Tampereen yliopisto

Vilma Virtanen

VIRITTÄVÄT PUUT JA NIIDEN KONSTRUOINTI

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Toukokuu 2022

Tiivistelmä

Vilma Virtanen: Virittävät puut ja niiden konstruointi
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Toukokuu 2022

Tässä tutkielmassa käsitellään virittäviä puita sekä niiden konstruointia syvyyssuuntaisella ja leveyssuuntaisella etsinnällä.

Ennen virittävän puun ominaisuuksien käsittelyä esitetään aiheeseen liittyviä määritelmiä, kuten yksinkertaisen graafin, polun, silmukan, aligraafin, virittävän aligraafin ja yhtenäisen graafin määritelmät. Lisäksi esitetään puun ja k-puun määritelmät, joiden jälkeen esitetään tärkeä lause puun ominaisuuksista, jossa annetaan viisi yhtäpitävää väitettä sille, että jokin graafi on puu.

Virittäviin puihin siirryttäessä esitetään ensin virittävän puun määritelmä ja sitten lause virittävän puun ominaisuuksista, joka seuraa suoraan aiemmin esitetystä puun ominaisuuksien lauseesta. Tämän jälkeen esitetään ja todistetaan vielä toinen lause ominaisuuksista, jotka riittävät määrittämään, että jokin graafi on virittävä puu.

Viimeisessä luvussa esitellään kaksi algoritmia virittävän puun konstruointiin. Syvyyssuuntaisen etsinnän algoritmi esitellään ensimmäisenä ja toisena leveyssuuntaisen etsinnän algoritmi. Syvyyssuuntaisessa etsinnässä virittävän puun konstruoinnin ideana on edetä aloitussolmusta särmiä ja solmuja vuorotellen lisäämällä mahdollisimman pitkälle graafiin muodostamatta silmukoita. Kun johonkin solmuun ei voi enää lisätä särmiä ja solmuja, palataan graafissa taaksepäin sellaiseen solmuun, johon särmien ja solmujen lisääminen on mahdollista. Algoritmi päättyy, kun kaikki alkuperäisen graafin solmut on lisätty.

Leveyssuuntaisessa etsinnässä ideana taas on lisätä aloitussolmuun kaikki mahdolliset särmät ja tämän jälkeen kaikkien särmien toiset päätesolmut muodostamatta silmukoita. Jokaisen lisätyn solmun kohdalla toistetaan samanlainen särmien ja solmujen lisäys kunnes kaikki alkuperäisen graafin solmut on lisätty. Sekä syvyyssuuntaisen että leveyssuuntaisen etsinnän eteneminen on havainnollistettu myös kuvien avulla.

Avainsanat: yksinkertainen graafi, puut, virittävät puut, syvyyssuuntainen etsintä, leveyssuuntainen etsintä

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa käsittelemme virittäviä puita ja esittelemme kaksi algoritmia virittävien puiden konstruointiin. Luvussa 2 esitämme pääaiheen käsittelyssä tarvittavia määritelmiä sekä joitakin esimerkkejä. Luku on jaettu kolmeen osaan, joista pykälässä 2.1 esitämme tärkeimpinä määritelminä yksinkertaisen graafin määritelmän sekä polun ja silmukan määritelmät. Pykälässä 2.2 esitämme aligraafin, virittävän aligraafin sekä maksimaalisen aligraafin määritelmät ja pykälässä 2.3 esitämme yhtenäisen graafin sekä graafin komponentin määritelmät. Kaikki yllä mainitut määritelmät ovat keskeisessä osassa seuraavien lukujen määritelmien ja lauseiden ymmärtämisessä.

Luvussa 3 siirrymme käsittelemään puita ja virittäviä puita. Puun ja virittävän puun määritelmien lisäksi esitämme ja todistamme tärkeän lauseen puun ominaisuuksista, josta seuraa lause virittävän puun ominaisuuksista. Esitämme myös kaksi muuta lausetta virittävän puun ominaisuuksiin liittyen.

Viimeisenä luvussa 4 esittelemme kaksi algoritmia virittävien puiden konstruointiin. Pykälässä 4.2 esittelemme yksityiskohtaisesti syvyyssuuntaisen etsinnän algoritmin ja pykälässä 4.3 leveyssuuntaisen etsinnän algoritmin. Algoritmien eteneminen on havainnollistettu myös kuvien avulla.

Lukijalta odotetaan perustason ymmärrystä yliopistomatematiikasta, mutta graafiteorian tuntemusta lukijalta ei vaadita.

2 Esitietoja

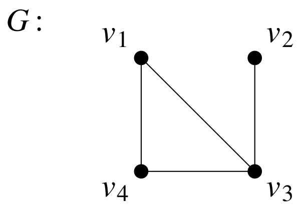
2.1 Peruskäsitteiden määritelmiä

Luvussa 2 esitämme pääaiheen käsittelyssä tarvittavia määritelmiä ja muutaman esimerkin. Tässä pykälässä esitämme yksinkertaisen graafin määritelmän sekä joitakin polkuun ja silmukkaan liittyviä määritelmiä. Lisäksi esitämme esimerkit kaikista edellä mainituista.

Määritelmä 2.1. *Yksinkertainen graafi* on pari $G = (V, E)$, jossa $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$ ja $u \neq v$. Joukon V alkioita kutsutaan *solmuiksi* ja joukon E alkioita *särmiksi*.

Määritelmä 2.2. Yksinkertaisessa graafissa voi kahden solmun välillä olla korkeintaan yksi särmä ja solmusta ei voi olla särmää solmuun itseensä.

Esimerkki 2.1. Kuvassa 2.1 on esitetty yksinkertainen graafi G.



Kuva 2.1. Graafi $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$

Yksinkertaisen graafin lisäksi on olemassa muun muassa *multigraafeja, pseudograafeja* sekä *suunnattuja graafeja*. Multigraafi on yksinkertainen graafi, jossa kahden solmun välillä voi olla useampi särmä ja pseudograafissa graafin solmusta voi olla myös särmä solmuun itseensä. Tälläistä särmää kutsutaan *luupiksi*. Sunnattu graafi on on pari $G = (V, E)$, jossa $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on äärellinen joukko järjestettyjä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$ ja $u \neq v$. Lisäksi graafi voi olla yhdistelmä joistakin edellä mainituista.

Tästä lähin puhuttaessa graafista, tarkoitamme yksinkertaista suuntaamatonta graafia.

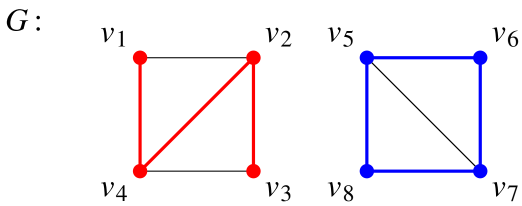
Määritelmä 2.3. Graafin $G = (V, E)$ *polku* on äärellinen jono solmuja ja särmiä $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, siten että e_i on solmujen v_{i-1} ja v_i välinen särmä (eli

$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$). Solmut v_0 ja v_k ovat polun *päätesolmuja*. Polku on *yksinkertainen*, jos jokaista särmää käytetään vain kerran ja polku on *suora*, jos jokaista solmua käytetään vain kerran. *Silmukka* on yksinkertainen polku, jossa mikään muu solmu kuin päätesolmu ei esiinny kahdesti.

Polulle voidaan käyttää myös merkintää $p\colon u \to v$.

Määritelmä 2.4. Graafin kaksi solmua ovat *yhdistetyt*, jos niiden välillä on polku.

Esimerkki 2.2. Kuvassa 2.2 on esitetty punaisella suora polku v_1, v_4, v_2, v_3 ja sinisellä silmukka v_5, v_6, v_7, v_8, v_5 graafissa G.



Kuva 2.2. Graafi G, johon on merkitty punaisella suora polku ja sinisellä silmukka.

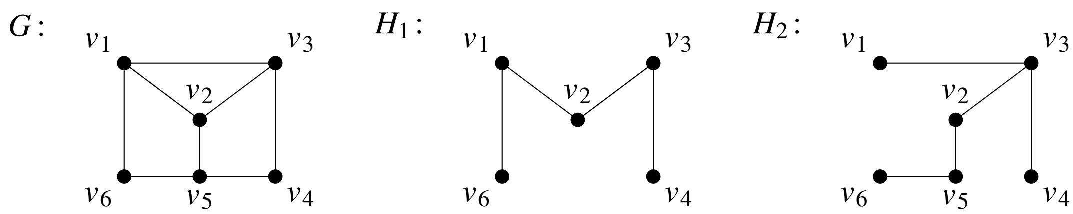
2.2 Aligraafeista

Tässä pykälässä esitämme aligraafin ja virittävän aligraafin määritelmät sekä yhden esimerkin näistä. Lisäksi esitämme maksimaalisen aligraafin määritelmän.

Määritelmä 2.5. Olkoon $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$. Jos $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$, niin H on graafin G *aligraafi*. Lisäksi, jos $W \subset V$ tai $F \subset E$, niin H on graafin G *aito aligraafi*.

Määritelmä 2.6. Olkoon $H = (W, F)$ graafin $G = (V, E)$ aligraafi. Jos $W = V$, niin H on graafin G *virittävä aligraafi*.

Esimerkki 2.3. Kuvassa 2.3 on esitetty graafi G sekä sen kaksi aligraafia H_1 ja H_2. H_2 on lisäksi graafin G virittävä aligraafi.



Kuva 2.3. Graafi G ja sen kaksi aligraafia H_1 ja H_2.

Määritelmä 2.7. Graafin G aligraafi H on graafin G *maksimaalinen aligraafi* ominaisuuden P suhteen, jos graafilla H on ominaisuus P ja H ei ole minkään muun graafin G aligraafin aito aligraafi, jolla on ominaisuus P.

2.3 Graafin yhtenäisyys ja komponentit

Tässä pykälässä esitämme graafin yhtenäisyyden määritelmän sekä yhden lauseen yhtenäisyydestä. Lisäksi esitämme graafin komponentin määritelmän ja yhden esimerkin komponenteista.

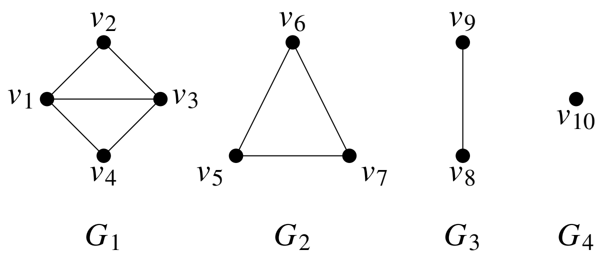
Määritelmä 2.8. Graafi on *yhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi solmua ovat yhdistetyt.

Lause 2.1. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi. Olkoon $e \in E$ jonkin graafin G silmukan särmä. Tällöin myös graafi $G - e$ on yhtenäinen.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. esimerkiksi [1, s. 39]. □

Määritelmä 2.9. Graafin maksimaalinen yhtenäinen aligraafi on graafin *komponentti*.

Esimerkki 2.4. Kuvassa 2.4 on esitetty graafi G, joka koostuu neljästä komponentista G_1, G_2, G_3 ja G_4.



Kuva 2.4. Graafin G komponentit G_1, G_2, G_3 ja G_4.

3 Puut ja virittävät puut

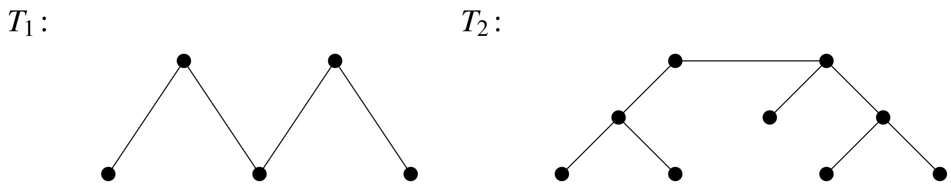
3.1 Puut

Luvussa 3 esitämme tärkeitä puihin ja virittäviin puihin liittyviä määritelmiä sekä lauseita. Tässä pykälässä esitämme ensin puun määritelmän ja esimerkin puista. Lisäksi esitämme lauseen puun ominaisuuksista sekä todistuksen tälle lauseelle.

Määritelmä 3.1. *Puu* on silmukaton yhtenäinen graafi. Jos puu on graafin G aligraafi, on kyseessä graafin G *alipuu*.

Määritelmä 3.2. *K-puu* on silmukaton graafi, jossa on k komponenttia. Jos k-puu on graafin G virittävä aligraafi, sitä kutsutaan graafin G virittäväksi k-puuksi. Virittävää k-puuta kutsutaan myös *metsäksi*.

Esimerkki 3.1. Kuvassa 3.1 on esitetty kaksi puuta T_1 ja T_2.



Kuva 3.1. Esimerkkejä puista.

Seuraavaksi esitämme tärkeän lauseen puun ominaisuuksista.

Lause 3.1. *Olkoon G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi G on silmukaton ja lisäämällä uusi särmä minkä tahansa kahden solmun välille, graafissa on täsmälleen yksi silmukka.*

Todistus. (vrt. [3, s. 34]). Osoitetaan, että ensimmäisestä väitteestä seuraa toinen, toisesta kolmas, kolmannesta neljäs, neljännestä viides ja viidennestä ensimmäinen.

$1 \Rightarrow 2$: Oletetaan, että graafi G on puu. Tällöin se on määritelmän 3.1 mukaan silmukaton ja yhtenäinen. Koska G on yhtenäinen, sen mitkä tahansa kaksi solmua u ja v ovat yhdistetyt eli niiden välillä on vähintään yksi suora polku $p_1\colon u \to v$. Tehdään nyt vastaoletus, että solmujen u ja v välillä on myös toinen suora polku $p_2\colon u \to v$. Nyt poluissa p_1 ja p_2 on vähintään kaksi samaa solmua, koska polut kulkevat solmusta u solmuun v. Päätesolmujen lisäksi poluissa voi olla muitakin yhteisiä solmuja. Tällöin graafiin G muodostuu silmukka polkujen p_1 ja p_2 sisällä ja päädytään ristiriitaan vastaoletuksen kanssa. Näin ollen graafin G minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku.

$2 \Rightarrow 3$: Oletetaan, että graafin G minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku. Graafi G on tällöin yhtenäinen. Todistetaan, että $m = n - 1$ induktiolla graafin G solmujen lukumäärän suhteen. Tämä pätee selvästi graafeille, joissa on yksi tai kaksi solmua.

Oletetaan, että tämä pätee yhtenäisille graafeille, joissa on vähemmän kuin n solmua.

Olkoon e jokin graafin G särmä. Särmä e on ainut polku sen päätesolmujen välillä. Tällöin graafissa $G - e$ ei ole polkua näiden solmujen välillä ja täten $G - e$ ei ole yhtenäinen. Näin ollen graafissa $G - e$ tulee olla täsmälleen kaksi komponenttia, jotta graafi G on yhtenäinen.

Olkoon nyt G_1 ja G_2 graafin $G-e$ kaksi komponenttia. Olkoon komponentissa G_1 n_1 solmua ja m_1 särmää ja olkoon komponentissa G_2 n_2 solmua ja m_2 särmää. Tällöin $n = n_1 + n_2$ ja $m = m_1 + m_2 + 1$. Oletuksen mukaan molemmissa komponenteissa G_1 ja G_2 on täsmälleen yksi suora polku minkä tahansa kahden solmun välillä. Koska $n_1 < n$ ja $n_2 < n$ niin induktio-oletuksen mukaan $m_1 = n_1 - 1$ ja $m_2 = n_2 - 1$. Täten

$$m = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1.$$

$3 \Rightarrow 4$: Oletetaan, että graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$. Tehdään vastaoletus, että graafissa G on yksi tai useampia silmukoita. Määritellään jono graafeja $G_0, G_1, G_2, \ldots,$ jotka saadaan poistamalla aina jokin uusi särmä jostakin graafin G silmukasta.

Aloitetaan asettamalla $G_0 = G$. Poistetaan nyt graafista G_0 jonkin silmukan särmä e_1 ja merkitään syntynyttä graafia $G_1 = G_0 - e_1$. Koska G_0 on oletuksen mukaan yhtenäinen, lauseen 2.1 perusteella myös graafi G_1 on yhtenäinen. Graafissa

G_1 on kaikki graafin G_0 solmut ja siinä on $m - 1$ särmää.

Jos G_1 ei ole silmukaton, olkoon e_2 jonkin silmukan särmä graafissa G_1. Poistetaan nyt graafista särmä e_2 ja merkitään syntynyttä graafia $G_2 = G_1 - e_2 = G_0 - e_1 - e_2$. Graafi G_2 on taas lauseen 2.1 perusteella yhtenäinen ja siinä on n solmua sekä $m - 2$ särmää. Jos G_2 ei ole silmukaton, jatketaan särmien poistamista edellä esitettyyn tapaan, kunnes saadaan graafi G_p, joka on yhtenäinen ja silmukaton. Graafi G_p on n-solmuinen ja siinä on $m - p$ särmää.

Koska G_p on yhtenäinen ja silmukaton, se on määritelmän 3.1 mukaan puu. Nyt aikaisemmista implikaatioista $1 \Rightarrow 2$ ja $2 \Rightarrow 3$ seuraa, että jos graafi G on puu, niin sen minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku ja tästä seuraa edelleen, että graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$. Tämän perusteella pätee

$$m - p = n - 1.$$

Koska oletuksen mukaan $m = n - 1$, niin saadaan, että $p = 0$. Täten graafi G on silmukaton, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa.

$4 \Rightarrow 5:$ Oletetaan, että graafi G on silmukaton ja $m = n-1$. Olkoon $G_1, G_2, \ldots, G_p$ graafin G komponentit ja olkoon kussakin komponentissa G_i n_i solmua ja m_i särmää. Tällöin $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_p$ ja $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

Jokainen komponentti G_i on yhtenäinen ja koska oletuksen mukaan G on silmukaton, myös jokainen komponentti G_i on silmukaton. Näin ollen komponentti G_i on puu. Tällöin kohdan 3 nojalla

$$m_i = n_i - 1 \qquad \text{kaikilla } 1 \leq i \leq p.$$

Ja tällöin saadaan

$$m = \sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1) = n - p.$$

Oletuksen mukaan kuitenkin $m = n - 1$, jolloin saadaan, että $p = 1$.

Täten graafissa G on vain yksi komponentti ja täten se on yhtenäinen. Koska G on oletuksen mukaan myös silmukaton, se on puu. Nyt kohdan 2 nojalla graafissa on täsmälleen yksi suora polku minkä tahansa kahden solmun välillä. Jos graafiin G lisätään särmä e joidenkin solmujen v_1 ja v_2 välille, joiden välillä on jo polku, graafiin muodostuu täsmälleen yksi silmukka.

$5 \Rightarrow 1:$ Oletetaan, että graafi G on silmukaton ja lisäämällä uusi särmä minkä tahansa kahden solmun välille, graafiin muodostuu täsmälleen yksi silmukka. Tehdään oletus, että G ei ole yhtenäinen. Olkoon solmut v_i ja v_j graafin eri komponenteissa. Tällöin solmut v_i ja v_j eivät ole yhdistetyt.

Jos graafiin lisätään särmä e solmujen v_i ja v_j välille, graafiin ei muodostu silmukoita, koska solmujen välillä ei ole polkua. Tällöin ehto 5 ei päde ja tehty oletus siitä, että graafi G ei ole yhtenäinen ei myöskään päde. Näin ollen graafi G on siis yhtenäinen.

Koska G on myös silmukaton, se on määritelmän 3.1 mukaan puu. □

3.2 Virittävät puut

Tässä pykälässä esitämme virittävän puun määritelmän ja lauseen virittävän puun ominaisuuksista. Lisäksi esitämme kolme muuta lausetta virittävistä puista.

Määritelmä 3.3. Graafin G *virittävä puu* on graafin G alipuu, jossa on kaikki graafin G solmut.

Seuraavassa lauseessa esitämme ominaisuuksia, jotka riittävät takaamaan, että graafi on virittävä puu. Lause seuraa suoraan lauseesta 3.1.

Lause 3.2. *Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*

2. *Graafin H minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku.*

3. *Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*

4. *Graafi H on silmukaton ja $m = n - 1$.*

5. *Graafi H on silmukaton ja lisäämällä uusi särmä minkä tahansa kahden solmun välille saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Todistus. Lauseen todistus sivuutetaan, mutta todistus seuraa lauseen 3.1 todistuksesta. □

Lause 3.3. *Olkoon G n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin kun graafi H on silmukaton, yhtenäinen ja siinä on $n - 1$ särmää.*

Siis virittävän puun määritelmän ja edellä olevien lauseiden mukaan n-solmuisen graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu, jos sillä on jotkin kolme seuraavista ominaisuuksista:

1. Graafissa H on n solmua.
2. Graafi H on yhtenäinen.
3. Graafissa H on $n - 1$ särmää.
4. Graafi H on silmukaton.

Itse asiassa jo ominaisuudet 3 ja 4 riittävät määrittämään, että aligraafi H on virittävä puu. Tämän osoittaa seuraava lause.

Lause 3.4. *Aligraafi H on n-solmuisen graafin G virittävä puu jos ja vain jos H on silmukaton ja siinä on $n - 1$ särmää.*

Todistus. (vrt. [3, s. 37-38]). Välttämättömyys seuraa lauseen 3.1 kohdasta 4.

Oletetaan, että graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$. Jotta voidaan todistaa ominaisuuksien 3 ja 4 riittävyys takaamaan, että aligraafi H on virittävä puu, todistetaan, että H on yhtenäinen ja että siinä on kaikki graafin G solmut.

Olkoon $G_1, G_2, \ldots, G_p$ graafin H komponentit. Olkoon n_i solmujen lukumäärä komponentissa G_i ja olkoon n' solmujen lukumäärä graafissa H. Tällöin

$$n' = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Jokainen komponentti G_i on yhtenäinen ja myös silmukaton, koska graafi G on silmukaton. Näin ollen jokainen komponentti G_i on puu ja täten niissä on $n_i - 1$ särmää. Tällöin graafin H särmien lukumäärä on

$$\sum_{i=1}^{p} (n_i - 1) = n' - p.$$

Mutta oletuksen mukaan

$$n' - p = n - 1.$$

Koska $n' \leq n$ ja $p \geq 1$, yllä oleva yhtälö on tosi jos ja vain jos $n' = n$ ja $p = 1$. Näin ollen H on yhtenäinen ja siinä on n solmua. Koska H on myös silmukaton, se on graafin G virittävä puu. □

Lause 3.5. *Graafi G on yhtenäinen täsmälleen silloin kun sillä on virittävä puu.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. esimerkiksi [1, s. 69]. □

4 Virittävien puiden konstruointi

4.1 Erilaisia algoritmeja

Graafien virittävien puiden konstruointiin on olemassa erilaisia tapoja, joista yleisimmät ovat *syvyyssuuntainen (depth-first search)* ja *leveyssuuntainen etsintä (breadth-first search)*.

Syvyyssuuntaisessa etsinnässä ideana on aloittaa virittävän puun konstruointi jostakin valitusta aloitussolmusta, johon lisätään vuorotellen särmiä ja solmuja muodostamatta silmukoita. Leveyssuuntaisessa etsinnässä ideana taas on valita aloitussolmu, johon lisätään silmukoita muodostamatta kaikki särmät, joiden päätesolmuna aloitussolmu on sekä särmien toiset päätesolmut. Jokaisen lisätyn solmun kohdalla toistetaan samanlainen särmien ja solmujen lisäys kuin aloitussolmulle, kunnes ei ole enää mahdollista lisätä särmiä tai solmuja muodostamatta silmukoita. Syvyyssuuntaisella ja leveyssuuntaisella etsinnällä saadaan konstruoitua yleensä useita erilaisia virittäviä puita riippuen siitä, mikä solmu valitaan aloitussolmuksi.

Tässä keskitymme vain yksinkertaisten ja yhtenäisten graafien virittävien puiden etsintään, mutta esimerkiksi epäyhtenäisen graafin virittävän k-puun eli metsän konstruointiin voidaan käyttää syvyyssuuntaista etsintää toistamalla vaiheet erikseen jokaiselle komponentille.

4.2 Syvyyssuuntainen etsintä

Syvyyssuuntaisessa etsinnässä edetään graafin solmuja ja särmiä vuorotellen lisäämällä niin pitkälle graafiin kuin mahdollista muodostamatta silmukoita. Kun johonkin solmuun ei ole enää mahdollista lisätä solmuja ja särmiä muodostamatta silmukkaa, palataan särmiä pitkin taaksepäin ja etsitään lähin solmu, johon voidaan lisätä käyttämätön särmä, ja tätä toistetaan, kunnes kaikki alkuperäisen graafin solmut on lisätty.

Olkoon $G = (V, E)$. Syvyyssuuntainen etsintä etenee seuraavien kohtien mukaan.

1. Valitaan mielivaltainen aloitussolmu u_0 ja lisätään solmu joukkoon W_0. Nyt $W_0 = \{u_0\}$ ja $F_0 = \{\}$.

2. Oletetaan nyt, että on muodostettu joukot $W_i = \{u_0, \ldots, u_i\}$ $(W_i \subseteq V)$ ja

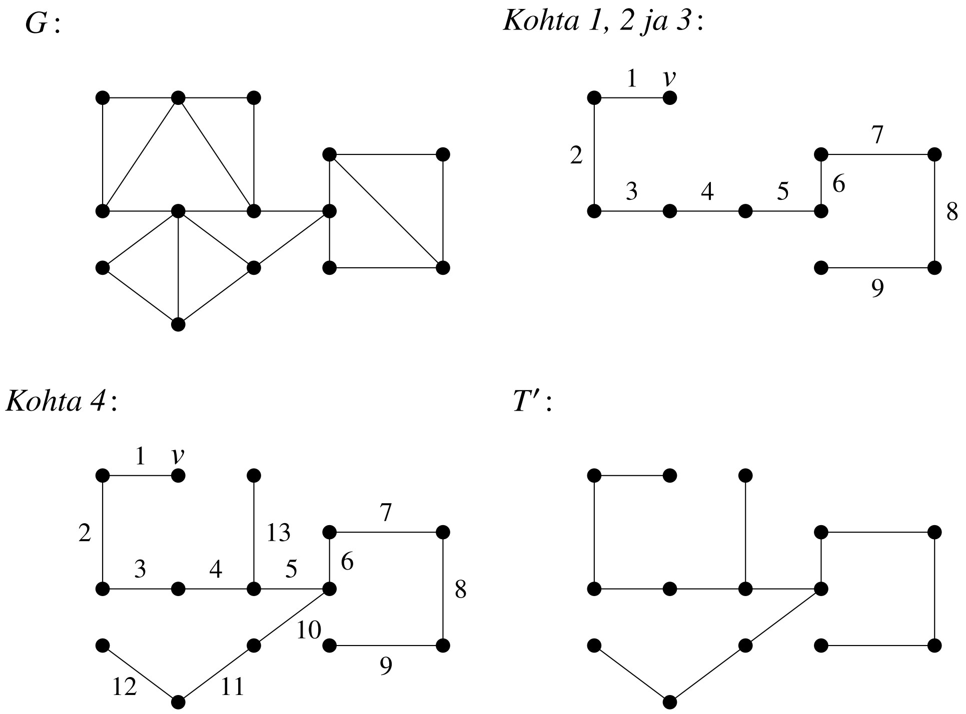
$F_i = \{e_1, \ldots, e_i\}$ ($F_i \subseteq E$). Jos $W_i = V$, eli jos kaikki alkuperäisen graafin G solmut on lisätty, on muodostettu virittävä puu $T' = (W, F)$, jossa $W = W_i$ ja $F = F_i$, ja algoritmi päättyy. Jos $W_i \neq V$, jatketaan algoritmia. Tällöin asetetaan $v = u_i$ ja siirrytään kohtaan 3.

3. Nyt, jos solmulla v on olemassa jokin vierussolmu u_{i+1} ($u_{i+1} \notin W_i$), lisätään solmu u_{i+1} joukkoon W_{i+1} ja särmä $e_{i+1} = \{v, u_{i+1}\}$ joukkoon F_{i+1}. Nyt $W_{i+1} = W_i \cup \{u_{i+1}\}$ ja $F_{i+1} = F_i \cup \{e_{i+1}\}$. Tämän jälkeen siirrytään kohtaan 2. Jos solmulla v ei ole vierussolmua u_{i+1} ($u_{i+1} \notin W_i$), siirrytään kohtaan 4.

4. Nyt, jos $v = u_j$ ($j \leq i$), asetetaan, että $v = u_{j-1}$ ja palataan kohtaan 3.

Näin on saatu muodostettua jokin virittävä puu $T' = (W, F)$.

Kuvassa 4.1 on esitetty virittävän puun syvyyssuuntainen etsintä graafissa G. Selkeyden vuoksi, kuvassa särmät on numeroitu sen mukaan, missä järjestyksessä ne on graafiin lisätty.



Kuva 4.1. Virittävän puun syvyyssuuntainen etsintä graafissa G.

4.3 Leveyssuuntainen etsintä

Leveyssuuntainen etsintä aloitetaan valitsemalla jokin aloitussolmu mielivaltaisesti ja lisäämällä tähän aloitussolmuun kaikki ne graafin särmät, joiden päätesolmuna aloitussolmu on, sekä särmien toiset päätesolmut muodostamatta silmukoita. Seuraavaksi jokaiselle lisätylle solmulle toistetaan samanlainen särmien ja solmujen lisäys muodostamatta silmukoita. Tällaista särmien ja solmujen lisäystä toistetaan graafissa, kunnes kaikki alkuperäisen graafin solmut on lisätty.

Olkoon $G = (V, E)$. Leveyssuuntainen etsintä etenee seuraavien kohtien mukaan.

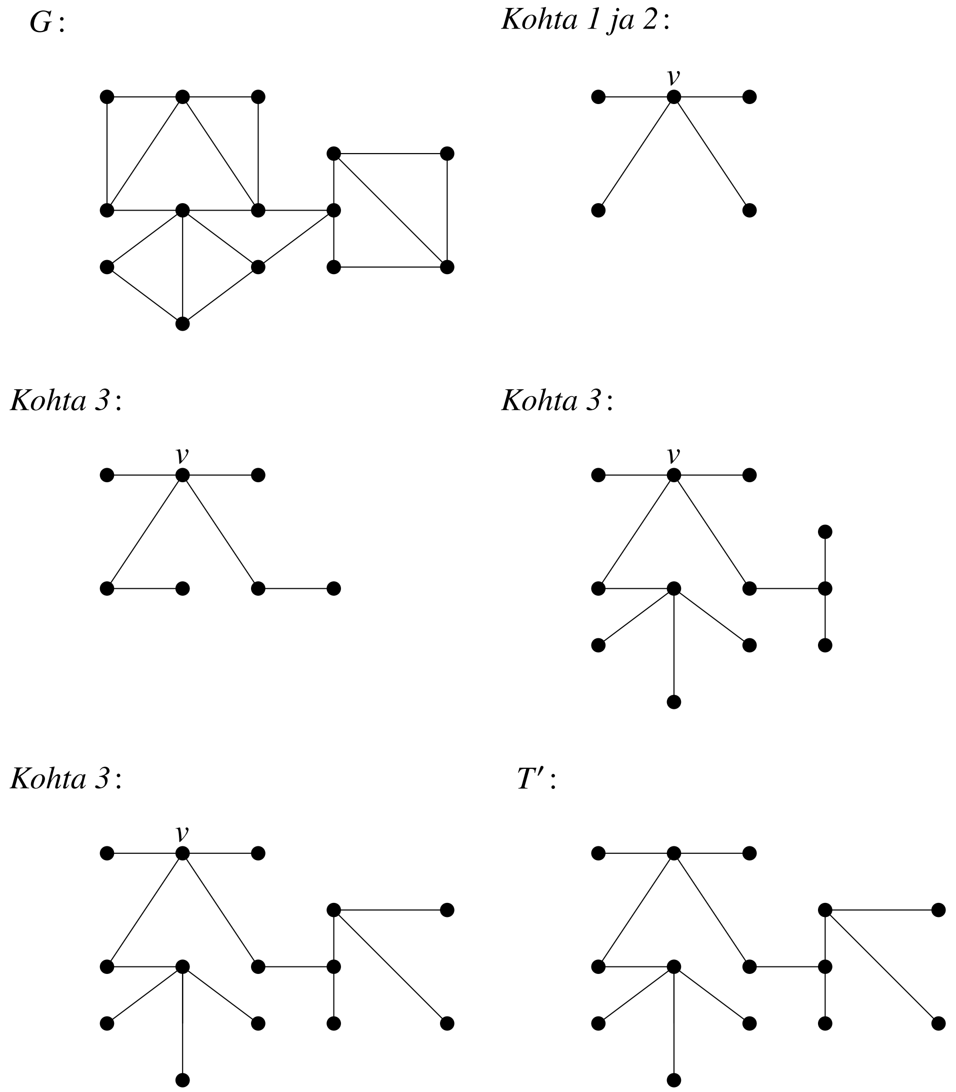
1. Valitaan mielivaltainen aloitussolmu u_0 ja lisätään solmu joukkoon W_0. Nyt $W_0 = \{u_0\}$ ja $F_0 = \{\}$.

2. Oletetaan nyt, että on muodostettu joukot $W_i = \{u_0, \ldots, u_n\}$ ($W_i \subseteq V$) ja $F_i = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ($F_i \subseteq E$). Valitaan seuraavaksi kaikki särmät solmusta u_0 solmuihin u ($u \notin W_i$) ja merkitään näiden särmien joukkoa $F_{i,0}$. Nyt joukkoon $W_{i,0}$ kuuluu joukon W_0 solmu sekä joukon $F_{i,0}$ särmien toiset päätesolmut. Tämän jälkeen valitaan järjestyksessä ensimmäinen solmu u_j ($j \leq n$) ja lisätään kaikki särmät solmusta u_j joukkoon $V \setminus W_{i,0}$ ja merkitään tätä joukkoa $F_{i,j}$. Nyt joukkoon $W_{i,j}$ kuuluu joukon $W_{i,0}$ solmujen lisäksi solmun u_j vierussolmut. Kun jokainen solmu on käyty tällä tavalla läpi, saadaan, että $W_{i+1} = W_{i,n}$ ja $F_{i+1} = F_{i,n}$ ja siirrytään kohtaan 3.

3. Jos $W_i \neq V$, toistetaan kohtaa 2, kunnes kaikki alkuperäisen graafin G solmut on lisätty, eli kunnes $W_i = V$, ja silmukoita ei ole muodostunut. Nyt siis $W_i = W$ ja $F_i = F$.

Näin on saatu muodostettua jokin virittävä puu $T' = (W, F)$.

Kuvassa 4.2 on esitetty virittävän puun leveyssuuntainen etsintä graafissa G.



Kuva 4.2. Virittävän puun leveyssuuntainen etsintä graafissa G.

Lähteet

[1] Koivisto, P. & Niemistö, R. *Graafiteoriaa*, 2. painos. Tampereen yliopisto, 2018.

[2] McHugh, J. A. *Algorithmic Graph Theory*. Prentice Hall, 1990.

[3] Swamy, M. N. S. & Thulasiraman, K. *Graphs, Networks, and Algorithms*. Wiley, 1981.

[4] Wilson, R. J. & Watkins, J. J. *Graphs: An Introductory Approach: a First Course in Discrete Mathematics*. Wiley, 1990.