Tampereen yliopisto

Robert Hirvonen

JONOT METRISISSÄ AVARUUKSISSA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Toukokuu 2022

Tiivistelmä

Robert Hirvonen: Jonot metrisissä avaruuksissa
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Toukokuu 2022

Tutkielmassa tarkastellaan jonojen ja osajonojen suppenemista metrisissä avaruuksissa. Lopuksi tarkastellaan jonojen ja pistejoukkotopologian käsitteiden avulla määritettyä funktion raja-arvoa metristen avaruuksien tapauksessa. Tutkielmassa esiteltyjä määritelmiä ja lauseita havainnollistetaan esimerkkien, kuvien ja kuvaajien avulla. Toinen luku sisältää vaadittavia esitietoja metristen avaruuksien jonojen ja funktioiden tarkasteluun. Luvussa määritellään itse metrinen avaruus ja tämän määrittelemiseen tarvittava etäisyysfunktio, metriikka. Etäisyysfunktion tulee täyttää tietyt ominaisuudet, jotta etäisyysfunktio yhdessä epätyhjän joukon kanssa muodostavat metrisen avaruuden. Samassa luvussa määritellään metrinen aliavaruus, jota tarvitaan tutkielmassa myöhemmin tulosten osoittamiseksi. Luvun lopuksi pistejoukkotopologian käsitteitä laajennetaan käsittämään reaaliavaruuksien lisäksi mielivaltainen metrinen avaruus.

Tutkielman luvussa 3 määritellään jonot ja tarkastellaan niiden suppenemista metrisissä avaruuksissa. Metrisen avaruuden jonon osoitetaan suppenevan kohti yksikäsitteistä pistettä avaruuden joukossa. Lisäksi määritellään metrisen jonon hajaantuvan, jos tällaista pistettä ei ole olemassa. Luvussa määritellään osajonot ja niiden suppeneminen, sekä osoitetaan jonon suppenevan, jos ja vain jos sen jokainen osajono suppenee. Lisäksi tarkastellaan Cauchyn jonoja metrisissä avaruuksissa hyödyntämällä reaalianalyysista tuttua Cauchyn suppenemisehtoa. Ennen siirtymistä funktioiden raja-arvon määritelmään, määritellään vielä avaruuden ja aliavaruuden täydellisyys Cauchyn jonojen ja suppenemisen avulla. Samalla toteamme jokaisen euklidisen avaruuden olevan täydellinen.

Tutkielmassa esitellään viimeisenä funktion raja-arvo metrisessä avaruudessa. Funktion raja-arvo voidaan määrittää kahdella eri tavalla: kasautumispisteiden ja jonojen avulla reaalianalyysista tuttuna epsilon-delta-määritelmänä, sekä palloym-

päristöjen avulla. Näiden määritelmien todetaan olevan keskenään ekvivalentteja.

Avainsanat: Metrinen avaruus, euklidinen avaruus, metriikka, raja-arvo, suppeneminen, pistejoukkotopologia

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto **5**

2 Metrisen avaruuden ominaisuuksia **6**

2.1 Metriset avaruudet 6

2.2 Pistejoukkotopologiaa metrisessä avaruudessa 7

3 Jonot metrisissä avaruuksissa **10**

3.1 Jonot 10

3.2 Osajonot 14

3.3 Cauchyn jonot 14

3.4 Funktion raja-arvo metrisessä avaruudessa 16

Lähteet **19**

1 Johdanto

Tutkielmassa käsitellään metrisiä avaruuksia ja jonojen suppenemista niissä. Tutkielmassa määritellään myös osajonot ja näiden avulla tutkielma etenee Cauchyn jonoihin. Jonojen lisäksi tutkielmassa tarkastellaan funktioiden raja-arvon määräytymistä metrisissä avaruuksissa.

Tutkielman luku 2 kattaa metrisen avaruuden määritelmän ja pistejoukkotopologian käsitteistön täydentämisen metrisiin avaruuksiin. Metrinen avaruus on epätyhjä joukko yhdessä etäisyysfunktion, metriikan, kanssa. Pistejoukkotopologian käsitteitä tarvitaan tutkielman myöhemmässä vaiheessa jonojen suppenemisen ja funktioiden raja-arvojen esittämiseen ja osoittamiseen. Metristen avaruuksien ominaisuuksia ja pistejoukkotopologiaa metrisissä avaruuksissa havainnollistetaan kuvien ja esimerkkien avulla.

Luvussa 3 tarkastellaan jonoja ja niiden ominaisuuksia metrisissä avaruuksissa. Ensimmäiseksi määritellään metrisen avaruuden jonot ja näiden suppeneminen. Sitten jonojen suppenemiselle osoitetaan useita ominaisuuksia, kuten jonojen ja niiden osajonojen suppenevan yksikäsitteistä pistettä kohti. Osajonojen määritelmän jälkeen tutkielmassa esitellään Cauchyn jonot metrisissä avaruuksissa hyödyntämällä reaalianalyysista tuttua Cauchyn suppenemisperiaatetta. Tutkielmassa määritellään myös avaruuden täydellisyys Cauchyn jonojen avulla. Todistetaan euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ täydellisyys. Viimeisenä asiana määritellään funktioiden raja-arvot metrisissä avaruuksissa jonojen ja pistejoukkotopologian avulla. Näitä on havainnollistettu kuvien avulla.

Lukijalta oletetaan tunnetuksi reaalianalyysista pistejoukkotopologian käsitteet, Bolzano-Weierstrassin lause ja Cauchyn suppenemisperiaate. Tutkielmassa käytetään päälähteenä Apostolin kirjaa Mathematical Analysis, Second Edition. Sivulähteenä toimii Shiralin ja Vasudevan kirja Metric Spaces.

2 Metrisen avaruuden ominaisuuksia

Luvussa 2 seurataan lähdettä [1, s. 60–63].

2.1 Metriset avaruudet

Määritelmä 2.1. *Metrinen avaruus* on epätyhjä joukko M yhdessä *etäisyysfunktion* d kanssa. Etäisyysfunktiolle käytetään myös nimitystä *metriikka*, mutta tässä tutkielmassa käytetään sille nimitystä etäisyysfunktio. Etäisyysfunktio on kuvaus $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$. Lisäksi etäisyysfunktio toteuttaa seuraavat neljä ominaisuutta kaikille pisteille x, y, z joukossa M:

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) > 0$, jos $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ei-negatiivista lukua $d(x, y)$ ajatellaan etäisyytenä pisteestä x pisteeseen y. Neljättä ominaisuutta kutsutaan kolmioepäyhtälöksi. Metriselle avaruudelle voidaan käyttää myös merkintää (M, d), josta ilmenee, että metrisen avaruuden määrittämiseen tarvitaan sekä joukko M että etäisyysfunktio d.

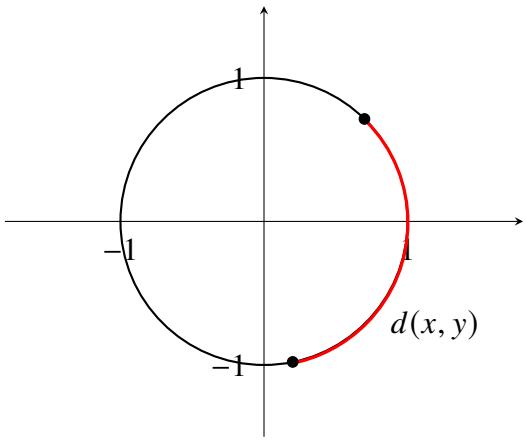
Määritelmä 2.2. Olkoon $M = \mathbb{R}^n$, jossa n on positiivinen kokonaisluku, ja etäisyysfunktio $d(x, y) = \|x - y\|$. Tätä etäisyysfunktiota kutsutaan *euklidiseksi metriikaksi*. Tätä joukon ja etäisyysfunktion muodostamaa avaruutta $(\mathbb{R}^n, d)$ kutsutaan *euklidiseksi avaruudeksi* ja sitä merkitään yksinkertaisemmin $\mathbb{R}^n$. Kun käsitellään euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$, voidaan oletettaa etäisyysfunktion olevan euklidinen metriikka ellei toisin mainita.

Määritelmä 2.3. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja olkoon S joukon M epätyhjä osajoukko. Jos avaruudelle (S, d) pätee vastaava lähtöjoukoltaan rajattu etäisyysfunktio $d\colon S \times S \to \mathbb{R}$, tätä kutsutaan metrisen avaruuden (M, d) *metriseksi aliavaruudeksi*.

Esimerkki 2.1. Olkoon (S, d) metrinen avaruus, missä $S = \mathbb{R}^2$ ja etäisyysfunktio $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 6(x_2 - y_2)^2}$, missä $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Tällöin

metrinen avaruus (S, d) ei ole euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ metrinen aliavaruus, sillä avaruuksien etäisyysfunktiot eroavat toisistaan.

Esimerkki 2.2. Olkoon $M = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ yksikköympyrän pisteistä koostuva joukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja olkoon $d(x, y)$ lyhin etäisyys joukon M kahden pisteen välillä yksikköympyrän kaarta pitkin. Kuvassa 2.1 on havainnollistettu tilannetta.



Kuva 2.1. Yksikköympyrä esimerkin 2.2 etäisyysfunktiolla.

2.2 Pistejoukkotopologiaa metrisessä avaruudessa

Pistejoukkotopologian käsitteet voidaan laajentaa käsittämään mielivaltainen metrinen avaruus (M, d). Tässä pykälässä esiteltyä palloa ja sen ominaisuuksia tarvitaan tutkielman myöhemmissä vaiheissa, kun määritellään jonojen suppeneminen ja funktion raja-arvo.

Määritelmä 2.4. Olkoon metrinen avaruus (M, d). Jos $a \in M$, niin *pallo* $B(a, r)$ keskipisteellä a ja säteellä $r > 0$ määritellään olevan kaikkien pisteiden $x \in M$ muodostama joukko siten, että

$$d(x, a) < r.$$

Pallosta käytetään toisinaan merkintää $B_M(a, r)$, josta ilmenee pisteiden kuuluvan joukkoon M. Jos S on joukon M osajoukko, on pallo $B_S(a, r)$ leikkaus joukon S ja pallon $B_M(a, r)$ välillä.

Määritelmä 2.5. Olkoon M metrisen avaruuden (M, d) joukko. Jos $S \subseteq M$, pistettä $a \in S$ kutsutaan joukon S *sisäpisteeksi*, jos jonkin pallon $B_M(a, r)$ kaikki pisteet sisältyvät joukkoon S.

Esimerkissä 2.3 havainnollistetaan sisäpisteen käsite.

Määritelmä 2.6. Olkoon M metrisen avaruuden (M, d) joukko.

1. Joukko S on *avoin* joukossa M, jos kaikki sen pisteet ovat sisäpisteitä.

2. Joukko S on *suljettu* joukossa M, jos $M \setminus S$ on avoin joukossa M.

Lause 2.1. *Olkoon (S, d) metrisen avaruuden (M, d) metrinen aliavaruus, ja olkoon X joukon S osajoukko. Tällöin X on avoin joukossa S, jos ja vain jos $X = A \cap S$ jollekin joukolle A, joka on avoin joukossa M.*

Todistus. ($\Rightarrow$): Oletetaan joukon X olevan avoin joukossa S. Osoitetaan, että $X = A \cap S$ jollekin avoimelle joukolle A joukossa M. Koska X on avoin, jokaiselle alkiolle $x \in X$ on olemassa pallo $B_S(x, r_x)$, joka sisältyy joukkoon X. Nyt $B_S(x, r_x) = B_M(x, r_x) \cap S$, joten jos

$$A = \bigcup_{x \in X} B_M(x, r_x),$$

niin A on avoin joukossa M. Koska äskeisen perusteella joukko A sisältää kaikki joukon X pisteet ja $X \subseteq S$, niin $A \cap S = X$.

($\Leftarrow$): Oletetaan joukon A olevan avoin joukossa M ja olkoon $X = A \cap S$. Jos $x \in X$, niin $x \in A$. Siis eräälle pallolle $B_M(x, r) \subseteq A$ jollakin $r > 0$. Tällöin

$$B_S(x, r) = B_M(x, r) \cap S \subseteq A \cap S = X,$$

joten X on avoin joukossa S. □

Lause 2.2. *Olkoon (S, d) metrisen avaruuden (M, d) metrinen aliavaruus, ja olkoon Y joukon S osajoukko. Tällöin Y on suljettu joukossa S, jos ja vain jos $Y = B \cap S$ jollekin joukolle B, joka on suljettu joukossa M.*

Todistus. ($\Leftarrow$): Oletetaan että $Y = B \cap S$ jollekin joukolle B, joka on suljettu joukossa M. Silloin B on muotoa $M \setminus A$, jossa A on avoin. Nyt

$$Y = B \cap S = S \cap B = S \cap (M \setminus A) = S \setminus A,$$

joten Y on suljettu joukossa S.

($\Rightarrow$): Oletetaan, että Y on suljettu joukossa S. Olkoon $X = S \setminus Y$. Nyt X on avoin joukossa S. Tällöin $X = A \cap S$, missä A on jokin joukon M avoin osajoukko, ja

$$Y = S \setminus X = S \setminus (A \cap S) = S \setminus A = S \cap (M \setminus A) = S \cap B,$$

missä $B = M \setminus A$ on suljettu joukossa M. □

Määritelmä 2.7. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja (S, d) sen metrinen aliavaruus. Tällöin $S \subseteq M$.

1. Joukon M pistettä x kutsutaan joukon S *kosketuspisteeksi*, jos jokainen pallo $B_M(x, r)$ sisältää vähintään yhden pisteen joukosta S.

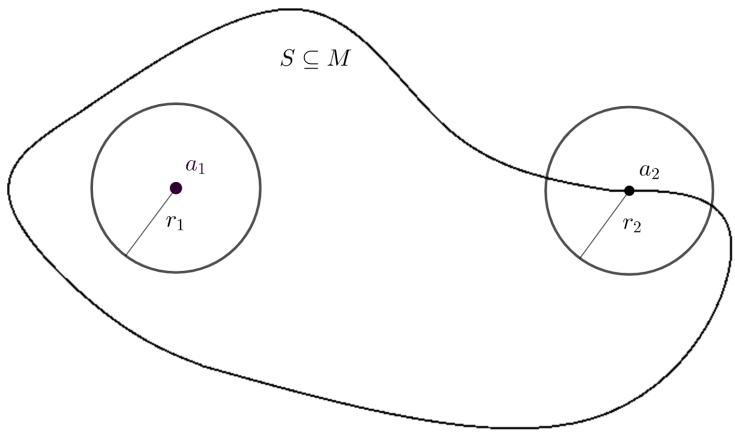
2. Jos piste x koskettaa joukkoa $S \setminus x$ niin pistettä x kutsutaan joukon S *kasautumispisteeksi*.

3. Joukon S *sulkeuma* $\overline{S}$ on kaikkien joukon S kosketuspisteiden muodostama joukko.

4. *Johdettu joukko* S' on kaikkien joukon S kasautumispisteiden muodostama joukko.

Määritelmästä huomataan, että $\overline{S} = S \cup S'$. Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan sisä- ja kosketuspisteitä.

Esimerkki 2.3. Olkoon piste a_1 joukon $S \subseteq M$ sisäpiste. Tällöin pisteelle a_1 on olemassa r_1 siten, että kaikki pallon $B(a_1, r_1)$ pisteet ovat joukon S pisteitä. Olkoon a_2 joukon $S \subseteq M$ kosketuspiste. Tällöin jokainen pisteessä a_2 sijaitseva pallo $B(a_2, r_2)$ sisältää vähintään yhden joukon S pisteen. Kuvassa 2.2 on havainnoitu esimerkin tapaus.



Kuva 2.2. Pallot $B(a_1, r_1)$ ja $B(a_2, r_2)$.

3 Jonot metrisissä avaruuksissa

3.1 Jonot

Määritelmä 3.1 (vrt. [2, s. 38])**.** Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Joukon M pisteistä koostuva *jono* on funktio $f\colon \mathbb{N} \to M$. Jono kuvaa jokaiselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ yksikäsitteisen alkion joukosta M. Jos $f(n) = x_n$, käytetään jonolle merkintää $\{x_n\}$.

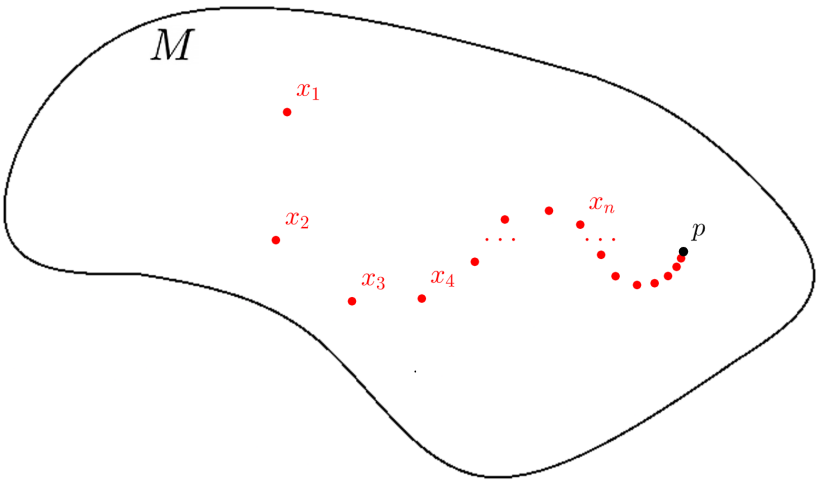
Määritelmä 3.2 (vrt. [1, s. 70])**.** Metrisen avaruuden (M, d) pisteistä koostuvan jonon $\{x_n\}$ sanotaan *suppenevan*, jos joukossa M on olemassa piste p seuraavasti:

Jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n_0, että

$$d(x_n, p) < \varepsilon, \text{ kun } n \geq n_0.$$

Tällöin jonon $\{x_n\}$ sanotaan suppenevan kohti pistettä p ja merkitään $x_n \to p$, *kun* $n \to \infty$, tai lyhyemmin $x_n \to p$.

Esimerkki 3.1. Olkoon $\{x_n\}$ metrisen avaruuden (M, d) pisteistä koostuva jono. Olkoon nyt piste p sen (yksikäsitteinen, kuten myöhemmin osoitetaan) suppenemispiste. Tällöin jono $\{x_n\}$ on suppeneva, joten $x_n \to p$. Kuvassa 3.1 on havainnollistettu suppenemista.



Kuva 3.1. Jonon suppeneminen metrisessä avaruudessa.

Määritelmä 3.3 (vrt. [1, s. 71])**.** Jos joukossa M ei ole määritelmän 3.2 mukaista pistettä p, lukujonon $\{x_n\}$ sanotaan *hajaantuvan*.

Huomataan, että suppenemisen määritelmän perusteella

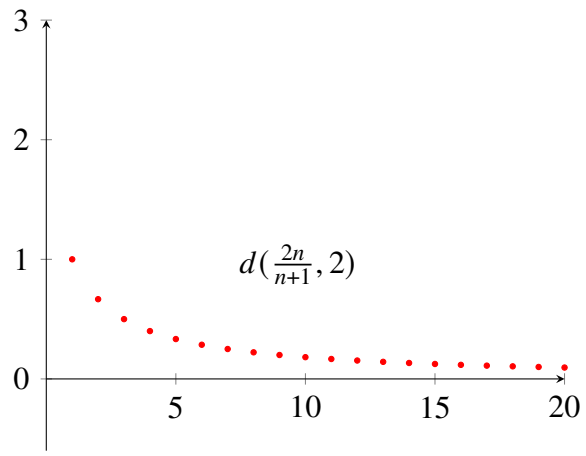
$$x_n \to p, \text{ jos ja vain jos } d(x_n, p) \to 0.$$

Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ lukujonon $\{x_n\}$ sanotaan olevan *kasvava*, jos $x_n \leq x_{n+1}$ kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$. Jos kasvava lukujono on ylhäältä rajoitettu, eli on olemassa $M > 0$ siten, että $x_n < M$ kaikille luvuille n, niin $\{x_n\}$ suppenee kohti lukujonon pienintä ylärajaa. Lukujonon pienintä ylärajaa kutsutaan *supremumiksi*, ja tälle käytetään merkintää $\sup\{x_n\}$.

Esimerkki 3.2. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}$ kasvava reaalilukujono $\{s_n\} = \left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ suppenee kohti arvoa 2. Olkoon metrinen avaruus (M, d) missä $M = \mathbb{R}$ ja $d(x, y) = |x - y|$. Tässä (M, d) on siis itse asiassa euklidinen avaruus $\mathbb{R}$. Olkoon jono $\{x_n\} = \left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ metrisessä avaruudessa (M, d). Tällöin jono $\{x_n\}$ suppenee määritelmän mukaisesti kohti arvoa 2, sillä

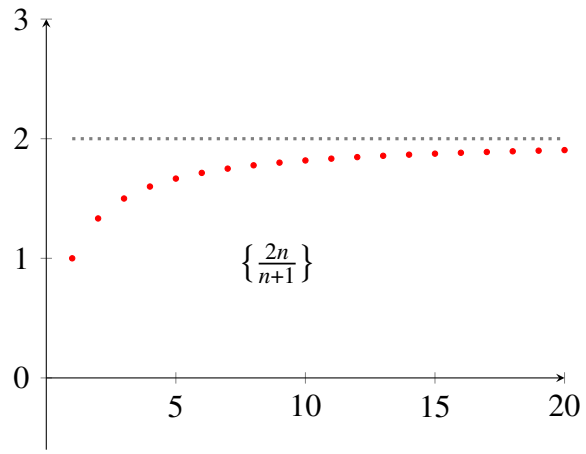
$$d(x_n, 2) = |x_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2}{1 + \frac{1}{n}} - 2\right| \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Nyt jono $\{d(x_n, 2)\}$ suppenee kohti pistettä 0. Kuvassa 3.2 on havainnollistettu tämän jonon suppeneminen. Kuvassa 3.3 on havainnollistettu jonojen $\{x_n\}$ ja $\{s_n\}$ suppeneminen.



Kuva 3.2. Jonon suppeneminen metrisessä avaruudessa.

Vastaavasti lukujonon $\{x_n\}$ sanotaan olevan *vähenevä*, jos $x_{n+1} \leq x_n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jokainen alhaalta rajoitettu vähenevä lukujono suppenee kohti lukujonon suurinta alarajaa. Lukujonon suurinta alarajaa kutsutaan *infimumiksi*, ja tälle käytetään merkintää $\inf\{x_n\}$.

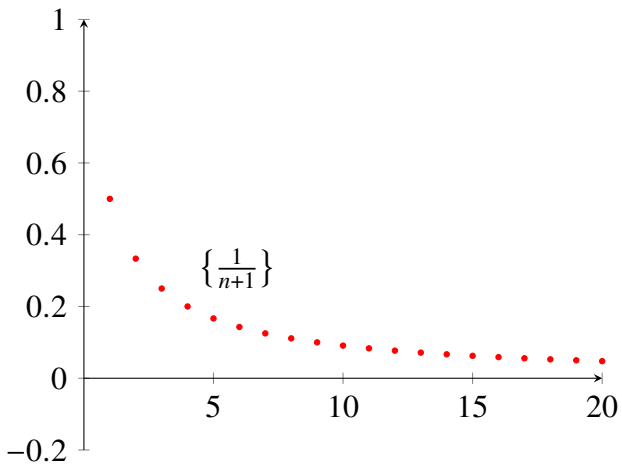


Kuva 3.3. Lukujonon suppeneminen euklidisessa avaruudessa.

Esimerkki 3.3. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}$ vähenevä reaalilukujono $\{s_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ suppenee kohti arvoa 0. Olkoon metrinen avaruus (M, d), missä $M = \mathbb{R}$ ja $d(x, y) = |x - y|$. Tässä (M, d) on siis itse asiassa euklidinen avaruus $\mathbb{R}$. Olkoon jono $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ metrisessä avaruudessa (M, d). Tällöin jono $\{x_n\}$ suppenee määritelmän mukaisesti kohti arvoa 0, sillä

$$d(x_n, 0) = |x_n - 0| = \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Kuvassa 3.4 on havainnollistettu lukujonon suppeneminen euklidisessa avaruudessa sekä metrisessä avaruudessa. Kuvista havaitaan tässä tapauksessa lukujonojen suppenevan kohti samaa pistettä euklidisessa ja metrisessä avaruudessa.



Kuva 3.4. Lukujonon suppeneminen euklidisessa ja metrisessä avaruudessa.

Aiemmista esimerkeistä huomataan jonojen suppenevan yksikäsitteistä pistettä

p kohti metrisessä avaruudessa. Seuraavassa lauseessa osoitetaan tämän pätevän kaikille suppeneville jonoille metrisessä avaruudessa.

Lause 3.1. *Metrisen avaruuden (M, d) jono $\{x_n\}$ suppenee korkeintaan yhtä joukon M pistettä kohti.*

Todistus (vrt. [1, s. 71]). Oletetaan, että $x_n \to p$ ja $x_n \to q$. Todistetaan tämän olevan mahdollista täsmälleen silloin, kun $p = q$. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä saadaan

$$0 \leq d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q).$$

Koska $d(p, x_n) \to 0$ ja $d(x_n, q) \to 0$, niin $d(p, q) = 0$, joten $p = q$. □

Määritelmä 3.4 (vrt. [1, s. 71])**.** Jos jono $\{x_n\}$ on suppeneva, pistettä jota kohti jono suppenee kutsutaan jonon $\{x_n\}$ *raja-arvoksi* ja tälle käytetään merkintää $\lim x_n$ tai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Seuraavassa esimerkissä nähdään, että jono voi olla suppeneva euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}$ olematta kuitenkaan suppeneva metrisessä avaruudessa.

Esimerkki 3.4. Olkoon jono $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}$. Nyt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, eli jono suppenee euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}$. Nyt jos euklidisen avaruuden $\mathbb{R}$ metrisen aliavaruuden arvojoukko on $T =]0, 1]$, jono ei kuitenkaan suppene, sillä jonon raja-arvo 0 ei kuulu metrisen aliavaruuden arvojoukkoon T.

Lause 3.2. *Olkoon $\{x_n\}$ metrisen avaruuden (M, d) jono, ja olkoon sen arvojoukko $T = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$. Oletetaan, että $x_n \to p$. Tällöin*

1. *Arvojoukko T on rajoitettu.*

2. *Piste p on arvojoukon T kosketuspiste.*

Todistus (vrt. [1, s. 71-72]). 1. Olkoon n_0 raja-arvon määritelmästä valitun luvun $\varepsilon = 1$ mukainen positiivinen kokonaisluku. Tällöin jokainen piste x_n jonosta $\{x_n\}$ jolle on voimassa $n \geq n_0$ sijaitsee palloympäristössä $B(p, 1)$. Siis jokainen arvojoukon T piste sijaitsee palloympäristössä $B(p, r)$, missä

$$r = 1 + \max\{d(p, x_1), \ldots, d(p, x_{n_0-1}\}.$$

Täten T on rajoitettu.

2. Koska jokaisessa palloympäristössä $B(p, \varepsilon)$ on piste arvojoukosta T, on piste p arvojoukon T kosketuspiste määritelmän mukaan.

□

Seuraavassa lauseessa osoitetaan lauseen 3.2 kohdan (2.) pätevän myös käänteisesti.

Lause 3.3. *Olkoon metrinen avaruus (M, d) ja sen joukon M osajoukko $T \subseteq M$. Jos joukon M piste p on arvojoukon T kosketuspiste, on olemassa pistettä p kohti suppeneva jono $\{x_n\}$, joka koostuu arvojoukon T pisteistä.*

Todistus (vrt. [1, s. 72]). Jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle $n \geq 1$ on olemassa arvojoukon T piste x_n jolle pätee $d(p, x_n) \geq \frac{1}{n}$. Tällöin $d(p, x_n) \to 0$, joten $x_n \to p$. □

3.2 Osajonot

Määritelmä 3.5 (vrt. [2, s. 48])**.** Olkoon $\{x_n\}$ metrisen avaruuden (M, d) jono ja olkoon indeksi n_k positiivisista kokonaisluvuista koostuva jono siten, että $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin jonoa $\{x_{n_k}\}$ kutsutaan jonon $\{x_n\}$ *osajonoksi*. Jos osajono $\{x_{n_k}\}$ on suppeneva, sen raja-arvoa kutsutaan jonon $\{x_n\}$ osajonon raja-arvoksi.

Osajonolle $\{x_{n_k}\}$ voidaan myös käyttää merkintää $\{x_{k(n)}\}$. Tässä tutkielmassa kuitenkin käytetään osajonolle määritelmän mukaista merkintää $\{x_{n_k}\}$.

Lause 3.4. *Metrisessä avaruudessa (M, d) jono $\{x_n\}$ suppenee kohti pistettä p, jos ja vain jos jonon $\{x_n\}$ jokainen osajono $\{x_{n_k}\}$ suppenee kohti pistettä p.*

Todistus (vrt. [1, s. 72]). ($\Rightarrow$): Oletetaan, että lukujonolle $\{x_n\}$ pätee $x_n \to p$. Valitaan sen mielivaltainen osajono $\{x_{n_k}\}$. Tällöin jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa n_0 siten, että kun $n \geq n_0$, niin $d(x_n, p) < \varepsilon$. Koska $\{x_{n_k}\}$ on osajono, on olemassa positiivinen kokonaisluku m siten, että $n_k \geq n_0$, kun $n \geq m$. Täten, kun $n \geq m$, niin $d(x_{n_k}, p) < \varepsilon$, mikä raja-arvon määritelmän mukaan tarkoittaa, että $x_{n_k} \to p$.

($\Leftarrow$): Todistus on triviaali, sillä $\{x_n\}$ on itse osajono. □

3.3 Cauchyn jonot

Pykälässä 3.3 seurataan lähdettä [1, s. 72–74].

Reaalianalyysista tuttua Cauchyn suppenemisperiaatetta (jos lukujono $\{x_n\}$ suppenee kohti raja-arvoa p, sen termien tulee lähestyä pistettä p ja täten lähestyä toisiansa) voidaan hyödyntää myös metristen avaruuksien jonojen suppenemisessa. Periaatteen avulla voidaan todistaa jonon suppeneminen ilman aiempaa tietoa sen raja-arvosta.

Lause 3.5. *Oletetaan, että jono $\{x_n\}$ suppenee metrisessä avaruudessa (M, d). Tällöin jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ aina, kun } n, m \geq n_0.$$

Todistus. Olkoon lukujonon $\{x_n\}$ raja-arvo p. Valitaan mielivaltainen luku $\varepsilon > 0$. Olkoon n_0 positiivinen kokonaisluku siten, että $d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ aina, kun $n \geq n_0$. Tällöin $d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{2}$, jos $m \geq n_0$. Jos $n \geq n_0$ ja $m \geq n_0$ saadaan kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Määritelmä 3.6. Metrisen avaruuden (M, d) lukujonoa $\{x_n\}$ kutsutaan *Cauchyn jonoksi*, jos se toteuttaa Cauchyn suppenemisehdon:

Jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq n_0 \text{ ja } m \geq n_0.$$

Lauseen 3.5 perusteella jokainen suppeneva jono on myös Cauchyn jono. Jokainen Cauchyn jono ei kuitenkaan ole suppeneva metrisessä avaruudessa (esimerkki 3.4).

Määritelmä 3.7. Metrisen avaruuden (M, d) sanotaan olevan *täydellinen*, jos jokainen Cauchyn jono joukossa M suppenee joukossa M. Joukon M osajoukkoa T kutsutaan täydelliseksi, jos metrinen aliavaruus (T, d) on täydellinen.

Lause 3.6. *Olkoon $\mathbb{R}^n$ euklidinen avaruus. Jokainen Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on suppeneva.*

Todistus. Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ reaalilukujonon $\{x_n\}$ arvojoukko. Jos arvojoukko T on äärellinen, niin kaikki paitsi äärellinen määrä jonon $\{x_n\}$ termeistä ovat yhtäsuuria. Täten lukujono $\{x_n\}$ suppenee kohti kyseistä arvoa.

Oletetaan arvojoukon T olevan ääretön. Osoitetaan Bolzano-Weierstrassin lauseella, että arvojoukolla T on kasautumispiste p, ja osoitetaan lukujonon $\{x_n\}$ suppenevan kohti pistettä p. Cauchyn ehdon perusteella arvojoukko T on rajoitettu. Jos valitaan $\varepsilon = 1$, on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että kun $n \geq n_0$, niin $\|x_n - x_{n_0}\| < 1$. Täten kaikki pisteet x_n, joilla $n \geq n_0$, ovat pallossa jonka säde on 1 ja jonka keskipiste on x_{n_0}. Tällöin arvojoukko T on pallossa jonka säde on $1 + M$ ja jonka keskipiste on 0, kun M suurin arvoista $\|x_1\|, \ldots, \|x_{n_0}\|$. Koska arvojoukko T on rajoitettu ääretön joukko, Bolzano-Weierstrassin lauseen mukaan sillä on kasautumispiste p euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Osoitetaan seuraavaksi lukujonon $\{x_n\}$ suppenevan kohti pistettä p.

Kun $\varepsilon > 0$, on olemassa n_0 siten, että $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$, kun $n \geq n_0$ ja $m \geq n_0$. Pallo $B(p, \frac{\varepsilon}{2})$ sisältää pisteen x_m, jossa $m \geq n_0$. Täten, kun $n \geq n_0$, niin

$$\|x_n - p\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m - p\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

eli $\lim x_n = p$. □

Esimerkki 3.5. Olkoon $\mathbb{R}^n$ euklidinen avaruus ja olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin lauseen 3.6 perusteella tiedetään, että avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen. Tämän perusteella jokainen euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen.

3.4 Funktion raja-arvo metrisessä avaruudessa

Pykälässä 3.4 seurataan lähdettä [1, s. 74–76].

Tässä pykälässä käytetään funktion raja-arvon tarkasteluun kahta metristä avaruutta (M, d_M) ja (T, d_T), missä d_M ja d_T ovat avaruuksia vastaavat etäisyysfunktiot. Lisäksi käytetään tarkasteluun joukon M osajoukkoa A. Funktiolla f tarkoitetaan jatkossa kuvausta $f\colon A \to T$.

Määritelmä 3.8. Jos p on joukon A kasautumispiste ja jos $b \in T$, niin merkinnällä

$$\lim_{x \to p} f(x) = b \tag{3.1}$$

tarkoitetaan seuraavaa:

Jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että

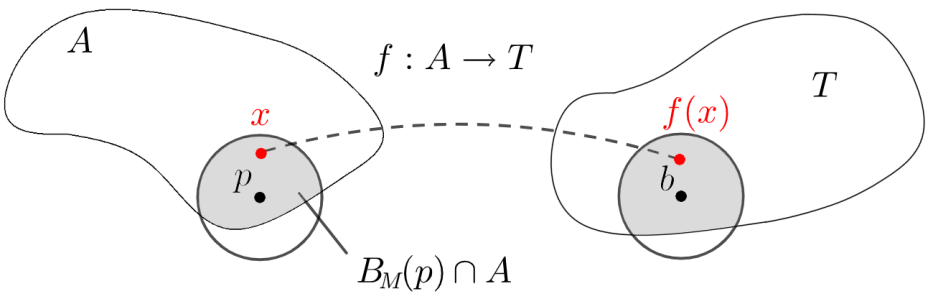
$$d_T(f(x), b) < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x \in A,\ x \neq p, \text{ ja } d_M(x, p) < \delta.$$

Määritelmästä nähdään, että $f(x)$ tulee mielivaltaisen lähelle pistettä b valitsemalla mielivaltainen piste x tarpeeksi läheltä kasautumispistettä p. Pisteen p tulee olla joukon A kasautumispiste, jotta joukossa A on pisteitä x tarpeeksi lähellä pistettä p kuitenkin siten, että $x \neq p$. Pisteen p ei kuitenkaan tarvitse kuulua funktion f määrittelyjoukkoon eikä pisteen b tarvitse olla funktion f arvojoukossa.

Määritelmä voidaan myös esittää palloympäristöjen avulla. Siis (3.1) pätee, jos ja vain jos jokaiselle pallolle $B_T(b)$ on olemassa pallo $B_M(p,r)$ siten, että $B_M(p,r) \cap A$ on epätyhjä joukko ja siten, että

$$f(x) \in B_T(b) \text{ aina, kun } x \in B_M(p,r) \cap A \text{ ja } x \neq p.$$

Kuvassa 3.5 on havainnollistettu palloympäristöjen avulla esitettyä funktion raja-arvon määritelmää.



Kuva 3.5. Funktion raja-arvo metrisessä avaruudessa.

Lause 3.7. *Oletetaan pisteen p olevan joukon A kasautumispiste ja oletetaan, että $b \in T$. Tällöin*

$$\lim_{x \to p} f(x) = b, \tag{3.2}$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b, \tag{3.3}$$

jokaiselle joukon $A \setminus \{p\}$ pisteistä koostuvalle jonolle $\{x_n\}$, joka suppenee kohti pistettä p.

Todistus. ($\Rightarrow$): Jos (3.2) pätee, niin määritelmän mukaan jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$d_T(f(x), b) < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x \in A \text{ ja } 0 < d_S(x,p) < \delta \tag{3.4}$$

Olkoon $\{x_n\}$ mielivaltainen pistettä p kohti suppeneva jono joukossa $A \setminus \{p\}$. Kohdan (3.4) luvulle δ on olemassa $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että jos $n \geq n_0$, niin $d_S(x_n, p) < \delta$. Tällöin (3.4) perusteella $d_T(f(x_n), b) < \varepsilon)$, kun $n \geq n_0$, ja tällöin jono $\{f(x_n)\}$ suppenee kohti pistettä b.

($\Leftarrow$): Osoitetaan toiseen suuntaan käyttämällä ristiriitaa. Oletetaan kohdan (3.3) pätevän ja oletetaan, että kohta (3.2) ei tällöin päde. Jos (3.2) ei päde, niin jollekin $\varepsilon > 0$ ja kaikille $\delta > 0$ on olemassa piste x joukossa A siten, että

$$0 < d_s(x, p) < \delta \quad \text{mutta} \quad d_T(f(x), b) \geq \varepsilon.$$

Valitsemalla $\delta = \frac{1}{n}$, kun $n = 1, 2, \ldots$, on äskeisen perusteella oltava olemassa vastaava joukon $A \setminus \{p\}$ pisteistä koostuva jono $\{x_n\}$ siten, että

$$0 < d_s(x_n, p) < \frac{1}{n}, \quad \text{mutta} \quad d_T(f(x_n), b) \geq \varepsilon.$$

Määritelmän mukaan $\{x_n\}$ suppenee kohti pistettä p mutta oletuksen mukaan jono $\{f(x_n)\}$ ei suppene kohti pistettä b. Tällöin syntyy ristiriita kaavan (3.3) kanssa, joten (3.2) seuraa kohdasta (3.3). $\square$

Lähteet

[1] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis, Second Edition*, Addison-Wesley, 1974.

[2] S. Shirali, H. L. Vasudeva. *Metric Spaces*. Springer London. 2006.