

Ilari Hildén

# ECMO:N LQG-REGULOINNIN ROBUSTI STABIILIUUS

Kandidaatintutkielma  
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Tarkastaja: Terho Jussila  
Toukokuu 2022

# TIIVISTELMÄ

Ilari Hildén: ECMO:n LQG-reguloinnin robusti stabiilius  
Kandidaatintutkielma  
Tampereen yliopisto  
Teknisten tieteiden kandidaatin tutkinto-ohjelma  
Toukokuu 2022

---

Stabiilius ja robustius ovat molemmat säätöpiirien perusvaatimuksia, minkä vuoksi stabiiliuden robustiuden tutkiminen on tärkeää säätöpiirejä suunniteltaessa. Stabiiliuden robustiuden tutkimiseen on kehitetty useita menetelmiä ja graafisia työkaluja. Tässä työssä tutkitaan, miten taajuusvastemenetelmiä voidaan käyttää monimuuttujasäädön stabiiliuden robustiuden tutkimiseen. Menetelmiä sovelletaan ECMO (Extracorporeal Membrane Oxygenation) -laitteiston hapettimen säätöpiirissä esiintyvien epävarmuuksien tutkimiseen.

ECMO-laitteistoa käytetään terveydenhuollossa ECMO-hoidossa hiilidioksidin poistamiseen potilaan verestä ja veren uudelleen hapettamiseen. ECMO-laitteiston hapettimen säätimenä tullaan käyttämään LQG (Linear-Quadratic-Gaussian) -säädintä. Toteutettava LQG-säädin on estimaattoripohjainen tilatakaisinkytketty lineaaristen prosessien säädinratkaisu. Säädin perustuu neliöllisten kustannusfunktioiden minimoimiseen, kun häiriöiden oletetaan olevan normaalijakautuneita valkoisia kohinoita.

Taajuusvastemenetelmillä monimuuttujasäädön stabiiliuden robustiutta todetaan pystyttävän tutkimaan takaisinkytkentäkanavakohtaisesti sekä ottaen huomioon kaikki takaisinkytkentäkanavat ja niiden väliset vuorovaikutukset. Kanavakohtaista robustiutta tutkittaessa todetaan mahdolliseksi käyttää SISO (Single-Input Single-output) -systeemeille kehitettyjä menetelmiä stabiiliuden robustiuden tutkimiseen. Kaikkia kanavia tutkittaessa todetaan mahdolliseksi laajentaa klassisen säätöteorian vahvistus-, vaihe- ja viivevaran käsitteet monimuuttujasäädölle. Monimuuttujasäädön stabiiliuden robustiutta todetaan voitavan tutkia myös graafisesti käyttämällä ominaisuraa sekä juuriuraa.

Menetelmillä ECMO-laitteiston hapettimen säätöpiirin epävarmuuksille saadaan laskettua kriittisiä arvoja vahvistuksille, vaihesiirroille ja viiveille, joilla säätöpiirin stabiilius menetetään. Laske-  
tuista kriittisistä arvoista ECMO:n säätöpiirin robustin stabiiliuden todetaan olevan hyvä. LQG-säätimen v erityksellä havaitaan olevan vaikutusta säätöpiirin stabiiliuden robustiuteen.

Avainsanat: LQG-regulointi, monimuuttujasäätö, robustius, stabiilius, taajuusvaste

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

## SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto . . . . .	1
2.	ECMO-laitteiston toiminta, käyttö ja matemaattinen mallinnus . . . . .	3
2.1	ECMO-hoidon toiminta ja käyttö . . . . .	3
2.2	ECMO-laitteiston LTI-tilaesitys . . . . .	4
3.	LQG-säätö . . . . .	6
3.1	Tilatakaisinkytketty säätö. . . . .	6
3.2	Tilatakaisinkytketyn säädön LQ-menetelmä . . . . .	7
3.3	Tilahavaitsija . . . . .	9
3.4	Vakiovahvistuksellinen Kalman-suodin . . . . .	10
3.5	LQG-säädin . . . . .	11
4.	Takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin robusti stabiilius . . . . .	13
4.1	LTI-tilamallin siirtofunktioatriisi . . . . .	13
4.2	Takaisinkytketyn säätöpiirin stabiilius ja karakteristinen yhtälö . . . . .	13
4.3	Takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin kanavakohtaiset vahvistus-, vaihe- ja viivevarat . . . . .	15
4.4	Takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin vahvistus-, vaihe- ja viivevarat. . . . .	17
4.5	Stabiiliuden robustiuden tutkiminen Robust Control Toolboxilla . . . . .	19
5.	LQG-reguloidun ECMO-laitteiston robusti stabiilius . . . . .	24
5.1	ECMO:n LQG-säädin . . . . .	24
5.2	Epävarmuuksien mallintaminen . . . . .	25
5.3	ECMO:n säätöpiirin epävarmuuksien kriittiset arvot . . . . .	26
5.4	ECMO:n LQG-säätimen painokerroinmatriisien vaikutus stabiiliuden robustiuteen . . . . .	27
6.	Yhteenveto . . . . .	30
	Lähteet . . . . .	31
	Liite A: MIMOvarat-työkalu. . . . .	33
	Liite B: Ominaisura-työkalu . . . . .	35
	Liite C: Kanavakohtaisten epävarmuuksien suhteen lineaaristen karakterististen yhtälöiden symbolinen johto . . . . .	37

## KUVALUETTELO

3.1	LQG-säädetyin säätöpiirin lohkokaaavioesitys . . . . .	12
4.1	Takaisinkytketty säätöpiiri . . . . .	14
4.2	Epävarmuuden sisältävä takaisinkytketty säätöpiiri . . . . .	16
4.3	Ominaisura . . . . .	20
4.4	Kiekkopävarmuus . . . . .	22
5.1	ECMO:n säätöpiiri epävarmuuskomponentilla . . . . .	26
5.2	ECMO:n säätöpiirin ominaisura . . . . .	28

## LYHENTEET

ECMO	Extracorporeal Membrane Oxygenation, kehonulkoinen happeuttaminen
LQ	Linear-Quadratic, Lineaarinen ja neliöllinen
LQG	Linear-Quadratic-Gaussian, Lineaarinen, neliöllinen ja gaussinen
LQR	Linear-Quadratic Regulator, Lineaarinen ja neliöllinen regulaattori
LTI	Linear Time-Invariant, lineaarinen ja aikainvariantti
MIMO	Multiple-Input, Multiple-Output, useita sisäänmenoja ja ulostuloja
SISO	Single-Input, Single-Output, yksi sisäänmeno ja yksi ulostulo

## MERKINNÄT

$A$	Tilaesityksen tilamatriisi
$B$	Tilaesityksen sisäänmenomatriisi
$B_u$	Tilaesityksen ohjauksen sisäänmenomatriisi
$B_w$	Tilaesityksen häiriön sisäänmenomatriisi
$C(s)$	Säätimen siirtofunktio
$C_y$	Tilaesityksen ulostulomatriisi
$D$	Tilaesityksen suorakytkentämatriisi
$F$	Asetusarvon vahvistusmatriisi
$G(s)$	Siirtofunktio
$H$	Mittauksen ennustusvirheen vahvistusmatriisi
$J_{Kalman}$	Kalman-suotimen kustannusfunktio
$J_{lqr}$	LQ-reguloinnin kustannusfunktio
$K$	Tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisi
$L(s)$	Avoimen systeemin siirtofunktio
$P(s)$	Prosessin siirtofunktio
$Q$	Tilan painokerroinmatriisi
$R$	Ohjauksen painokerroinmatriisi
$S(s)$	Herkkyysfunktio
$S_v$	Mittaushäiriön spektritiheys
$S_w$	Tilanhäiriön spektritiheys
$T(s)$	Komplementaarinen herkkyysfunktio
$W_o$	Ohjattavuuden testimatriisi
$W_t$	Tarkkailtavuuden testimatriisi
$X$	LQR-suunnittelun Riccati-yhtälön ratkaisumatriisi
$X_e$	Kalman-suotimen Riccati-yhtälön ratkaisumatriisi
$\Gamma(s)$	Epävarmuuden siirtofunktio
$\tilde{\mathbf{y}}(t)$	Mittauksen ennustusvirhevektori

$\alpha$	Epävarmuuskiekon suuruuden parametri
$\hat{\mathbf{y}}(t)$	Tilaesityksen mittausvektorin ennustus
$\mathbf{m}(t)$	Tilaesityksen mittauksen ulostulovektori
$\mathbf{r}(t)$	Asetusarvovektori
$\mathbf{u}(t)$	Tilaesityksen sisäänmenovektori
$\mathbf{v}(t)$	Mittaushäiriövektori
$\mathbf{w}(t)$	Tilaa häiritsevä vektori
$\mathbf{x}(t)$	Tilaesityksen tilavektori
$\mathbf{y}(t)$	Tilaesityksen ulostulovektori
$\delta(t)$	Dirac-impulssi
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Tilaesityksen tilavektorin aikaderivaatta
$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$	Tilaesityksen tilan ennustusvektorin aikaderivaatta
$\gamma(s)$	Epävarmuuden siirtofunktio
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	Tilaesityksen tilan ennustusvektori
$\phi$	Vaihekulma
$\phi_m$	Vaihevara
$\sigma$	Epävarmuuskiekon reaaliakselin suuntainen poikkeama
$\xi$	Satunnainen kompleksiluku yksikköympyrässä
$g_m$	Vahvistusvarakerroin
$k$	Vakiovahvistus
$k_l$	Alavarmuuskerroin
$k_u$	Ylävarmuuskerroin
$l(s)$	Avoimen systeemin ominaisfunktio
$m$	Tilaesityksen ulostulon dimensio
$m_i(t)$	Tilaesityksen mittaus
$n$	Tilaesityksen tilan dimensio
$p$	Tilaesityksen sisäänmenon dimensio
$r_i(t)$	Asetusarvo
$u_i(t)$	Tilaesityksen sisäänmeno
$w_i(t)$	Prosessihäiriö
$x_0$	Tilaesityksen tilan alkuarvo
$x_i(t)$	Tilaesityksen tila

$y_i(t)$ 

Tilaesityksen ulostulo



# 1. JOHDANTO

Stabiilius sekä robustius ovat molemmat säätöpiirien perusvaatimuksia. Lähes kaikkien takaisinkytkettyjen säätöpiirien täytyy olla sisäisesti stabiileja ja sovelluskohteesta riippuen täyttää riittävät vaateet robustiudelle. Säätöpiirin stabiiliuden robustiuden tutkiminen on siksi mielekästä. Siihen on kehitetty useita analyysikeinoja ja teorioita. Tässä työssä tutkitaan monimuuttujasäädön taajuusvasteen käyttämistä säätöpiirin stabiiliuden robustiuden tutkimiseen erilaisten malliepävarmuuksien läsnäollessa. Monimuuttujasäädön taajuusvastemetodeja ja -työkaluja on kehittänyt mm. Alistair MacFarlane 1970-luvulla. Käsiteltävät teoriat ovat intuitiivinen laajennus klassisen säätöteorian taajuusvasteen käsitteille kuten vahvistus- ja vaihevarat. Nykypäivän laskentaohjelmistot tarjoavat suurilta osin kehittyneempään teoriaan pohjautuvia työkaluja robustiuden tutkimiseen. Työssä käsitellään myös MatLab-laskentaohjelmiston Robust Control Toolboxin tarjoamia mahdollisuuksia robustiuden tutkimiselle. Käsiteltävät työkalut pohjautuvat monimuuttujasäädön vahvistus- ja vaihevaroihin.

Teorioita sovelletaan ECMO-laitteiston (eng. *Extracorporeal Membrane Oxygenation*) hapettimen säätöpiireille. ECMO-laitteistoa käytetään ECMO-hoidossa hapettamaan potilaan veri kierrättämällä sitä kehon ulkopuolisissa keinotekoisissa keuhkoissa. ECMO-laitteiston hapettimen mallina käytetään myös Smithin ja Porumamillan [7] käyttämää LTI-tilamallilla (eng. *Linear Time-Invariant*). Säätimenä toteutetaan LQG-regulaattori (eng. *Linear-Quadratic-Gaussian*). LQG-regulaattori on estimaattoripohjainen tilatakaisinkytketty säädin, jossa prosessi on lineaarinen, kustannusfunktiot neliöllisiä sekä häiriöiden oletetaan olevan normaalijakautuneita. Työssä käsitellään myös LQG-säätimen suunnittelupainokertoimien vaikutusta säätöpiirin stabiiliuden robustiuteen tutkimalla eri painokertoimilla viritettyjen ECMO:n säätöpiirien robustia stabiiliutta.

Työ on jaettu neljään osioon. Ensimmäisessä osiossa esitellään ECMO-laitteisto ja esitellään ECMO-järjestelmän LTI-tilaesitys. Työn toisessa osiossa esitellään estimaattoripohjainen tilatakaisinkytketty säätö ja esitellään LQG-menetelmä. Kolmannessa osiossa käsitellään takaisinkytketyn monimuuttujasäädön stabiiliutta ja esitellään taajuusvastemeneelmiä stabiiliuden robustiuden tutkimiseen sekä kanavakohtaisesti että ottaen huomioon kaikki takaisinkytkentäkanavat. Kolmannessa osiossa tehdään myös katsaus MatLab-ohjelmiston Robust Control Toolboxin tarjoamiin työkaluihin. Viimeisessä osiossa suunnitellaan ECMO-laitteistolle LQG-säädin ja sovelletaan edellisen osion teorioita ECMO:n

säätöpiirin stabiiliuden robustisuuden tutkimiseen. Työn viimeisessä osiossa myös tutkitaan kokeellisesti LQG-säätimen suunnittelupainokertoimien vaikutusta säätöpiirin stabiiliuteen.

## **2. ECMO-LAITTEISTON TOIMINTA, KÄYTTÖ JA MATEMAATTINEN MALLINNUS**

Tässä luvussa esitellään aluksi lyhyesti ECMO-hoidon toimintaperiaate ja hoitoon käytetty ECMO-laitteisto. ECMO:n esittelyn jälkeen tarkastellaan mm. Smithin ja Porumamillan [7] käyttämää LTI-tilaesitystä ECMO-laitteiston hapettimelle.

### **2.1 ECMO-hoidon toiminta ja käyttö**

ECMO-hoitoa käytetään potilailla, joiden keuhkojen tai sydämen toiminta ei riitä hapettamaan potilaan verta riittävästi. Yleisin käyttötapaus ECMO-hoidolle on taata veren hapetus vastasyntyneillä vauvoilla, joiden alikehittyneet tai toimimattomat keuhkot eivät kykene siihen riittävän hyvin. ECMO-hoitoa voidaan myös muutamiksi tunneiksi käyttää korvaamaan sellaisten potilaiden keuhkojen toimintaa, joilla keuhkot ovat vaurioituneet, tulehtuneet tai vajaatoiminnalliset. Yleisimmät tilat, jotka vaativat aikuisilla ja lapsilla ECMO-hoitoa ovat sydämen vajaatoiminta, pneumonia ja verenmyrkytys. ECMO-hoito voi auttaa potilaan keuhkoja ja/tai sydäntä parantumaan pienentämällä niihin kohdistuvaa kuormaa, mutta sillä ei voida parantaa taustalla olevia sairauksia. Koska ECMO-hoitoon sisältyy huomattavia riskejä, hoitoa käytetään viimeisenä keinona vakavasti sairailta potilailla, jotka menehtyisivät ilman hoitoa. [15]

ECMO-hoidossa potilaan veri pumpataan kaulalaskimosta kehon ulkopuolelle hapettimeen. Hapetin jäljittelee ihmisen keuhkojen toimintaa ja poistaa verestä hiilidioksidia sekä hapettaa veren normaalille tasolle. Hiilidioksidi- ja happitasojen palauttamisen jälkeen veri lämmitetään lämmönvaihtimessa takaisin potilaan kehon lämpötilaan ja palautetaan potilaan verenkiertoelimistöön kaulalaskimon kautta. Potilaan verta kierrätetään tasaisesti ECMO-laitteiston läpi, kunnes potilas ei enää tarvitse ECMO-hoitoa, jolloin veren virtaus taiteiston läpi voidaan alkaa laskea tasaisesti. [15] Tyypillisen ECMO-laitteiston pääkomponentteihin kuuluvat hapetin, veren kierrätyspumppu, useita lääkkeiden syöttörajapintoja, lämmönvaihdin ja useita paineen mittauksia [7, s. 324].

## 2.2 ECMO-laitteiston LTI-tilaesitys

LTI-malleja suositaan säätösuunnittelussa, koska suurin osa epälineaarista järjestelmistä voidaan linearisoida toimintapisteen läheisyyteen ja kuvata tällöin LTI-malleilla riittävän tarkasti. LTI-mallien käyttö mahdollistaa myös kattavat mahdollisuudet säätösuunnitteluun sekä järjestelmien analysointiin. LTI-systeemejä voidaan mallintaa useilla eri tavoilla kuten lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä, siirtofunktioimalleilla tai LTI-tilaesityksillä. Edellä esitelty ECMO-laitteisto on mallinnettu LTI-tilaesityksellä. Smith ja Porumalilla [7, s. 325] käyttivät ECMO-järjestelmän hapettimelle LTI-tilaesitystä

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B_u\mathbf{u}(t) + B_w\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_y\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{m}(t) &= \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -5 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Tässä  $A$  on tilamatriisi,  $B_u$  ja  $B_w$  ovat ohjauksen ja tilanhäiriön sisäänmenomatriisit ja  $C_y$  on ulostulomatriisi. Mallin tilamuuttujat ovat hapen virtausnopeus  $x_1(t)$ , hiilidioksidin virtausnopeus  $x_2(t)$ , hapen osapaine valtimossa  $x_3(t)$  ja hiilidioksidin osapaine valtimossa  $x_4(t)$ . Sisäänmenovektori

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T \quad (2.4)$$

on ohjauksen sisäänmenovektori, jossa  $u_1(t)$  on hapen virtausnopeuden asetusarvo ja  $u_2(t)$  on hiilidioksidin virtausnopeuden asetusarvo. Sisäänmenovektori

$$\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t)]^T \quad (2.5)$$

on tilanhäiriön sisäänmenovektori, jossa  $w_1(t)$  on happiventtiilin asentovirhe ja  $w_2(t)$  on hiilidioksidiventtiilin asentovirhe. Ulostulovektori  $\mathbf{m}(t)$  on mittauksen ulostulovektori, jossa  $m_1(t)$  on hapen mitattu osapaine valtimossa ja  $m_2(t)$  on hiilidioksidin mitattu osapaine valtimossa. Vektori  $\mathbf{v}(t)$  on mittaushäiriövektori. [7, s. 325] Ulostulovektori  $\mathbf{y}(t)$  on tilaesityksen ideaalinen ulostulo, jossa ei esiinny lainkaan mittaushäiriöitä. Se sisältää hapen ja hiilidioksidin todelliset osapaineet.

ECMO:n LTI-tilaesityksellä on kaksi lähes toisistaan riippumatonta piiriä: happipiiri ja hiilidioksidipiiri. Piirit ovat rakenteeltaan samankaltaisia, lukuun ottamatta hiilidioksidin virtausnopeuden  $x_2(t)$  vaikutusta hapen osapaineeseen  $x_3(t)$ . Hapen osapaine valtimossa  $x_3(t)$  on kuitenkin huomattavasti herkempi hapen virtausnopeuden  $x_1(t)$  muutoksille, kuin hiilidioksidin osapaine  $x_4(t)$  hiilidioksidin virtausnopeuden muutoksille  $x_2(t)$ . Tämä nähdään tarkastelemalla dynamiikkamatriisin  $A$ , sisäänmenomatriisin  $B_u$  ja ulostulomatriisin  $C_y$  kertoimia. ECMO:n hapettimen tilamalli on myös sisäisesti stabiili, joka voidaan todeta dynamiikkamatriisin  $A$  ominaisarvoista.

### 3. LQG-SÄÄTÖ

Tässä luvussa käsitellään LTI-systeemin LQG-säätöä. Ensimmäisenä esitellään LTI-systeemin tilatakaisinkytketty säädin. Sitten esitellään tilatakaisinkytkentää soveltava LQ-menetelmä (eng. *Linear-Quadratic*). Seuraavaksi esitellään tilahavaintsija ja Kalman-suodin. Viimeisenä esitellään LQG-säädin, joka yhdistää Kalman-suotimen sekä LQR-regulaattorin (eng. *Linear-Quadratic-Regulator*).

#### 3.1 Tilatakaisinkytketty säätö

Tilatakaisinkytketyssä säädössä LTI-systeemin ohjaus muodostetaan sen nykyisen tilan ja asetusravon lineaarikombinaationa. Säädön tavoitteena on saada prosessin kukin ulostulo  $y_i$  seuraamaan asetusravoaan  $r_i$  prosessin, toimilaitteiden ja mittausjärjestelmien epävarmuuksista huolimatta. Epävarmuuksia ovat mm. parametripävarmuudet ja säätöpiirissä esiintyvät häiriöt. Käyttämällä tilatakaisinkytkentää säätöpiirin dynaamiset ominaisuudet voidaan mahdollisesti saada täyttämään niille asetetut tavoitteet [19, s. 7-11].

Tarkastellaan aitoa LTI-tilaesitystä

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} &= C_y\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Tilatakaisinkytketyn säädön säätölaki voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t) + F\mathbf{r}(t), \quad (3.2)$$

jossa  $K_{p \times n}$  on tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisi,  $F_{p \times p}$  asetusravon vahvistusmatriisi ja  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}_{p \times 1}$  on asetusravovektori [19, s. 7-10]. Sijoittamalla säätölaki (3.2) yhtälöön (3.1), voidaan tilatakaisinkytketylle säätöpiirille kirjoittaa LTI-tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (A - BK)\mathbf{x}(t) + BF\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_y\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Tilaesityksessä (3.3) asetusravon vahvistusmatriisi  $F$  ei vaikuta säätöpiirin dynamiikkaan, mutta vaikuttaa sen tasapainotilaan. Asetusravon vahvistus tuleeikin valita yleisesti siten,

että vakiovahvistus sisäänmenosta  $r_i$  ulostuloon  $y_i$  on yksi, jolloin tavoiteltu asetusarvo saavutetaan ulostulossa ilman tasapainotilan virhettä. [19, s. 7-11] Tämä matriisi voidaan laskea kaavalla

$$F = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1} \quad (3.4)$$

[19, s. 7-15]. Tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisin  $K$  valintaan on olemassa useampia eri menetelmiä, kuten napojen asetelumenetelmä sekä LQ-menetelmä, jota käsitellään seuraavana. Tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisi voidaan valita mielivaltaisesti, jos säädettävä prosessi on *ohjattava* [19, s. 7-15].

**Määritelmä 1.** *Lineaarinen systeemi on ohjattava ajanhetkellä  $t_0 \in \mathbb{R}$ , jos on olemassa ohjaus  $u(t)$ , joka ohjaa tilan alkuarvosta  $x(t_0)$  origoon  $x(t_1) = 0$  ajanhetkellä  $t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $t_1 > t_0$ . [6, s. 374]*

LTI-tilamallin ohjattavuutta voidaan tutkia ohjattavuuden testimatriisin  $W_o$  avulla. Tilamalli (3.1) on ohjattava, jos ja vain jos ohjattavuuden testimatriisilla

$$W_o = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

on  $n$  kappaletta lineaarisesti riippumattomia sarakkeita, jolloin sen aste on  $\text{rank}(W_o) = n$  [19, s. 7-4]. Ohjattavuuden testimatriisin ehdon toteutuessa sanotaan parin  $(A, B)$  olevan ohjattava.

### 3.2 Tilatakaisinkytketyn säädön LQ-menetelmä

LQR-säädin on LQ-optimiteorian tilatakaisinkytketty säädin, jossa takaisinkytkentävahvistuksen  $K$  valitaan minimoimaan prosessin tilan ja sisäänmenon tasapainotilan poikkeamien neliösummien summa [5, s. 275]. LQ-optimiteoriaa on kirjallisuudessa ja käytännön sovelluksissa käytetty paljon, koska LQ-optimointiongelmat on mahdollista ratkaista ratkaisemalla algebrallinen Riccati-yhtälö.

Jos säädettävän prosessin tila  $x(t)$  on mitattavissa, niin LQ-optimointiongelma voidaan määritellä stokastiselle tilanyhtälölle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \quad (3.6)$$

jossa  $w(t) \in \mathbb{R}_{k \times 1}$  on tilanhäiriö,  $B_w n \times k$  on tilanhäiriön sisäänmenomatriisi ja  $B_u n \times p$  on ohjauksen sisäänmenomatriisi. Tilanhäiriön oletetaan olevan nollakeskiarvoista. Yksi mahdollinen esitys LQR-kustannusfunktiolle on

$$J_{lqr} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)], \quad (3.7)$$

jossa  $Q_{n \times n}$  on symmetrinen positiivisesti semidefiniitti matriisi, joka painottaa tilan  $x(t)$

poikkeamia nolasta ja  $R_{p \times p}$  on symmetrinen positiivisesti definiitti matriisi, joka painottaa ohjauksen  $u(t)$  poikkeamia nolasta. [5, s. 275] Kustannusfunktio on tilan  $x(t)$  tasapainotilan painotetun keskimääräisen neliösumman ja ohjauksen  $u(t)$  tasapainotilan keskimääräisen neliösumman summa.

Jos pari  $(A, B_u)$  on ohjattava, niin kustannusfunktion (3.7) minimoiva takaisinkytkentävahvistus on

$$K = R^{-1}B_u^T X, \quad (3.8)$$

jossa  $X_{n \times n}$  on symmetrinen positiivisesti semidefiniitti matriisi. Matriisi  $X$  on jatkuva-aikaisen algebrallisen Riccati-yhtälön

$$A^T X + XA - XB_u R^{-1} B_u^T X + Q = 0 \quad (3.9)$$

yksikäsitteinen ratkaisu. Ratkaisu  $X$  tuottaa kustannusfunktion 3.7 minimoivan takaisinkytkentävahvistuksen  $K$  parin  $(Q, A)$  ollessa tarkkailtava. [5, s. 277]

**Määritelmä 2.** Lineaarinen systeemi on tarkkailtava, jos kaikilla ajanhetkillä  $T > 0$  systeemin tila  $x(T)$  voidaan määrittää sisäänmenojen  $u(t)$  ja ulostulojen  $y(t)$  arvoilla  $[0, T]$  [19, s. 8-2].

LTI-tilamallin tarkkailtavuus voidaan selvittää tarkkailtavuuden testimatriisin  $W_t$  avulla. Tilamalli (3.1) on tarkkailtava, jos ja vain jos tarkkailtavuuden testimatriisilla

$$W_t = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C^{n-1}A \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

on  $n$  kappaletta lineaarisesti riippumattomia rivejä, jolloin tarkkailtavuuden testimatriisin aste on  $\text{rank}(W_t) = n$  [19, s. 8-3]. Tarkkailtavuuden testimatriisin ehdon toteutuessa sanotaan parin  $(A, C)$  olevan tarkkailtava.

LQR-säädintä suunniteltaessa painokerroinmatriisien  $Q$  ja  $R$  valinta on tärkeää. Sopivien matriisien valinta edellyttää riittävää tuntemusta säädettävästä järjestelmästä, sekä säädölle asetetuista tavoitteista. [16, s. 52] Yksi mahdollisuus on valita painokerroinmatriisit diagonaalimatriiseiksi

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{pp} \end{bmatrix}.$$



Diagonaalisessa painokerroinmatriisissa  $Q$  elementti  $Q_{ii} \geq 0$  sakottaa tilan  $x_i$  poikkeamaa origosta sekä vastaavasti painokerroinmatriisissa  $R$  elementti  $R_{ii} > 0$  sakottaa ohjauksen  $u_i$  poikkeamia origosta. Tällöin tiloja ja ohjauksia, joiden arvojen halutaan pysyvän lähempänä tasapainotilaa voidaan sakottaa enemmän kasvattamalla painokerroinmatriisien diagonaalelementtejä. [16, s. 52] Tilan painokerroinmatriisin elementtejä voidaan myös valita nolliksi, jolloin niitä vastaavien tilojen poikkeamia ei sakoteta lainkaan. Diagonaalisen painokerroinmatriisin elementit  $Q_{ii}$ ,  $R_{ii}$  voidaan alustavasti valita, niitä vastaavien tilojen ja ohjauksien  $x_i$ ,  $u_i$  oletettujen maksimiarvojen neliöiden käänteisluvuiksi. Alustavan valinnan jälkeen arvoja  $Q_{ii}$ ,  $R_{ii}$  voidaan varioida iteratiivisesti siten, että asetetut suorituskyky- ja kustannustavoitteet saavutetaan. [16, s. 53] Useasti painokerroinmatriisien valinnassa alustava valinta ei välttämättä tuota haluttuja tuloksia, sillä säätöpiirin vaatimuksien ilmaiseminen painokerroinmatriiseilla  $Q$ ,  $R$  on haastavaa ja epätarkkaa [1, s. 156].

Painokerroinmatriisien valinnalla on myös vaikutusta säätöpiirin stabiiliuden robustisuuteen. Valitsemalla sopimattomat painokertoimet  $Q$ ,  $R$  säätöpiirillä saattaa olla heikot vaihe- ja vahvistusvarat. [11, s. 82] Monimuuttujasäädön vaihe- ja vahvistusvaroja tarkastellaan tarkemmin luvussa 4. Valitsemalla painokertoimet sopivasti säätöpiirille voidaan kuitenkin taata  $60^\circ$  vaihevara ja ääretön vahvistusvara riippumattomasti, mutta yhtäaikaaisesti jokaisessa takaisinkytkentäkanavassa [11, s. 82]. Kappaleessa 5 tullaan tutkimaan painokertoimien valinnan vaikutusta säätöpiirin robustisuuteen kokeellisesti poikkeuttamalla diagonaalisen painokerroinmatriisin valittuja arvoja.

### 3.3 Tilahavaintsija

Prosessin tiloja ei useinkaan pystytä mittaamaan tarkasti vaan prosessin mittauksissa saattaa esiintyä mittaushäiriöitä ja muuta ei-toivottua dynamiikkaa. Prosessin tila ei ole välttämättä myöskään käytännön syistä mitattavissa. Tällöin voidaan yrittää käyttää tilahavaintsijaa, jolla prosessin tilasta voidaan muodostaa estimaatti prosessin ulostulon mittauksesta, sisäänmenosta ja aikaisemmista estimaateista.

Tarkastellaan stokastista prosessia, jonka tilanyhtälö on (3.6). Jos suorakytkentämatriisi  $D$  on nolla ja mittauksessa esiintyy kohinaa  $\mathbf{v}(t)$ , niin prosessille kirjoittaa tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_u\mathbf{u}(t) + B_w\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{m}(t) = C_y\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Yksinkertainen valinta prosessin tilan estimoinnille on käyttää sen tilaesityksen tilanyhtälöä

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B_u\mathbf{u}(t), \quad (3.12)$$

joka ennustaisi tilan täydellisesti, jos häiriösignaaleja ei olisi ja prosessin ja tilahavaintsijan

tilojen alkuarvot olisivat samat [18, s. 316]. Prosessin alkuarvo  $x_0$  on kuitenkin tuntematon ja prosessissa esiintyy häiriösignaaleja, jolloin malli (3.14) poikkeaa todellisesta tilasta. Poikkeama voidaan laskea prosessin mittauksen  $\mathbf{m}(t)$  ja ulostulon ennustuksen  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  erotuksena

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{m}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{m}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (3.13)$$

jossa  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  on mittauksen ennustusvirhe, joka voidaan ottaa huomioon tilan ennustuksen muodostuksessa lineaarisena kombinaationa. Tällöin tilahavaintijalle saadaan tilanyhtälö

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = A\mathbf{x}_e(t) + B_u\mathbf{u}(t) + H\tilde{\mathbf{y}}(t) \quad (3.14)$$

jossa  $H_{n \times m}$  on mittauksen ennustusvirheen vahvistusmatriisi. Alkuarvovirheen eksponentiaalisesti nollaan saattava estimaattori on olemassa parin  $(A, C)$  ollessa tarkkailtava. [18, s. 316]

### 3.4 Vakiovahvistuksellinen Kalman-suodin

Vakiovahvistuksellinen Kalman-suodin on algoritmi, jota käytetään estimoimaan stokastisen prosessin tilaa kohinaisista mittauksista. Algoritmi tuottaa estimaation yhdistämällä tietoa prosessin dynamiikasta, prosessiin vaikuttavista häiriöistä ja mittauskohinasta. [10, s. 13-1] Vakiovahvistuksellisen Kalman-suotimen tilanyhtälön rakenne on sama kuin tilahavaintijalla (3.14), joten tässä luvussa käsitellään vain mittauksen ennustusvirheen vahvistusmatriisin  $H$  valintaa.

Tarkastellaan tilaesitystä (3.11). Tilanhäiriön  $\mathbf{w}(t)$  ollessa jatkuva-aikaista nolla keskiarvoista valkoista kohinaa on sen odotusarvo nolla

$$E[\mathbf{w}(t)] = 0, \quad (3.15)$$

sekä sen kovarianssimatriisi on

$$\text{cov}[\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(\tau)] = E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(\tau)^T] = S_w\delta(t - \tau), \quad (3.16)$$

jossa  $\delta(t)$  on Dirac-impulssi ja  $S_w$  on tilanhäiriön spektritiheys, joka on symmetrinen ja positiivisesti definiitti matriisi. [10, s. 13-2] Vastaavilla oletuksilla mittaushäiriön kovarianssimatriisi on

$$\text{cov}[\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(\tau)] = E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = S_v\delta(t - \tau), \quad (3.17)$$

jossa  $S_v$  symmetrinen positiivisesti definiitti mittaushäiriön spektritiheysmatriisi. Mittaushäiriön oletetaan myös olevan riippumaton tilanhäiriöstä, jolloin niiden välinen kovarianssimatriisi on

$$\text{cov}[\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(\tau)] = E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = O, \quad (3.18)$$

jossa  $O$  on nollamatriisi.

Prosessille (3.11) vakiovahvistuksellisen Kalman-suotimen kustannusfunktio voidaan määrittellä tilamuuttujien ennustusvirheiden varianssien summana

$$J_{Kalman} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)] = \text{tr}[\lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)]] = \text{tr}(X_e), \quad (3.19)$$

jossa  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  on tilan ennustusvirhe ja  $X_e$  on tilan stationaaritilan ennustusvirheen symmetrinen positiivisesti semidefiniitti kovarianssimatriisi. [10, s. 13-4, 13-6, 13-7] Kustannusfunktion (3.19) minimoiva mittauksen ennustusvirheen vahvistusmatriisi  $H$  on tällöin

$$H = X_e C^T S_v^{-1}. \quad (3.20)$$

Kovarianssimatriisi  $X_e$  saadaan ratkaisemalla Kalman-suotimen algebrallinen Riccati-yhtälö

$$AX_e + X_e A^T + B_w S_w B_w^T - X_e C^T S_v^T C X_e = 0. \quad (3.21)$$

Ratkaisu  $X_e$  on yksikäsitteinen. [10, s. 13-7]

### 3.5 LQG-säädin

LQG-säädin on estimaattoripohjainen tilatakaisinkytketty säädin, jossa estimaattorina on Kalman-suodin sekä tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisi valitaan LQ-menetelmällä [5, s. 278-279]. LQG-säätimen suunnittelu voidaan jakaa kahteen osaan, Kalman-suotimen suunnitteluun sekä LQ-optimaalisen tilatakaisinkytketyn säätimen suunnitteluun [9, s. 243]. Tätä teoreemaa kutsutaan stokastiseksi separaatioteoreemaksi. LQG-säätimen lohko-kaavio esitys on esitetty kuvassa 3.1.

LQG-säädin saadaan soveltamalla tilatakaisinkytkennän säätölakia Kalman-suotimen muodostamalle tilan estimaatille. LQG-säätimen tilaesitys voidaan muodostaa yhdistämällä tilahavaintajan tilaesitys (3.14), sekä tilatakaisinkytkennän säätölaki (3.2). LQG-säätimen tilaesitys on tällöin muotoa

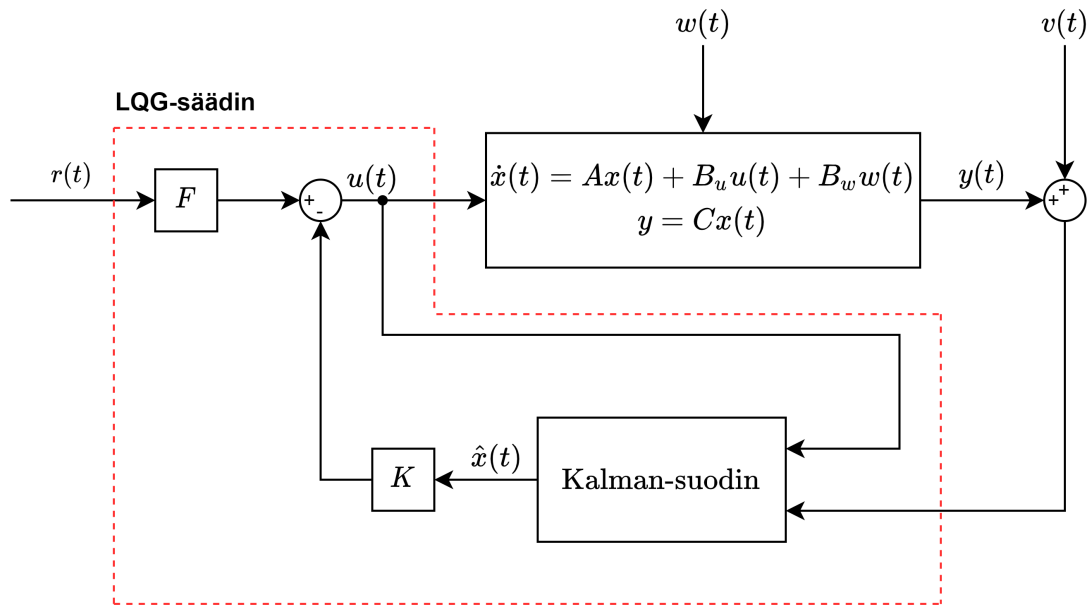
$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= A\hat{\mathbf{x}}(t) + B_u \mathbf{u}(t) + H\tilde{\mathbf{y}} \\ \mathbf{u}(t) &= -K\hat{\mathbf{x}}(t) + F\mathbf{r}(t) \end{cases}, \quad (3.22)$$

jossa tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisi  $K$  saadaan yhtälöstä (3.8) ja ulostulon ennustusvirheen vahvistusmatriisi  $H$  yhtälöstä (3.20) [9, s. 242]. Säätimelle voidaan myös muodostaa tilaesitys, jonka sisäänmenona on erosuure  $e(t)$ . Jos asetusarvovektori  $\mathbf{r}(t)$

oletetaan nollavektoriksi, niin säätimelle voidaan kirjoittaa tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - B_u K - LC)\hat{x}(t) + (-H)y(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases}, \quad (3.23)$$

joka on käytännöllinen suljetun systeemin stabiiliuden robustiuden tarkastelussa.



**Kuva 3.1.** LQG säädetyn prosessin lohkokaaavioesitys.

## 4. TAKAISINKYTKETYN MIMO-SÄÄTÖPIIRIN ROBUSTI STABIILIUS

Tässä luvussa käsitellään MIMO-säätöpiirin (eng. *Multiple-Input Multiple-Output*) stabiiliutta. Aluksi esitellään siirtofunktio­matriisi, jonka jälkeen tarkastellaan takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin sisäistä stabiiliutta ja karakteristista yhtälöä. Seuraavaksi käsitellään takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin kanavakohtaisia ja kaikki kanavat huomioivia vahvistusvaihe- ja viivevaroja, sekä tarkastellaan stabiiliuden robustiuden työkaluja. Lopussa on katsaus MatLab-laskentaohjelmiston Robust Control Toolboxin tarjoamiin mahdollisuuksiin monimuuttujasäädön stabiiliuden robustiuden tarkasteluun.

### 4.1 LTI-tilamallin siirtofunktio­matriisi

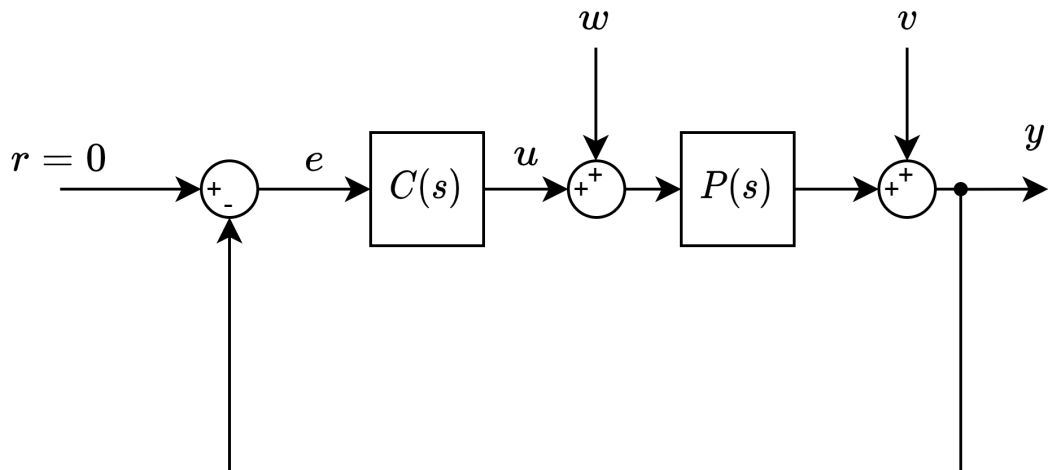
LTI-systeemien analyysissä ja synteesissä hyödynnetään usein siirtofunktioita. Siirtofunktiot kuvaavat systeemiä Laplace-tasossa, mikä mahdollistaa monia tehokkaita taajuusvasteen analyysikeinoja monitahoisten systeemien analysointiin. Analysointiin voidaan käyttää muunmuassa Boden-, Nyquist- ja Nichols-diagrammeja. Jatkuva-aikaisen LTI-tilaesityksen siirtofunktion lauseke on

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (4.1)$$

MIMOLTI-tilaesityksen siirtofunktio  $G(s)$  on matriisi dimensioltaan  $m \times p$ , jossa elementti  $G_{kj}(s)$  mallintaa sisäänmenon  $u_j$  vaikutusta ulostuloon  $y_k$  [13, s. 37 & 38]. Matriisia  $G(s)$  kutsutaan siirtofunktio­matriisiksi. Tilaesityksen siirtofunktio­matriisissa esiintyy supistuksia, jos koko tilavektori ei ole ohjattavissa ja/tai tarkkailtavissa [14, s. 21]. Joissakin tapauksissa supistukset saattavat kätkeä stabiiliusongelmia.

### 4.2 Takaisinkytketyn säätöpiirin stabiilius ja karakteristinen yhtälö

Stabiilius on yksi monen säätöpiirin perusvaatimuksista [9, s. 18]. Stabiiliudelle on olemassa useita määritelmiä. Esimerkiksi systeemin voidaan sanoa olevan BIBO-stabiili (eng. *Bounded-Input Bounded-Output*), jos sen ulostulo jokaiseen rajoitettuun sisään­me­noon on myös rajoitettu [8, s. 208]. Tällä määritelmällä systeemin jokin sisäinenmuuttuja voi kuitenkin olla rajaton. Yleisesti takaisinkytketyn systeemin sanotaan olevan stabiili kun se on *sisäisesti stabiili*. Takaisinkytketty systeemi on sisäisesti stabiili, jos sen kaikki mah-



**Kuva 4.1.** Takaisinkytketty säätöpiiri, jossa  $P(s)_{m \times p}$  on prosessin siirtofunktio­matriisi ja  $C(s)_{m \times p}$  on säätimen siirtofunktio­matriisi.  $w$  on prosessihäiriö ja  $v$  on mittaushäiriö.

dolliset sisäänmeno-ulostulo -siirtofunktiot ovat stabiileja. [19, s. 12-5] Kuvassa 4.1 esitetylle suljetulle systeemille voidaan johtaa yhdeksän sisäänmeno-ulostulo siirtofunktiota, joista jotkin ovat keskenään samoja tai vastakkaismerkkisiä. Suljetun systeemin sisäisen stabiiliuuden takaamiseksi riittää tarkistaa siirtofunktioiden

$$S(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1}, \quad (4.2)$$

$$G_{wy}(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1}P(s), \quad (4.3)$$

$$G_{wu}(s) = -[I + C(s)P(s)]^{-1}, \quad (4.4)$$

$$G_{vu}(s) = -[I + C(s)P(s)]^{-1}C(s), \quad (4.5)$$

$$T(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1}P(s)C(s), \quad (4.6)$$

stabiilius.. Siirtofunktio­matriisi  $S(s)$  on herkkyys­funk­tio,  $G_{wy}(s)$  on siirtofunktio­matriisi tilanhäiriöstä ulostuloon,  $G_{wu}(s)$  on siirtofunktio­matriisi tilanhäiriöstä ohjaukseen,  $G_{vu}(s)$  on siirtofunktio­matriisi mittaushäiriöstä ohjaukseen ja  $T(s)$  on komplementaarinen herkkyys­funk­tio. Prosessin  $P(s)$  ja säätimen  $C(s)$  ollessa stabiileja vältytään mahdollisilta epästabiilien osien kumoutumisilta säätimen ja prosessin sarjaankytkennässä. Tällöin näiden viiden siirtofunktio­matriisin stabiiliuden tutkimisen sijasta riittää tutkia vain yhtä esitetyistä siirtofunktio­matriiseista.

SISOLTI-systeemin (eng. *Single-Input Single-Output*) stabiiliutta voidaan tutkia sen käytämällä sen karakteristista yhtälöä. Karakteristinen yhtälö saadaan asettamalla rationaalisen siirtofunktion nimittäjä eli paluero nolaksi [6, s. 38]. MIMO-systeemeille karakteristinen yhtälö voidaan yleistää käyttämällä determinanttia. Kuvan 4.1 säätöpiirille karakte-

ristinen yhtälö on tällöin

$$\det[I + L(s)] = 0, \quad (4.7)$$

$$L(s) = P(s)C(s), \quad (4.8)$$

jossa  $L(s)$  on avoimen systeemin siirtofunktio matriisi, joka voidaan muodostaa siirtofunktioiden sarjaankytkennän säännöllä. Riittävä ja välttämätön ehto jatkuva-aikaisen suljetun systeemin sisäiselle stabiiliudelle on, että kaikkien karakteristisen yhtälön ratkaisujen reaalisosa on negatiivinen  $Re[s] < 0$  [13, s. 57]. Suljetun systeemin navat lukeutuvar karakteristisen yhtälön ratkaisuihin.

Karakteristinen yhtälö (4.7) toteutuu, jos ja vain jos on olemassa nollasta poikkeava vektori  $v$ , jolle

$$L(s)v = -1v. \quad (4.9)$$

Tällöin avoimella systeemillä on ominaisarvo pisteessä  $-1$  ja  $v$  on kyseiseen ominaisarvoon liittyvä matriisin  $L(s)$  ominaisvektori, kun  $s$  on jokin suljetun systeemin napa. Suljetun systeemin navoille ominaisarvoehto voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\lambda_i\{L(s)\} = -1, \quad (4.10)$$

jossa  $\lambda_i\{L(s)\}$  on jokin matriisin  $L(s)$  ominaisarvo. Yleisesti funktioita  $\lambda_i\{L(s)\}$  jotka toteuttavat karakteristisen yhtälön kutsutaan matriisin  $L(s)$  ominaisfunktioiksi [14, s. 29]. Ominaisfunktiota käyttäen karakteristinen yhtälö (4.7) voidaan kirjoittaa

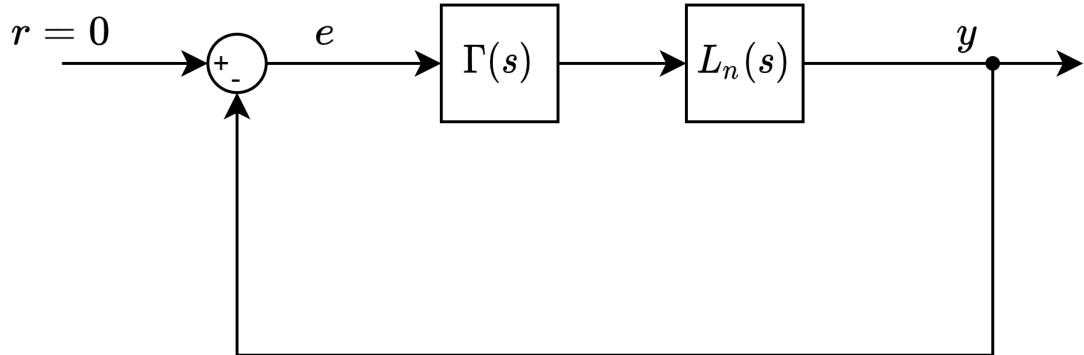
$$\det[l(s)I + L(s)] = 0, \quad (4.11)$$

jossa  $l(s)$  on matriisin  $L(s)$  ominaisfunktio. Tällöin kompleksimuuttujan  $s$  vektoriarvoista funktiota  $v(s)$  kutsutaan ominaissuunnaksi [14, s. 87]. Avoimen systeemin taajuusvasteen ominaisfunktioita ja ominaissuuntia voidaan käyttää tutkittaessa suljetun systeemin ominaisuuksia ja stabiiliutta [14, s. 86]. Ominaisfunktiot ovat myös hyödyllisiä MIMO-säätöpiirin stabiiliuden robustiutta tutkittaessa.

### 4.3 Takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin kanavakohtaiset vahvistus-,vaihe- ja viivevarat

Käytännön säätöpiireille sisäisen stabiiliuden määritelmällinen täyttyminen ei yleisesti ole riittävä vaatimus [19, s. 10-15]. Koska käytännön systeemejä ei aina tunneta tarkasti ja niiden ominaisuudet voivat muuttua ajan myötä, systeemien matemaattiset mallit saattavat kuvata todellisia systeemejä epätarkasti [9, s. 152]. Epätarkalla mallilla suunniteltu säätöpiiriin dynamiikka poikkeaa tällöin säätöpiirin todellisesta dynamiikasta. Tämä vaikuttaa sen stabiiliuteen ja suorituskykyyn. Suunnitellun säätöpiirin kykyä sietää mallivir-

heitä menettämättä stabiiliutta kuvataan robustilla stabiiliudella. Säättöpiirin robustiuden hyvyttä voidaan kuvata tunnusluvuilla kuten *vahvistusvara*  $g_m$ , *vaihevara*  $\phi_m$  ja *viivevara*  $d_m$  [11, s. 78]. Varat ovat hyvin paljon käytettyjä robustiuden mittoja klassisessa säätöteoriassa, sillä SISO-systeemille ne voidaan esittää usealla eri taajuusvasteen graafisella esityksellä. Vahvistus-, vaihe- ja viivevarat voidaan myös yleistää MIMO-systeemille niin takaisinkytkentäkanava kohtaisesti, sekä ottaen huomioon kaikki takaisinkytkentäkanavat. [11, s. 79–80]



**Kuva 4.2.** Takaisinkytketty säätöpiiri, jossa  $L_n(s)_{p \times p}$  on nimellisen avoimen systeemin siirtofunktio­matriisi, joka sisältää säätimen, toimilaitteet, prosessin sekä mittaus­systemit.  $\Gamma_{p \times p}$  on epävarmuus­komponentin siirtofunktio­matriisi.

Suorin SISO-systeemin varojen yleistys MIMO-systeemille on tarkastella takaisinkytkentäkanavia riippumattomina toisistaan. Tällöin tarkasteltavaa kanavaa voidaan kohdella SISO-systeeminä ja stabiiliuden analysointiin voidaan käyttää työkaluja kuten Boden- tai Nyquist-diagrammi. Tarkastellaan kuvassa 4.2 esitettyä takaisinkytkettyä säätöpiiriä, jonka avoimen systeemin

$$L(s) = L_n(s)\Gamma(s), \quad (4.12)$$

oletetaan olevan stabiili kaikilla epävarmuuksilla. Epävarmuus rajoitetaan olemaan muotoa

$$\Gamma(s) = \text{diag}(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_p(s)), \quad (4.13)$$

jossa  $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_p(s)$  ovat kanavakohtaiset epävarmuudet. Kanavan numero  $k$  epävarmuuden vaikutusta säätöpiirin stabiiliuden robustiuteen voidaan tutkia asettamalla

$$\gamma_i(s) = 1 \quad \forall i \neq k, \quad (4.14)$$

jolloin stabiiliutta voidaan tutkia skalaarisen epävarmuuden  $\gamma_k(s)$  suhteen [11, s. 80].

Kahden sisäänmenon ja kahden ulostulon tapauksessa epävarmuusmatriisi on  $2 \times 2$  diagonaalimatriisi

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$



Kanavan yksi vaikutusta säätöpiirin stabiiliuteen tutkittaessa asetetaan kanavan kaksi epävarmuus nimelliseksi vahvistukseksi  $\gamma_2(s) = 1$ . Kuvan 4.2 säätöpiirille voidaan tällöin kirjoittaa muotoa (4.7) oleva karakteristinen yhtälö

$$\det[I + L_n(s)\Gamma(s)] = 0. \quad (4.16)$$

Kanavaa yksi tutkittaessa karakteristinen yhtälö (4.16) voidaan johtaa epävarmuuden  $\gamma_1(s)$  suhteen lineaariseen muotoon laskemalla determinantti. Karakteristinen yhtälö on tällöin

$$1 + \gamma_1(s)G(s) = 0, \quad (4.17)$$

jossa

$$G(s) = \frac{L_{n11} + L_{n11}L_{n22} - L_{n12}L_{n21}}{L_{n22} + 1}. \quad (4.18)$$

Karakteristinen yhtälö (4.17) on rakenteeltaan negatiivisesti takaisinkytketyn SISO-systeemin karakteristinen yhtälö. Kriittisesti stabiilin suljetun systeemin tuottavan epävarmuuden  $\gamma_1(s)$  vahvistukselle, vaihesiirrolle ja viiveelle voidaan tällöin laskea laskemalla SISO-säätöpiirin robustiuden varoja takaisinkytketyille SISO-systeemille, jonka karakteristinen yhtälö on

$$1 + G(s) = 0. \quad (4.19)$$

Tutkittaessa epävarmuuden  $\gamma_1(s)$  vaikutusta säätöpiirin stabiiliuteen voidaan käyttää useita avoimen systeemin taajuusvasteen analysointityökaluja kuten Nyquist- ja Boden-diagrammeja tai juuriuraa. Kanavaa kaksi tutkittaessa asettamalla  $\gamma_1(s) = 1$  päädytään vastaaviin tuloksiin ja siirtofunktioksi  $G(s)$  saadaan

$$G_2(s) = \frac{L_{n22} + L_{n11}L_{n22} - L_{n12}L_{n21}}{L_{n11} + 1}. \quad (4.20)$$

Yhtälöiden (4.18) ja (4.20) johto symbolisella tietokone laskennalla on esitetty liitteessä C.

#### 4.4 Takaisinkytketyn MIMO-säätöpiirin vahvistus-, vaihe- ja viivevarat

Kanavakohtaista robustiutta tutkittaessa epävarmuuksien oletettiin ilmenevän ainoastaan yhdessä kanavassa kerrallaan. Todellisuudessa epävarmuudet eivät todennäköisesti rajoitu vaan yhteen kanavaan, jolloin halutaan tutkia yhtäaikaisten epävarmuuksien vaikutusta säätöpiirin stabiiliuteen. [11, s. 80]

Tarkastellaan kuvassa 4.2 esitettyä takaisinkytkettyä säätöpiiriä, jonka avoimen systeemin siirtofunktio matriisin oletetaan olevan stabiili kaikilla epävarmuuksilla kun epävarmuuselementti  $\Gamma(s)$  on muotoa 4.13. Jos kaikki kanavakohtaiset epävarmuuskomponentit

ovat keskenään yhtä suuria vakioita

$$\gamma_i = \gamma_k, \quad \forall i, k, \quad \gamma_i, \gamma_k \in \mathbb{C}, \quad (4.21)$$

karakteristisesta yhtälöstä (4.11) voidaan johtaa yhtälö

$$\gamma l_n(s) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad l_n(s) = -\frac{1}{\gamma}, \quad (4.22)$$

jossa  $l_n(s)$  on nimellisen avoimen systeemin ominaisfunktio [12, s. 418]. Epävarmuuskomponentin  $\gamma$  ollessa reaalinen vakiovahvistus  $k \in \mathbb{R}$ , voidaan vahvistuksille laskea kriittisen stabiiliuden tuottava arvo hyödyntämällä avoimen systeemin taajuusvastetta. Etсимällä nimellisen avoimen systeemin taajuusvasteen ominaisfunktioiden suurin negatiivinen puhtaasti reaalinen arvo välillä  $(-1, 0]$ , joilla ominaisfunktioiden vaihekulma on  $-180^\circ$ , ja laskemalla tämän arvon käänteisluku saadaan vahvistukselle  $k$  yläraja [12, s. 419 & 421]. Vahvistuksen  $k$  kriittistä arvoa voidaan käyttää MIMO-säätöpiirin vahvistusvarana  $g_m$ . Vahvistusvaran suuruisella vahvistuksella yhtälö (4.22) toteutuu jollakin ominaisfunktioilla jossain imaginääriakselin eli stabiiliusrajan pisteessä. Jokainen matriisin  $L_n(j\omega)$ ,  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  ominaisfunktio  $l(j\omega)$  voi tuottaa kandidaatin vahvistuksen kriittiselle arvolle. Yleisesti suljetulla systeemillä sanotaan olevan ylävahvistusvarakerroin  $k_u \in \mathbb{R}$  riippumattomasti jokaisessa kanavassa, jos suljetun systeemin stabiilius säilyy kaikilla epävarmuuksilla

$$\operatorname{Re}[\gamma_i(j\omega)] < k_u, \quad 1 < k_u, \quad (4.23)$$

sekä alavahvistusvarakerroin  $k_l \in \mathbb{R}$  kun stabiilius säilyy epävarmuuksilla

$$\operatorname{Re}[\gamma_i(j\omega)] < k_l \leq 1. \quad (4.24)$$

Tällöin vahvistusta voidaan vähentää tai kasvattaa kertoimilla  $k_l, k_u$  menettämättä suljetun systeemin stabiiliutta. [11, s. 80]

Jos epävarmuuden  $\Gamma(s)$  diagonaaliset elementit ovat yhtä suuria ja muotoa

$$\gamma = e^{-d \cdot s}, \quad d \geq 0, \quad d \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

on yhtälö (4.22) tällöin muotoa

$$e^{d \cdot s} l_n(s) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad l_n(s) = -\frac{1}{e^{d \cdot s}}. \quad (4.26)$$

Parametrille  $d$  voidaan määrittää suljetulle systeemille kriittisen stabiiliuden tuottava arvo. Kriittinen arvo voidaan määrittää määrittämällä nimellisen avoimen systeemin taajuus-

vasteen ominaisfunktioiden arvot, joilla

$$|l_n(j\omega_{gc})| = 1, \quad (4.27)$$

jossa taajuutta  $\omega_{gc}$  kutsutaan vahvistuksen ylimenokulmataajuudeksi. Kuten vahvistuksen kriittistä arvoa tarkasteltaessa, jokainen taajuusvasteen ominaisfunktio voi täyttää ehdon ja tuottaa näin kandidaatin. Kriittiselle arvolle  $d$  kandidaatteja ovat arvot

$$d = \frac{\pi + \arg\{l_n(j\omega_{gc})\}}{\omega_{gc}}. \quad (4.28)$$

Kriittisen arvon kandidaateista valitaan pienin positiivinen arvo. Tätä kriittistä arvoa voidaan käyttää MIMO-systeemin viivevarana  $d_m = d$ . Viivevaran suuruisella arvolla kanavakohtaisien epävarmuuksien ollessa muotoa (4.25) ehto (4.26) toteutuu, jollakin nimellisen avoimen systeemin taajuusvasteen ominaisfunktioilla stabiiliusrajan pisteessä  $j\omega_{gc}$  ja suljetulla systeemillä on napa stabiiliusalueen ulkopuolella. Viivevarasta voidaan johdattaa vaihekulmalle kriittinen arvo, jota voidaan käyttää MIMO-systeemin vaihevarana  $\phi_m$  kaavalla

$$\phi_m = d_m \omega_{gc}. \quad (4.29)$$

Yleisesti suljetulla systeemillä voidaan sanoa olevan vaihevara  $\phi_m$  riippumattomasti jokaisessa takaisinkytkentäkanavassa, jos suljetun systeemin stabiilius säilyy epävarmuuksilla

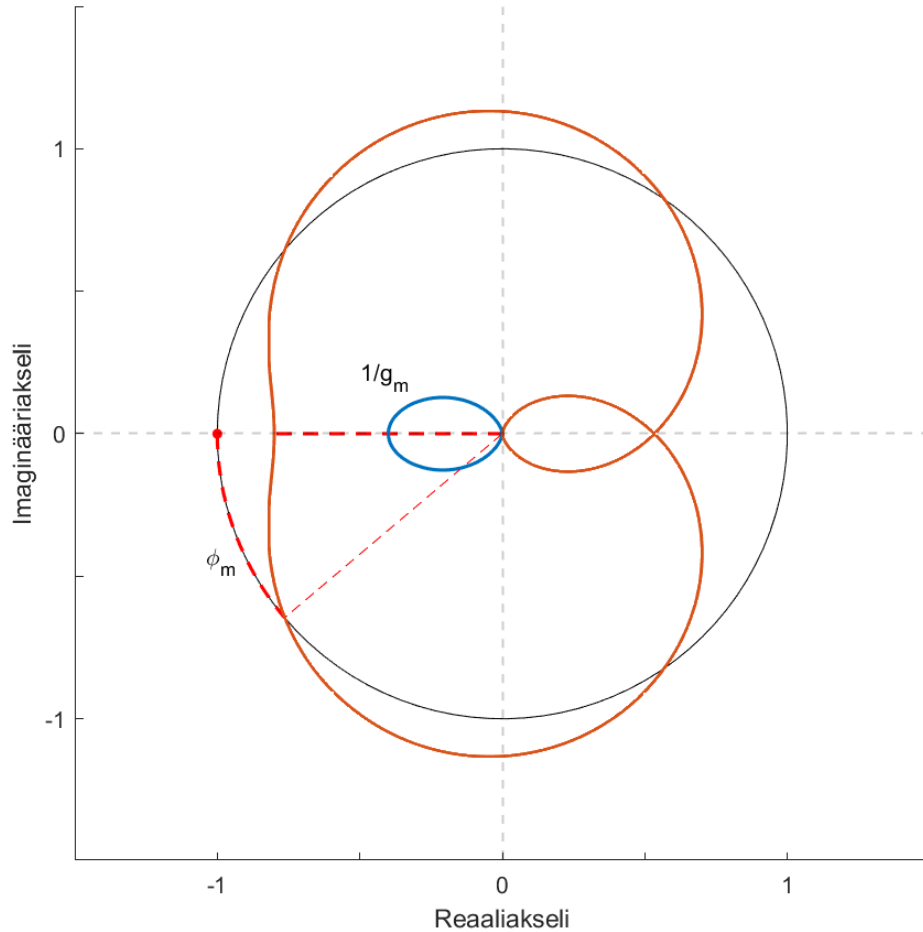
$$|\phi_i(\omega)| < \phi_m, \quad \gamma_i = e^{\phi_i(\omega)}, \quad (4.30)$$

jossa  $\phi_m$  vaihevara on radiaaneina ja epävarmuus  $\Gamma(s)$  on muotoa (4.13) [11, s. 80].

MIMO-systeemin vaihe- ja viivevarat voidaan myös määrittää graafisesti käyttämällä ominaisuraa, joksi kutsutaan avoimen systeemin taajuusvasteen kaikkien ominaisfunktioiden yhteistä kuvaaja imaginääritasossa. Ominaisura voidaan mieltää osittain Nyquist-kuvaajan yleistykseenä MIMO-systeemille ja siirtofunktioatriisin dimension ollessa yksi ominaisura onkin Nyquist-diagrammi [14, s. 87]. Kuvassa 4.3 on esitetty ominaisura ja vahvistus- ja viivevarojen graafiset tulkinnat esimerkki järjestelmälle. Ominaisuran piirtoon käytetty työkalu on liitteessä B.

## 4.5 Stabiiliuden robustiuden tutkiminen Robust Control Toolboxilla

Robust Control Toolbox on MatLab-laskentaohjelmiston lisäosan Control System Toolbox laajennus, joka tarjoaa laskentatyökaluja ja -lohkoja malliepävarmuuksia sisältävien säätöpiirien robustiuden ja suorituskyvyn analysointiin ja säädön suunnitteluun. Kuten edellä todettiin, säätöpiirin suunnitteluun käytettäviä malleja ei aina tunneta tarkasti, mikä johdattaa malliepävarmuuksiin. Robustiuden tutkiminen on silloin mielekäästä. Edellä esitettiin



**Kuva 4.3.** Ominaisura avoimen systeemin siirtofunktio­matriisille

$$L(s) = \frac{1}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}.$$

Siirtofunktio­matriisin toinen ominais­funktio sinisellä ja toinen ruskealla, taajuuksilla  $-\infty < \omega < \infty$ . Vaihevara  $\phi_m = 40.2^\circ$  on suurimman negatiivisen vaihekulman, jossa ominaisura leikkaa yksikköympyrän ja vaihekulman  $180^\circ$  summa. Vahvistusvarakerroin  $g_m = 1.25$  on ominaisuran kriittistä pistettä lähimpänä olevan reaaliakselin pisteen itseisarvon käänteisluku. Kuvan suljettu systeemi olisi stabiili myös vahvistuksille  $2.5 < k < \infty$ , mikä voidaan todeta Nyquistin kriteeristön perusteella. [12, s.421] Tässä työssä tutkitaan kuitenkin vain pienimpiä poikkeamia nimellisestä vahvistuksesta, jotka saattavat suljetun systeemin epästabiiliksi. Kuvan esimerkki muokattu lähteestä [12].

myös eräs keino MIMO-säätöpiirin stabiiliuden robustiuden tutkimiseen käyttäen MIMO-säätöpiirin vahvistus-, vaihe- ja viivevaroja sekä kanavakohtaisia varoja. Heikoista kanavakohtaisista varoista voidaan todeta säätöpiirin heikko robustius, mutta vahvoista kanavakohtaisista varoista ei voida todeta säätöpiirin olevan robustinen [2, s. 2-21]. Robust Control Toolbox tarjoaakin stabiiliuden robustiuden tutkimiseen kehittyneempiä keinoja kuten kiekkopohjaiset vahvistus- ja vaihevarat. Kiekkopohjaiset vahvistus- ja vaihevarat sekä *kiekkovara* perustuvat imaginääritasossa ympyrän muotoisiin epävarmuuksiin. Robust Control Toolboxilla kiekkoepävarmuuksia voidaan mallintaa säätöpiirin avoimen systeemin kompleksisina kerrannais-elementteinä. Kiekkopohjaisilla varoilla voidaan ottaa huomioon MIMO-systeemin kaikki kanavat ja niiden väliset vuorovaikutukset, joten niillä saadaan parempi käsitys säätöpiirin stabiiliuudesta kuin kanavakohtaisilla vahvistus- ja vaihevaroilla.[4, s. 2-2]

Robust Control Toolboxissa kiekkopohjainen epävarmuuselementti  $\gamma$  voidaan luoda työkalulla `umargin`, joka voidaan lisätä avoimen systeemin malliin sarjaan kytkentänä [3, s. 1-529]. Kiekkoepävarmuus voidaan parametroida skalaariparametreilla,  $\alpha$ ,  $\sigma$  ja  $\xi$ . SISO-systeemille kiekkoepävarmuus on

$$\gamma = \frac{1 + \alpha[(1 - \sigma)/2]\xi}{1 - \alpha[(1 + \sigma)/2]\xi}, \quad (4.31)$$

jossa

$$\xi \in \mathbb{C}, \quad |\xi| < 1 \quad (4.32)$$

ja parametri  $\alpha \in \mathbb{R}$  määrittää vaiheen ja vahvistuksen variaation määrän, eli epävarmuuskiekon suuruuden. Reaaliakselin suuntainen poikkeama nimellisen vahvistuksen pisteestä voidaan määrittää parametrilla  $\sigma \in \mathbb{R}$ . [4, s. 2-3 – 2-4] Kiekkoepävarmuuden graafinen esitys on esitetty kuvassa 4.4.

Kiekkoepävarmuuksia voidaan soveltaa sekä SISO- että MIMO-systeemeille. MIMO-systeemin tapauksessa kiekkoepävarmuus (4.31) yleistyy muotoon

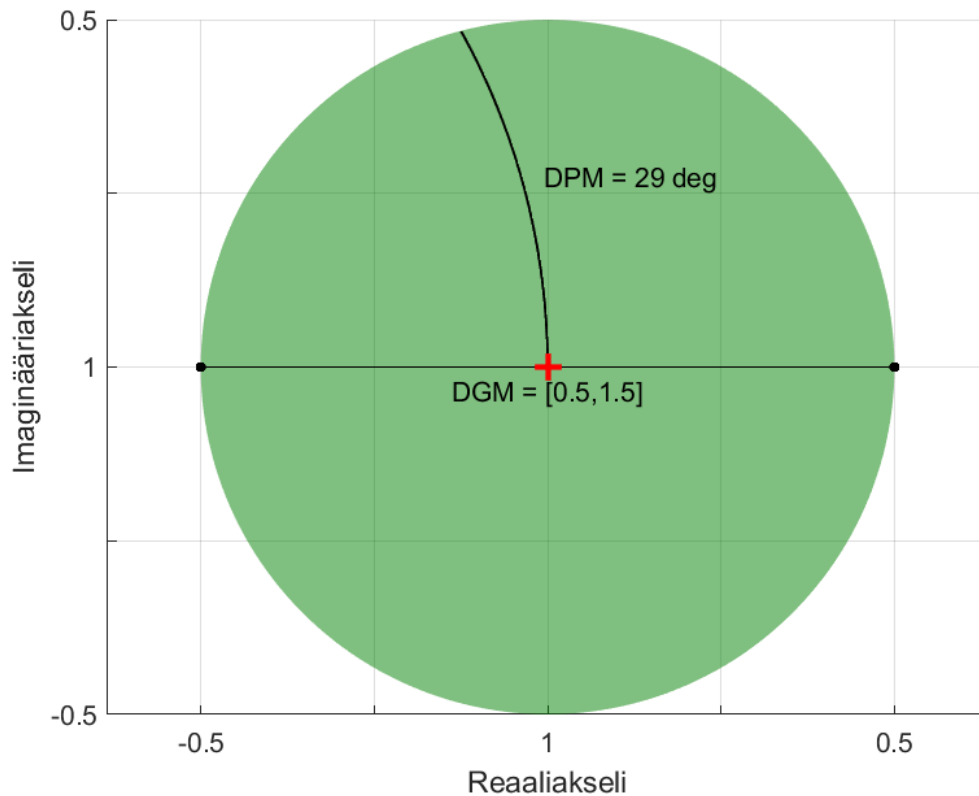
$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \quad (4.33)$$

jossa  $p$  on avoimen systeemin sisäänmenojen/ulostulojen lukumäärä ja jokaisen kanavan epävarmuuselementti  $\gamma_i$  on muotoa

$$\gamma_i = \frac{1 + \alpha[(1 - \sigma)/2]\xi_i}{1 - \alpha[(1 + \sigma)/2]\xi_i}. \quad (4.34)$$

[4, s. 2-10]

Kiekkovahvistusvara *DGM* ja kiekkovaihevara *DPM*, voidaan johtaa jokaiselle  $\alpha$ ,  $\sigma$  parametrintointi parille. Kiekkovahvistusvarat ovat kiekkoepävarmuuden ja reaaliakselin leikkauksen maksimi ja minimiarvot. Kiekkovaihevara on reaaliakselin ja kiekon origon kaut-



**Kuva 4.4.** Kiekkopävarmuuden kuvaaja imaginääritasossa. Piste  $1 + j0$  on epävarmuuden nimellinen arvo, jolloin vaihe- ja vahvistus variaatiot ovat nolliä. Kuvaajassa kiekkovahvistusvarat on reaaliakselin välin  $[0.5, 1.5]$  minimi- ja maksimiarvot, jotka sijoittuvat kiekkopävarmuuden sisään. Kiekkovaihevara on reaaliakselin ja origon läpäisevän kiekon tangenttisuoran välinen kulma, joka on kuvassa  $\pm 29^\circ$ .

ta kulkevan tangenttisuoran välinen kulma. Kiekkopävarmuus voidaan tällöin määrittää valitsemalla pari  $\alpha, \sigma$  tai valitsemalla kiekkovahvistusvarat  $DGM = [g_{min}, g_{max}]$ . [4, s. 2-4] Varioimalla epävarmuuskiekon poikkeamaa reaaliakselilla nimellisen vahvistuksen pisteestä, voidaan tutkia systeemin epäsymmetristä herkkyyttä vahvistuksen nosto- ja laskuvaroihin [3, s. 1-58].

Kiekkopohjaisten vahvistus- ja vaihevarojen laskemiseen Robust Control Toolboxista löytyy työkalu `diskmargin`, jolla voidaan selvittää suurin mahdollinen kiekkopävarmuus, jonka suljettu systeemi sietää menettämättä stabiiliutta [2, s. 2-5]. Työkalulla voidaan laskea kiekkovahvistus- ja kiekkovaihevaroja sekä SISO että MIMO-systeemeille. Laskennassa epävarmuudet voidaan sijoittaa prosessin sisäänmenoon tai ulostuloon [3, s. 1-60]. `diskmargin` ratkaisee suurimman mahdollisimman arvon parametrille  $\alpha$ , valitulla poikkeamalla  $\sigma$ . MIMO-systeemin tapauksessa `diskmargin` ratkaisee kanavakohtaiset arvot  $\alpha_i$  yksitellen muiden silmukoiden ollen suljettuina asettamalla

$$\xi_i = 0, \quad (4.35)$$

kaikille muille kuin tutkittavalle silmukalle [4, s. 2-10][3, s. 1-54]. MIMO-systeemille `diskmargin` ratkaisee myös kaikki takaisinkytkentäkanavat huomioivat kiekkopohjaiset varat. Kiekkopohjaiset varat voidaan siis nähdä edellä esitettyjen MIMO-systeemin vaihe- ja vahvistusvarojen yleistyksenä, jossa epävarmuus voi sisältää sekä vahvistuksen että vaihesiirron tuottavan elementin.

## 5. LQG-REGULOIDUN ECMO-LAITTEISTON ROBUSTI STABIILIUUS

Tässä luvussa tutkitaan ECMO-laitteiston säätöpiirin stabiiliuden robustiutta soveltamalla luvussa 4 esitettyä taajuusvasteeseen pohjautuvaa tapaa robustiuden tutkimiseen, kun ECMO-laitteiston säätimenä käytetään kappaleessa 3 esiteltyä LQG-säädintä. Ensimmäisenä suunnitellaan LQG-säädin ECMO-järjestelmälle, jonka jälkeen mallinnetaan säätöpiirin epävarmuuksia. Seuraavaksi tutkitaan säätöpiirin robustisuutta ja viimeisenä tutkitaan LQG-säätimen painokertoimien  $Q$  ja  $R$  vaikutusta säätöpiirin stabiiliuden robustiuteen.

### 5.1 ECMO:n LQG-säädin

Kappaleessa 2 esiteltiin Smithin ja Porumamillan [7] käyttämä LTI-tilaesitys ECMO-laitteiston hapettimelle. ECMO:n tilaesitys on sekä tarkkailtavissa että ohjattavissa, mikä voidaan todeta tarkkailtavuuden testimatriisin  $W_t$  ja ohjattavuuden testimatriisin  $W_o$  avulla. Smith ja Porumamilla ovat myös esittäneet parametrisoinnin tilanhäiriön ja mittaushäiriön spektritiheyksille. Tilan- ja mittaushäiriön spektritiheydet ovat

$$S_w = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad S_v = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

LQG-säätimen suunnittelussa Smith ja Porumamilla käyttivät painokerroinmatriiseja

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

joista  $R$  on positiivisesti definiitti matriisi ja  $Q$  positiivisesti semidefiniitti matriisi. He eivät kuitenkaan ole selittäneet miten valintoihin ollaan päädytty. Matriisi  $R$  on diagonaalinen matriisi, jonka diagonaalielementit ovat yhtä suuria. Tällöin ohjauksia  $u_1(t)$  ja  $u_2(t)$  painotetaan yhtä paljon, mikä on intuitiivista huomioiden, että ECMO-laitteiston happi- ja



hiilidioksidipiirit ovat rakenteeltaan samankaltaisia. Tilanpainokerroinmatriisissa painote-  
taan ainoastaan hapen osapainetta  $x_3(t)$  sekä hiilidioksidin osapainetta  $x_4(t)$ , jotka ovat  
ECMO-laitteiston LTI-tilamallin ulostuloja. Parin  $(A, Q)$  voidaan myös todeta olevan tark-  
kailtava tarkkailtavuuden testimatriisin avulla. Tällöin ECMO:n tilaesitys, häiriöiden spekt-  
ritiheydet ja LQG-säätimen painokerroinmatriisit vastaavat luvussa 4 esitettyjä oletettavia  
LQG-säädölle. ECMO:lle voidaan tällöin suunnitella kustannusfunktiot (3.7), (3.19) mini-  
moiva LQG-säädin luvussa 4 esitettyllä tavalla.

LQG-säätimen vahvistusmatriisit  $K$  ja  $H$  voidaan ratkaista kappaleessa 3 esitettyllä taval-  
la hyödyntäen Riccati-yhtälöiden ratkaisuja. Takaisinkytkentävahvistukseksi ja mittauksen  
ennustusvirheen vahvistusmatriisiksi saadaan

$$K = \begin{bmatrix} 0.6961 & -0.3435 & 1.6623 & 0.0760 \\ -0.3435 & 0.1857 & -0.8248 & 0.2894 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

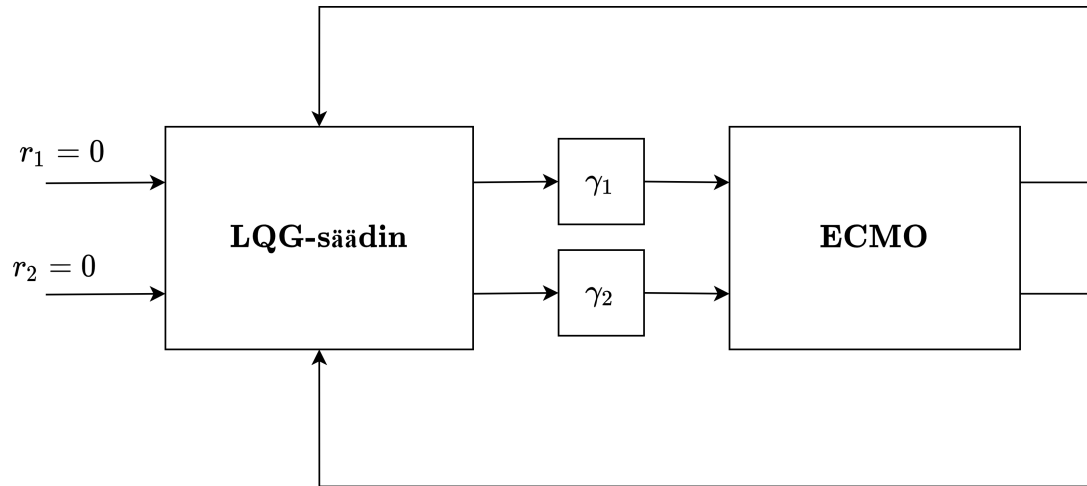
$$H^T = \begin{bmatrix} 83.8235 & -19.5802 & 28.8594 & -0.4361 \\ 33.0157 & 98.6652 & -4.3614 & 6.0346 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Optimointiongelmien algebralliset Riccati-yhtälöt (3.9) ja (3.21) sekä takaisinkytkentä-  
vahvistus  $K$  ja mittauksen ennustusvirheen vahvistusmatriisin  $H$  transpoosi ratkaistiin  
MatLab-laskentaohjelmiston `icare` työkalulla.

## 5.2 Epävarmuuksien mallintaminen

Tässä säätöpiirin robustisuutta tutkitaan lisäämällä säätöpiiriin prosessin sisäänmenoon  
dynamiikkaa, jota ei oteta huomioon säätimen suunnittelussa ja tutkimalla näiden malli-  
komponenttien vaikutusta säätöpiirin stabiiliuteen käyttämällä MIMO-säätöpiirin kanava-  
kohtaisia ja kaikki kanavat huomioivia vaihe- ja vahvistusvaroja. Tilannetta havainnollis-  
tava lohkokaavio ECMO:n tapaukselle on esitetty kuvassa 5.1, jossa malliepävarmuudet  
 $\gamma_1, \gamma_2$  ovat kanavakohtaisia epävarmuuksia.

Stabiiliusanalyysiä varten tarvittava säätöpiirin malli voidaan muodostaa säätöpiirin osa-  
mallien siirtofunktio-matriiseista. Koska säätöpiirin sisäänmenot, kuten asetusarvo ja häi-  
riösignaalit eivät vaikuta säätöpiirin stabiiliuteen, ne voidaan olettaa nolliksi stabiiliutta  
tutkittaessa [19, s. 226]. Tällöin ECMO:n LQG-säätimelle voidaan käyttää LTI-tilaesitystä  
(3.23), jonka siirtofunktio-matriisi  $C_{2 \times 2}(s)$  voidaan laskea kaavalla (4.1). Malliepävarmuu-  
det  $\gamma_1, \gamma_2$  voidaan esittää yhtälön (4.13) diagonaalisen siirtofunktio-matriisin diagonaa-  
lielementteinä. Prosessin siirtofunktio-matriisi  $P_{2 \times 2}(s)$  voidaan laskea kaavalla (4.1). Pro-  
sessimalli sisältää mitta- ja toimilaitteiden dynamiikan kuvaukset. Säätöpiirin siirtofunk-  
tio  $G_{2 \times 2}(s)$  erosuureesta  $e$  prosessin ulostuloon  $y$ , voidaan muodostaa käyttämällä siir-  
tofunktioiden sarjaankytkentä sääntöä ja negatiivisen takaisinkytkennän sääntöä [13, s.



**Kuva 5.1.** Epävarmuuksien mallintamisen havainnekuva ECMO:n säätöpiirille.

39]. Suljetun systeemin siirtofunktio­matriisi on tällöin

$$G(s) = [I + P(s)\Gamma(s)C(s)]^{-1}P(s)\Gamma(s)C(s). \quad (5.5)$$

LQG-säädin ja ECMO-prosessi ovat stabiileja, jolloin stabiiliutta tutkittaessa riittää tutkia karakteristista yhtälöä

$$\det[I + P(s)\Gamma(s)C(s)] = \det[I + C(s)P(s)\Gamma(s)] = 0, \quad (5.6)$$

johon on hyödynnetty Sylvesterin determinantti teoreemaa [17, s. 271]. Determinantis­sa siirtofunktiota  $C(s)P(s)$  voidaan merkitä avoimen systeemin nimellisenä siirtofunkti­o­matriisina  $L_n(s)$ . Tällöin tilanne vastaa kuvan 4.2 säätöpiiriä ja epävarmuuskomponen­tille  $\Gamma(s)$  voidaan laskea kappaleessa 4 käsitellyjä vahvistuksen, vaihesiirron ja viiveen kriittisiä arvoja, joilla säätöpiirin stabiilius menetettäisiin.

### 5.3 ECMO:n säätöpiirin epävarmuuksien kriittiset arvot

Taulukossa 5.1 on kappaleessa 4 esitetyt vahvistus- ja viivevarat ECMO:n säätöpiirin ka­navakohtaisille epävarmuuksille sekä yhtäaikaisille epävarmuuksille molemmissa kana­vissa. Yhtäaikaisien varojen laskemiseen käytetty työkalu on liitteessä A. Epävarmuuk­sien  $\gamma_1(s)$ ,  $\gamma_2(s)$  ollessa staattisia vahvistuksia, taulukon 5.1 mukaan säätöpiirin stabiilius säilyy, kun molempien kanavien vahvistukset ovat alle vahvistusvaran  $\gamma_1 < g_m$ ,  $\gamma_2 < g_m$ . Epävarmuuksien ollessa viiveitä stabiilius säilytetään kun molempien kanavien viiveet  $d_1, d_2$  ovat alle viivevaran  $d_1 < d_m$ ,  $d_2 < d_m$ .

Kanavakohtaisen varat laskettiin MatLab-laskentaohjelmiston allmargin työkalulla. Ku­ten mainittiin luvussa 4 kanavakohtaiset varat voivat antaa liian optimistisen kuvan säätö­piirin stabiiliuden robustiudesta, mikä voidaan nähdä myös ECMO:n kokeellisista tuloksis-

ta. Kanavan kaksi vahvistusvara on yli nelinkertainen verrattuna molemmat kanavat huomioivaan lukuun ja viivevarksi saadaan jopa ääretön viive. Kanavakohtaisia varoja voidaan kuitenkin käyttää kanavien stabiiliuden robustisuuden vertailemiseen keskenään. Taulukossa 5.1 kanava yksi on huomattavasti herkempi malliepävarmuuksille. Kanavan yksi vahvistusvara on noin kolme kertaa pienempi kuin kanavan kaksi.

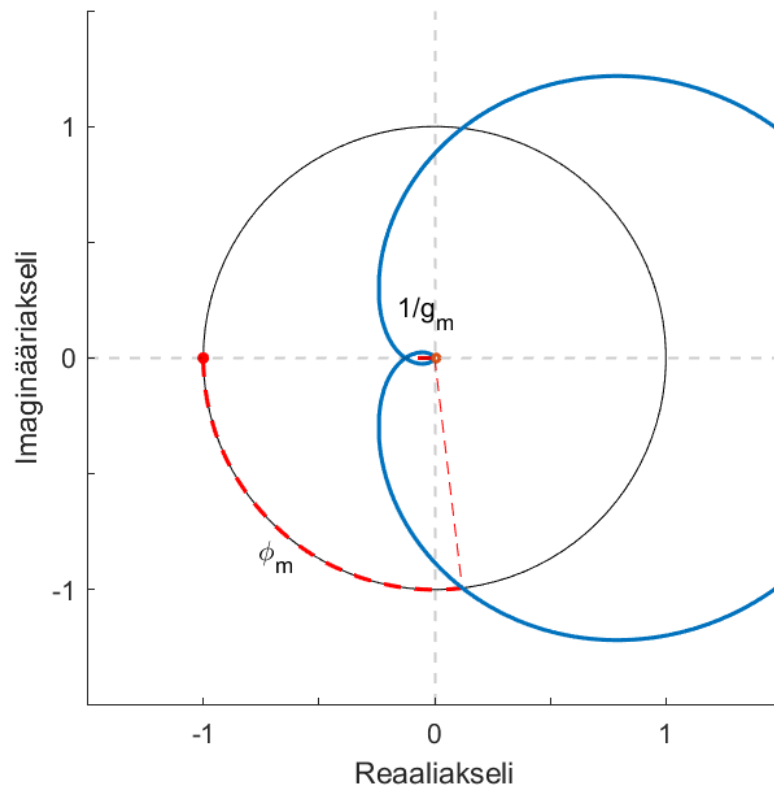
**Taulukko 5.1.** ECMO:n säätöpiirin vahvistus- ja viivevarat kanavakohtaisilla epävarmuuksille sekä yhtäaikaisille epävarmuuksille molemmissa kanavissa.

Epävarmuuskomponentti $\Gamma$	Vahvistusvara $g_m$	Viivevara $d_m$
$\begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) \end{bmatrix}$	7.94	0.23s
$\begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	9.71	0.62s
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) \end{bmatrix}$	34.62	$\infty$

Molemmissa kanavissa yhtä aikaa esiintyvien epävarmuuksien vaikutusta voidaan myös arvioida graafisesti ominaisuralla, joka on esitetty kuvassa 5.2. ECMO:lla on kaksi ominaisfunktioita, jotka yhdessä muodostavat ominaisuran. Kanavakohtaisia vahvistus- ja vaihevaroja voitaisiin vastaavasti tulkita mm. Nyquist- tai Nichols-diagrammilla.

#### 5.4 ECMO:n LQG-säätimen painokerroinmatriisien vaikutus stabiiliuden robustiuteen

LQG-säätimen painokerroinmatriisit vaikuttavat säätöpiirin stabiiliuteen. Stabiilius ja suorituskyky -vaatimusten täyttävän säätimen suunnittelu vaatii myös yleisesti painokerroinmatriisien iterointia. Taulukossa 5.2 on ECMO:n säätöpiirin kaikki kanavat huomioivia vahvistus- ja viivevaroja, kun ohjauksien painokerroinmatriisin  $R$  diagonaalielementtejä poikkeutetaan Smithin ja Porumamillan [7] esittämistä arvoista. Painokertoimen  $R$  diagonaalielementtejä  $R_{11}$ ,  $R_{12}$  varioidaan yhtäaikaisesti, koska ECMO-laitteiston happi- ja hiilidioksiipirit ovat rakenteeltaan samankaltaisia ja sisäänmenojen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  fysikaaliset selitykset ovat toisiinsa rinnastettavia. Taulukossa 5.2 säätöpiirin vaihe- ja vahvistusvarat kasvavat kun ohjauksien poikkeamia tasapainotilasta sakotetaan enemmän. Tällöin hyvän robustisuuden saavuttamiseksi olisi luontevaa kasvattaa painokertoimen  $R$  diagonaalielementtien arvoja. Tällöin kuitenkin säätöpiirin suorituskyky saattaa heikentyä ja painokerroinmatriisin valinnassa päädytään kompromissiin hyvän robustisuuden, suorituskyvyn ja ohjauksien suuruuden välillä.



**Kuva 5.2.** ECMO:n säätöpiirin ominaisura, jossa toisen ominaisfunktion tuottama ura sinisellä ja toisen ruskealla. Kuvassa vaihevara  $\phi_m = 96.85^\circ$  ja vahvistusvara  $g_m = 7.94$ .

**Taulukko 5.2.** ECMO:n vahvistus- ja viivevarat painokerroinmatriisin  $R$  diagonaali elementtien eri arvoilla, kun painokerroin matriisi  $Q$  on muotoa (5.2).

$R_{11}, R_{22}$	Vahvistusvara $g_m$	Viivevara $d_m$
0.05	6.42	0.15s
0.075	7.21	0.19s
0.125	8.61	0.28s
0.15	9.24	0.33s

Taulukoissa 5.3 ja 5.4 on tilan painokerroinmatriisin  $Q$  elementtien  $Q_{33}$  ja  $Q_{44}$  vaikutus ECMO:n säätöpiirin vahvistus- ja viivevaroihin. Koska ECMO:n tilamallissa hapen virtausnopeuden  $x_1(t)$  vaikutus hapen osapaineeseen  $x_3(t)$  on 12-kertainen verrattuna hiilidioksidin virtausnopeuden  $x_2(t)$  vaikutukseen hiilidioksidin osapaineeseen  $x_4(t)$  ja piirien rakenteet ovat muuten samankaltaisia, hiilidioksidin osapaineen poikkeamia tasapainotilasta sakoittavaa elementtiä  $Q_{44}$  varioidaan noin 12-kertaisilla arvoilla hapen osapainetta sakoittavaan elementtiin  $Q_{33}$  verrattuna. Tilan painokerroinmatriisia  $Q$  varioitaessa oh-

jauksen painokerroinmatriisi  $R$  on muotoa 5.2.

**Taulukko 5.3.** ECMO:n vahvistus- ja viivevarat painokerroinmatriisin  $Q$  hapen osapainetta painottavan elementin  $Q_{33}$  eri arvoilla.

$Q_{33}$	Vahvistusvara $g_m$	Viivevara $d_m$
0.5	10.42	0.46s
0.75	8.83	0.30s
1.25	7.37	0.20s
1.5	6.96	0.17s

**Taulukko 5.4.** ECMO:n vahvistus- ja viivevarat painokerroinmatriisin  $Q$  hiilidioksidin osapainetta painottavan elementin  $Q_{44}$  eri arvoilla.

$Q_{44}$	Vahvistusvara $g_m$	Viivevara $d_m$
0.004	7.94	0.23s
0.00625	7.94	0.23s
4	7.94	0.23s
7	7.93	0.23s

Taulukoita 5.3 ja 5.4 vertailemalla nähdään, että hiilidioksidin osapaineen poikkeamien sakottaminen enemmän ei juurikaan vaikuta säätöpiirin stabiiliuteen. Hapen osapainen poikkeamia sakottamalla säätöpiirin vahvistus- ja viivevarat pienenevät, jolloin joudutaan tekemään kompromisseja säätöpiirin suorituskyvyn ja stabiiliuden robustiuden välillä.

## 6. YHTEENVETO

Säätöpiirien stabiiliuden robustius on yksi tärkeä ominaisuus säätöpiirien suunnittelussa. Tämän työn tavoiteena oli tutkia, miten monimuuttujasäädön stabiiliuden robustiutta voidaan tutkia laajentamalla klassisen säätöteorian vahvistus-, vaihe- ja viivevaroja monimuuttujaprosesseille. Tässä työssä monimuuttujasäädön stabiiliuden robustiutta tutkittiin avoimen systeemin taajuusvasteeseen pohjautuvilla teorioilla. Säätöpiirin stabiiliuden robustiutta tarkasteltiin erilaisille epävarmuuksille. Epävarmuuksille todettiin mahdolliseksi määrittää vahvistuksen, vaihesiirron ja viiveen kriittisiä arvoja käyttäen kanavakohtaisia vahvistus-, vaihe- ja viivevaroja sekä kaikki kanavat huomioivia varoja. Kanavakohtaisia epävarmuuksien kriittisiä arvoja pystyttiin tutkimaan käyttämällä klassisia SISO-systeemin vahvistus-, vaihe- ja viivevaroja sekä avoimen systeemin taajuusvasteeseen pohjautuvia työkaluja kuten Nyquist-diagrammi ja Bode-diagrammi. Useissa kanavissa ilmeneville epävarmuuksille määritettiin kriittisiä arvoja käyttämällä monimuuttujajärjestelmille laajennettuja vahvistus-, vaihe- ja viivevaroja. Tarkastelussa hyödynnettiin myös ominaisuutta.

Työssä käsiteltiin myös estimaattoripohjaisen tilatakaisinkytketyn säätimen suunnittelua LQG-menetelmällä. LQG-säätimen suunnittelussa tilatakaisinkytkennän vahvistusmatriisi  $K$  valittiin minimoimaan säädettävän prosessin tasapainotilan tilan ja ohjauksen poikkeamien neliösummista koostuva kustannusfunktio. Mittauksen ennustusvirheen vahvistusmatriisi  $H$  valittiin minimoimaan säädettävän prosessin tasapainotilan varianssi. Käsitteilyssä oli myös LQG-säätimen suunnittelussa käytettävien painokerroinmatriisien  $Q$  ja  $R$  valitsemiseen vaikuttavat tekijät ja yksi mahdollinen menetelmä painokertoimien valitsemiseen. Painokerroinmatriisien valinnan todettiin olevan yleisesti haastavaa ja vaativan painokertoimien iterointia. Painokertoimilla havaittiin myös olevan vaikutusta säätöpiirin stabiiliuden robustiuteen.

Stabiiliuden robustiuden tutkimiseen esitettyjä menetelmiä sovellettiin ECMO-laitteiston hapettimen säätöpiirin robustiuden tutkimiseen, kun säätöpiirissä esiintyi erilaisia epävarmuuksia toimilaitteiden sisäänmenossa. ECMO-laitteiston hapettimelle suunniteltiin säätöpiirin LQG-menetelmällä. ECMO:n säätöpiirin epävarmuuksille lasketuista varoista säätöpiirin todettiin sietävän hyvin epävarmuuksia niin kanavakohtaisesti kuin yhtäaikaisesti useammassa kanavassa.

## LÄHTEET

- [1] B. D. O. Anderson ja J. B. Moore. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Canberra, Australia: Prentice-Hall, 1989. ISBN: 978-0-486-45766-6.
- [2] G Balas et al. *Robust Control Toolbox Getting Started Guide*. MathWorks, 2022. URL: [https://se.mathworks.com/help/pdf\\_doc/robust/robust\\_gs.pdf](https://se.mathworks.com/help/pdf_doc/robust/robust_gs.pdf) (viitattu 10.03.2022).
- [3] G Balas et al. *Robust Control Toolbox Reference*. MathWorks, 2022. URL: [https://se.mathworks.com/help/pdf\\_doc/robust/robust\\_ref.pdf](https://se.mathworks.com/help/pdf_doc/robust/robust_ref.pdf) (viitattu 10.03.2022).
- [4] G Balas et al. *Robust Control Toolbox User's Guide*. MathWorks, 2022. URL: [https://se.mathworks.com/help/pdf\\_doc/robust/robust\\_ug.pdf](https://se.mathworks.com/help/pdf_doc/robust/robust_ug.pdf) (viitattu 10.03.2022).
- [5] S. P. Boyd ja C. H. Barrat. *Linear Controller Desing: Limits of Performance*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1991. ISBN: 0-13-538687-X.
- [6] W. L. Brogan. *Modern Control Theory*. eng. 3rd ed. New York: Quantum, 1974.
- [7] D. J. Smith ja H. V. Porumamilla. "LQG based robust tracking control of blood gases during extracorporeal membrane oxygenation". Teoksessa: *Proceedings of the 2011 American Control Conference*. Journal Abbreviation: Proceedings of the 2011 American Control Conference. 2011, s. 324–329. ISBN: 2378-5861. DOI: 10.1109/ACC.2011.5991330.
- [8] R. C. Dorf ja R. H. Bishop. *Modern Control Systems*. 13th ed. Harlow: Pearson, 2017. ISBN: 978-1-292-15297-4.
- [9] T. Glad ja L. Ljung. *Control Theory*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2000. ISBN: 978-1-4822-6816-4.
- [10] W. S. Levine. *The Control Handbook: Control System Advanced Methods*. eng. 2nd ed. Boca Raton, Fla: CRC Press, 2011. ISBN: 978-1-4200-7362-1.
- [11] J. Lunze. *Robust Multivariable Feedback Control*. eng. Hemel Hempstead, United Kindom: Prentice Hall International, 1989. ISBN: 0-13-781949-8.
- [12] A.G.J. MacFarlane. *Frequency-Response Methods in Control Systems*. eng. New York: IEEE Press, Inc., 1979. ISBN: 0-87942-126-6.
- [13] J. M. Maciejowski. *Multivariable feedback design*. eng. 1st ed. Electronic systems engineering series. Wokingham: Addison-Wesley, 1989. ISBN: 0-201-18243-2.
- [14] A. T. Marttinen ja Koivo H. N. *Tietokoneavusteinen säätösuunnittelu: taajuustason menetelmät monimuuttujaprosesseille*. fi. 11. pain. Tampere: Suomen säätötekniilinen seura ry ja Insinööri-tieto Oy, 1984. ISBN: 951-794-402-0.

- [15] Gale Encyclopedia of Medicine. *extracorporeal membrane oxygenation*. 2008. URL: <https://medical-dictionary.thefreedictionary.com/extracorporeal+membrane+oxygenation> (viitattu 10.02.2022).
- [16] R. M. Murray. *Feedback Systems: Notes on Linear Systems Theory*. 2020.
- [17] C. Pozrikidis. *An Introduction To Grids, Graphs, and Networks*. eng. New York: Oxford University Press, 2014. ISBN: 978-0-19-999672-8.
- [18] E. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems*. 1998. DOI: 10.1007/978-1-4612-0577-7.
- [19] K. J. Åström ja R. M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2nd ed. Saatavilla: <http://fbsbook.org> (haettu 30.4.2022). Princeton University Press, 2020.



## LIITE A: MIMOVARAT-TYÖKALU

```

1 function [gm, pm, dm, wgc] = MIMOvarat(ols)
2 % MIMO-saatopiirin vahvistus-, vaihe- ja viivevarat.
3 % ols: avoimen systeemin cst objekti
4 %
5 % gm: vahvistusvara
6 % pm: vaihevara
7 % dm: viivevara
8 % wgc: vahvistuksen ylimenokulmataajuus
9
10 % Taajuusvasteen laskemiseen kaytettavat taajuudet
11 w = logspace(-10, 5, 10^5);
12
13 % Avoimen systeemin taajuusvaste
14 freqs = freqresp(ols, w);
15
16 % Avoimen systeemin taajuusvasteen ominaisarvot
17 eigs = zeros(2, 10^5);
18 for i=1:10^5
19     eigs(:,i) = eig(freqs(:, :, i));
20 end
21
22 % Vahvistusvara
23 [~, ind] = max(angle(eigs.')); % 180 astetta lahimpana olevat ...
    pisteet
24 gm = min(1./abs(diag(eigs([1:length(ind)], ind)))); % Pienin gm arvo
25
26 % Taajuuksien muokkaus sopivaan muotoon
27 w_rep = repmat(w, size(eigs, 1));
28 w_linear = w_rep(:);
29
30 % Viive- ja vaihevarat
31 mag = abs(eigs); % Amplitudivaste
32 ind = find(0.999 < mag & mag < 1.001); % Mag = 1
33 flateigs = eigs(:);
34 wgc_tmp = w_linear(ind);
35 [phi_max, im] = max(abs(angle(flateigs(ind))));
36 wgc = wgc_tmp(im); % Vahvistuksen ylimenokulmataajuus

```

```
37 dm = (pi - phi_max)/wgc; % Viivevara
38 pm = rad2deg(dm*wgc); % Vaihevara
39 end
```

## LIITE B: OMINAISURA-TYÖKALU

```
1 function [] = ominaisura(ols, rajat)
2 % Ominaisuran piirto
3 % ols: avoimen systeemin cst objekti
4 % rajat: true=vahvistus- ja vaihevara kuvaan
5
6 % vahvistus- ja vaihevarat
7 [gm, pm] = MIMOvarat(ols);
8
9 % Varojen piirron valinta
10 if nargin == 1
11     rajat = false;
12 end
13
14 % Taajuusvasteen laskemiseen kaytettavat taajuudet
15 w = logspace(-100, 5, 10^5);
16
17 % Avoimen systeemin taajuusvaste
18 freqs = freqresp(ols, w);
19
20 % Avoimen systeemin taajuusvasteen ominaisarvot
21 eigs = zeros(2, 1);
22 for i=1:10^5
23     eigs(:,i) = eig(freqs(:, :, i));
24 end
25
26
27 % Ominaisuran piirto positiivisille ja negatiivisille taajuuksille
28 plot([eigs.'; flipud(eigs')], 'LineWidth', 1.5)
29 hold on
30
31 % Yksikkoympyra ja akselit
32 w2pi = linspace(-pi, pi);
33 yksikko = exp(j*w2pi);
34 plot(yksikko, 'k')
35 axis equal
36 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
37 plot(-1, 0, 'r.', 'MarkerSize', 15)
```

```

38 xline(0, 'k--', 'LineWidth', 1, 'Alpha', 0.2);
39 yline(0, 'k--', 'LineWidth', 1, 'Alpha', 0.2);
40
41 if rajat == true
42     % Vahvistusvaran piirto
43     txtgm = texlabel('1/g_m');
44     text(-(1/gm)/2 - 0.1, 0.2, txtgm)
45     plot([0, -1/gm], [0 0], 'r--', 'LineWidth', 1.5)
46
47     % Vaihevaran piirto
48     pmrad = deg2rad(pm);
49     pmw = linspace(pi-pmrad, pi);
50     pmkaari = exp(-j*pmw);
51     txtpm = texlabel('phi_m');
52     text(real(exp(-j*(pi - pmrad + pmrad/2))) - 0.1, ...
53           imag(exp(-j*(pi - pmrad + pmrad/2))) - 0.1, txtpm)
54     plot([0 -real(exp(-j*deg2rad(pm))) ], [0 ...
55           imag(exp(-j*deg2rad(pm))) ], 'r--')
56     plot(pmkaari*1, 'r--', 'LineWidth', 1.5)
57
58     % Kuvaajien hiearkian muuttaminen
59     ch=get(gca, 'children');
60     n = size(eigs, 1);
61     ch = [ch(end-1:end); ch(1:end-2)];
62     set(gca, 'children', ch);
63 end
64
65
66 % Akselien nimet
67 xlabel('Reaaliakseli')
68 ylabel('Imaginaariakseli')
69 xticks(-1.5:0.5:1.5)
70 yticks(-1.5:0.5:1.5)
71 xticklabels({'', '-1', '', '0', '', '1', ''})
72 yticklabels({'', '-1', '', '0', '', '1', ''})
73 box off
74 hold off
75
76
77 end

```

## LIITE C: KANAVAKOHTAISIIEN EPÄVARMUUKSIEN SUHTEEN LINEAARISTEN KARAKTERISTISTEN YHTÄLÖIDEN SYMBOLINEN JOHTO

```

1 % Kanavakohtaisten varojen laskentaan käytettävien karakterististen
2 % yhtälöiden symbolinen johto 2x2 saatopiirille
3
4 % Avoimen systeemin siirtofunktioelementit
5 syms L11 L12 L21 L22
6
7 % Epavarmuuskomponentti
8 syms k positive
9
10 % Identiteettimatriisi
11 I = eye(2);
12
13 % Kanavan 1 epavarmuus
14 Gamma_ch1 = [k 0; 0 1];
15
16 % Kanavan 2 epavarmuus
17 Gamma_ch2 = [1 0; 0 k];
18
19 % Nimellisen avoimen systeemin siirtofunktioelementit:
20 L = [L11,L12
21      L21,L22]
22
23 % Karakteristinen yhtälö d epavarmuudella kanavassa 1
24 d_ch1 = det(I + L*Gamma_ch1)
25
26 % Karakteristinen yhtälö d epavarmuudella kanavassa 2
27 d_ch2 = det(I + L*Gamma_ch2)
28
29 % Muuttujan k suhteen karakteristinen yhtälö on
30 % d = G1 + k*G2 = 0
31 %
32 % 1 + k*(G2/G1) = 0
33 %

```

```
34 % 1 + k*G = 0
35 %
36 % G = G2/G1
37
38 % Muuttujan k suhteen vakiotermit
39 G1_ch1 = subs(d_ch1,k,0)
40 G1_ch2 = subs(d_ch2,k,0)
41
42 % Muuttujan k kertoimet
43 G2_ch1 = diff(d_ch1,k)
44 G2_ch2 = diff(d_ch2,k)
45
46
47 G_ch1 = G2_ch1/G1_ch1
48 G_ch2 = G2_ch2/G1_ch2
```