Robert Friman

MATRIISIMENETELMIEN KÄYTTÖ KAHDEN PELAAJAN NOLLASUMMAPELIEN RATKAISEMISESSA

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Mika Mattila
Huhtikuu 2022

TIIVISTELMÄ

Robert Friman: Matriisimenetelmien käyttö kahden pelaajan nollasummapelien ratkaisemisessa
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Huhtikuu 2022

Peliteoriaa on nykypäivänä tärkeä ymmärätää monella eri alalla, kuten esimerkiksi taloudessa ja politiikassa, jotta voidaan pysyä kilpailukykyisenä. Peliteoriassa vertaillaan pelaajien valitsemien strategioiden yhteisvaikutuksen hypoteettista lopputulosta ja yritetään näin löytää pelaajille optimaaliset strategiat.

Tässä työssä käydään läpi kahden pelaajan nollasummapelien ratkaisemista matriisimenetelmillä. Matriisimenetelmillä pelaajien strategiat ja pelin arvo voidaan selvittää suoraviivaisesti, mutta näiden menetelmien ymmärtämiseen tarvitaan hieman taustatietoa. Tämän työn tavoitteena on antaa lukijalle pohjatietoja peliteorian ymmärtämiseen ja soveltamiseen.

Työssä käydään aluksi läpi peliteorian perusteita. Teksti aloitetaan perehtymällä kahden pelaajan nollasummapeleihin. Nollasummapelien käsittelyn jälkeen tekstissä pohditaan pelaajien strategiointia. Pelaajien strategioiden optimointi on aluksi selitetty esimerkin avulla, mutta se käydään läpi myös teoreettisesti. Kappaleen lopussa päädytään työn kannalta tärkeään Minimax-lauseeseen, jonka avulla saadaan ehdot peleille, joiden ala-arvo on sama kuin yläarvo.

Kolmannessa kappaleessa käsitellään matriisimenetelmiä. Yksinkertaisille 2x2 kokoisille peleille löydetään matriisimuotoiset ratkaisukaavat pelin odotusarvon määrittelemisen jälkeen. Kaavojen käyttöä rajoittavan huomion jälkeen kaavat johdetaan tekstissä ja niiden soveltamista havainnollistetaan esimerkillä.

Seuraavaksi työssä esitellään kääntyvien pelimatriisien ja symmetristen pelien ominaisuuksia. Kääntyville pelimatriiseille pystytään hyödyntämään samantapaisia kaavoja kuin 2x2 pelimatriiseille. Kääntyvät pelimatriisit ovat kuitenkin paljon laajempi käyttökohde, sillä matriisit voivat olla mielivaltaisen suuria, kunhan ne ovat neliön muotoisia. Lopuksi symmetrisille peleille havaitaan ominaisuuksia, joista kyseiset pelit ovat helposti tunnistettavissa.

Avainsanat: peliteoria, nollasummapeli, Minimax-lause, sekastrategia, matriisimenetelmät

ALKUSANAT

Kiitokset Mika Mattilalle ohjaamisesta sekä neuvoista. Lisäksi kiitos ystäville vertaistuesta.

Tampereella, 27. huhtikuuta 2022

Robert Friman

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$E(X,Y)$	odotusarvo
X^*	optimaalinen strategia
v	pelin arvo
$\mathbb{R}$	reaaliluvut

1. JOHDANTO

Peliteoriaa hyödynnetään nykyään monella eri alalla. On havaittu, että se on hyödyksi esimerkiksi osakemarkkinoilla ja politiikassa. Peliteorian avulla voidaan tarkastella pelejä objektiivisesti ja selvittää pelin erilaisia ominaisuuksia.

Pelit ovat olennainen osa elämää, monet pelaavatkin pelejä päivittäin. Tässä työssä käsitellään kahden pelaajan pelejä, mutta pelit voivat myös olla useamman pelaajan välisiä. Pelissä pelaajat tavoittelevat voittoa, joka määritellään pelin säännöissä. Pelaajien keinot voiton saavuttamiseksi perustuvat monesti uskomukseen parhaasta strategiasta.

Uskomus parhaasta strategiasta voi osua oikeaan, mutta varmistuakseen parhaasta strategiasta pelaajan täytyy hyödyntää peliteoriaa. Tämä työ keskittyy löytämään keinoja, joilla pelaajat voivat selvittää parhaat strategiansa. Parhaan strategiansa löytämisen lisäksi työssä esiteltävillä ominaisuuksilla pelaaja pystyy selvittää esimerkiksi pelin odotetun lopputuloksen sekä vastustajan parhaan vastauksen.

Tämän työn tavoitteena on saada lukija ymmärtämään kahden pelaajan pelien ratkaisemiseen käytettäviä työkaluja. Työ jakautuu kahteen osaan, joissa ensin käydään läpi peliteorian perusteita ja lopuksi keskitytään pelien ratkaisemiseen matriisimenetelmillä. Teorian ohessa työssä on esimerkkejä, jotka helpottavat lukijaa tekstin ymmärtämisessä.

2. PERUSTEET

Tässä luvussa käydään läpi peliteorian perusteita, jotta luku kolme olisi selkeämpi niin asian kuin merkintöjenkin suhteen. Luvun pääasiana on jatkuville funktioille määritelty minimax-lause, joka käydään läpi tämän luvun lopussa. Aloitetaan kuitenkin käymällä läpi kahden pelaajan nollasummapeleistä termejä ja merkintöjä, joita käytetään tässä tekstissä.

2.1 Kahden pelaajan nollasummapelit

Kahden pelaajan pelejä voidaan kuvata matriiseilla, joissa pelaajan I vaihtoehdot on listattu riveille ja pelaajan II vaihtoehdot sarakkeille. Vaihtoehtoja voidaan pitää pelaajien valitsemina *strategioina*, joiden lopputuloksena on *pelin maksu*. *Nollasummapeleissä* pelaajan saama voitto on toisen pelaajan yhtä suuri häviö. Pelin maksu ajatellaan pelaajan I näkökulmasta tässä tekstissä. Pelaaja I tavoittelee mahdollisimman suurta pelin maksua, ja pelaaja II yrittää minimoida sen. Rivejä kutsutaan pelaajan I ja sarakkeita pelaajan II *puhtaiksi strategioiksi*. [1]

Esimerkki 2.1 (Kivi-paperi-sakset -peli)**.** Perinteisessä kivi, paperi ja sakset pelissä on kaksi pelaajaa, joista kumpikin valitsee joko kiven, paperin tai sakset. Seuraavassa matriisissa 2.1 on esitetty pelin maksut.

Taulukko 2.1. Kivi paperi sakset -pelimatriisi

I/II	kivi	paperi	sakset
kivi	0	−1	1
paperi	1	0	−1
sakset	−1	1	0

Valittujen strategioiden yhteisvaikutuksen tulos nähdään matriisista pelin maksuna. Esimerkiksi jos pelaaja I valitsee kiven ja pelaaja II paperin, pelin maksu on -1 eli pelaaja I häviää yhden euron pelaajalle II.

Esimerkissä (2.1) kummallakin pelaajalla on kolme strategiaa, mikä tekee pelistä hyvin yksinkertaisen. Yksinkertaisuus on pelin ratkaisemisen kannalta hyvä asia, sillä jos pelaajien strategioiden määrä on hyvin suuri, kuten esimerkiksi shakissa, tietokoneillakaan ei pystytä ratkaisemaan peliä.

Kuitenkin jos pelaajalla I on n määrä strategioita ja pelaajalla II m, voidaan pelin maksujen matriisia kuvata *pelimatriisilla* $A_{n\times m}$. Matriisi $A_{n\times m}$ koostuu alkioista a_{ij}, missä $i = 1, ..., n$ on pelaajan I ja $j = 1, ..., m$ on pelaajan II valitsemat strategiat.

2.2 Pelaajien strategiat

Kivi paperi sakset -esimerkissä (2.1) voidaan todeta, että jokaiseen pelaajan I strategiaan on pelaajalla II vastaus, jolla pelaaja II voittaa pelin. Jos pelaaja tietää toisen pelaajan strategian, voi hän aina voittaa. Voisi siis päätellä, että paras menestyminen syntyy, kun strategian valitsee satunnaisesti ja on ennakoimattomissa vastustajalle.

On kuitenkin pelejä, joissa *optimaalinen* strategia ei ole täysin satunnaisesti valittu. Käydään seuraavaksi esimerkki Kivi paperi sakset -pelin muunnelmasta optimaalisen strategian havainnollistamiseksi.

Esimerkki 2.2 (Kivi-paperi-saksetmuunnelma)**.** Tässä muunnelmassa on sovittu, että jos voittaa pelaamalla kiven, voittaja saa kaksinkertaisen maksun. Tarkastellaan pelimatriisia 2.2 taas pelaajan I näkökulmasta.

Taulukko 2.2. Kivi-paperi-saksetmuunnelma -pelimatriisi

I/II	kivi	paperi	sakset
kivi	0	−1	2
paperi	1	0	−1
sakset	−2	1	0

Jos pelaaja I valitsee edellisten päätelmien perusteella strategiansa satunnaisesti ja pelaaja II on tietoinen tästä, saa pelaaja II tässä tilanteessa edun. Näin voidaan päätellä, koska tälläisessa tilanteessa pelaaja II ei valitsisi saksia suuremman häviön pelosta.

Jotta voidaan ratkaista, mitä pelaajien kannattaisi tehdä nollasummapelissä, täytyy aloittaa miettimällä, onko pelillä ilmiselvää ratkaisua. Käsitellään pelimatriisia $A_{n \times m} = [a_{ij}]$ taas pelaajan I näkökulmasta. Pelaaja I olettaa, että pelaaja II pelaa optimaalisesti. Nyt pelaaja II valitsee strategiakseen sarakkeen $j = 1, ..., m$ siten, että hän minimoi pelin maksun a_{ij} jokaiselta riviltä $i = 1, ..., n$. Nyt pelaaja I tietää kaikki hänen huonoimmat lopputuloksensa pelistä. Näistä pelin maksuista pelaajan I kannattaa etsiä maksimi eli valita rivi $i = 1, ..., n$ siten, että hän maksimoi pelin maksun a_{ij}. [1]

Pelaajan II näkökulmaa voidaan pohtia samantapaisesti, mutta luonnollisin eroin. Käsitellään silti pelimatriisia pelaajan I näkökulmasta. Nyt pelaaja II olettaa, että pelaaja I pelaa optimaalisesti, eli maksimoi pelin maksun a_{ij} jokaiselta sarakkeelta $j = 1, ..., m$. Näin ollen pelaaja II voi valita näistä maksuista pienimmän eli minimoida häviönsä a_{ij}.

Esimerkki 2.3 (Strategioiden optimointi)**.** Pelimatriisiin $A_{n\times m}$ on tallennettu pelin maksut a_{ij}, missä $i = 1, ...n$ ja $j = 1, ..., m$. Lisäksi oletetaan, että vastustaja pelaa aina optimaalisesti. Nyt siis matriisi

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Jos ensin mietitään pelaajan I optimaalista strategiaa, täytyy ensin tietää jokaisen rivin pienin alkio, eli pelaajan II paras vastaus. Saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{1\alpha} \\ a_{2\beta} \\ \vdots \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix},$$

missä jokaiselta riviltä $i = 1, 2, ..., n$ on valittu $\min\limits_{j=1,...,m} a_{ij}$. Näistä pelaaja I voi helposti valita suurimman, jolloin hän takaa pahimmassa tapauksessa mahdollisimman suuren pelin maksun.

Vastaavasti pelaaja II voi selvittää matriisista jokaisen sarakkeen suurimman alkion, jolloin matriisista $A_{n\times m}$ saataisiin matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{\alpha 1} & a_{\beta 2} & \dots & a_{\gamma m} \end{bmatrix},$$

missä jokaiselta sarakkeelta $j = 1, 2, ..., m$ on valittu $\max\limits_{i=1,...,n} a_{ij}$. Näistä pelaajan II on helppo valita pienin alkio, eli minimoida hänen pahin mahdollinen tapaus. [1]

Määritelmä 2.4. Pelillä, jota kuvataan matriisilla $A_{n\times m}$, on *ala-arvo*

$$v^- := \max_{i=1,...,n} \min_{j=1,...,m} a_{ij}$$

ja *yläarvo*

$$v^+ := \min_{j=1,...,m} \max_{i=1,...,n} a_{ij}.$$

Ala-arvo on pienin arvo, jonka pelaaja I varmasti saa, ja yläarvo on suurin arvo, jonka pelaaja II voi menettää. Pelillä on *arvo*, jos $v^- = v^+$, jolloin pelin arvo voidaan määritellä asettamalla $v = v^- = v^+$. Tällöin pienin maksimi ja suurin minimi ovat yhtäsuuret. Eli saadut rivi i^* ja sarake j^*, mitkä antavat pelin maksuksi $v = v^- = v^+$, ovat pelaajien optimaaliset strategiat. Tätä alkiota $a_{i^*j^*}$, jossa optimaalinen rivi ja sarake kohtaavat, kutsutaan *satulapisteksi* puhtaassa strategiassa. [1]

Satulapistettä (i^*, j^*) voidaan ajatella siltä kantilta, että jos pelaaja I ei valitsekaan optimaalista strategiaansa i^*, mutta pelaaja II valitsee hänen optimaalisen strategiansa j^*, pelin maksu pienenee. Jos taas pelaaja II ei valitse optimaalista strategiaansa, mutta pelaaja I valitsee, pelin maksu suurenee. Pelillä voi myös olla enemmän kuin yksi satulapiste tai ei ollenkaan.

2.3 Minimax-lause

Monia pelejä voidaan pelata monta kierrosta. Myös tällöin ennakoimattomuus, kuten Kivi paperi sakset -pelissä, saattaa tulla hyödyksi, mutta tärkeämpää on miettiä kuinka usein pelaa mitäkin puhdasta strategiaa pelin maksuista päättelemällä. Tällöin on käytännöllistä miettiä *sekastrategioita*. Sekastrategioita voidaan myös hyödyntää yhden kierroksen peleissä, mutta usean kierroksen peleissä optimaaliset sekastrategiat ovat hyödyllisempiä.

Puhtaan strategian pelaamisen toistumista sekastrategiassa voidaan siis pitää strategian pelaamisen todennäköisyytenä. Merkitään rivin pelaamisen todennäköisyyttä x_i:llä, missä i on pelattu rivi. Vastaavasti merkitään sarakkeen pelaamisen todennäköisyyttä merkinnällä y_j, missä j on pelattu sarake. Nämä termit voidaan sijoittaa *strategiamatriiseihin* X ja Y.

Jos pelissä ala-arvo on pienempi kuin yläarvo, satulapistettä ei ole olemassa. Tällaisissa tapauksissa sekastrategioilla pystytään selvittää pelin arvo. Aloitetaan määrittelemällä satulapiste kahden muuttujan funktiolle $f = f(x, y)$.

Määritelmä 2.5. Olkoon C ja D joukkoja. Funktiolla $f : C \times D \to \mathbb{R}$ on ainakin yksi satulapiste (x^*, y^*), missä $x^* \in C$ ja $y^* \in D$, jos

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y), \text{ kaikilla } x \in C \text{ ja } y \in D.$$

Funktiota f kutsutaan *jatkuvaksi peliksi*. Myös jatkuville peleille voidaan määritellä ala-arvo

$$v^- = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y)$$

ja yläarvo

$$v^+ = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y).$$

[1]

Seuraavaksi käydään von Neumannin minimax-lause, joka hyvin tärkeä peliteoriassa. Minimax-lauseesta saadaan ehtoja jatkuvalle pelille f sekä joukoille C ja D, jotta voidaan selvittää kyseisen pelin arvo. Kuitenkin ennen minimax-lausetta tarvitaan vielä muutama määritelmä.

Määritelmä 2.6. Joukko $C \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi* joukko, jos mitä tahansa pisteitä $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ yhdistävä jana on myös joukossa C. Eli joukko on konveksi, jos kaikilla pisteillä $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ toteutuu

$$\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \in C, \text{kaikilla } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Joukko C on *suljettu*, jos sen reunapisteet kuuluvat myös joukkoon C. Lisäksi joukko on *rajoitettu*, jos se voidaan ympäroidä reaalisäteisellä ympyrällä. Jos joukko on sekä suljettu että rajattu ja se on euklidisen avaruuden osajoukko, voidaan joukkoa kutsua *kompaktiksi*.

Funktio $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ on konveksi, jos joukko C on konveksi ja

$$g(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \leq \lambda g(\mathbf{a}) + (1-\lambda) g(\mathbf{b})$$

kaikilla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C, 0 \leq \lambda \leq 1$. Lisäksi määritellään konveksisuuden vastakohta konkaavisuus. Funktio on konkaavi, jos

$$g(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \geq \lambda g(\mathbf{a}) + (1-\lambda) g(\mathbf{b})$$

kaikilla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Lause 2.7. Minimax-lause *Olkoon $f : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja joukot $C \subset \mathbb{R}^n$ sekä $D \subset \mathbb{R}^n$ konvekseja, sujettuja ja rajoitettuja. Oletetaan, että $x \mapsto f(x,y)$ on konkaavi ja $y \mapsto f(x,y)$ konveksi. Tällöin on voimassa, että*

$$v^- = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y) = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y) = v^+.$$

Todistus. (vrt. [1, s. 19]) **1.** Oletetaan, että f on aidosti konkaavi-konveksi funktio, eli

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z, y) > \lambda f(x,y) + (1-\lambda) f(z,y), \text{ missä } 0 < \lambda < 1, \text{ ja}$$

$$f(x, \mu y + (1-\mu)w) < \mu f(x,y) + (1-\mu) f(x,w), \text{ missä } 0 < \mu < 1.$$

Koska funktio f on aidosti konkaavi-konveksi, sillä on vain yksi piste $y = y(x) \in D$ jokaista muuttujan $x \in C$ arvoa kohden, missä

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in D} f(x,y).$$

Merkitään tätä funktiolla $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$, eli

$$\min_{y \in D} f(x,y) := g(x)$$

Koska funktio f on jatkuva suljetussa ja rajoitetussa joukossa $C \times D$, funktio g on myös jatkuva. Lisäksi funktio g on konkaavi, koska

$$g(\lambda x + (1-\lambda)z) \geq \min_{y \in D} (\lambda f(x,y) + (1-\lambda) f(z,y)) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(z).$$

Näin ollen funktiosta g voidaan löytää maksimi pisteestä $x^* \in C$, eli

$$g(x^*) = f(x^*, y(x^*)) = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y).$$

2. Olkoon pisteet $x \in C$ ja $y \in D$ mielivaltaisesti valittuja. Tällöin voidaan kijoittaa, että

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x^*, y) > \lambda f(x,y) + (1-\lambda) f(x^*, y)$$

$$\geq \lambda f(x,y) + (1-\lambda) f(x^*, y(x^*))$$

$$= \lambda f(x,y) + (1-\lambda) g(x^*)$$

kun λ on väliltä $(0,1)$.

Merkitään nyt $y = y(\lambda x + (1-\lambda)x^*) \in D$. Näin ollen voidaan päätellä, että

$$g(x^*) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)x^*, y(\lambda x + (1-\lambda)x^*)) = g(\lambda x + (1-\lambda)x^*)$$

$$\geq g(x^*)(1-\lambda) + \lambda f(x, y(\lambda x + (1-\lambda)x^*).$$

Kun puolittain vähennetään $g(x^*)(1-\lambda)$ saadaan tulokseksi, että

$$g(x^*)(1-(1-\lambda)) \geq \lambda f(x, y(\lambda x + (1-\lambda)x^*),$$

eli

$$g(x^*) \geq f(x, y(\lambda x + (1-\lambda)x^*)$$

kaikilla $x \in C$.

3. Kun asetetaan λ lähenemään nollaa, eli $\lambda \to 0$, voidaan kirjoittaa, että $\lambda x + (1-\lambda)x^* \to x^*$. Tällöin myös $y(\lambda x + (1-\lambda)x^*)$ lähenee arvoa $y(x^*)$. Merkitään tätä seuraavaksi symbolilla y^*.

Tähän astisista tuloksista saadaan, että

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) := v$$

millä tahansa $x \in C$. Lisäksi voidaan kirjoittaa, että

$$f(x^*, y^*) = v \leq f(x^*, y)$$

millä tahansa $y \in D$. Eli voidaaan todeta, että (x^*, y^*) on satulapiste ja että

$$v^- = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y) = v = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y) = v^+,$$

koska

$$\max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y) = \max_{x \in C} f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = v = \min_{y \in D} f(x^*, y) = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y).$$

4. Lopuksi yleistetään tulokset tapauksiin, joissa f on konkaavi-konveksi funktio. Olkoon $\epsilon > 0$.

Merkitään nyt, että

$$f_\epsilon(x, y) = f(x, y) - \epsilon\, |x|^2 + \epsilon\, |y|^2\,, \text{ missä } |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ ja } |y|^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j^2.$$

Funktio f_ϵ on aidosti konkaavi-konveksi, eli edellisten kohtien tuloksia voidaan soveltaa siihen. Saadaan siis piste (x_ϵ, y_ϵ), jossa $v_\epsilon = f(x_\epsilon, y_\epsilon)$. Lisäksi voidaan kirjoittaa, että

$$f_\epsilon(x, y_\epsilon) \leq v_\epsilon = f(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq f_\epsilon(x_\epsilon, y)$$

kaikilla $x \in C$ ja $y \in D$.

Koska $f_\epsilon(x, y_\epsilon) \geq f(x, y_\epsilon) - \epsilon\, |x|^2$ ja $f_\epsilon(x_\epsilon, y) \leq f(x_\epsilon, y) + \epsilon\, |y|^2$, voidaan kirjoittaa, että

$$f(x, y_\epsilon) - \epsilon\, |x|^2 \leq v_\epsilon = f(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq f(x_\epsilon, y) + \epsilon\, |y|^2$$

kaikilla $(x, y) \in C \times D$. Koska joukot C ja D ovat suljettuja ja rajoitettuja, epsilonin lähestyessä nollaa myös $x_\epsilon \longrightarrow x^*$, $y_\epsilon \longrightarrow y^*$ ja $v_\epsilon \longrightarrow v$. Kun siis $\epsilon \longrightarrow 0$, voidaan kirjoittaa, että

$$f(x, y^*) \leq v \leq f(x^*, y)$$

kaikilla $(x, y) \in C \times D$. Voidaan siis todeta, että $v^- = v^+ = v$ ja (x^*, y^*) on satulapiste ilman, että f on aidosti konkaavi-konveksi funktio. $\square$

3. MATRIISIMENETELMÄT

3.1 2×2-pelien ratkaiseminen

Ennen 2×2-pelien ratkaisemista määritellään pelin maksun *odotusarvo*. Pelin maksun odotusarvo on vain oletus, sillä pelin maksu ei välttämättä täsmää odotusarvoon. Kuitenkin kun peliä pelataan monta kertaa, niin pelin maksujen keskiarvo on lähellä odotusarvoa.

Määritelmä 3.1. Olkoon X ja Y pelaajien I ja II strategiamatriisit, mitkä ovat toisistaan riippumattomasti valittuja. Tällöin pelin maksun odotusarvo

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = XAY^T.$$

Pelin maksun odotusarvo on nopeasti laskettavissa, kun käsitellään vain 2×2-pelimatriiseja. Nyt siis kummallakin pelaajalla on kaksi puhdasta strategiaa, eli voidaan merkitä pelaajien strategiamatriiseja yksinkertaisesti $X = (x, 1-x)$ ja $Y = (y, 1-y)$. Lisäksi pelimatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

on yksinkertainen 2×2-matriisi. Näillä tiedoilla pelin maksun odotusarvoksi saadaan

$$E(X,Y) = XAY^T = xy(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + x(a_{12} - a_{22}) + y(a_{21} - a_{22}) + a_{22}.$$

2×2-pelin maksun odotusarvosta voidaan selvittää molempien pelaajien optimaaliset sekastrategiat ja pelin arvo. [1]

Lause 3.2. (vrt. [1, s. 61]) 2×2*-pelillä on seuraavat pelaajien optimaaliset sekastrategiat ja pelin arvo, kun pelillä ei ole optimaalisia puhtaita strategioita. Pelaajien optimaaliset sekastrategiat ovat* $X^* = (x^*, 1-x^*)$ *ja* $Y^* = (y^*, 1-y^*)$*, missä*

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \quad \text{ja} \quad y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Ja pelin arvo on

$$v(A) = E(X^*, Y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Lauseen 3.2 kaavat voidaan esittää myös matriisimuodossa. Tällöin voidaan käyttää merkintää, missä optimaaliset sekastrategiat

$$X^* = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^*}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \text{ja} \quad Y^{*T} = \frac{A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}},$$

sekä pelin arvo

$$v(A) = \frac{\det(A)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Edellisissä merkinnöissä mukana olevalla matriisilla A^* tarkoitetaan pelimatriisin A käänteismatriisia ilman determinantilla jakamista. Eli matriisi

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Huomionarvoista on, että tilanteissa, joissa pelillä on puhtailla strategioilla satulapiste, Lausetta 3.2 ei voida hyödyntää. Tällaisissa tapauksissa täytyy käyttää luvun kaksi metodeja. Käydään seuraavaksi läpi miksi kaavoissa esiintyvän nimittäjän ollessa nolla voidaan todeta, että pelillä on satulapiste puhtailla strategioilla.

Olkoon pelimatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ja oletetaan, että $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$, eli $a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21}$. Huomataan, että oletus rajoittaa minimi ja maksimi alkioita. Alkiot a_{11} ja a_{22} eivät voi olla samaa aikaa minimejä tai maksimeja, koska tällöin oletettu yhtälö ei voisi toteutua. Samoin voidaan päätellä alkioiden a_{12} ja a_{21} kanssa. Tämä tarkoittaa, että kun riveiltä valitaan minimejä ja sarakkeilta maksimeja, täytyy minimien olla samalla sarakkeella ja maksimien olla samalla rivillä.

Kun etsitään pelin ala-arvoa, niin rivien minimien löytämisen jälkeen selvitetään, kumpi minimeistä on suurempi. Samalla saadaan selville, kumpi on maksimirivi. Samoin tapahtuu, kun etsitään yläarvoa, sarakkeiden maksimeista valitaan kumpi on pienempi, eli selvitetään samalla minimi sarake. Voidaan siis päätellä, että ala-arvoa ja yläarvoa selvitettäessä päädytään samaan alkioon, kun $a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21}$.

Jos 2×2-pelin alkioilla on ominaisuus $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$, voidaan pelille löytää optimaaliset puhtaat strategiat. Muulloin voidaan käyttää Lauseessa 3.2 esitettyjä kaavoja. Käydään seuraavaksi läpi, miten Lauseen 3.2 kaavat saadaan johdettua.

Merkittään, että funktio $f(x, y) = E(X, Y)$, missä $X = (x, 1-x)$ ja $Y = (y, 1-y)$ sekä $0 \le x, y \le 1$.

Tällöin voidaan kirjoittaa, että

$$f(x,y) = E(X,Y) = XAY^T = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}$$

$$= x(y(a_{11} - a_{21}) + (1-y)(a_{12} - a_{22})) + y(a_{21} - a_{22}) + a_{22}$$

Seuraavaksi selvitetään funktion f kriittiset pisteet. Nyt voidaan jättää huomiotta tapaukset, joissa $x, y = 0$ tai $x, y = 1$, koska funktiolla ei ole puhtaita optimaalisia strategioita. Voidaan siis laskea funktiosta $f(x,y)$ sen osittaisderivaatat. Saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{12} - a_{22}$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{21} - a_{22}.$$

Koska etsitään kriittisiä pistetä, astetetaan osittaisderivaatat nolliksi. Eli kirjoitetaan, että

$$y(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{12} - a_{22} = 0$$

ja

$$x(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{21} - a_{22} = 0,$$

eli

$$y = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

ja

$$x = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Vielä täytyy selvittää kriittisen pisteen laatu. Laatu voidaan selvittää helposti Hessen matriisin determinantilla, koska kyseessä on 2×2-matriisi. Eli kun lasketaan toisen kertaluvun osittaisderivaatat, päästään tulokseen, jossa

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \\ a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt matriisin H determinatti

$$\det(H) = -(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})^2 < 0.$$

Koska tulos on pienempää kuin nolla voidaan todeta, että Hessen matriisin ominaisarvot ovat erimerkkiset, eli kyseessä on satulapiste. Kirjoitetaan nyt

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \quad \text{ja} \quad y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

kuvaamaan optimaalisia sekastrategioita. [1]

Esimerkki 3.3 (2 × 2-pelin ratkaiseminen)**.** Olkon pelimatriisi

$$A = \begin{bmatrix} -32 & 4 \\ 74 & -27 \end{bmatrix}.$$

Käytetään Lauseesta 3.2 johdettuja matriisimuotoisia kaavoja pelin ratkaisemiseen. Pelaajien optimaalisiksi sekastrategioiksi saadaan

$$X^* = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^*}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & -4 \\ -74 & -32 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & -4 \\ -74 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0.737 & 0.263 \end{bmatrix}$$

ja

$$Y^{*T} = \frac{A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} -27 & -4 \\ -74 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & -4 \\ -74 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0.226 \\ 0.774 \end{bmatrix}.$$

Lisäksi pelin arvoksi saadaan

$$v(A) = \frac{\det(A)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-32 * (-27) - 4 * 74}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & -4 \\ -74 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = -4.146.$$

3.2 Kääntyvät pelimatriisit

Käsitellään seuraavaksi kääntyviä pelimatriiseja. Tällaisissa tilanteissa kummallakin pelaajalla täytyy olla sama määrä strategioita, eli pelimatriisi on $n \times n$-kokoinen matriisi. Lisäksi pelimatriisin determinantti täytyy olla nollasta poikkeava, jotta matriisilla on käänteismatriisi.

Oletetaan alkuun, että pelaajan I optimaalinen strategia on *täydellinen sekastrategia*. Täydellinen sekastrategia on sekastrategia, jossa jokaista riviä pelataan positiivisella todennäköisyydellä, eli $x_i > 0$, missä $i = 1, 2, ..., n$.

Pelaajan I ja pelaajan II optimaalisten sekastrategioiden pelaaminen toisiaan vastaan täytyy luonnollisesti päätyä pelin arvoon. Voidaan siis kirjoittaa, että

$$E(i, Y^*) = {}_iAY^{*T} = v(A),$$

missä $i = 1, 2, ..., n$ ja ${}_iA$ on matriisin A i. rivivektori. Kun käytetään laskutoimituksissa apuna vektoria $J_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, voidaan yksinkertaistaa edellinen yhtälö muotoon

$$AY^{*T} = v(A)J_n^T = \begin{bmatrix} v(A) \\ v(A) \\ \vdots \\ v(A) \end{bmatrix}.$$

Jos pelin arvo on nolla, päädytään ristiriitaan, jossa pelaajan II sekastrategia olisi täynnä nollia. Tämä johtuu siitä, että kyseessä on homogeeninen yhtälöryhmä ja pelimatriisi A on kääntyvä, jolloin yhtälön ainoa ratkaisu on $Y^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Näin ei voi kuitenkaan olla, sillä pelaajan II sekastrategian todennäköisyyksien summan täytyy olla yksi. Pelin arvo täytyy siis olla nollasta eroava.

Pelaajan II optimaalinen sekastrategia saadaan nyt selvitettyä, kun kerrotaan yhtälö molemmin puolin pelimatriisin A käänteismatriisilla. Saadaan siis, että

$$A^{-1}AY^{*T} = Y^{*T} = v(A)A^{-1}J_n^T.$$

Täytyy vielä selvittää pelin arvo $v(A)$. Tiedetään, että sekastrategian alkioiden summa täytyy olla yksi, joten voidaan kirjoittaa, että

$$J_nY^{*T} = 1 = v(A)J_nA^{-1}J_n^T.$$

Oletuksella, että pelaajan I optimaalinen sekastrategia on täydellinen, voidaan selvittää, että pelaajan II optimaalinen sekastrategia

$$Y^{*T} = \frac{A^{-1}J_n^T}{J_nA^{-1}J_n^T}$$

ja että pelin arvo

$$v(A) = \frac{1}{J_nA^{-1}J_n^T}.$$

Samoin voidaan selvittää pelaajan I optimaalinen sekastrategia. Oletuksena on siis, että pelaajan II optimaalinen strategia on täydellien sekastrategia. Tällöin pelaajan I optimaalinen sekastrategia

$$X^* = \frac{J_nA^{-1}}{J_nA^{-1}J_n^T}.$$

Jotta lopputuloksia näistä kaavoista voidaan käyttää, täytyy tarkistaa, että saaduissa strategioissa ei ole negatiivisia alkioita. Olemme siis saaneeet todistettua seuraavaksi esitettävän lauseen. [1]

Lause 3.4. *Oletetaan, että pelimatriisille $A_{n\times n}$ on olemassa käänteimatriisi A^{-1}, $J_nA^{-1}J_n^T \neq 0$ ja että pelin arvo $v(A) \neq 0$. Tällöin pelin arvoksi ja pelaajien optimaalisiksi sekastrategioiksi saadaan*

$$v(A) = \frac{1}{J_nA^{-1}J_n^T}, \quad X^* = \frac{J_nA^{-1}}{J_nA^{-1}J_n^T} \quad \textit{ja} \quad Y^{*T} = \frac{A^{-1}J_n^T}{J_nA^{-1}J_n^T},$$

missä $J_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *ja pelaajien strategiat ovat muotoa* $X^* = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ *ja* $Y^* = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$. *Jos lopputuloksessa* $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ *ja* $y_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$, *lopputulosta voidaan pitää toimivana. Tällöin pelimatriisin A satulapiste on* (X^*, Y^*).

On kuitenkin pelejä, joissa pelin arvo on nolla. Luonnollisesti myös nämä halutaan osata ratkaista. Tällaisille tapauksille voidaan myös käyttää edellisiä kaavoja, mutta pelimatriisia täytyy manipuloida ennen kaavojen käyttöä. Jotta voidaan varmistua siitä, että pelin arvo ei ole nolla, voidaan lisätä jokaiseen pelimatriisin alkioon vakio, jolla kaikki alkiot muuttuvat positiivisiksi. Huomionarvoista on, että vakion lisääminen ei vaikuta rivien tai sarakkeiden pelaamisen todennäköisyyteen sekä se, että alkuperäisen pelin arvo voidaan selvittää vähentämällä pelin arvosta pelimatriisiin lisätty vakio.

Samanlaista menetelmää voidaan käyttää tapauksissa, joissa pelimatriisilla ei ole olemassa käänteismatriisia. Tällöin voidaan yrittää löytää käänteismatriisi pelimatriisille, johon on lisätty vakio. Menetelmä ei kuitenkaan aina toimi, sillä uudelle pelimatriisille ei välttämättä myöskään ole olemassa käänteismatriisia. Seuraavaksi käydään läpi esimerkit, jotka havainnollistavat $n \times n$-matriisipelien ratkaisemista.

Esimerkki 3.5 (3 × 3-peli)**.** Ratkaistaan peli, jossa pelimatriisina on matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan selvittämällä A:n käänteismatriisi A^{-1}. Matlabilla laskettuna känteismatriisiksi tulee

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 20 & 20 & -12 \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Sijoitetaan nyt saatu käänteismatriisi Lauseessa 3.4. esiteltyihin kaavoihin. Saadaan pelin arvo

$$v(A) = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 20 & 20 & -12 \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 1.263,$$

pelaajan I optimaalinen sekastrategia

$$X^* = \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -9 & 9\\ 20 & 20 & -12\\ 4 & 4 & 12\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -9 & 9\\ 20 & 20 & -12\\ 4 & 4 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0.579 & 0.263 & 0.158\end{bmatrix}$$

ja pelaajan II optimaalinen sekastrategia

$$Y^{*T} = \frac{A^{-1} J_n^T}{J_n A^{-1} J_n^T} = \frac{\begin{bmatrix}9 & -9 & 9\\ 20 & 20 & -12\\ 4 & 4 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -9 & 9\\ 20 & 20 & -12\\ 4 & 4 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0.158\\ 0.491\\ 0.351\end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3.6 (Taikaneliömatriisi)**.** Taikaneliömatriisissa jokaisen rivin ja sarakeen alkioiden summa on saman suuruinen. Nyt esimerkisksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix}11 & 24 & 7 & 20 & 3\\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16\\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9\\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22\\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15\end{bmatrix}$$

aste on 5 ja summa on 65. Selvitetään, miten voidaan ratkaista helposti mikä tahansa taikaneliomatriisipeli.

Tiedetään, että

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) = v(A) \leq E(X^*,Y),$$

eli kumpikin pelaaja vain huonontaa omia mahdollisuuksiaan, jos ei valitse optimaalista strategiaansa. Samalla huomataan, että jos

$$E(X,Y^*) = E(X^*,Y),$$

niin täytyy olla kyseessä pelin arvo.

Jos pelaajan I sekastrategia olisi sellainen, missä jokaista riviä pelattaan yhtä useasti, niin päästään etenemään yksinkertaisesti. Helppous johtuu siitä, että tällöin voidaaan ajatella, että pelin odotusarvo on keskiarvo pelaajan II valitsemasta sarakkeesta. Lisäksi koska jokaisen sarakkeen summa on sama, pelaajan II strategian valinnalla ei ole väliä. Nyt siis jos pelaajan I sekastartegia on $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, pelin odotusarvoksi saadaan

$$E(X, Y^*) = \frac{65}{5} = 13.$$

Samalla tavalla voidaan edetä pelaajan II näkökulmasta. Jos kaikkia sarakkeita pelataan yhtä useasti, eli $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, saadaan pelin odotusarvoksi

$$E(X^*, Y) = \frac{65}{5} = 13,$$

koska jokaisen rivin summa on sama.

Nyt päädytään tapaukseen, jossa $E(X, Y^*) = E(X^*, Y)$ eli kyseessä on pelin arvo $v(A)$. Voidaan siis kirjoittaa, että

$$E(X^*, Y^*) = v(A) = 13,$$

missä $X^*, Y^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Todetaan, että taikaneliömatriisien ratkaisemiseen voidaan käyttää yksinkertaista kikkaa, jossa taikasumma jaetaan matriisin rivien (sarakkeiden) määrällä. Tällöin pelaajien optimaaliset sekastrategiat ovat muotoa $\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$, missä n on matriisin rivien (sarakkeiden) määrä.

3.3 Symmetriset pelit

Tarkastellaan vielä lopuksi, millaisia ominaisuuksia symmetrisillä peleillä on. Symmetrisissä peleissä pelaajat voivat olettaa saavansa saman maksun kuin vastapuolen pelaaja kopioimalla vastapelaajan strategian. Tällöin pelimatriisilla A täytyy olla ominaisuus $A = -A^T$, eli se on vinosymmetrinen matriisi.

Vinosymmetrisyys voidaan päätellä miettimällä pelaajien näkökulmia pelin maksuihin. Jos pelaajan I näkökulmasta pelimatriisi on A, niin pelaajan II näkökulmasta se täytyy olla $-A$, koska pelin maksun etumerkki täytyy vaihtaa. Lisäksi nyt koska pelaaja II haluaa valita sarakkeen, jossa on mahdollisimman suuria alkioita, vaihdetaaan nämä riveiksi. Otetaan siis transpoosi matriisista $-A$, koska halutaan, että rivipelaaja on maksimoija ja että sarakepelaaja on minimoija. Päädytään siis matriisiin $-A^T$. Nyt jos $A = -A^T$ niin kyseessä on symmetrinen peli.

Lause 3.7. *Minkä tahansa symmetrisen pelin arvo $v(A) = 0$, ja jos strategia X^* on optimaalinen pelaajalle I, niin se on myös optimaalinen pelaajalle II.*

Todistus. (vrt. [1, s. 77]) Olkoon X pelaajan I sekastrategia. Tarkastellaan symmetrisen pelin A odotusarvoa, jos pelaaja II käyttää samaa strategiaa X. voidaan kirjoittaa, että

$$E(X, X) = XAX^T = -XA^TX^T = -(XA^TX^T) = -XAX^T = -E(X, X).$$

Koska $E(X,X) = -E(X,X)$, täytyy olla, että pelin odotusarvo $E(X,X) = 0$. Tarkastellaan lisäksi tilannetta, jossa pelaajan II strategia ei olekaan sama kuin pelaajan I. Voidaaan kirjoittaa, että

$$E(X,Y) = XAY^T = -XA^TY^T = -(XA^TY^T) = -YAX^T = -E(Y,X).$$

Olkoon piste (X^*, Y^*) pelin satulapiste. Satulapisteen ominaisuuksiin kuuluu, että

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y) \text{ kaikilla } (X,Y).$$

Näillä tiedoilla voidaan kirjoittaa, että

$$E(X,Y^*) = -E(Y^*,X) \leq E(X^*,Y^*) = -E(Y^*,X^*) \leq E(X^*,Y) = -E(Y,X^*)$$

eli

$$-E(Y^*,X) \leq -E(Y^*,X^*) \leq -E(Y,X^*) \Rightarrow E(Y,X^*) \leq E(Y^*,X^*) \leq E(Y^*,X).$$

Tästä tuloksesta voidaan tulkita, että sekastrategia Y^* olisi pelaajan I optimaalinen strategia ja että sekastrategia X^* olisi pelaajan II optimaalinen strategia. Voidaan siis päätellä, että $X^* = Y^*$ ja että

$$E(X^*,Y^*) = -E(Y^*,X^*) \Rightarrow v(A) = 0.$$

Osoitetaan vielä, että piste (X^*, X^*) on satulapiste, eli

$$E(X,X^*) \leq E(X^*,X^*) \leq E(X^*,Y) \text{ kaikilla } (X,Y).$$

Koska $E(X^*,X^*) = E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y)$ ja $E(X,X^*) \leq E(X^*,X^*)$, piste (X^*,X^*) on satulapiste. □

Esimerkki 3.8 (Kivi-paperi-sakset)**.** Tarkastellaan alussa esiteltyä Kivi-paperi-sakset -esimerkkiä 2.1. Huomataan, että kyseessä on symmetrinen peli, sillä pelimatriisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -A^T.$$

Nyt Lauseen 3.7 nojalla voidaan todeta, että pelin arvo $v(A) = 0$ ja että pelaajien optimaaliset strategiat ovat samanlaiset. Ratkaistaan vielä pelaajien optimaaliset strategiat. Koska pelin arvo $v(A) = 0$, täytyy matriisiin lisätä vakio, jotta pelille voidaan hyödyntää Lauseessa 3.4 mainittuja kaavoja. Jatketaan lisäämällä vakio 1 matriisiin A, saadaan matriisi

$$A + 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt matriisille $A + 1$ voidaan löytää käänteismatriisi. MatLabilla laskettuna käänteismatriisi

$$(A+1)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt Lauseen 3.4 nojalla pelaajan I ja samalla pelaajan II optimaaliseksi sekastrategiaksi saadaan

$$X^* = \frac{J_n(A+1)^{-1}}{J_n(A+1)^{-1}J_n^T} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

4. YHTEENVETO

Peliteoria on hyvin keskeisessä roolissa nykypäivän päätöksenteossa. Siksi peliteorian ymmärtäminenkin on entistä tärkeämpää. Tämä työn tavoitteena oli pyrkiä avaamaan lukijalle muutamia peliteorian työkaluja.

Työssä perehdytään ensin käsitteisiin, joiden avulla pystytään ymmärtää minimax-lausetta. Minimax-lause on keskeinen tulos, koska sen avulla voidaan todeta, että pelillä on satulapiste. Käsitteitä, joita käydään läpi, ovat muun muassa strategiat ja pelin arvo. Tekstissä tarkastellaan esimerkkejä, joilla havainnollistetaan käsitteitä.

Työn loppupuolella käsitellään pelien ratkaisemista matriisimenetelmillä. Yksinkertaisille 2×2-pelille pystytään ratkaista matriisiyhtälöt, joilla pelaajien optimaaliset sekastrategiat saadaan selville. Kääntyville $n \times n$-kokoisille matriiseille löydetään samantapaiset yhtälöt, jolloin pystytään ratkaista hieman suurempia pelejäkin. Lopuksi käsitellään vielä symmetristen pelien ominaisuuksia.

LÄHTEET

[1] E. N. Barron. *Game theory an introduction*. eng. 2nd ed. Wiley series in operations research and management science. Hoboken, N.J: John Wiley Sons, Inc., 2013. ISBN: 1-118-54716-0.