis ole BIBO-stabiili. Huomataan myös, että siirtomatriisin navat ovat samat kuin kerroinmatriisin A ominaisarvot. Tämä johtuu siitä, että systeemi on ohjattava ja tarkkailtava.

4. YHTEENVETO

Työssä tutustuttiin lineaarisiin aikainvariantteihin systeemeihin ja keskityttiin niiden stabiiliuden tyypeistä eksponentiaaliseen stabiiliuuteen ja BIBO-stabiiliuuteen. Ennen näiden läpikäymistä käytiin läpi oleellisia matemaattisia esitietoja työn aiheen ymmärtämiseksi ja tutustuttiin LTI-systeemeihin ja niiden ominaisuuksiin. Lisäksi lukijalle esiteltiin LTI-systeemien yleinen ratkaisu (2.2). Esitietojen antamisen tavoitteena oli esitellä lukijalle lauseita ja määritelmiä, jotka helpottavat työn aikana läpikäytyjen lauseiden todistusten seuraamisen sekä tutustuttaa lukija työssä käytettyhin termeihin ja käsitteisiin.

Esitietojen jälkeen päästiin työn aiheen käsittelyyn, joka alkoi eksponentiaalisen stabiiliuden käsittelyllä. Eksponentiaalinen stabiilius kuvaa systeemin sisäistä käyttäytymistä ja systeemi määriteltiin stabiiliksi, jos voidaan löytää jokin vakio, joka rajoittaa sen jokaisen ratkaisun määritelmän 3.1 mukaisesti. Eksponentiaalista stabiiliutta käsitellessä voitiin keskittyä rajattuun systeemiin (3.1) ja tämän osoitettiin olevan eksponentiaalisesti stabiili aina kun tilamatriisin A kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat aidosti negatiivisia. Lopuksi eksponentiaalista stabiiliutta hieman havainnollistettiin yksinkertaisen esimerkin kautta, jossa laskettiin tilamatriisin ominaisarvot ja todettiin systeemin olevan eksponentiaalisesti stabiili.

Seuraavaksi asetettiin määritelmä 3.5 BIBO-stabiiliudelle ja todistettiin lauseen 3.6 paikkaansapitävyys. Tämä tapahtui esitiedoissa määritellyn impulssivastematriisin avulla, jonka tulee olla rajattu jollain vakiolla L. Tämän lauseen todistamisessa keskityttiin yksiulotteiseen tapaukseen, jonka tulos pystytään yleistämään n-ulotteiselle systeemille. Lauseen todistuksen jälkeen esiteltiin ominaisuus, jonka mukaan impulssivastematriisin eksponentit sijaitsevat siirtomatriisin navoissa. Tämän pohjalta voitiin vielä muodostaa lause 3.7 BIBO-stabiiliudelle, jonka jälkeen sitä havainnollistettiin esimerkin avulla.

Työn lopuksi käsiteltiin stabiiliuden tyyppien välistä yhteyttä. Ensin osoitettiin lauseen 3.9 paikkaansapitävyys, eli eksponentiaalisesti stabiili systeemi on aina BIBO-stabiili. Tämän jälkeen todettiin, että BIBO-stabiiliudesta ei kuitenkaan välttämättä seuraa eksponentiaalinen stabiilius. Tätä havainnollistettiin esimerkin 3.10 systeemillä, joka oli BIBO-stabiili, mutta ei eksponentiaalisesti stabiili. Esimerkin jälkeen todettiin, että BIBO-stabiiliudesta seuraa eksponentiaalinen stabiilius, jos ja vain jos systeemi on täysin ohjattava ja tarkkailtava. Tämän käsittely keskittyi pääosin esimerkkiin 3.12, jossa esimerkin 3.10 systeemistä muokattiin ohjattava ja tarkkailtava ja todettiin tämän systeemin olevan epästabiili.

LÄHTEET

[1] P. J. Antsaklis ja A. N. Michel. *Linear Systems*. 2nd ed. 2006. Birkhäuser Boston, 2006.

[2] P. J. Antsaklis ja A. N. Michel. *Linear Systems Primer*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2007.

[3] C.-T. Chen. *Linear system theory and design*. eng. 3rd ed. The Oxford series in electrical and computer engineering. New York: Oxford University Press, 1999.

[4] J. Faraut. *Analysis on Lie groups : an introduction*. Cambridge studies in advanced mathematics ; 110. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[5] R. A. Horn. *Matrix analysis*. eng. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[6] W. Liu. *Elementary Feedback Stabilization of the Linear Reaction-Convection-Diffusion Equation and the Wave Equation*. Vol. 66. Mathématiques et Applications. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

[7] L. Paunonen. Output Regulation Theory for Linear Systems with Infinite-Dimensional and Periodic Exosystems (2011).

[8] J. Zabczyk. *Mathematical Control Theory An Introduction*. 1st ed. 2008. Modern Birkhäuser Classics. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2008.