Jonne Saarinen

LU-HAJOTELMA JA LINEAARISTEN YHTÄLÖRYHMIEN RATKAISEMINEN

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2022

Tiivistelmä

Jonne Saarinen: LU-hajotelma ja lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Huhtikuu 2022

Tässä tutkielmassa käsittelemme LU-hajotelmaa, joka on yksi matriisihajotelmista. Hajotelman avulla tutkittava matriisi voidaan esittää kahden kolmiomatriisin tulona. Näiden kolmiomatriisien muoto, yksinkertaisuus ja ominaisuudet mahdollistavat alkuperäisen matriisin tutkimisen ja analysoimisen, sekä matriisia vastaavan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen tehokkaasti. Tutkielmassa keskitytään pääasiassa neliömatriiseihin, sillä hajotelman muodostamiseen käytettävä algoritmi on näin helpompi ymmärtää ja sisäistää. LU-hajotelma on luonteeltaan hyvin mekaaninen metodi, jonka seurauksena tutkielman teoreettinen osuus ei ole kovin haastava. Tästä johtuen tutkielmassa esiteetään laskennallisia esimerkkejä, jotka tuovat esiin LU-hajotelman käytännöllisyyden eri tapauksissa.

Rakenteeltaan tutkielma jakaantuu kolmeen käsittelylukuun sekä johdantoon. Ensimmäisessä käsittelyluvussa, eli luvussa 2, esitetään tutkielman kannalta olennaisia esitietoja matriisilaskennan ja lineaarialgebran osalta. Esitietojen sisäistäminen antaa lukijalle hyvät lähtökohdat tutkielman pääaiheen ymmärtämiseen.

Luvussa 3 puolestaan syvennytään tarkemmin tutkielman pääaiheeseen. Luvun ensimmäisessä aliluvussa esitetään LU-hajotelman määritelmä ja havainnollistetaan sitä esimerkin avulla. Toisessa aliluvussa esitetään kolme erilaista menetelmää hajotelman muodostamiseksi ja esitetään havainnollistava esimerkki jokaiselle menetelmälle. Kolmannessa aliluvussa esitetään, kuinka matriisin determinantti voidaan laskea helposti hyödyntäen LU-hajotelman muodostavien kolmiomatriisien ominaisuuksia. Lopuksi luvun viimeisessä aliluvussa perehdytään siihen, kuinka LU-hajotelmaa hyödyntämällä voidaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä. Tämä onkin yksi yleisimmistä LU-hajotelman sovelluskohteista.

Tutkielman viimeisessä luvussa, eli luvussa 4, esitellään taloustieteessä paljon hyödynnetty panos-tuotos-malli. Mallin matemaattinen idea ja analysointi on suorassa yhteydessä lineaarialgebraan, joten esitämmekin mahdollisia LU-hajotelman hyödyntämiskohteita malliin liittyen.

Tutkielman laskennallinen luonne mahdollistaa asian ymmärtämisen ilman vahvaa teoreettista taustatuntemustakin. Lähtötietoina lukijalta oikeastaan odotetaan vain lineaarialgebran perusteiden hallitsemista.

Avainsanat: lineaarialgebra, matriisi, LU-hajotelma

Sisällys

1 Johdanto

Jokainen neliömatriisi voidaan esittää kahden kolmiomatriisin tulona, eli toisin sanoen neliömatriisille voidaan muodostaa LU-hajotelma. Tämän hajotelman avulla pystymme muokkaamaan matriisin yksinkertaisempaan muotoon, jonka avulla voimme ratkaista yhtälöryhmiä ja muita matriisin ominaisuuksia. Tässä tutkielmassa tarkastelemme, kuinka LU-hajotelma muodostetaan, ja miten sitä voidaan hyödyntää eri tapauksissa.

Luvussa 2 käymme läpi muutamia käsitteitä ja tuloksia, joita vaaditaan LU-hajotelmaa hyödyntäessä ja muodostettaessa. Näiden ymmärtämiseksi edellytämme lukijalta lineaarialgebran perustietojen tuntemista, varsinkin matriisien osalta.

Luvussa 3 tutkimme LU-hajotelman olemassaoloa sekä sen muodostamista eri tilanteissa. Luvun lopussa esitämme algoritmin sille, kuinka LU-hajotelmalla voidaan ratkaista matriisin determinantti sekä yhtälöryhmiä.

Lopuksi esittelemme luvussa 4 taloustieteessä käytetyn tuotos-panos-analyysin, jossa erilaisia talouden systeemejä voidaan esittää matriisimuodossa. Tällöin niihin liittyviä ongelmia voidaan ratkaista hyödyntäen LU-hajotelmaa.

Luvuissa 2 ja 3 käytämme lähteinä Kenneth Kuttlerin kirjoja Elementary Linear Algebra ja Linear Algebra, Theory And Applications sekä Howard Antonin ja Chris Rorresin kirjaa Elementary Linear Algebra: Applications Version. Tuotos-panos-analyysia käsitellessämme päälähteinämme toimivat Wassily Leontiefin kirja Input-Output Economics sekä Rupinder Sekhonin teos Applied Finite Mathematics.

2 Esitietoja

Tässä luvussa esittelemme tutkielman aihetta tarkasteltaessa tarvittavia tuloksia ja menetelmiä. Ensimmäiseksi tutustumme ylä- ja alakolmiomatriisien määritelmään. Seuraavassa alaluvussa esittelemme matriisitulon laskukaavan sekä lineaaristen yhtälöryhmän muodostamisen matriisiksi. Viimeisessä alaluvussa esittelemme Gaussin algoritmin, jota hyödyntämällä saadaan muokattua tarkasteltava matriisi haluttuun muotoon LU-hajotelmaa varten.

2.1 Ylä- ja alakomiomatriist

Tässä alaluvussa esittelemme neliömatriisien ala- ja yläkolmiomatriisin käsitteet.

Määritelmä 2.1. Neliömatriisi on matriisi, jonka rivien ja sarakkeiden lukumäärä on sama. Alla on neliömatriisi, jonka sarakkeiden ja rivien lukumäärä on 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 2.2. Yläkolmio matriisi U on matriisi, jonka kaikki diagonaaliakselin alapuolella olevat alkiot saavat arvokseen 0. Siis 3×3-tapauksessa

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 2.3. Alakolmiomatriisi L on matriisi, jonka diagonaaliakselin akselin yläpuolella olevien alkioden arvo on 0. Siis 3×3-tapauksessa

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

2.2 Matriisitulo ja lineaarisen yhtälöryhmän esittäminen

Lineaariset yhtälörymät voidaan esittää matriisien tuloina. Silloin $Ax = b$ on lineaarinen yhtälöryhmä, jonka ratkaisut x voidaan ratkaista vektorin b sekä matriisin

A avulla. Jotta kyseinen esitystapa on mahdollinen, meidän on ymmärrettävä miten matriisitulo toimii laskutoimituksena ja mitä vaatimuksia sillä on keskenään kerrottavien matriisien muodoille.

Määritelmä 2.4. Olkoon matriisi A muotoa $r \times m$ ja matriisi B muotoa $m \times n$. Silloin näiden kahden matriisin tulo on matriisi C, joka on muotoa $r \times n$. Tällöin matriisin C alkiot c_{ij} saadaan laskettua seuraavasti:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Vrt. [2, s. 42]

Huomautus. Matriisien A ja B välinen kertolasku on mahdollinen vain silloin, kun kerrottavan matriisin B rivien määrä on yhtäsuuri kuin kertojan A sarakkeiden määrä. Ks. [1, s. 30]

Esimerkki 2.1. Lasketaan matriisien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tulo.

Nähdään matriisien A ja B muodoista, että niiden tulon muodostama matriisi C tulee olemaan muotoa 3×2 oleva matriisi. Siis määritelmän 2.4 mukaan

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 11 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = C. \end{aligned}$$

Huomautus. Matriisien kertolasku ei ole kommutatiivinen. Esimerkiksi BA ei ole laskettavissa, sillä B:n sarakkeiden lukumäärä on eri kuin A:n riven lukumäärä.

Määritelmä 2.5. Lineaarinen yhtälöryhmä $Ax = b$, jossa A on muotoa $n \times m$ ja x muotoa $m \times 1$, voidaan esittää seuraavasti matriisien tulona:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b.$$

Vrt. [1, s. 3]

2.3 Gaussin algoritmi

Gaussin algoritmi, ts. Gaussin eliminointimenetelmä, jossa matriisin rivioperaatioden avulla voidaan muokata tai ratkaista yhtälöryhmä yksinkertaisempaan muotoon.

Määritelmä 2.6. Matriisin rivioperaatiot:

1. Kahden rivin vaihto keskenään.
2. Rivin kertominen 0:sta eroavalla skalaarikertoimella.
3. Rivin korvaaminen summamalla siihen toinen rivi kerrottuna 0:sta eroavalla skalaarikertoimella.

Ks. [3, s. 63]

Huomautus. Näiden operaatioiden avulla matriisi voidaan aina muuttaa yläkolmiomatriisiksi.

Esimerkki 2.2. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 6y + z = 12 \\ 4x + 8y + 10z = 25. \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmä augmentoiduksi matriisiksi:

$$\begin{pmatrix} x & 2y & 3z & 5 \\ 2x & 6y & z & 12 \\ 4x & 8y & 10z & 25 \end{pmatrix}.$$

Toteutetaan seuraavat rivioperaatiot, jotta saadaan matriisi helposti ratkaistavaan muotoon:

Ensimmäiseksi vähennetään matriisin toisesta rivistä ensimmäinen rivi kerrottuna 2:lla. Tällöin matriisi tulee muotoon:

$$\begin{pmatrix} x & 2y & 3z & 5 \\ 0 & 2y & -5z & 2 \\ 4x & 8y & 10z & 25 \end{pmatrix}.$$

Seuraavaksi vähennetään matriisin kolmannesta rivistä ensimmäinen rivi kerrottuna 4:llä:

$$\begin{pmatrix} x & 2y & 3z & 5 \\ 0 & 2y & -5z & 2 \\ 0 & 0 & -2z & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyt olemme saaneet matriisin haluttuun muotoon, josta voimme helposti ratkaista muuttujien x, y, z arvot. Alimmalta riviltä saamme yhtälöstä $-2z = 5$ muuttujan z arvoksi $-\frac{5}{2}$. Tätä hyödyntäen ratkaisemme toiselta riviltä y:n arvoksi $-\frac{21}{4}$, ja täten saamme ensimmäiseltä riviltä x:n arvoksi 23. Näin olemme ratkaisseet yhtälöryhmän hyödyntämällä Gaussin algoritmia.

Määritelmä 2.7. Alkeismatriisit ovat matriiseja, jotka voidaan muodostaa identiteettimatriisista käyttämällä yhtä rivioperaatiota. Kun rivioperaatio vaihtaa matriisin rivien paikkaa keskenään, käytettyä matriisia kutsutaan permutaatiomatriisiksi. Ks.[1, s.52]

Esimerkki 2.3. Kerrotaan matriisi A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ permutaatiomatriisilla $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tästä saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen LU-hajotelmalla

Tässä luvussa tutustumme matriisin LU-hajotelmaan ja siihen, kuinka sitä käyttämällä voidaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä. Ensimmäiseksi esitämme määritelmän LU-hajotelmalle. Sen jälkeen tutkimme missä tapauksissa LU-hajotelma on olemassa ja kuinka se muodostetaan matriisille. Viimeiseksi esitämme kuinka LU-hajotelmalla voidaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä.

3.1 LU-hajotelma

LU-hajotelma on yksi matriisihajotelmista, jonka avulla matriisi voidaan esittää alakolmiomatriisin L ja yläkolmiomatriisin U tulona.

Määritelmä 3.1. Matriisi A voidaan esittää alakolmiomatriisin L ja yläkolmiomatriisin U tulona, $A = LU$. Tätä esitystä kutsutaan matriisin A LU-hajotelmaksi. Ks. [1, s. 491]

Lause 3.1. *Matriisin A ollessa neliömatriisi, joka voidaan rivioperaatioiden, poislukien rivienvaihto, avulla muokata yläkolmiomatriisiksi U, jonka diagonaalialkiot* $\neq 0$*, sille voidaan muodostaa LU-hajotelma.*

Todistus. Ks. [1, s. 494] $\square$

Esimerkki 3.1. Matriisin $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ LU-hajotelma on matriisien $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ja $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ tulo. Eli toisin sanoen $LU = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A.$

3.2 LU-hajotelman muodostaminen

Matriisin LU-hajotelma voidaan muodostaa pelkästään tarkastelemalla tutkittavaa matriisia, matriisin kertomien avulla tai hyödyntämällä Gaussin eliminointimenetelmää. Ensimmäiseksi mainittu menetelmä toimii yksinkertaisten matriisien kanssa, mutta jälkimmäinen menetelmä on huomattavasti käytännöllisempi, varsinkin matriisien koon kasvaessa. On myös mahdollista, että matriisille ei löydy yläkomiomatriisiä näillä keinoilla. Tälläisissä tapauksissa hajotelma muodostetaan permutaatiomatriiseja hyödyntäen.

3.2.1 LU-hajotelman muodostaminen matriisia tarkastelemalla

Yksinkertaisten matriisien LU-hajotelma voidaan muodostaa hyödyntämällä ylä- ja alakolmiomatriisien muotojen yksinkertaisuutta. Tällöin matriisien alkioista ratkaistaan haluttavien muuttujien arvot, jotka sijoitetaan sitten niitä vastaavien alkioiden paikoille ylä- ja alamatriiseihin.

Esimerkki 3.2. Muodostetaan matriisin A LU-hajotelma ilman Gaussin eliminointimenetelmää hyödyntäen tietoa ylä- ja alakolmiomatriisien muodoista seuraavasti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ xa & xd+b & xe+f \\ ya & yd+zb & ye+zf+c \end{pmatrix}.$$

Ratkaistaan saadusta matriisista eri muuttujien arvot, joilla ne toteuttavat alkuperäisen matriisin A vastaavien alkioiden arvot. Täten siis näemme, että ensimmäisen rivin muuttujien arvot ovat $a = 1$, $d = 2$ ja $e = 2$. Toisen rivin ratkaisemattoimien muuttujien arvot löydetään ratkaisemalla yhtälöt $xa = 2$, $xd + b = 3$ ja $xe + f = 1$. Täten saamme muuttujien arvoiksi $x = 1$, $b = -1$ ja $f = -3$. Viimeisestä rivistä saamme vastaavanlaisesti muuttujien arvoiksi $y = 3$, $z = 5$ ja $c = 11$. Sijoitetaan nyt saadut muuttujien arvot niitä vastaaviin ylä- ja alakolmiomatriisien paikkoihin. Täten näemme, että matriisin A LU-hajotelma on muotoa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Vrt. [3, s. 214, 10.2.1]

3.2.2 LU-hajotelman muodostaminen Gaussin eliminointimenetelmää hyödyntäen

Toinen tapa muodostaa matriisin LU-hajotelma, joka on paljon käytännöllisempi kuin edellisessä alaluvussa mainittu tapa, on hyödyntää Gaussin eliminointimenetelmää ja rivioperaatioden kertoimia hajotelmaa muodostettaessa. Tätä menetelmää on helpoin havainnollistaa esimerkin avulla.

Esimerkki 3.3. Muodostetaan LU-hajotelma matriisille $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Kirjoitetaan ensimmäiseksi matriisi A identiteettimatriisin kanssa vierekkäin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seuraavaksi aloitetaan muokkaamaan tutkittavaa, eli oikeanpuoleista, matriisia porrasmuotoiseksi yläkolmiomatriisiksi Gaussin eliminointimentelmää hyödyntäen. Samanaikaisesti muokkaamme vasemmanpuoleisen matriisin vastaavia sarakkeita käyttämillämme kertoimilla. Ensimmäiseksi lisäämme oikeanpuoleisen matriisin toiseen riviin sen ensimmäisen rivin kerrottuna -2:lla. Tämän jälkeen lisäämme kertoimen vastaluvun vasemmanpuoleisen matriisin toisen rivin ensimmäiseen sarakkeeseen, jolloin saadaan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seuraavaksi teemme vastaavan rivioperaation oikeanpuoleisen matriisin kolmannelle riville lisäämällä siihen ensimmäisen rivin kerrottuna -3:lla. Sen jälkeen lisäämme luvun 3 vasemmanpuoleisen matriisin kolmannen rivin ensimmäiseen sarakkeeseen, jolloin saadaan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Täten yllä saatu tulos on matriisin A LU-hajotelma, sillä

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Yllä annettu esimerkki havainnollistaa kuinka käytännöllinen Gaussin eliminontimenetelmä on LU-hajotelmaa muodostaessa. Esimerkki ei kuitenkaan itsessään avaa, mikä oikeuttaa tämän menettelytavan käyttämisen hajotelmaa muodostettaessa.

Kuten aikaisemmin ja lauseessa 3.1 todetaan, neliömatriisin ollessa muokattavissa pelkillä rivioperaatiolla ilman rivien paikkojen vaihtoa sellaiseksi yläkolmiomatriisiksi, jonka diagonaalialkiot $\neq 0$, niin sille on mahdollista muodostaa LU-hajotelma. Matriisien kertolaskusäännön mukaan, tutkittava matriisi on siis muokattavissa yläkolmiomatriisiksi alkeismatriisien avulla vastaavanlaisesti:

$$E_n \cdots E_2 E_1 A = U.$$

Alkeismatriisien ollessa kääntyviä, eli niillä on käänteismatriisi, voimme ratkaista yllä olevasta kaavasta A:n seuraavanlaisesti:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U.$$

Lyhyemmin ilmaistuna

$$A = LU,$$

joten siis

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Vrt. [1, s. 494]

Matriisilla voi olla useampi LU-hajotelma eli LU-hajotelma ei itsessään ole yksikäsitteinen. Olkoon nyt

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyt jos alakolmiomatriisin L diagonaalialkiot ovat nollasta eroavia, nii voimme vaihtaa diagonaalialkioita alakolmiomatriisista yläkolmiomatriisiin seuraavanlaisesti:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{31}}{l_{11}} & \frac{l_{32}}{l_{22}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{31}}{l_{11}} & \frac{l_{32}}{l_{22}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{22}u_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = A.$$

Näin olemme saaneet samalle matriisille A kaksi eri LU-hajotelmaa. Vrt. [1, s.498]

3.2.3 Hajotelman muodostaminen permutaatiomatriisin avulla

Kaikille matriiseille ei löydy LU-hajotelmaa. Yksi syy tälle on se, että yläkolmiomatriisin diagonaaliakselille tulee rivioperaatioiden johdosta alkio, jonka arvo on

0. Tämän seurauksena on kuitenkin mahdollista muodostaa hajotelma hyödyntäen permutaatiomatriiseja. Tätä hajotelmaa kutsutaan nimellä PLU-hajotelma, jossa P tarkoittaa juurikin permutaatiomatriisia. Permutaatimatriisi saadaan muodostettua identiteettimatriisista permutoimalla sen rivejä ja sarakkeita.

Esimerkki 3.4. Muodostetaan PLU-hajotelma matriisille $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Aloitetaan matriisin muokkaaminen ylä- ja alakolmiomatriiseiksi rivioperaatioden avulla. Ensimmäiseksi vähennetään matriisin toisesta rivistä ensimmäinen rivi ja sen jälkeen kolmannesta rivistä ensimmäinen rivi kerrottuna 2:lla, jolloin saamme seuraavat matriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Huomamme oikeanpuoleisesta matriisista, ettei se ole yläkolmiomatriisi.

Aloitetaan hajotelman muodostaminen alusta vaihtamalla toisen ja kolmannen rivin paikkoja permutaatiomatriisia hyödyntäen. Tällöin saamme, että

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = PA.$$

Suoritetaan seuraavaksi vastaavat rivioperaatiot, kuin ensimmäisellä yrityksellä, huomioiden rivien paikkoijen muuttamisen. Tällöin saamme seuraavaa:

$$PLU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Näin olemme saaneet muodostettua matriisin A PLU-hajotelman.

3.3 Determinantin etsiminen LU-hajotelman avulla

Neliömatriisin determinantin laskeminen perinteisellä tavalla kofaktoreja hyödyntämällä on varsinkin käsin laskiessa työlästä matriisin koon kasvaessa. Tehokkaampi tapa selvittää tutkittavan matriisin determinantti on hyödyntää kolmiomatriisin determinantin ja samaa muotoa olevien matriisien tulon determinantin laskusääntöä. Tällä tavalla matriisin determinantin laskiessa LU-hajotelma on hyödyllinen apuväline.

Lause 3.2. *Matriisn A ollessa muotoa $n \times n$ kolmiomatriisi, niin sen determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo,* $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.
Vrt. [1, s.110]

Lause 3.3. *Kun neliömatriisit A ja B ovat saman muotoiset, niin matriisin AB determinantti on matriisen A ja B determinanttien tulo, eli* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
Vrt. [1, s.121]

Esimerkki 3.5. Ratkaistaan matriisin A determinantti LU-hajotelman avulla.

Muodostetaan matriisin A LU-hajotelma seuraavilla rivioperaatioilla: ensimmäiseksi lisätään toiseen riviin ensimmäinen rivi kerrottuna -2:lla, seuraavaksi kolmanteen riviin lisätään ensimmäinen rivi kerrottuna -2:lla ja viimeiseksi lisätään viimeiseen riviin toinen rivi. Näin saadaan seuraavanlainen hajotelma:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 14 & 6 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyt voimme kolmiomatriisin determinantin laskusäännöllä laskea matriisien L ja U determinantit, jolloin saadaan, että $\det(L) = 1$ ja $\det(U) = 12$. Nyt hyödyntäen kahden samanmuotoisen matriisin determinanttien tulon sääntöä saadaan $\det(A) = \det(L)\det(U) = 12$.

3.4 Yhtälöryhmien ratkaiseminen LU-hajotelmaa hyödyntäen

LU-hajotelman yksi käytetyimmistä sovelluskohteista on lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa. Hajotelman avulla lineaarisen yhtälöryhmän saa ratkaistua tehokkaasti ja nopeasti verrattuna moniin muihin ratkaisutapoihin.

Huomautus. Yhtälöryhmä voidaan esittää kahden matriisin tulona, jossa toisen matriisin alkioina ovat muuttujien kertoimet ja toisen alkioina ovat itse muuttujat seuraavasti:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = y_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = y_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Huomautus. LU-hajotelman hyödyntäminen lineaarisen yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisemisessa.

1. Kirjoitetaan yhtälöryhmä LU-hajotelmaa hyödyntäen.
   $Ax = LUx = b$
2. Määritellään uusi apumatriisi y sillä tavalla, että $Ux = y$.
3. Käytetään muodostettua apumatriisia, kirjoitetaan kohdan 1 yhtälö muotoon $Ly = b$ ja ratkaistaan y.
4. Sijoitetaan y kohdan 2 yhtälöön ja ratkaistaan sieltä x.

Vaikka tällä tavalla joudutaan ratkaisemaan kaksi eri yhtälöryhmää $Ux = y$ ja $Ly = b$, ratkaisussa tarvittavat matriisit ovat kuitenkin kolmiomatriiseja, joten laskennallisesti tämä tapa on tehokas. Vrt. [1, s.492]

Esimerkki 3.6. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

hyödyntämällä LU-hajotelmaa.

Aloitetaan esittämällä yhtälöryhmä matriisimuodossa $Ax = b$:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = b.$$

Seuraavaksi ratkaistaan matriisin A LU-hajotelma. Kirjoitetaan identiteettimatriisi ja matriisi A vierekkäin ja suoritetaan tarvittavat rivioperaatiot hajotelman muodostamiseksi. Aluksi siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jotta oikeanpuoleisen matriisin toisen rivin ensimmäiseksi alkioksi saadaan 0, niin lisätään toiseen riviin ensimmäinen rivi kerrottuna luvulla $-\frac{1}{2}$ ja lisätään vastaavalle paikalle vasemmanpuoleiseen matriisiin $\frac{1}{2}$. Tällöin saamme seuraavaa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seuraavaksi lisätään oikeanpuoleisen matriisin kolmanteen riviin ensimmäinen rivi kerrottuna luvulla $-\frac{1}{2}$, jotta kolmannen rivin ensimmäiseksi alkioksi tulee 0. Lisätään myös vasemmanpuoleisen matriisin vastaavaan alkioon $\frac{1}{2}$. Tällöin saamme siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Viimeiseksi vielä lisäämme oikeanpuoleisen matriisin kolmanteen riviin toisen rivin kerrottuna luvulla $\frac{1}{3}$ ja lisäämme vasenmanpuoleisen matriisin kolmannen rivin toiseen alkioon $-\frac{1}{3}$, jolloin olemme muodostaneet LU-hajotelman tutkittavalle matriisille. Hajotelma on siis muotoa

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Muodostetaan seuraavaksi määritelmän 3.4 kohdan 2 mukainen apumatriisi y seuraavasti:

$$Ux = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y.$$

Kirjoitetaan nyt tätä apumatriisia hyödyntäen matriisitulo $Ly = b$ seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Tästä saamme ratkaistua arvot matriisin y alkioille. Täten siis $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{-3}{2}$ ja $y_3 =$. Ratkaistaan nyt matriisin x arvot matriisitulosta $Ux = y$. Tällöin saamme seuraavaa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-3}{2} \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Tästä saamme x_i arvoiksi seuraavat: $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{5}{2}$. Nyt sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöryhmään saadut arvot näemme ratkaisun olevan oikea.

4 Panos-tuotos-analyysi

Panos-tuotos-analyysi (input-output analysis) on taloustieteen analysointimenetelmä panos-tuotos-mallille, jolla kuvataan taloudellisen systeemin eri sektorien välistä suhdetta ja miten eri sektorien tuotokset ovat panoksia toisille sektoreille . Mallia voidaann hyödyntää niin kansallisessa ja alueellisessa talouden systeemissä, kuin suurissa yksityisissäkin systeemeissä. Mallin ja sen analyysin yhtenä tärkeimmistä kehittäjistä oli venäläissyntyinen taloustieteilijä Wassily Leontief (1906-1999), joka palkittiin kyseisesen analyysin kehittämisestä taloustieteen Nobelin palkinnolla vuonna 1973. Leontief hyödynsi matriiseja panos-tuotos-mallin esittämisessä.[5]

4.1 Panos-tuotos-taulukko

Panos-tuotos-taulukolla kuvataan hyödykkeiden sekä palveluiden virtoja systeemin yksittäisten sektorien välillä tietyn ajanjakson aikana. Havainnollistetaan tätä yksinkertaisella esimerkillä, jossa meillä on kolme eri sektoria; maatalous, joka tuotti 100 yksikköä viljaa, teollisuus, joka tuotti 50 yksikköä vaatteita, ja kotitaloudet, jotka tuottivat 300 tuntia työvoimaa.

Taulukko 4.1

	Maatalous	Teollisuus	Kotitaloudet	Kokonaistuotos
Maatalous	25	20	55	100
Teollisuus	14	6	30	50
Kotitaloudet	80	180	40	300

Taulukosta 4.1 näemme, että maatalouden tuottamasta sadasta yksiköstä viljaa 25 yksikköä käytettiin maataloudessa itsessään, 20 toimitettiin teollisuudelle ja 55 kotitalouksille. Taulukon rivit siis kuvastavat sitä, kuinka tuotokset jakautuvat eri sektorien välillä. Sarakkeet puolestaan kuvaavat sitä, kuinka paljon panoksia kukin sektori tarvitsee tuottaakseen halutun kokonaistuotoksen. Esimerkiksi teollisuus tarvitsee 20 yksikköä viljaa, 6 yksikköä kangasta ja 30 tuntia työvoimaa tuottaakseen 50 yksikköä kangasta. [4, s.135]

Vaikka eri sektorien tuotoksen määrällinen kuvaaminen on varteenotettava tapa kuvata panos-tuotos-mallia, niin käytännössä taulukon arvot annetaan lähes aina rahallisina arvoina. Tällöin vastaavanlainen taulukko saadaan kertomalla eri panosten määrä niiden arvoilla. Olkoon nyt viljan yksikköarvo 2€, kankaan yksikköarvo 5€ ja kotitalouksien tuottaman työn yksikköarvo 1€. Tällöin määrällisiä arvoja vastaava taulukko olisi tapauksessamme seuraavanlainen. Taulukon viimeisen rivin viimeinen

Taulukko 4.2

	Maatalous	Teollisuus	Kotitaloudet	Kokonaistuotos euroissa
Maatalous	50€	40€	110€	200€
Teollisuus	70€	30€	150€	250€
Kotitaloudet	80€	180€	40€	300€

alkio 300€ kuvaa siis kotitalouksilta hankitun työn arvoa, joka siis kuvastaa kyseisen taloudellisen systeemin kokonaistuloa tarkasteltavana ajanjaksona. [4, s.136]

4.2 Panoskerroinmatriisi

Panoskerroinmatriisilla kuvataan talouden eri sektorien niin sanottua käyttöastetta eri tuotoksista omana panoksenaan, eli siis sitä kuinka suuren osuuden tietyn sektorin tuotoksesta toinen sektori käyttää omana panoksenaan oman kokonaistuotoksensa tuottamiseen. Tämän matriisin alkiot ovat muotoa $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}$, jossa x_i on tarkasteltavan sektorin kokonaistuotos ja x_{ij} kuvaa määrää, jonka tarkasteltava sektori i käyttää sektorin j tuotosta omana panoksenaan. Alla on esitettynä taulukkoa 4.1 vastaava panoskerroinmatriisi A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{100} & \frac{20}{50} & \frac{55}{300} \\ \frac{14}{100} & \frac{6}{50} & \frac{30}{300} \\ \frac{80}{100} & \frac{180}{50} & \frac{40}{300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.40 & 0.0.18 \\ 0.14 & 0.12 & 0.10 \\ 0.80 & 3.60 & 0.13 \end{pmatrix}$$

[4, s.138]

4.3 Suljettu ja avoin malli

Panoskerroinmatriisin sekä kokonaistuotosten avulla voimme muodostaa matriisin kuvaamaan yhtälöryhmää, jolla pystymme ratkaisemaan erilaisia pulmia liittyen suljettuihin sekä avoimiin malleihin. Suljetussa mallissa systeemin kokonaistuotos kulutetaan mallin sisällä. Aikaisemmin esittämämme taulukot kuvaavat juuri tällaista mallia. Suljettu malli esitetään tuotos-panos-analyysissa yleensä muodossa $X = AX$.

Tässä X kuvaa vektoria, jonka alkiot ovat jokaisen alan kokonaistuotosta, ja A on tutkittavan systeemin panoskerroinmatriisi. Huomaamme ylemmistä taulukoista, että matriisi A tulee olemaan aina muoto $n \times n$, jolloinka yhtälöryhmää koskevia eri ongelmia ratkaistaessa pystymme hyödyntämään LU-hajotelmaa, jolloin yhtälö tulee vain muotoon $X = LUX$. Suljettua mallia realistisempi tapaus on avoin malli, jossa mallin sektorien kokonaistuotos ei jakaudu pelkästään niiden kesken, vaan myös ulkoinen kysyntä otetaan huomioon. Tällöin saamamme muotoa $X = AX + D$ muotoa olevan yhtälön, jossa vektori D kuvaa ulkoista kysyntää. Jos haluamme ratkaista tästä tarvittava eri sektorien kokonaistuotannon tason, jotta ulkoinen kysyntä täytettäisiin moukkaamme yhtälön muotoon

$$(I - A)X = D$$

$$X = (I - A)^{-1}D.$$

[6, s.73]

Pystymme jälleen muodostamaan matriisille $(I - A)^{-1}$ LU-hajotelman, jonka avulla pystymme ratkaisemaan erilaisia ongelmia liittyen malliin. Esimerkki tällaisesta ongelmasta on löytää ulkoisen kysynnän taso eri sektorien hyödykkeille, jolla annettu kokonaistuotanto on tasapainossa.

Lähteet

[1] Anton, H. Rorres, C. *Elementary Linear Algebra: Applications Version, 11th Edition, Wiley 2013*.

[2] Kuttler, K. *Linear Algebra, Theory And Applications*. December 19, 2013.

[3] Kuttler, K. *Elementary Linear Algebra*. September 10, 2021.

[4] Leontief, W. *Input-Output Economics. New York: Oxford University Press, 1966. Print.*

[5] Nobel Prize Outreach, https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/

[6] R. Sekhon *Applied Finite Mathematics.* July 16, 2011.