

Satu Johansson

**Q-FUNKTION  
MINIMAX-APPROKSIMOINTI  
EKSPONENTTISUMMALLA**

Kandidaatintutkielma  
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta  
Tarkastaja: Taneli Riihonen  
Toukokuu 2022

# TIIVISTELMÄ

Satu Johansson: Q-funktion minimax-approksimointi eksponenttisummalla  
Kandidaatintutkielma  
Tampereen yliopisto  
Tietotekniikka  
Toukokuu 2022

---

Langaton tiedonsiirto on läsnä kaikkialla yhteiskunnassa. Siirrettyjen datamäärien kasvaessa tiedonsiirron laadukkuus on erityisen tärkeää. Tietoliikennetekniikassa tiedonsiirron virheettömyyttä voidaan arvioida tilastollisin keinoin käyttäen normaalijakauman eli Gaussin jakauman häntäfunktiota, Q-funktiota. Q-funktiota hyödynnetään tiedonsiirron symboli- ja bittivirhetodennäköisyyksien laskemisessa siten, että sen parametrinaan saama signaali-kohinasuhde SNR saa eri kertoimia käytetystä digitaalisesta modulaatiosta ja modulaation konstellaatiosta riippuen. Signaali-kohinasuhteen kasvaessa tiedonsiirron virhetodennäköisyys pienenee, ja käytännön suunnittelutyö onkin tasapainon hakemista riittävän signaali-kohinasuhteen ja kyllin pienen tiedonsiirron virhetodennäköisyyden saavuttamiseksi.

Käyttökelpoisuudestaan huolimatta Q-funktio on matemaattisesti hankala integraalifunktio, jonka saamat arvot voidaan ratkaista vain numeerisesti laskentaohjelmalla. Analyyttistä käsittelyä varten Q-funktiosta onkin kehitetty useisiin eri lähestymistapoihin perustuvia approksimaatioita, joiden avulla Q-funktion saamia arvoja voidaan ratkaista riittäväällä tarkkuudella. Tutkielmassa esitellään tietoliikennetekniikassa merkityksellisimmät lähestymistavat: rajoihin perustuvat approksimaatiot, eksponenttifunktioon perustuvat approksimaatiot, polynomiekspONENTTIFUNKTIOON perustuvat approksimaatiot ja eri funktioihin perustuvat approksimaatiot.

Varsinainen tutkimuskysymys on erään tietyn eksponenttifunktioon perustuvan minimax-approksimaation jatkokehitys. Kyseisessä approksimaatioissa eksponenttifunktion kertoimet saadaan minimoimalla approksimaation absoluuttisen ja suhteellisen virheen tuottamaa kokonaisvirhettä siten, että virheitä kuvaavat epälineaariset yhtälöryhmät ratkaistaan Newtonin menetelmällä numeerisesti. Tässä tutkielmassa absoluuttisen virheen ratkaisemiseen esitetään analyttisesti ratkaistu Jacobin matriisi, jonka avulla vältetään numeerisen laskennan tarpeetonta raskautta menetelmää käytettäessä. Analyttisesti ratkaistu Jacobin matriisi voidaan myöhemmin toteuttaa laskentaohjelmaan sopivana kooditoteutuksena, jolla approksimaation vaatimaa prosessointitehoa ja -aikaa voidaan pienentää ja Newtonin menetelmän vaatiman alkuarvauksen saamista mahdollisesti helpottaa. Tutkielman lopussa esitetään jatkokehitysideoita tulevaa tutkimusta varten.

Avainsanat: Q-funktio, approksimointi, normaalijakauma, Gaussin jakauma, tietoliikennetekniikka, symbolivirhetodennäköisyys, bittivirhetodennäköisyys, SER, BER, signaali-kohinasuhde, SNR, AWGN, AWGN-kanava, häipyvä kanava, kohina, ideaalinen vastaanotin, signaali, modulaatio, amplitudimodulaatio, vaihemodulaatio, konstellaatio, PAM, QAM, PSK, Newtonin menetelmä, Jacobin matriisi, epälineaarinen yhtälöryhmä, minimax, absoluuttinen virhe.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# ABSTRACT

Satu Johansson: Q-Function Minimax Approximation by Sum of Exponentials  
Bachelor's Thesis  
Tampere University  
Computing Engineering  
May 2022

---

Wireless communication is present everywhere in the society. As the amount of transferred data increases, the quality of data transfer becomes vital. In communications engineering, the accuracy of data transfer can be evaluated through statistical means by using the tail function of the normal distribution, that is, the Gaussian distribution: the Q-function. The Q-function is utilized in calculating the symbol and bit error probabilities of data transfer so that the signal-to-noise ratio, SRN, is multiplied by different coefficients depending on the digital modulation and the modulation constellation used. As the signal-to-noise ratio increases, the error probability of the data transfer decreases, and practical design work is reaching a compromise to achieve a sufficient signal-to-noise ratio and a low enough probability of error for data transfer.

Despite its usefulness, the Q-function is a mathematically complex integral function, the values of which can only be solved numerically using computing software. For analytical treatment, several approximations based on different approaches have been developed of the Q-function that allow solving the values of the Q-function with sufficient accuracy. This study presents the most useful approaches in telecommunications engineering: approximations based on bounds, approximations based on exponential function, approximations based on polynomial exponential functions, and approximations based on different functions.

The research problem is further development of a certain minimax-approximation based on exponential function. In the approximation, coefficients of the exponential function are obtained by minimizing the global error resulting from the absolute and relative error of the approximation by solving numerically systems of nonlinear equations that describe the errors using Newton's method. This study presents an analytically solved Jacobian matrix for absolute error that allows avoiding unnecessary computing complexity when using the method. An analytically solved Jacobian matrix can later be coded into a suitable computing language that reduces the processing power and time required in the approximation and possibly facilitates obtaining the initial guess required by Newton's method. At the end of the study, ideas for further research are presented.

Keywords: Q-function, approximation, normal distribution, Gaussian distribution, communications engineering, symbol error probability, bit error probability, SER, BER, signal-to-noise ratio, SNR, AWGN, AWGN channel, fading channel, noise, ideal receiver, signal, modulation, amplitude modulation, phase modulation, constellation, PAM, QAM, PSK, Newton's method, Jacobian matrix, system of nonlinear equations, minimax, absolute error.

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

# ALKUSANAT

Tieteellisen tutkimuksen julma sivuvaikutus on ymmärrys siitä, kuinka vähän tietääkään. Kun aloin tehdä tätä matematiikkaa käsittelevää kandidaatintyötä sinänsä tutusta tietoliikennetekniikasta, liian nopeasti aloin käsittää, että paljon on vielä opittavaa. Kenties satunnainen lukija löytää tästä työstä oivalluksia, joilla jäsentää vuosien varrella kerättyjä tiedonmurusia, tai jopa kokonaan uusia tiedonmuruja. Matemaattinen osaaminen on luonteeltaan kerroksellista, ja pinnallisesti tuttujen asioiden syvällisempi tarkastelu tuo toisinaan palkitsevia hetkiä, kun tiedon palaset loksahtelevat paikoilleen. Englantilaisen 1200-luvun filosofin Roger Baconin sanoin: "Matematiikka on ovi ja avain tieteisiin."

Haluan esittää sydämelliset kiitokseni Taneli Riihoselle, jonka tarkka ja kärsivällinen ohjaustyö ja tiivis, aina kannustava yhteydenpito on ollut korvaamatonta.

Tampereella 10.5.2022

Satu Johansson

# SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO .....	1
2. Q-FUNKTIO TIETOLIIKENNETEKNIKASSA .....	3
2.1 Symbolivirhetodennäköisyys AWGN-kanavassa .....	3
2.2 Häipyvän kanavan vaikutus symbolivirhetodennäköisyyteen.....	9
3. Q-FUNKTION APPROKSIMOINTI .....	11
3.1 Rajoihin perustuvat approksimaatiot .....	11
3.2 Eksponenttifunktioon perustuvat approksimaatiot .....	12
3.3 PolynomiekspONENTTIFUNKTION perustuvat approksimaatiot .....	14
3.4 Eri funktioihin perustuvat approksimaatiot .....	14
4. EKSPONENTTIFUNKTION PERUSTUVA APPROKSIMAATIO.....	15
4.1 Epälineaariset yhtälöryhmät .....	15
4.2 Newtonin menetelmä .....	17
4.3 Jacobin matriisi .....	18
5. YHTEENVETO.....	21
LÄHTEET .....	22

# KUVALUETTELO

<b>Kuva 1.</b>	<i>Yksinkertainen lähetetty konstellaatio, jossa <math>M = 2</math>. Konstellaation symboliarvot ovat <math>-a</math> ja <math>a</math>.</i>	4
<b>Kuva 2.</b>	<i>Havaittujen symbolien todennäköisyys vastaanottimessa ekvivalisoinnin jälkeen. Päätösalueiden raja on merkitty punaisella katkoviivalla. Virheellisen havainnon todennäköisyyttä on havainnollistettu pystyviivalla symboliarvolle <math>-a</math> ja vaakaviivalla symboliarvolle <math>a</math>.</i>	4
<b>Kuva 3.</b>	<i>Modulaation QPSK konstellaatiokuva.</i>	7
<b>Kuva 4.</b>	<i>Modulaatioiden 8-PSK (vasemmalla) ja 16-QAM (oikealla) konstellaatiokuva.</i>	8
<b>Kuva 5.</b>	<i>Symbolivirhetodennäköisyys signaali-kohinasuhteen funktiona eri modulaatioilla.</i>	9
<b>Kuva 6.</b>	<i>Absoluuttisen virheen ääriarvokohtien välillä oskilloiva virhefunktio.</i>	15

# LYHENTEET JA MERKINNÄT

ASEP	Average Symbol Error Probability, keskimääräinen symbolivirhetodennäköisyys
AWGN	Additive White Gaussian Noise, eräs kanavamalli
BER	Bit Error Rate, bittivirhetodennäköisyys
BPSK	Binary Phase-Shift Keying, eräs PSK-modulaatio
MSE	Mean Square(d) Error, keskineliövirhe
PAM	Pulse-Amplitude Modulation, eräs modulaatiomenetelmä
PEP	Pairwise Error Probability, parillinen virhetodennäköisyys
p.d.f.	Probability Density Function, tiheysfunktio
PSK	Phase-Shift Keying, eräs modulaatiomenetelmä
QAM	Quadrature Amplitude Modulation, eräs modulaatiomenetelmä
QPSK	Quadrature Phase-Shift Keying, eräs PSK-modulaatio
SER/SEP	Symbol Error Rate/Symbol Error Probability, symbolivirhetodennäköisyys
SNR	Signal-to-Noise-Ratio, signaali-kohinasuhde

# 1. JOHDANTO

Tietoliikenne ja langaton tiedonsiirto ovat läsnä kaikkialla yhteiskunnassa, ja niiden merkitys kasvaa entisestään siirrettyjen datamäärien kasvaessa ja tiedonsiirtoyhteyksien nopeutuessa. Tiedonsiirron nopeuden, tiedonsiirtojärjestelmien kantokyvyn ja järjestelmien suorituskyvyn rinnalla oleellista on kuitenkin tiedonsiirron virheettömyys. Langallisia siirtoteitä on perinteisesti käsitelty lähes virheettöminä, ja tietoliikenteen virheiden onkin katsottu syntyvän langattomalla radiotiellä, jolla signaalin kantoaallon siirtymiseen vaikuttavat radioaaltojen monitie-etenemisen aiheuttama interferenssi, ympäristön kohina ja signaalin vaimeneminen siirtotiellä eli häipyä.

Digitaalisessa binäärimaailmassa tiedonsiirtoa voidaan arvioida informaatioteorian tarjoamin tilastollisin keinoin laskemalla bittivirhe- ja symbolivirhetodennäköisyyksiä sekä signaali-kohinasuhdetta. Signaali-kohinasuhdetta, kuten myös satunnaista kohinaa, voidaan käsitellä satunnaismuuttujana (Tanash & Riihonen 2020, s. 6514). Erityisen käyttökelpoisen työkalun tällaisen satunnaismuuttujan tilastolliseen tarkasteluun ja todennäköisyyslaskentaan tarjoaa normaalijakauman eli Gaussin jakauman häntäfunktio, Q-funktio.

Käyttökelpoisuudestaan huolimatta Q-funktio on matemaattisesti hankala käsiteltävä. Sen saamien arvojen ratkaiseminen onnistuu laskentaohjelmistolla numeerisesti, mutta Q-funktio on perusmuodossaan epäoleellinen integraali ja muokattunakin sellainen integraalifunktio, jota ei voi palauttaa suljettuun muotoon alkeisfunktioiksi (Tanash & Riihonen 2020, s. 6514). Käsittelyn helpottamiseksi Q-funktiosta onkin muodostettu useita erilaisia matemaattisia approksimaatioita, joilla voidaan saavuttaa riittävän tarkkoja tuloksia kohtuullisella laskentateholla. Approksimaatioiden käyttökelpoisuutta voidaan arvioida vertailemalla approksimaatioilla saatuja tuloksia Q-funktiolla saatuihin tuloksiin.

Tässä tutkielmassa esitellään erilaisia lähestymistapoja approksimaatioiden muodostamiseen, mutta tutkimuskysymyksenä tarkastellaan Tanashin ja Riihosen (2020) esittämää, eksponenttisummiin perustuvaa minimax-approksimaatiota, jossa approksimaation kertoimet määritetään muodostamalla ja ratkaisemalla epälineaarinen yhtälöryhmä. Alkuperäisessä tutkimuksessa epälineaarinen yhtälöryhmä ratkaistiin numeeriseen integrointiin käytetyllä Newtonin menetelmällä, jossa myös menetelmän käyttämät para-



metrit ratkaistiin numeerisesti. Parametrien numeerinen käsittely tuo kuitenkin mukanaan tarpeetonta laskennallista raskautta, sillä laskentaohjelman käyttämät liukuluvut eivät käsittele nolliä nollina vaan äärettömän pieninä liukulukuina.

Merkittävämpi ongelma on kuitenkin tutkimuksessa käytetyn laskentaohjelma Matlabin rajallinen, käyttäjästä riippumaton kapasiteetti liukulukujen käsittelemiseen. Kun approksimaation termien lukumäärä kasvaa, approksimaation eksponenttikertoimet pienenevät lopulta niin, että laskentaohjelma käsittää ne nolliksi. Jotta jo laadittua approksimaatiota voidaan hyödyntää entistä laajemmalla käyttöalueella, laskennan siirtäminen pienempiä eksponenttikertoimia paremmin käsittelevään ympäristöön on välttämätöntä. Tarkoitukseen sopii ohjelmakoodi Python ja sen koodikirjasto mpmath, jossa liukuluvun esitystarkkuutta rajoittaa vain käyttöjärjestelmän muistin koko. Jotta koodausympäristön vaihdoksesta saadaan kaikki hyöty, Newtonin menetelmän parametrinaan käyttämä Jacobin matriisi ratkaistaan analyyttisesti. Tämän työn tarkoitus onkin esittää sellainen analyyttisesti ratkaistu Jacobin matriisi approksimaation absoluuttiselle virheelle, jota voidaan myöhemmin hyödyntää approksimaation Python-kooditoteutuksessa. Sen avulla approksimaation laskentaan tarvittavaa aikaa ja siten laskennan tarvitsemaa prosessointitehoa voidaan mahdollisesti vähentää ja approksimaation vaatiman alkuarvauksen saamista helpottaa.

Luvussa 2 käsitellään tietoliikennetekniikassa yleisesti käytössä olevaa kanavamallia ja tiedonsiirron symboli- ja bittivirhetodennäköisyyksien laskemista Q-funktion avulla. Luvussa 3 esitellään Q-funktiolle kehitettyjä approksimaatioita. Luvussa 4 käsitellään minimax-lähestymistapaan perustuvaa eksponenttiapproksimaatiota ja esitetään olemassa olevan tutkimuksen tueksi analyyttisesti ratkaistu Jacobin matriisi. Luvussa 5 kootaan yhteen tutkielmassa esitellyt havainnot ja esitetään mahdollisuuksia käsitellyn approksimaation jatkotutkimusta varten.

## 2. Q-FUNKTIO TIETOLIIKENNETEKNIKASSA

Tässä luvussa käsitellään tietoliikennejärjestelmien siirtotien mallintamiseen käytettyä kanavamallia ja siirtotien aiheuttamia häiriöitä tiedonsiirtoon. Siirtotien aiheuttamien häiriöiden todennäköisyyttä arvioidaan matemaattisilla todennäköisyyksillä, joiden laskemiseen käytetään Q-funktiota.

### 2.1 Symbolivirhetodennäköisyys AWGN-kanavassa

Yleinen matemaattinen malli tiedonsiirtojärjestelmän siirtotien eli kanavan kuvaamiseen on AWGN-kanava (*Additive White Gaussian Noise*), jossa lähetettyyn signaaliin yhdistyy siirtotien ja vastaanottimen kohinaa. Tyypillisiä kohinan lähteitä ovat sähköisten komponenttien tuottama lämpökohina ja radioaaltojen interferenssi langattomalla siirtotiellä. Tällaista stokastista eli sattumanvaraista kohinaa voidaan käsitellä Gaussin jakaumaa noudattavana satunnaismuuttujana. AWGN-kanavan signaalimalli voidaankin esittää kaavalla

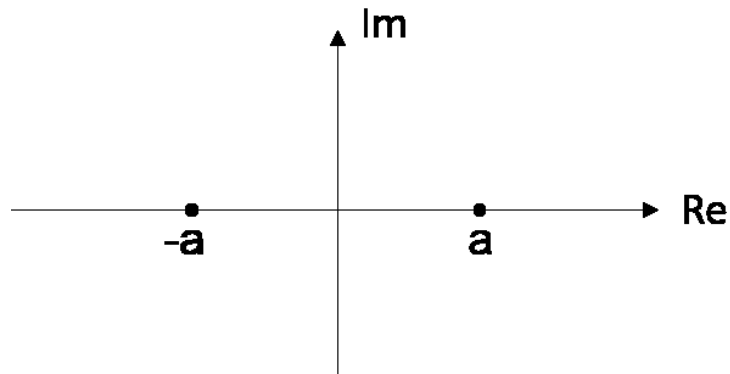
$$y(t) = h * x(t) + n(t), \quad (1)$$

jossa signaalin  $y(t)$  todennäköisyysjakauma ajanhetkellä  $t$  millä tahansa  $x(t)$ :n arvolla saadaan signaalin vaimenemista ilmaisevan vakiokertoimen  $h$  ja kohinaa ilmaisevan satunnaismuuttujan  $n(t)$  avulla. (Proakis 2000, s. 11) Ekvivalisoinnin jälkeen signaalista poistetaan kanavan vaikutus ja saatu signaali tulkitaan demodulaatiossa joksikin symboliksi. Ekvivalisoitu signaali  $\tilde{y}(t)$  voidaan esittää kaavalla

$$\tilde{y}(t) = x(t) + \tilde{n}(t), \quad (2)$$

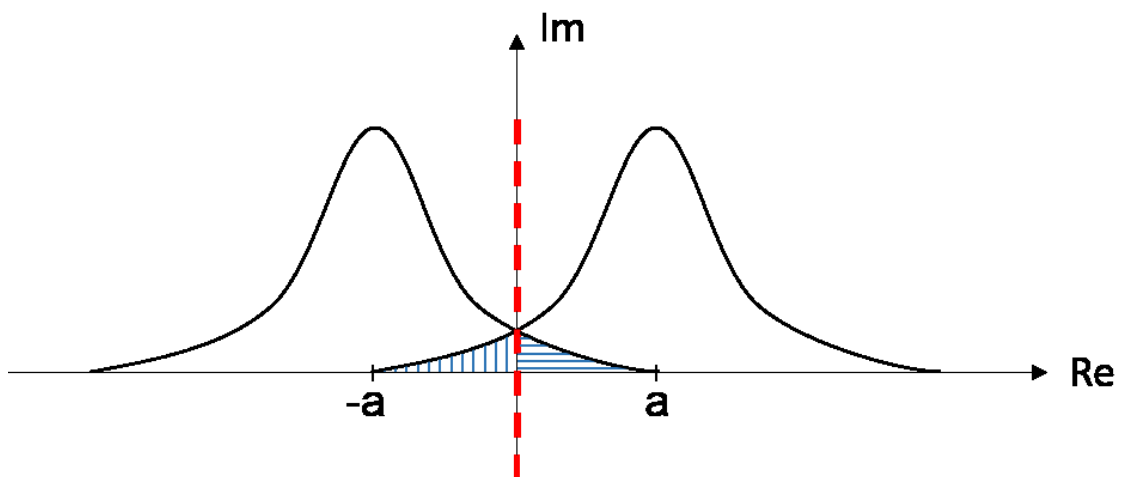
jossa myös kohinaa ilmaiseva satunnaismuuttuja  $\tilde{n}(t)$  on ekvivalisoitu.

Symboli- ja bittivirhetodennäköisyydellä voidaan arvioida tiedonsiirron laadukkuutta. Symbolivirhetodennäköisyyden laskemista voidaan havainnollistaa yksinkertaiselle AWGN-kanavan kautta välitetylle signaalille, jossa symboli voi saada kaksi mahdollista arvoa,  $M = 2$ . Kahdenarvoisia yksinkertaisia modulaatioita ovat amplitudimodulaatio 2-PAM eli binäärinen PAM (*Binary Pulse-Amplitude Modulation*) ja vaihemodulaatio BPSK (*Binary Phase-Shift Keying*). Tällaisen modulaation konstellaatiokuvio on esitetty kuvassa 1.



**Kuva 1.** Yksinkertainen lähetetty konstellatio, jossa  $M = 2$ . Konstellation symboliarvot ovat  $-a$  ja  $a$ .

Oletetaan, että signaalin vastaanotin on ideaalinen ja että vastaanotettavat symboliarvot  $\{-a, a\}$  ovat yhtä todennäköisiä. Koska siirtotie on kaavan (2) mukainen AWGN-kanava, vastaanotetut signaalit ovat satunnaismuuttujia, jotka noudattavat Gaussin jakaumaa. Tilannetta havainnollistetaan kuvassa 2, jossa yhtä todennäköisten symboleiden päätöskynnys (*decision threshold*) asetuu kohtaan nolla. Tässä tilanteessa päätöskynnys on päätösalueiden (*decision region*) puoliväliin sijoittuva raja-arvo, jonka avulla vastaanotin päättää, tulkitseeko lähetetty signaali  $x(t)$  symbolina  $a$  vai  $-a$ . Kun vastaanotetun symbolin arvo on negatiivinen, vastaanotin tulkitsee symbolin arvoksi  $-a$ ,  $x = -a$ . Kun vastaanotetun symbolin arvo on positiivinen, vastaanotin tulkitsee symbolin arvoksi  $a$ ,  $x = a$ . (Proakis 2000, s. 257)



**Kuva 2.** Havaittujen symbolien todennäköisyys vastaanottimessa ekvivalisoinnin jälkeen. Päätösalueiden raja on merkitty punaisella katkoviivalla. Virheellisen havainnon todennäköisyyttä on havainnollistettu pystyviivalla symboliarvolle  $-a$  ja vaakaviivalla symboliarvolle  $a$ .

Mikäli lähetetty symboli olisi  $-a$  mutta vastaanotetun symbolin arvo olisi positiivinen, vastaanotin tulkitsi vastaanotetun symbolin virheellisesti arvoksi  $a$ . Samoin jos lähetetty

symboli olisi  $a$  mutta vastaanotetun symbolin arvo olisi negatiivinen, vastaanotin tulkitseisi vastaanotetun symbolin virheellisesti arvoksi  $-a$ . Todennäköisyys, jolla vastaanotettu arvo tulkitaan vastaanottimessa väärin, on siten symbolivirhetodennäköisyys tai bittivirhetodennäköisyys. (Proakis 2000, s. 258)

Kuten kuvassa 2 on havainnollistettu symbolille  $-a$ , symbolivirheen todennäköisyys eli todennäköisyys sille, että lähetetty symboli tulkitaan väärin symboliksi  $a$ , ilmaistaan Gaussin jakauman häntäfunktiolla eli Q-funktiolla. Toisin sanoen Q-funktion arvo  $Q(x)$  on todennäköisyys sille, että satunnaismuuttuja  $X$  saavuttaa suuremman arvon kuin  $x$ . Siis  $P(X > x) = Q(x)$ . (Barry et al. 2004, s. 63) Siten Q-funktio on normaalijakauman  $X \sim N(0,1)$  tiheysjakauman kertymäfunktion komplementti. Matemaattisesti Q-funktio ilmaistaan integraalilausekkeella (Barry et al. 2004, s. 63; Tanash & Riihonen 2020, s. 6514) siten, että

$$Q(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ kun } x \geq 0 \quad (3)$$

tai edellisestä johdetulla Craigin kaavalla (Craig 1991, s. 572; Tanash & Riihonen 2020, s. 6514) siten, että

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2 \sin^2 \theta} x^2} d\theta, \text{ kun } x \geq 0. \quad (4)$$

Perusmuodossaan Q-funktio on epäoleellinen integraali ja muokattunakin sellainen integraalifunktio, jota ei voi palauttaa suljettuun muotoon alkeisfunktioiksi (Barry et al. 2004, s. 63; Tanash & Riihonen 2020, s. 6514). Q-funktion arvo ja siten AWGN-kanavaa käyttävän tietoliikennejärjestelmän symbolivirhetodennäköisyys voidaan ratkaista numeerisesti laskentaohjelmalla, mutta approksimaatioita käyttämällä voidaan päästä riittävään laskentatarkkuuteen matemaattisesti yksinkertaisemmillä lausekkeilla. Eri lähestymistapoja Q-funktion approksimointiin käsitellään luvussa 3.

Kuvan 2 mukaisessa tilanteessa, jossa kahdella vastaanotetulla symboliarvolla on yhtä suuri todennäköisyys, voidaan esittää ehdollinen todennäköisyys symbolivirheelle tilanteessa, jossa havaitaan symboli  $a$ , kun ensin on lähetetty symboli  $-a$ . Sama todennäköisyys pätee symmetrian vuoksi myös tapauksessa, jossa havaitaan symboli  $-a$ , kun on ensin lähetetty symboli  $a$ . Käyttäen hyväksi konstellaation symboleiden euklidisia etäisyyksiä ja tiedonsiirtosignaalin voimakkuutta, voidaan todennäköisyys virheellisen symbolin havaitsemiseen lopulta ilmaista kaavalla

$$P(\text{virhe})_{2-PAM,BPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{P_S}{P_N}}\right) = Q(\sqrt{SNR}), \quad (5)$$

jossa signaaliteho  $P_S$  ja kohinateho  $P_N$  suhde voidaan ilmaista signaali-kohinasuhteena SNR (*Signal-to-Noise Ratio*) (yksityiskohtainen johto Proakis 2000, s. 258–260). Tarkastellaan näiden suureiden määräytymistä vielä lähemmin.

Digitaalisen, kvantisoidun signaalin lähetysteho  $P_x$  saadaan signaalin  $x(t)$  itseisarvon neliön odotusarvona siten, että

$$P_x = E(|x(t)|^2). \quad (6)$$

Kohinateho  $P_N$  määritellään vastaavasti kohinan  $n(t)$  itseisarvon neliön odotusarvona siten, että

$$P_N = E(|n(t)|^2), \quad (7)$$

ja signaaliteho  $P_S$  vaimenemiskertoimen  $h$  ja lähetetyn signaalin  $x(t)$  tulon itseisarvon neliön odotusarvona siten, että

$$P_S = E(|h * x(t)|^2). \quad (8)$$

Yhdistämällä kaavat (6) ja (8) signaaliteho voidaan määritellä siten, että

$$P_S = |h|^2 E(|x(t)|^2) = |h|^2 P_x, \quad (9)$$

jolloin signaali-kohinateho voidaan kaavojen (5) ja (9) avulla määritellä suhteena

$$SNR = \frac{P_S}{P_N} = \frac{|h|^2 P_x}{P_N}. \quad (10)$$

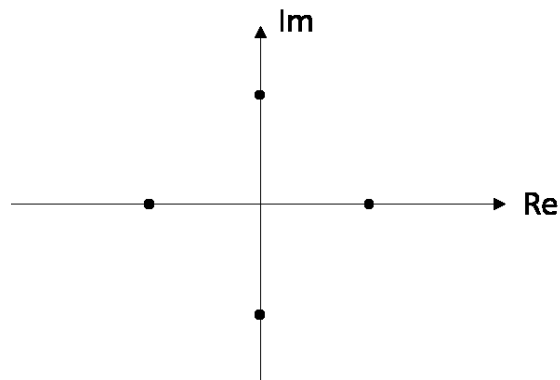
AWGN-kanavan tapauksessa signaali-kohinasuhteelle saadun yhtälön tehojen suhde saadaan siis odotusarvojen suhteena, kun vaimennuskertoimen itseisarvon neliö on jokin vakioarvo. Signaali-kohinasuhteen laskemiseen AWGN-kanavan ulkopuolella palataan luvussa 2.2.

Signaali-kohinasuhde voidaan esittää tehojen suhteena symbolia tai bittiä kohden. Näiden välinen suhde ilmaistaan seuraavasti: modulaatiokoolla  $M$  voidaan ilmaista kahden potenssi  $k$  bittiä. Siis  $M = 2^k$ . Bittiarvoinen signaali-kohinasuhde saadaan kertomalla symboliarvoinen signaali-kohinasuhde modulaation bittien  $k$  arvolla,  $SNR_{\text{symbol}} = k * SNR_{\text{bit}}$ . Bittien käyttäminen on hyödyllistä etenkin silloin, kun vertaillaan digitaalisia modulaatioita. (Proakis 2000, s. 262). Käytännön tiedonsiirtojärjestelmien suunnittelu onkin kompromissien hakemista riittävän signaali-kohinasuhteen ja konstellaatiokoon välillä (ibid., s. 263; Chen & Beaulieu 2009, s. 126).

Edellä on esitetty tiedonsiirtojärjestelmien symbolivirhetodennäköisyyden määräytymisen reaaliarvoisessa binäärimuotoisessa modulaatioissa, kun tiedonsiirrossa käytetään AWGN-kanavaa ja ideaalista vastaanotinta. Q-funktiolle parametrina annetun signaali-kohinasuhteen kasvaessa Q-funktion arvo ja samalla tiedonsiirron virhetodennäköisyys

pienenevät. Kun kasvatetaan konstellaatiokokoa, muutetaan modulaatiomenetelmää tai yhdistellään eri modulaatiomenetelmiä, kuten vaihe- ja amplitudimodulaatioita, symboli- ja bittivirhetodennäköisyyden määrittämisessä hyödynnetään edelleen Q-funktiota, vain funktion parametrien kertoimet muuttuvat (Proakis 2000, s. 257–282).

Esimerkiksi PSK-vaihemodulaatiossa tarkka symbolivirhetodennäköisyys voidaan ilmaista silloin, kun konstellaation koko on neljä,  $M=4$  (Proakis 2000, s. 271–272). Konstellaatiokuva tällaiselle 4-PSK- eli QPSK-modulaatiolle (*Quadrature Phase-Shift Keying*) on esitetty kuvassa 3.

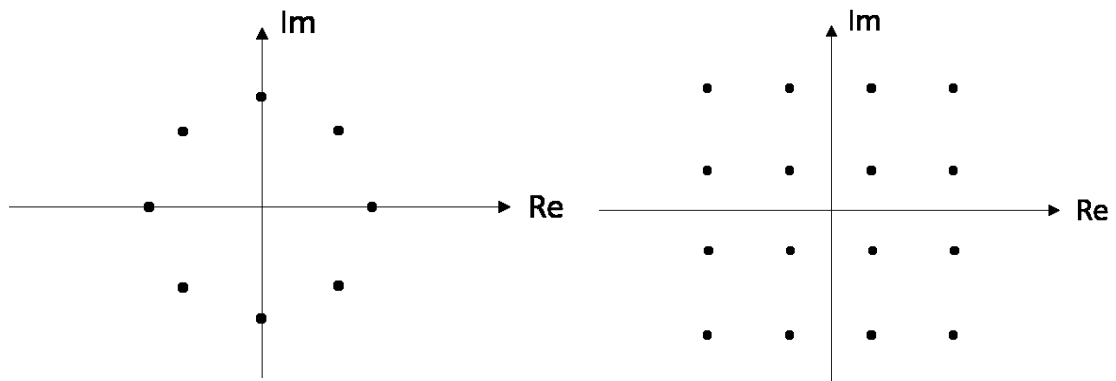


**Kuva 3.** Modulaation QPSK konstellaatiokuva.

Modulaatiolle QPSK symbolivirhetodennäköisyys voidaan laskea kaavalla

$$P(\text{virhe})_{QPSK} = 2Q(\sqrt{2SNR}) \left[ 1 - \frac{1}{2}Q(\sqrt{2SNR}) \right] = 2Q(\sqrt{SNR}) - Q^2(\sqrt{SNR}). \quad (11)$$

Kun konstellaation koko kasvaa, PSK-modulaatiolle käytettävää kaavaa joudutaan integroimaan numeerisesti, jolloin symbolivirhetodennäköisyyden määrittävä lopullinen kaava on jo itsessään approksimaatio, jossa tehdään oletuksia signaali-kohinasuhteen SNR tasosta ja modulaation vaihekulmasta (Proakis 2000, s. 272–273). Konstellaatiokuva tällaiselle 8-PSK-modulaatiolle on esitetty kuvassa 4. Modulaatiolle on mahdollista esittää myös suorakulmainen konstellaatiokuva tai eri vaiheessa oleva ympyräkuva.



**Kuva 4.** Modulaatioiden 8-PSK (vasemmalla) ja 16-QAM (oikealla) konstellaatiokuvio.

Modulaatiolle 8-PSK symbolivirhetodennäköisyys voidaan approksimoida kaavalla (Proakis 2000, s. 280)

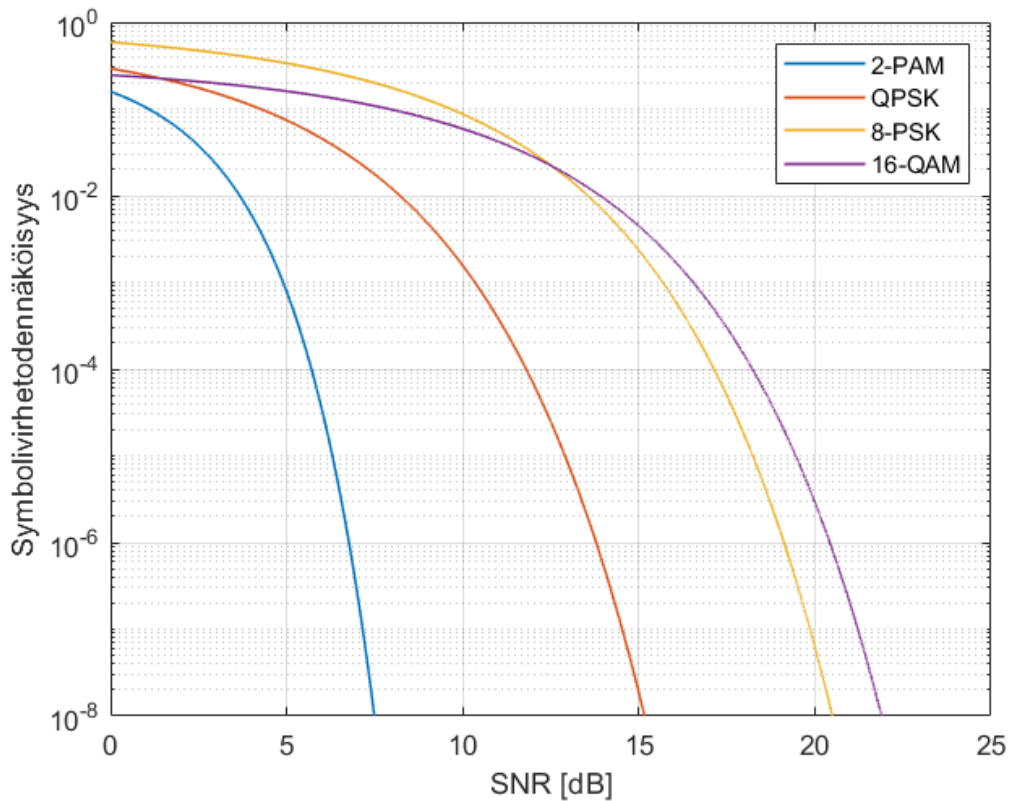
$$P(\text{virhe})_{8\text{-PSK}} \approx 2Q\left(\sqrt{2SNR} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \approx 2Q(\sqrt{0.293SNR}). \quad (12)$$

Esimerkki QAM-amplitudimodulaatiosta (*Quadrature Amplitude Modulation*) on 16-QAM. QAM-modulaation symbolivirhetodennäköisyys voidaan laskea PAM-modulaation kaavalla, sillä PAM-muotoisista kantoaalloista rakentuva QAM-signaali voidaan demodulaatiossa palauttaa PAM-muotoon. Tämä käsittelyn helppous pätee suorakulmisiin konstellaatiokuvioihin, jollainen kuvassa 4 on esitetty. (Proakis 2000, s. 280)

Modulaatiolle 16-QAM symbolivirhetodennäköisyys voidaan laskea kaavalla (Proakis 2000, s. 280)

$$P(\text{virhe})_{16\text{-QAM}} = 3Q\left(\sqrt{\frac{1}{5}SNR}\right) - \frac{9}{4}Q^2\left(\sqrt{\frac{1}{5}SNR}\right). \quad (13)$$

Digitaaliseen tiedonsiirtoon valittu modulaatio, symboliaakkoston  $M$  koko ja modulaation konstellaatiokuvio vaikuttavat siihen, millaisella signaali-kohinasuhteen arvolla haluttu tiedonsiirron virhetaso voidaan saavuttaa. Mitä suuremman määrän bittejä symboli välittää, sitä suurempi on järjestelmältä vaadittu signaali-kohinasuhteen taso. Signaali-kohinasuhteen ja konstellaatiokoon suhdetta on havainnollistettu kuvassa 5, johon on koottu kaavoissa (5) ja (11)–(13) esitettyjen modulaatioiden symbolivirhetodennäköisyys signaali-kohinasuhteen funktiona. Todellisissa tiedonsiirtojärjestelmissä siirtotien eheyttä haittaa kohinan lisäksi myös signaalin vaimeneminen eli häipyvä kanava, mitä käsitellään seuraavana.



**Kuva 5.** Symbolivirhetodennäköisyys signaali-kohinasuhteen funktiona eri modulaatioilla.

## 2.2 Häipyvän kanavan vaikutus symbolivirhetodennäköisyyteen

Kun AWGN-signaalimallissa (kaava (1)) huomioidaan myös signaalin vaimeneminen ja monitie-eteneminen, signaalimalli muuttuu (Proakis 2000, s. 280). Vaimenemiskerroin  $h$ , joka AWGN-kanavamallin yhteydessä on vakio, korvataan monitie-etenemisen stokastista luonnetta ja signaalin vaimenemista kuvaavalla satunnaismuuttujalla  $h(t)$ , jolloin signaalimalliksi saadaan

$$y(t) = h(t) * x(t) + n(t). \quad (14)$$

Tällainen häipyvää kanavaa kuvaava, satunnaismuuttujien summasta muodostuva signaalimalli on itsekin luonteeltaan satunnaismuuttuja. Häipyvässä kanavassa kaavalla (10) määritellystä signaali-kohinasuhteesta SNR tulee niin ikään satunnaismuuttuja, jonka käyttäytymistä kuvataan erilaisilla häipymää kuvaavilla malleilla. Tietoliikennetekniikassa usein käytetty häipymämalli on Nakagami- $m$ , jossa  $m$  on jokin kokonaisluku. Tunnettuja monitie-etenemisen häipymämalleja ovat Rayleigh'n jakauma (Nakagami-1) ja Rican jakauma.



Yhdellä tietyllä ajanhetkellä otetussa signaalin arvossa vaimenemiskerroin  $h$  on vakio ja kaavalla (10) määritelty signaali-kohinasuhde pätee hetkellisesti myös häipyvälle kanavalle. Tietylle ajanhetkelle voidaan tällöin laskea symbolivirhetodennäköisyys (SEP, *Symbol Error Probability*) tai siitä saatu bittivirhetodennäköisyys (BER, *Bit Error Probability*), kuten (5) ja (11)–(13) on esitetty. Kun häipyvää kanavaa tarkastellaan pidemmällä aikavälillä ja niin vaimenemiskerrointa  $h(t)$  kuin signaali-kohinasuhdettakin käsitellään jatkuvina satunnaismuuttujina, on tarpeen tarkastella keskimääräistä symbolivirhetodennäköisyyttä (ASEP, *Average Symbol Error Probability*).

Keskimääräinen symbolivirhetodennäköisyys  $\bar{P}$  saadaan ottamalla odotusarvo symbolivirhetodennäköisyydestä (Chiani et al. 2003, s. 843). Jos keskimääräinen symbolivirhetodennäköisyys esitetään kaavalla (5) määritellylle 2-PAM-modulaatiolle, saadaan

$$\bar{P} = E(P(\text{virhe})) = E(Q(\sqrt{SNR})). \quad (15)$$

Odotusarvo jatkuvalla satunnaismuuttujalle määritellään diskreetin muuttujan  $x$  ja tiheysfunktion  $f_X(x)$  (*probability density function*, p.d.f.) tulosta otettuna integraalifunktiona siten, että

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (16)$$

Yhdistämällä kaavat (15) ja (16) saadaan häipyvän kanavan laskemisessa tarpeellinen keskimääräinen symbolivirhetodennäköisyyden kaava tietylle modulaatiolle ja konstellaatiolle. Jos odotusarvon laskemiseen käytetään kaavalla (4) esitettyä Craigin kaavaa, keskimääräiselle symbolivirhetodennäköisyydelle saadaan

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2 \sin^2 \theta} \gamma} f_r(\gamma) d\theta d\gamma, \quad (17)$$

jossa tiheysfunktion  $f_r$  satunnaismuuttuja  $\gamma$  merkitsee signaali-kohinasuhdetta SNR.

Kaavasta (17) selviää, miksi Q-funktio on niin hankala käsiteltävä matemaattisesti. Symbolivirhetodennäköisyyden laskeminen edellyttää tuplaintegraalin laskemista, sillä odotusarvon sisällä myös Q-funktio on integraalifunktio kaavan (3) tai (4) mukaisesti. Tuplaintegraalin laskeminen on vaikeaa, joten Q-funktion approksimointi on tarpeen.

### 3. Q-FUNKTION APPROKSIMOINTI

Q-funktion approksimaatioita on kehitetty useilla eri lähestymistavoilla. Approksimaatioiden tyypillinen ongelma on niiden rajattu soveltuvuusalue, kuten myös tasapainon etsiminen matemaattisen kompleksisuuden ja tarkkuuden välillä. Tässä esiteltävä katsaus keskittyy tietoliikennetekniikassa hyödynnettäviin approksimaatioihin. Katsauksen pohjana on Aggarwal (2019), joka jaottelee approksimaatiot seuraavasti: rajoihin perustuvat approksimaatiot, eksponenttifunktioon perustuvat approksimaatiot, polynomieksponttifunktioon perustuvat approksimaatiot ja eri funktioihin perustuvat approksimaatiot. Kuttakin approksimaatiotyyppiä käsitellään seuraavassa.

Tärkeitä matemaattiseen approksimointiin liittyviä käsitteitä ovat approksimaation absoluuttinen virhe ja approksimaation suhteellinen virhe. Absoluuttinen virhe on funktion tarkan arvon ja approksimaation erotus. Suhteellinen virhe on absoluuttisen virheen ja tarkan arvon suhde. Erilaisia approksimaatioita erottaa toisistaan lähestymistavan lisäksi myös valittu virheenminimointistrategia tai sellaisen puuttuminen.

#### 3.1 Rajoihin perustuvat approksimaatiot

Karagiannidis ja Lioumpas (2007) esittävät Q-funktiolle approksimaation, joka pohjautuu integraalifunktion ylärajan muokkaukseen. Tällöin kaavalla (3) esitetty epäoleellinen integraali muokataan rajoitettuun muotoon. (Karagiannidis & Lioumpas 2007, s. 644) Saatu approksimaatio esitetään kaavalla

$$\tilde{Q}(x) = \frac{ae^{-bx^2}(1 - e^{-cx})}{x} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - e^{-1,4x})}{1,135\sqrt{2\pi}x} \quad (18)$$

jossa kertoimet  $a = 1/1,135\sqrt{2\pi} = 0,03515$ ,  $b = 1/2$  ja  $c = 1,400$  saadaan minimoimalla approksimaation absoluuttista virhettä (Karagiannidis & Lioumpas 2007, s. 645; Aggarwal 2019, s. 2199).

Approksimaatiota ovat edelleen kehittäneet Tanash ja Riihonen (2021), joiden tutkimuksessa kertoimet saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmiä, joilla minimoidaan approksimaation absoluuttista ja suhteellista virhettä sekä kokonaisvirhettä (Tanash & Riihonen 2021, s. 1468). Ratkaisussa approksimaation kertoimiksi saadaan  $a = 0,32$ ,  $b = 0,4703$  ja  $c = 1,5625$  ja approksimaation absoluuttista virhettä ja kokonaisvirhettä pienennetään merkittävästi (ibid., s. 1471). Tanash ja Riihonen ovat hyödyntäneet vastaavaa minimax-lähestymistapaa ja yhtälöryhmien ratkaisuun perustuvaa lähestymistapaa myös Chianin,

Dardarin ja Simonin (2003) eksponenttifunktion jatkokehityksessä (Tanash & Riihonen 2020), jota käsitellään tarkemmin luvussa 4.

Karagiannidis ja Lioumpaksen (2007) rajoihin perustuvaa approksimaatiota ovat edelleen kehittäneet myös Isukapalli ja Rao (2008), jotka esittävät jakajassa olevan argumentin  $x$  Taylorin sarjan avulla (Aggarwal 2019, s. 2201). Saatu approksimaatio esitetään kaavalla

$$\tilde{Q}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1,135\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} 1,4^n x^{n-1}}{n!}, \quad (19)$$

jossa summalausekkeen termien määrä  $N$  määrittää approksimaation tarkkuuden. Termien määrän on oltava vähintään 8,  $N \geq 8$ , jotta alkuperäisen approksimaation muodostamisesta aiheutunut ylimääräinen virhe mitätöityy. (Isukapalli & Rao 2008, s. 670; Aggarwal 2019, s. 2201)

### 3.2 Eksponenttifunktion perustuvat approksimaatiot

Eksponenttifunktion summaan perustuvat approksimaatiot voidaan esittää kaavalla

$$\tilde{Q}(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-b_n x^2}, \quad (20)$$

jossa esiintyvät kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  etsitään eri tavoilla approksimaatiosta riippuen.

Chianin, Dardarin ja Simonin (2003) tutkimuksessa kertoimet määritetään Gaussin jakauman virhefunktion (*erf function*) kautta tarkastelemalla parillista virhetodennäköisyyttä PEP (*Pairwise Error Probability*) tietylle signaalin modulaatiolle ja tietylle häipymälle (Chiani et al. 2003, s. 840, 843). Tutkimuksessa approksimaatiota käytettiin vain approksimaation kolmelle ensimmäiselle termille,  $N = 3$ .

Pronyn sarjaan perustuvassa approksimaatiossa (Loskot & Beaulieu 2009) kertoimet saadaan minimoimalla approksimaation suhteellista virhettä, jolloin suhteellisen virheen funktiosta tulee tiettyjen raja-arvojen välillä oskilloiva kuvaaja. Menetelmän pohjana oleva Pronyn sarja eli Pronyn approksimaatio on sovelletun data-analyysin alue, jossa mittausdata – tässä tapauksessa havaittu signaali – esitetään vaimenevien eksponenttien sarjana (Loskot & Beaulieu 2009, s. 1269–1270; Aggarwal 2019, s. 2201). Itse  $Q$ -funktion approksimaatio saadaan Gaussin jakauman virhefunktion avulla, kun funktio muotoillaan tietylle desibeliarvoiselle oletushäipymälle (Aggarwal 2019, s. 2201–2202), kuten Chianin, Dardarin ja Simonin (2003) lähestymistavassa edellä. Tutkimuksessa Pronyn approksimaatiota käytettiin approksimaation 50 ensimmäiselle termille,  $N = 50$ .

Olabiya ja Annamalain (2012) tutkimuksessa kertoimet saadaan hyödyntämällä käänteisapproksimointia (*invertible approximation*), jolla approksimaation ja Q-funktion erotuksen välinen virhe minimoidaan logaritmisesti. Lähestymistapa ei siten määritä approksimaation kertoimia minimoimalla approksimaation absoluuttista virhettä tai keskineliövirhettä (MSE, *Mean Squared Error*). (Olabiya & Annamalai 2012, s. 544; Aggarwal 2019, s. 2202) Keskineliövirheeseen pohjautuvia painotuksia on kuitenkin käytetty tutkimuksessa esitetyn Gaussin jakauman virhefunktion muotoilemiseen (Aggarwal 2019, s. 2203). Tutkimuksessa Olabiya ja Annamalain approksimaatiota käytettiin enimmillään approksimaation kolmelle ensimmäiselle termille,  $N \leq 3$ .

Sadhwanin, Yadavin ja Aggarwalin (2017) kehittämä approksimaatio perustuu numeerisen integroinnin puolisuunnikassääntöön (*trapezoidal rule*), jolla alkuperäisen integraalin approksimaatio muodostetaan ratkaisemalla osavälien hajotelma (Sadhvani et al. 2017, s. 547). Toisista eksponenttifunktioihin perustuvista approksimaatioista poiketen lähestymistavassa ei pyritä minimoimaan approksimaation suhteellista tai absoluuttista virhettä, vaan ratkaisu perustuu yksinomaan puolisuunnikassäännön soveltamiseen (Aggarwal 2019, s. 2203).

Tanashin ja Riihosen (2020) tutkimuksessa kertoimet määritetään minimoimalla approksimaation absoluuttisen ja suhteellisen virheen tuottamaa kokonaisvirhettä (Tanash & Riihonen 2020, s. 6414–6515). Virhefunktioista muodostetaan epälineaarinen yhtälöryhmä, jonka ratkaisuna kertoimet saadaan Newtonin menetelmällä. Tutkimuksessa approksimaatiota käytettiin approksimaation 25 ensimmäiselle termille,  $N = 25$ . (ibid., s. 6518) Tätä suuremmalle määrälle termejä alkuperäisessä tutkimuksessa käytetyn Matlabin esitystarkkuus ei riitä kerrointen  $b_n$  kasvaessa nopeasti suuriksi kerrointen  $a_n$  samalla pienentyessä (ibid., s. 6519). Ongelman aiheuttaa laskentaohjelman rajallinen kyky käsitellä liukulukuja, jollaisia approksimaation tuottamat eksponenttifunktion kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  ovat.

Liukulukujen desimaalien esittämiselle on laskentaohjelmissa nimittäin käyttäjästä riippumattomia rajoitteita. Matlabissa osa tuloksen esittämiseen käytetyistä biteistä on jaettu lukuosalle, osa eksponenttiosalle. Kun eksponenttiosa kasvaa liian suureksi negatiiviseksi arvoksi, ohjelma esittää sen nollana. Ratkaisu tähän on vaikkapa koodikieli Python ja sille tarjottu vapaan lähdekoodin kirjasto mpmath, jolla liukuluvun tyyppi esitetään *arbitrary-precision*-tyyppisenä, mielivaltaisen tarkkuuden liukulukuna, jonka esitystarkkuutta rajoittaa vain käyttöjärjestelmän muistin koko. Approksimaation toimintaa ja analyttistä jatkokehitystä, jota tulevassa Python-kooditoteutuksessa hyödynnetään, käsitellään tarkemmin luvussa 4.

### 3.3 PolynomiekspONENTTIFUNKTION PERUSTUVAT APPROKSIMAATIOT

PolynomiekspONENTTIFUNKTION PERUSTUVAT APPROKSIMAATIOT voidaan esittää kaavalla

$$\tilde{Q}(x) = Ae^{P(x)}, \quad (21)$$

jossa  $A$  on vakiokerroin ja  $P(x)$  jokin polynomi. Kun polynomina käytetään toisen asteen yhtälöä, polynomin kerrointen määrittäminen approksimaation virhettä minimoimalla edellyttää funktion arvosta  $x$  riippuvan virhefunktion käyttämistä. (Aggarwal 2019, s. 2203) Polynomien asteen kasvaessa yli kahden yhtälö ei ole enää ratkaistavissa analyttisesti, mitä Aggarwal pitää esteenä approksimaation laajemmalle hyödyntämiselle tietoliikennetekniikan virhetodennäköisyyksien laskennassa (ibid., s. 2204). Kokonaisuutena voidaankin arvioida, että polynomiekspONENTTIAPPROKSIMAATIOIDEN käyttö tietoliikennetekniikassa on toistaiseksi vähäistä.

### 3.4 Eri funktioihin perustuvat approksimaatiot

Eri funktioihin perustuvat approksimaatiot voivat olla yhdistelmiä polynomi- ja eksponenttifunktioista, sinisarjasta, kahden potensseista tai useamman asteen polynomeista. Näin muodostettuja approksimaatioita ei yleisesti voi esittää suljetussa muodossa, eivätkä ne matemaattisen kompleksisuutensa vuoksi juuri sovellu tietoliikennetekniikan virhetodennäköisyyksien laskemiseen. (Aggarwal 2019, s. 2204)

Esimerkki eri funktioihin perustuvasta approksimaatiosta on Chenin ja Beaulieun (2009) johtama, polynomeihin perustuva kaava

$$\tilde{Q}(x) = 1 - 1 \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{(m+p)} \binom{n}{p}}{m! (n-m)!} \left(\frac{n}{12}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{n}{2} - m\right)^{n-p} x^p U \left[ x - \sqrt{\frac{12}{n} \left(\frac{n}{2} - m\right)} \right], \quad (22)$$

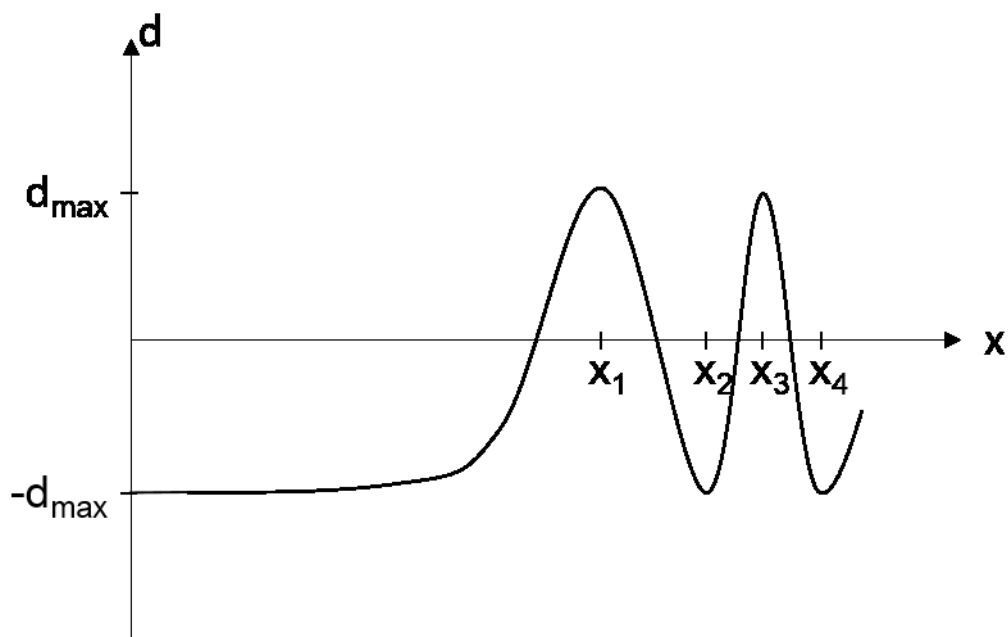
jossa  $n$  on approksimaation suhteellista virhettä minimoiva polynomin aste ja  $U$  on yksiköaskelfunktio (Aggarwal 2019, s. 2204–2205). Approksimaatio kylläkin tuottaa tarkkoja tuloksia funktion arvon ollessa enimmillään 2,  $x \leq 2$ , mutta tietoliikennetekniikan virhelaskentaan soveltuvia, yksinkertaisempia approksimaatioita on jo olemassa (ibid., s. 2205). Annetusta kaavasta on kuitenkin mahdollista edelleen muokata yhtälö, joka huomioi signaalin modulaatiokonstellaation koon ja approksimaation logaritmisien hajonnan ja keskihajonnan. Saadulla yhtälöllä sovitetaan toisiinsa tiedonsiirtojärjestelmän keskimääräinen symbolivirhetodennäköisyys ja järjestelmän suunnitteluparametrit, jolloin järjestelmän optimointi suunnitteluvaiheessa helpottuu. (Chen & Beaulieu 2009, s. 126)

## 4. EKSPONENTTIFUNKTION PERUSTUVA APPROKSIMAATIO

Q-funktion approksimointi eksponenttifunktioiden summana mahdollistaa tarkkojen laskennallisten tulosten saavuttamisen matemaattisesti yksinkertaisten yhtälöiden avulla. Tässä esiteltävän minimax-approksimaation eli tasaisen approksimaation kertoimet saadaan ratkaisemalla epälineaarinen yhtälöryhmä. Approksimaation toimintaa, epälineaarisen yhtälöryhmän muodostamista ja ratkaisemista sekä approksimaation jatkokehitystä käsitellään seuraavassa.

### 4.1 Epälineaariset yhtälöryhmät

Tanashin ja Riihosen (2020) approksimaatio perustuu Q-funktion esittämiseen eksponenttifunktioiden summana kaavan (20) mukaisesti. Lähestymistapa yksinkertaistaa Chianin, Dardarin ja Simonin (2003) approksimaatiota. Eksponenttifunktioiden kertoimet ratkaistaan virhefunktioiden ääriarvokohtia kuvaavista yhtälöistä minimax-lähestymistavalla siten, että absoluuttisen ja suhteellisen virheen tuottama kokonaisvirhe saadaan mahdollisimman pieneksi (Tanash & Riihonen 2020, s. 6414–6515). Tällainen minimax-tavalla optimoitu virhefunktio tuottaa symmetristen ääriarvokohtien, absoluuttisen maksimivirheen arvojen  $d_{max}$  ja  $-d_{max}$ , välillä oskilloivan kuvaajan kuvan 6 mukaisesti.



**Kuva 6.** Absoluuttisen virheen ääriarvokohtien välillä oskilloiva virhefunktio.

Summattavien eksponenttifunktioiden ja sitä myöten ratkaistavien kertoimien lukumäärä kasvaa sitä mukaa, kuinka monta approksimaation arvoa lasketaan. Tanashin ja Riihosen tutkimuksessa Q-funktion approksimaatiolle laskettiin Matlabia käyttäen 25 termiä ennen kuin luvussa 3.2 kuvattu ongelma laskentaohjelman liukulukujen esittämisessä teki välttämättömäksi vaihtaa bittimäärää rajoittamattomaan Python-koodiin kerrointen  $b_n$  kasvaessa liian suureksi ja kerrointen  $a_n$  vastaavasti pienetessä (havainnollistettu Tanash & Riihonen 2020, s. 6519). Eksponenttifunktion kertoimien lisäksi tulee ratkaista joko absoluuttisen tai suhteellisen virheen maksimiarvo kussakin ääriarvokohdassa. Ratkaistavia yhtälöryhmiä kullekin approksimaation  $N$ termille saadaan siten  $2N + 1$  kullekin ääriarvopisteelle. Tässä tarkastelussa keskitytään absoluuttisen virheen laskemiseen.

Absoluuttisen virheen minimointia ja Q-funktion approksimointia varten muodostetaan epälineaarinen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomia muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä. Yhtä ääriarvopistettä kohden muodostetaan kaksi yhtälöä, joista toisella lasketaan absoluuttisen virheen arvo ja toisella virhefunktion derivaatta kyseisessä kohdassa. Absoluuttisen virheen arvo  $d$  saadaan approksimaation ja Q-funktion (kaava (3)) erotuksena siten, että

$$d(x) = \tilde{Q}(x) - Q(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-b_n x^2} - Q(x), \quad (23)$$

ja absoluuttisen virheen derivaatta puolestaan approksimaation ja Q-funktion derivaatan erotuksena siten, että

$$d'(x) = \tilde{Q}'(x) - Q'(x) = -2 \sum_{n=1}^N a_n b_n x e^{-b_n x^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (24)$$

Absoluuttisen virheen arvo ääriarvokohdissa on yhtä suuri kuin maksimivirheen  $d_{max}$  arvo. Derivaatan arvo virhefunktion ääriarvokohdissa puolestaan on nolla. Näiden tietojen pohjalta muodostetaan epälineaarinen yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{l} d'(x_1) = 0 \\ d(x_1) - d_{max} = 0 \\ d'(x_2) = 0 \\ d(x_2) + d_{max} = 0 \\ \vdots \\ d'(x_k) = 0 \\ d(x_k) - (-1)^{(K+1)} d_{max} = 0 \\ \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max} = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

jonka ratkaisuna saadaan approksimaation kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$ , yhtälön ääriarvokohdat  $x_k$  ja absoluuttisen virheen maksimiarvo  $d_{max}$ . (Tanash & Riihonen 2020, s. 6517–6518) Kaavassa (25) alin rivi on absoluuttisen virheen ratkaisuun käytetty kaava. Tarkasteluvälin aloituspiste on sama kuin Q-funktion analyttisesti tunnettu arvo nollakohdassa ja samalla sama kuin  $-d_{max}$  arvo. Epälineaarinen yhtälöryhmä on mahdollista ratkaista Newtonin menetelmällä.

## 4.2 Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä eli Newtonin–Raphsonin menetelmä on iteratiivinen, numeerinen menetelmä jatkuvasti differentioituvan funktion ääriarvokohtien ratkaisemiseen (Kreyszig 2011, s. 801). Epälineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista Newtonin menetelmällä, kun käytössä on kyllin hyvä alkuarvaus (ibid., s. 803). Epätarkalla alkuarvauksella menetelmän tuottamat tulokset ovat epätarkkoja, eivätkä tuota hyödyllisiä tuloksia (Pitkäranta 2015, s. 371).

Newtonin menetelmässä funktiota tietyssä pisteessä approksimoidaan pisteeseen piirretyn tangentin avulla. Toisin sanoen yhtälöryhmää  $f$  linearisoiva approksimaatio pisteessä  $x_k$ , alkuarvauksella  $x$ , esitetään kaavalla

$$f(x_k) + J(x_k)(x - x_k) = \mathbf{0}, \quad (26)$$

jossa  $J(x_k)$  on Jacobin matriisin arvo pisteessä  $x_k$ . Jacobin matriisi jollekin funktiolle  $f(x)$  määritellään siten, että funktiosta muodostetaan osittaisderivaatta kunkin muuttujan suhteen. Yhtälöryhmälle Jacobin matriisi voidaan esittää kaavalla

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

kun yhtälöryhmän muodostavat yhtälöt  $f_1(x) \dots f_m(x)$ , joissa esiintyvät muuttujat  $x_1 \dots x_n$  (Pitkäranta 2015, s. 799).

Yhtälöryhmän ja kaavan (25) ratkaisua iteroiva kaava esitetään muodossa

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}f(x_k), \quad (28)$$

jossa yhtälön ratkaisua  $x$  on merkitty  $x_{k+1}$  (Pitkäranta 2015, s. 800). Yhtälöryhmän ratkaisu on löydetty, kun ratkaisu suppenee, toisin sanoen tarkemman alkuarvauksen käyttäminen ei muuta saatua ratkaisua halutulla tarkkuudella.



Yhtälöryhmää ratkaistaessa Newtonin menetelmä kuitenkin vaatii kaavan (28) mukaisesti käänteismatriisin laskemista, mikä on laskennallisesti raskas toimenpide. Laskenta hidastaa entisestään se, etteivät laskentaohjelman nollat ole numeerisesti nollia, vaikka ohjelman pyöristämistarkkuus ne sellaisena esittäisi. Tämä tarpeetonta laskennallista raskautta aiheuttava ongelma voidaan kiertää käyttämällä ohjelman numeerisesti laskeman käänteismatriisin sijaan analyttisesti ratkaistua Jacobin matriisia, jossa nolларvot on yksiselitteisesti määriteltä nollaksi myös laskentaohjelmalle. Jacobin matriisin analyttinen ratkaisu approksimaation absoluuttiselle virheelle  $d$  esitellään seuraavassa.

### 4.3 Jacobin matriisi

Jacobin matriisia hyödynnetään koordinaatistomuunnoksissa ja numeerisen matematiikan sovelluksissa, joissa Jacobin matriisia käyttäen voidaan muodostaa epälineaarille funktiolle lineaarinen approksimaatio annetussa pisteessä (Pitkäranta 2015, s. 800).

Jacobin matriisi saadaan muodostamalla kustakin ratkaistavan yhtälöryhmän yhtälöstä osittaisderivaatta kunkin tuntemattoman muuttujan suhteen kaavan (25) mukaisesti. Jacobin matriisi absoluuttiselle virheelle  $d$  voidaan esittää lohkomatriisien avulla siten, että

$$J_d = [J_a \ J_b \ J_x \ J_{d_{max}}], \quad (29)$$

jossa

$$J_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial d'(x_1)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial d'(x_1)}{\partial a_N} \\ \frac{\partial(d(x_1) - d_{max})}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial(d(x_1) - d_{max})}{\partial a_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d'(x_K)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial d'(x_K)}{\partial a_N} \\ \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial a_N} \\ \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial a_N} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$J_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial d'(x_1)}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial d'(x_1)}{\partial b_N} \\ \frac{\partial(d(x_1) - d_{max})}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial(d(x_1) - d_{max})}{\partial b_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d'(x_K)}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial d'(x_K)}{\partial b_N} \\ \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial b_N} \\ \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial b_N} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial d'(x_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial d'(x_K)}{\partial x_K} \\ \frac{\partial(d(x_1) - d_{max})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(d(x_K) - d_{max})}{\partial x_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d'(x_K)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial d'(x_K)}{\partial x_K} \\ \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial x_K} \\ \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial x_K} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

ja

$$J_{d_{max}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d'(x_1)}{\partial d_{max}} \\ \frac{\partial(d(x_1) - d_{max})}{\partial d_{max}} \\ \vdots \\ \frac{\partial d'(x_K)}{\partial d_{max}} \\ \frac{\partial(d(x_K) - (-1)^{(K+1)}d_{max})}{\partial d_{max}} \\ \frac{\partial(\sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} + d_{max})}{\partial d_{max}} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Absoluuttisen virheen ratkaisuun käytetyn Jacobin matriisin analyttinen ratkaisu samoilla lohkomatriiseilla ilmaistuna saadaan siten, että

$$J_a = \begin{bmatrix} -2b_1x_1e^{-b_1x_1^2} & \dots & -2b_Nx_1e^{-b_Nx_1^2} \\ e^{-b_1x_1^2} & \dots & e^{-b_Nx_1^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2b_1x_Ke^{-b_1x_K^2} & \dots & -2b_Nx_Ke^{-b_Nx_K^2} \\ e^{-b_1x_K^2} & \dots & e^{-b_Nx_K^2} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$J_b = \begin{bmatrix} -2a_1x_1e^{-b_1x_1^2}(1-b_1x_1^2) & \dots & -2a_Nx_Ke^{-b_Nx_K^2}(1-b_Nx_K^2) \\ -a_1x_1^2e^{-b_1x_1^2} & \dots & -a_Nx_K^2e^{-b_Nx_K^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_1x_Ke^{-b_1x_K^2}(1-b_1x_K^2) & \dots & -2a_Nx_Ke^{-b_Nx_K^2}(1-b_Nx_K^2) \\ -a_1x_K^2e^{-b_1x_K^2} & \dots & -a_Nx_K^2e^{-b_Nx_K^2} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$J_x = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & 0 \\ g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_K \\ 0 & \dots & g_K \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

jossa

$$f_k = -2 \sum_{n=1}^N a_n b_n e^{-b_n x_k^2} (1 - 2b_n x_k) - \frac{x_k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}, \quad \text{kun } k = 1, \dots, K \quad (37)$$

ja

$$g_k = -2 \sum_{n=1}^N a_n b_n x_k e^{-b_n x_k^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}, \quad \text{kun } k = 1, \dots, K \quad (38)$$

sekä

$$J_{d_{max}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1/1^* \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

\* -1, kun  $K=1,3,5,\dots$  ja 1, kun  $K=2,4,6,\dots$

Vaikka Jacobin matriisin kooditoteutus rajattiin tämän tutkielman ulkopuolelle, sen laati-  
minen tulee ajankohtaiseksi, kun minimax-approksimaation tutkimus jatkuu. Kooditoteu-  
tukseen käytetään Pythonin mpmath-kirjastoa, joka sallii riittävän tarkkuuden liukuluku-  
muotoisten eksponenttien esittämiseen, kun eksponentit pienenevät approksimaation  
termien lukumäärän kasvaessa. Kooditoteutuksen tulee skaalautua ratkaistavien ter-  
mien lukumäärän mukaan, mikä toteutetaan *for*-silmukkarakenteilla. Kunkin silmukkarak-  
enteen alku- ja lopetusehto päätellään laskettavien termien lukumäärästä. Mikäli koo-  
ditoteutusta käytetään alkuperäistä 25 termiä suuremmalla määrällä, olennaiseksi tulee  
myös Newtonin menetelmän vaatimien alkuarvausten entistäkin tarkempi määrittely,  
missä toimiva kooditoteutus mahdollisesti auttaa.

## 5. YHTEENVETO

Tässä tutkielmassa käsiteltiin langattoman tiedonsiirron symboli- ja bittivirhetodennäköisyyksien laskemista ja esiteltiin laskemisessa käytetty Gaussin jakauman osa, Q-funktio. Samoin esiteltiin Q-funktion parametri, tietoliikennetekniikan järjestelmissä keskeinen signaali-kohinasuhde SNR, jonka saamia kertoimia muunnellen voidaan eri modulaatioille ja konstellatioille laskea tiedonsiirron symbolivirhetodennäköisyys. Vaikka Q-funktion arvo voidaan ratkaista numeerisesti laskentaohjelmalla, Q-funktio on matemaattisesti hankala integraali. Analyyttistä käsittelyä helpottamaan onkin kehitetty approksimaatioita, joiden avulla voidaan saavuttaa riittävän tarkkoja laskentatuloksia suhteellisen yksinkertaisilla matemaattisilla yhtälöillä. Lisäksi esiteltiin approksimaatioiden muodostamisen lähestymistapoja, joista eksponenttiyhtälöiden summaan perustuvan approksimaation analyttinen jatkokehitys muodostaa tutkielman tutkimuskysymyksen.

Tanashin ja Riihosen (2020) tutkimuksessa eksponenttifunktioon perustuvan approksimaation kertoimet saatiin minimoimalla approksimaation absoluuttista tai suhteellista virhettä siten, että virhettä kuvaavan virhefunktion ääriarvokohtia kuvaavista yhtälöistä muodostetaan epälineaarinen yhtälöryhmä, joka ratkaistaan Newtonin menetelmällä Jacobin matriisia hyödyntäen. Kun alkuperäisessä tutkimuksessa laskenta suoritettiin numeerisesti, tässä tutkielmassa absoluuttisen virheen laskemiseen tarjotaan analyttisesti ratkaistua Jacobin matriisi. Analyttisesti ratkaistua Jacobin matriisia voidaan käyttää myöhemmässä kooditoteutuksessa nopeuttamaan laskentaa ja vähentämään Newtonin menetelmän vaatimaa prosessointitehoa.

Jotta kandidaatintutkielmalle sopivassa laajuudessa pysyttiin, tämän tutkielman ulkopuolelle rajattiin vastaava analyttinen toteutus approksimaation suhteellisen virheen Jacobin matriisista ja molempien kooditoteutus, joka olisi toteutettu ohjelmointikieli Pythonin mpmath-kirjastoa käyttäen. Python-ohjelmointikielen etuna usein käytettäviin laskentaohjelmiin – kuten Matlabiin – nähden on se, että mpmath-kirjaston avulla liukuluvun eksponenttiosan pituus kasvaa tarvittaessa, kun taas Matlabissa liukuluvun esitystarkkuuteen ei käyttäjä voi vaikuttaa.

Langattoman tiedonsiirron tärkeys korostuu siirrettävien datamäärien kasvaessa. Samalla tiedonsiirron virheettömyyden merkitys kasvaa entisestään. Tiedonsiirron laadun analysoimiselle on tarvetta enenevässä määrin, ja työkalun laadun arvioimiseen tarjoaa Q-funktio. Hyödyllisen mutta hankalasti käsiteltävän funktion approksimoimiseen ja entistä parempien approksimaatioiden kehittämiseen on tarvetta jatkossakin.

# LÄHTEET

Aggarwal, S. (2019). A Survey-cum-Tutorial on Approximations to Gaussian Q-Function for Symbol Error Probability Analysis over Nakagami-m Fading Channels. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 21, no. 3, Third Quarter 2019, pp. 2195–2223.

Barry, J. R., Lee, E. A. & Messerschmitt, D. G. (2004). *Digital Communication Volume I*. Third Edition. Springer Science + Business Media, New York.

Chen, Y. & Beaulieu, N. C. (2009). A Simple Polynomial Approximation to the Gaussian Q-Function and Its Application. *IEEE Communications Letters*, vol. 13, no. 2, February 2009, pp. 124–126.

Chiani, M., Dardari, D. & Simon, M. K. (2003). New Exponential Bounds and Approximations for the Computation of Error Probability in Fading Channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 2, no. 4, July 2003, pp. 840–845.

Craig, J. W. (1991). A New, Simple, and Exact Result for Calculating the Probability of Error for Two-Dimensional Signal Constellations. *Conference Record of IEEE Military Communications Conference*, November 1991, pp. 571–575.

Isukapalli, Y. & Rao, B. D. (2008). An Analytically Tractable Approximation for the Gaussian Q-Function. *IEEE Communications Letters*, vol. 12, no. 9, September 2008, pp. 669–671.

Karagiannidis, G. K. & Lioumpas, A. S. (2007). An Improved Approximation for the Gaussian Q-Function. *IEEE Communications Letters*, vol. 11, no. 8, August 2007, pp. 644–646.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons Inc., Tenth Edition, New York.

Loskot, P. & Beaulieu, N. C. (2009). Prony and Polynomial Approximations for Evaluation of the Average Probability of Error over Slow-Fading Channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 58, no. 3, March 2009, pp. 1269–1280.

Olabiya, O. & Annamalai, A. (2012). Invertible Exponential-Type Approximations for the Gaussian Probability Integral  $Q(x)$  with Applications. *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 1, no. 5, October 2012, pp. 544–547.

Pitkäranta, J. (2015). *Calculus Fennicus*. TKK:n 1. lukuvuoden laaja matematiikka (2000–2013). Avoimet oppimateriaalit, Helsinki.

Proakis, J. G. (2000). *Digital Communications*. Fourth Edition, McGraw-Hill, Boston.

Sadhvani, D., Yadav, R. N. & Aggarwal S. (2017). Tighter Bounds on the Gaussian Q-Function and Its Application in Nakagami-m Fading Channel. *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 6, no. 5, October 2017, pp. 574–577.

Tanash, I. M. & Riihonen, T. (2020). Global Minimax Approximations and Bounds for the Gaussian Q-Function by Sums of Exponentials. *IEEE Transactions on Communications*, vol. 68, no. 10, October 2020, pp. 6514–6524.

Tanash, I. M. & Riihonen, T. (2021). Improved Coefficients for the Karagiannidis–Lioumpas Approximations and Bounds to the Gaussian Q-Function. *IEEE Communications Letters*, vol. 25, no. 5, May 2021, pp. 1468–1471.