Roope Ahtikoski

FUNKTIOJONOJEN SUPPENEMINEN

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2022

Tiivistelmä

Roope Ahtikoski: Funktiojonojen suppeneminen
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Huhtikuu 2022

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä funktiojonojen suppenemista. On tarkoitus antaa lukijalle käsitys funktiojonojen pisteittäisestä ja tasaisesta suppenemisesta sekä valmiudet käsitellä näitä käsitteitä matemaattisissa todistuksissa.

Tutkielmassa esitellään ensin funktiojonojen pisteittäinen suppeneminen määritelmän sekä lauseen avulla. Määrittelyn jälkeen funktiojonojen pisteittäistä suppenemista käytetään kahden paloittain määriteltyihin funktioihin liittyvän esimerkkitehtävän todistuksissa.

Funktiojonojen tasainen suppeneminen esitellään yhden määritelmän avulla. Tämän jälkeen käydään läpi esimerkki, joka käsittelee funktiojonojen pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välistä eroa, ja on siten käsitteiden syvällisemmän ymmärtämisen sekä käytännön soveltamisen kannalta tärkeä. Esimerkin jälkeen käytetään funktiojonojen tasaista suppenemista kahden lauseen todistuksissa, joista toinen liittyy jatkuvuuteen ja toinen integroituvuuteen.

Esimerkkien ja lauseiden tarkoituksena on laajentaa lukijan ymmärrystä käsitteisiin liittyen sekä esittää, miten käsitteitä voidaan käyttää. Lauseisiin liittyvät aiheet, kuten jatkuvuus ja integroituvuus, ovat tutkielmassa toissijaisia ja ensisijaisena tarkoituksena on esitellä lukijalle tutkielman käsitteitä käytännössä matemaattisten todistusten kontekstissa. Lisäksi tutkielmassa pyritään tekemään lukijalle selväksi funtiojonojen pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välinen ero, sekä sanallisesti, että esimerkin avulla. Ajatuksena on, että luettuaan tutkielman lukijalla on käsitys funktiojonojen pisteittäiseen ja tasaiseen suppenemiseen liittyvistä perusasioista sekä valmiudet käsitellä näitä käsitteitä muissa matemaattisissa konteksteissa.

Lukijalta oletetaan perusanalyysin tuntemusta - oletetaan erityisesti kokemusta analyysiin liittyvistä todistuksista. Tutkielman päälähdeteoksena käytetään William R. Waden kirjaa An Introduction to analysis, second edition. Lisäksi lähteinä käy-

tetään J. Leblin teosta Basic analysis: Introduction to real analysis sekä William F. Trenchin teosta Introduction to real analysis.

Avainsanat: funktiojono, pisteittäinen suppeneminen, tasainen suppeneminen

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastelemme funktiojonojen suppenemista. Käsittelemme ensin luvussa 3.1 funktiojonojen pisteittäistä suppenemista, minkä jälkeen siirrymme käsittelemään funktiojonojen tasaista suppenemista luvussa 3.2.

Luvussa 3.1 esitämme aluksi määritelmän funktiojonojen pisteittäiselle suppenemiselle sekä lauseen, joka toimii myös tapana määritellä kyseinen käsite. Tämän jälkeen esitämme kaksi esimerkkiä, joista tulee ilmi, miten funktiojonojen pisteittäistä suppenemista voidaan käytännössä käsitellä todistuksissa.

Luvussa 3.2 määrittelemme aluksi funktiojonojen tasaisen suppenemisen käsitteen. Sen jälkeen esitämme esimerkin, jossa tulee ilmi funktiojonojen pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välinen ero. Lopuksi tarkastelemme kahden lauseen todistuksia, jotka liittyvät tasaisen suppenemisen lisäksi jatkuvuuteen sekä integroituvuuteen.

Esimerkkien sekä lauseiden tarkoituksena tässä tutkielmassa on esitellä, miten funktiojonojen pisteittäistä ja tasaista suppenemista voidaan käsitellä todistuksissa ja aiheet, kuten jatkuvuus tai integroituvuus ovat tässä yhteydessä toissijaisia, mutta niitä tarvitaan käytännön syistä.

Esitietoihin (luku 2) on kerätty muutamia tarpeellisia määritelmiä sekä yksi lause, jota käytetään todistuksen apuna, mutta näiden lisäksi oletamme lukijalta perusanalyysin tuntemusta, eli hieman aiempaa kokemusta analyysiin liittyvistä todistuksista. Päälähdeteoksena käytämme William R. Waden kirjaa An Introduction to analysis, second edition. Käytämme lisäksi lähteinä J. Leblin teosta Basic analysis: Introduction to real analysis sekä William F. Trenchin teosta Introduction to real analysis.

2 Esitietoja

Tässä luvussa esitetään kolme määritelmää sekä yksi lause, joita käytetään apuna luvun 3 esimerkeissä ja lauseiden todistuksissa. Määritelmä 2.1 määrittelee lyhyesti funktiojonon. Määritelmä 2.2 koskee lukujonon suppenemista ja sitä käytetään apuna pisteittäistä suppenemista koskevan lauseen 3.1 todistuksessa. Määritelmä 2.3 liittyy Riemannin summan ylä- ja alarajoihin, joista on hyötyä lauseen 3.3 todistuksessa. Myös lausetta 2.1 käytetään apuna lauseen 3.3 todistuksessa ja se liittyy itseisarvojen käsittelyyn integroitaessa.

Määritelmä 2.1. Jos $f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n, \ldots$ ovat joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ määriteltyjä reaaliarvoja saavia funktioita, sanotaan, että $\{f_n\}$ on funktiojono joukossa A. [2, s. 234]

Määritelmä 2.2. Reaalilukujono $\{x_n\}$ suppenee kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaisella luvulla $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$\text{kun } n \geq N, \quad \text{niin } |x_n - a| < \epsilon.$$

[3, s. 34]

Määritelmä 2.3. Olkoon $[a, b]$ suljettu (ja rajoitettu) väli, $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ välin $[a, b]$ jako ja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajattu.

1) Riemannin summan yläraja funktiolle f ja jaolle P on

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(f)(x_j - x_{j-1}),$$

missä

$$M_j(f) = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),$$

eli funktion f pienin yläraja välillä $[x_{j-1}, x_j]$.

2) Riemannin summan alaraja funktiolle f ja jaolle P on

$$L(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(f)(x_j - x_{j-1}),$$

missä

$$m_j(f) = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),$$

eli funktion f suurin alaraja välillä $[x_{j-1}, x_j]$. [3, s. 107]

Lause 2.1. *Jos f on (Riemann) integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva välillä ja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Todistus (vrt. [3, s. 120]). Olkoon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Tutkitaan nyt pitääkö epäyhtälö

$$M_j(|f|) - m_j(|f|) \le M_j(f) - m_j(f) \tag{2.1}$$

paikkansa, kun $j = 1, 2, \ldots, n$.

Jos epäyhtälö pitää paikkansa, tarkoittaa se, että funktion $|f|$ suurimman ja pienimmän arvon väli ei ole suurempi kuin funktion f millään j:n arvolla. (Iso kirjan M viittaa supremumiin, eli pienimpään ylärajaan, ja pieni m infimumiin, eli suurimpaan alarajaan.)

Olkoot nyt $x, y \in [x_{j-1}, x_j]$. Nyt, koska kyseessä on itseisarvo, voidaan tutkia kahta mielekästä tilannetta. Ensimmäisessä tilanteessa $f(x)$ ja $f(y)$ ovat molemmat samanmerkkisiä (joko molemmat positiivisia, tai molemmat negatiiivisia). Tällöin tapauksessa, jossa molemmat ovat positiivisia, pätee

$$|f(x)| - |f(y)| = f(x) - f(y) \le M_j(f) - m_j(f),$$

ja, jos molemmat ovat negatiivisia, pätee

$$|f(x)| - |f(y)| = -f(x) + f(y) \le M_j(f) - m_j(f).$$

Toisessa tilanteessa $f(x)$ ja $f(y)$ ovat erimerkkisiä. Tässä tilanteessa on tärkeää huomata, että $m_j(f) < 0$. Tällöin, jos $f(x) \ge 0 \ge f(y)$, pätee

$$|f(x)| - |f(y)| = f(x) + f(y) \le M_j(f) + 0 \le M_j(f) - m_j(f),$$

ja, jos $f(y) \ge 0 \ge f(x)$, pätee

$$|f(x)| - |f(y)| = -f(x) - f(y) \le M_j(f) + 0 \le M_j(f) - m_j(f).$$

Huomataan siis epäyhtälön $M_j(|f|) - m_j(|f|) \le M_j(f) - m_j(f)$ pitävän paikkansa jokaisessa tilanteessa.

Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Koska f on integroituva välillä $[a, b]$, voidaan valita välin $[a, b]$ jako P siten, että $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Epäyhtälön 2.1 nojalla $U(|f|, P) - L(|f|, P) \le U(f, P) - L(f, P)$. Siispä

$$U(|f|, P) - L(|f|, P) < \epsilon.$$

Siis $|f|$ on integroituva välillä $[a,b]$. Lisäksi, koska kaikilla $x \in [a,b]$ pätee $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, niin voidaan päätellä, että

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

$\square$

3 Funktiojonojen suppeneminen

3.1 Pisteittäinen suppeneminen

Tässä luvussa käsittelemme funktiojonojen pisteittäistä suppenemista. Aluksi määrittelemme käsitteen, ensiksi määritelmän 3.1 avulla ja tämän jälkeen vielä toisella tavalla lauseessa 3.1, johon esitämme myös todistuksen. Määrittelyn jälkeen käytämme pisteittäistä suppenemista hyväksi kahden esimerkkitehtävän ratkaisemisessa.

Määritelmä 3.1. Olkoon E joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko. Funktiojono $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ suppenee pisteittäin joukossa E, jos jokaiselle alkiolle $x \in E$ pätee $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. [3, s. 182]

Yllä määriteltiin funktiojonojen pisteittäinen suppeneminen, mutta alla olevan lauseen voi mieltää toiseksi tavaksi määritellä pisteittäinen suppeneminen.

Lause 3.1. *Olkoon E joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko ja $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ funktiojono. Tällöin funktiojono f_n suppenee kohti funktiota f pisteittäin joukossa E, jos ja vain jos jokaiselle $\epsilon > 0$ ja $x \in E$ on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, jolle pätee*

$$\text{kun } n \geq N, \quad \text{niin } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Todistus (vrt. [3, s. 182]). Määritelmän 3.1 mukaan funktiojono f_n suppenee kohti funktiota f, jos ja vain jos $f_n(x) \to f(x)$ jokaisella $x \in E$. Määritelmän 2.2 mukaan $f_n(x) \to f(x)$, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ ja $x \in E$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kun $n \geq N$, niin $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. □

Pisteittäisessä suppenemisessa on tärkeää huomata, että N saa riippua muuttujan ϵ lisäksi muuttujasta x. Siis jokaiselle x voidaan valita eri N. [1, s. 191]

Seuraavaksi demonstroimme pisteittäistä suppenemista kahdessa paloittain määriteltyihin funktiojonoihin liittyvässä esimerkissä.

Esimerkki 3.1. Olkoon S_n lukujoukko jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n, missä alkiot ovat muotoa $x = p/q$ ja p ja q ovat kokonaislukuja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Lisäksi $1 \leq q \leq n$. Määrittele

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in S_n \\ 0 & \text{kun } x \notin S_n \end{cases}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 235–236]). Huomioidaan aluksi joukon S_n alkioihin liittyvän säännön perusteella, että jos x kuuluu joukkoon S_n, sen on oltava rationaaliluku. Voidaan päätellä, että jos x on mikä tahansa rationaaliluku, se kuuluu joukkoon S_n luvun n ollessa tarpeeksi suuri ($1 \leq q \leq n$, joten, mitä suurempi luku n on, sitä enemmän rationaalilukuja joukkoon S_n kuuluu). Tällöin $f_n(x) = 1$. Jos taas x on irrationaaliluku, se ei kuulu joukkoon S_n millään arvolla n ja tällöin $f_n(x) = 0$ (kaikilla $n \geq 1$). Siis

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ 0 & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases},$$

eli funktiojono f_n suppenee pisteittäin kohti funktiota f. □

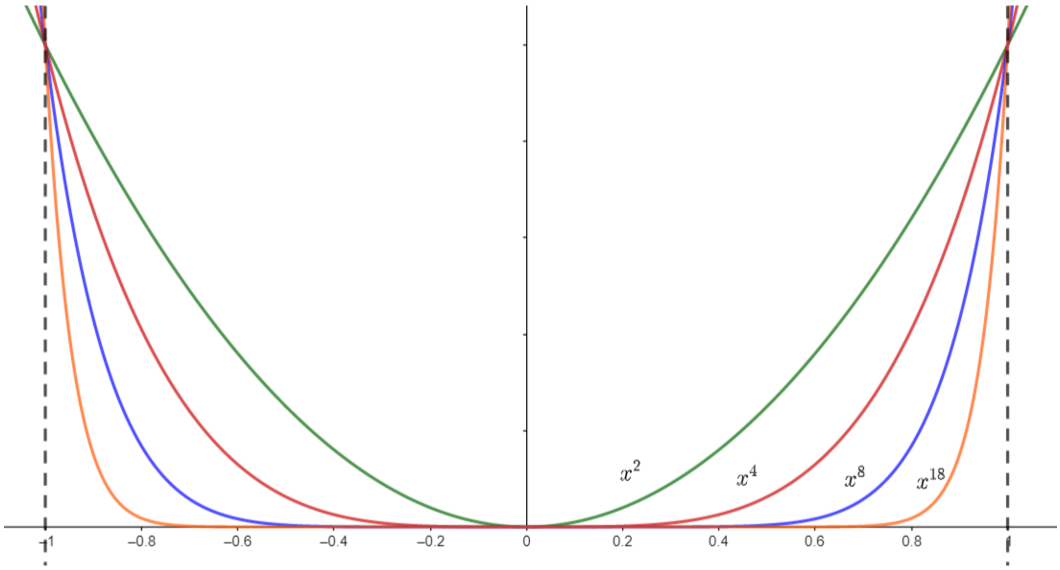
Esimerkki 3.2. Osoita, että funktiojono $f_n(x) = x^{2n}$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ välillä $[-1,1]$, missä

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x = -1 \text{ tai } x = 1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Todistus (vrt. [1, s. 190]). Osoitetaan ensin, että $f_n(x)$ suppenee kohti nollaa, kun $x \in (-1,1)$. Tällä avoimella välillä $0 \leq x^2 < 1$, joten

$$|x^{2n} - 0| = (x^2)^n \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Kun $x = -1$ tai $x = 1$, niin $x^{2n} = 1$ kaikilla luvun n arvoilla. Siis $f_n(x) \to f(x)$ pisteittäin välillä $[-1,1]$. □



Kuva 3.1. Esimerkin 3.2 tilanne. Kuvasta näkyy funktiojonon $f_n(x) = x^{2n}$ funktiot f_1, f_2, f_4 ja f_9. Huomataan, että funktiojonon arvot lähestyvät funktion $f(x)$ arvoja.

3.2 Tasainen suppeneminen

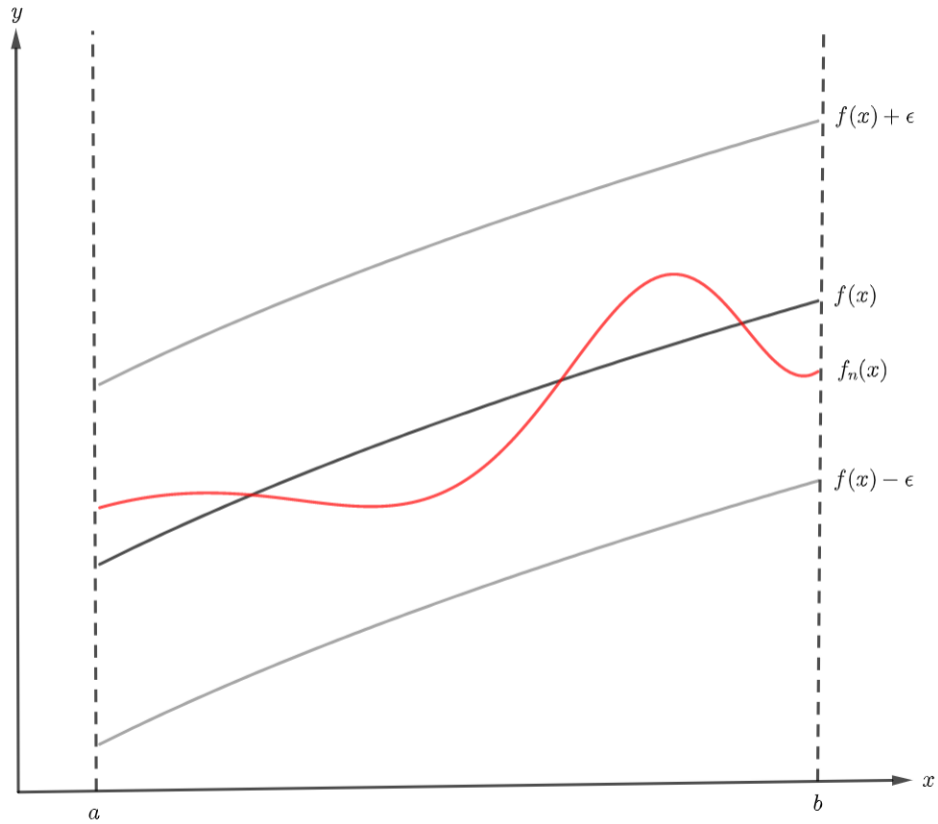
Tässä luvussa käsittelemme funktiojonojen tasaista suppenemista. Määrittelemme aluksi käsitteen ja sen jälkeen esitämme yhden esimerkin, joka käsittelee funktiojonojen pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välistä eroa. Tämän jälkeen käytämme funktiojonojen tasaista suppenemista kahden lauseen todistamisessa, joista ensimmäinen (lause 3.2) käsittelee funktiojonojen jatkuvuutta, ja toinen (lause 3.3) integroituvuutta.

Määritelmä 3.2. Olkoon E joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko. Funktiojono $f_n\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ suppenee tasaisesti joukossa E kohti funktiota f, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $x \in E$ pätee

$$\text{kun } n \geq N, \quad \text{niin } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

[3, s. 184]

Tasaisen suppenemisen yhteydessä N ei saa riippua muuttujasta x. Tämä on ero pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välillä ja kertoo siitä, että pisteittäisessä suppenemisessa x:n arvot miellettiin yksittäisiksi tilanteiksi, kun taas tasaisessa suppenemisessa näin ei tehdä.



Kuva 3.2. Tasainen suppeneminen. Voidaan valita n niin, että funktiojonon $f_n(x)$ funktiot ovat mielivaltaisen lähellä funktiota $f(x)$ (välillä $[a, b]$) kaikilla x.

Seuraavassa esimerkissä tuomme esille tärkeän eron pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välillä. Esimerkissä tulee ilmi muun muassa, miten funktio voi olla jollain välillä pisteittäin suppeneva, muttei tasaisesti suppeneva (kohti tiettyä arvoa).

Esimerkki 3.3. Osoita, että $x^n \to 0$ tasaisesti välillä $[0, b]$ kaikilla $b < 1$, ja pisteittäin, muttei tasaisesti välillä $[0, 1)$.

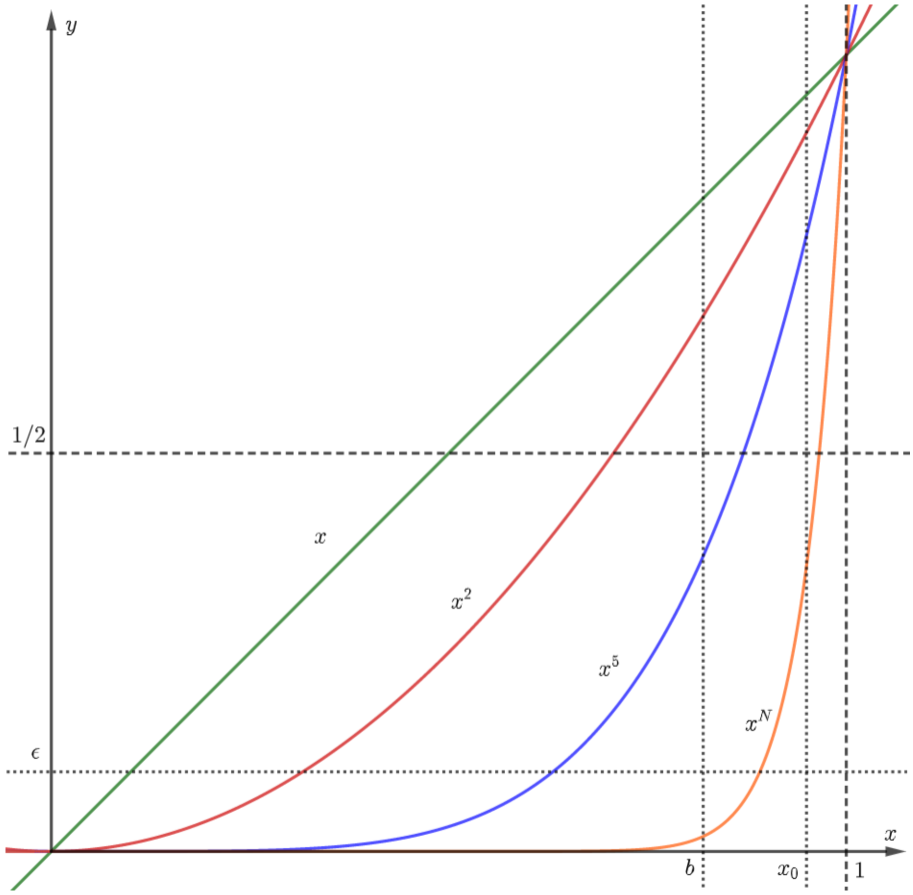
Todistus (vrt. [3, s. 184-185]). Olkoon $b < 1$. Nyt jokaisella $\epsilon > 0$ voidaan valita $N \in \mathbb{N}$ siten, että kun $n \geq N$, niin $|b^n - 0| < \epsilon$, eli $b^n < \epsilon$. Tämä onnistuu siksi, koska b:n ollessa mikä tahansa (kiinnitetty) luku välillä $[0, 1)$ voidaan potenssia n kasvattaa tarpeeksi suureksi, jotta saadaan luku, joka on mielivaltaisen lähellä nollaa. Nyt, koska $x \in [0, b]$, pätee

$$\text{kun } n \geq N, \quad \text{niin } |x^n| \leq b^n < \epsilon.$$

Siis $x^n \to 0$ tasaisesti, kun $x \in [0, b]$.

Koska $x^{n+1} < x^n$ ja lisäksi $x^n \geq 0$ jokaisella $x \in [0,1)$, voidaan päätellä, että $x^n \to 0$ pisteittäin välillä $[0,1)$.

Tehdään nyt vastaoletus, että $x^n \to 0$ tasaisesti välillä $[0,1)$. Nyt, kun $0 < \epsilon < 1/2$, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x^N| < \epsilon$ kaikilla $x \in [0,1)$. Toisaalta $x^N \to 1$, kun $x \to 1-$, joten voimme valita $x_0 \in (0,1)$, jolla $x_0^N > \epsilon$. Saadaan siis aikaan ristiriita $\epsilon < x_0^N < \epsilon$. $\square$



Kuva 3.3. Kuvassa esimerkin 3.3 mukainen tilanne. Funktiojono $x^n \to 0$ tasaisesti välillä $[0,b]$, missä $b < 1$ (kiinnitetty), sillä voidaan valita tarpeeksi suuri N. Välillä $[0,1)$ tämä ei onnistu, sillä voidaan aina valita x_0, jolla $x_0^N > \epsilon$.

Seuraavaksi todistamme funktioiden jatkuvuuden periytyvän tasaisen suppenemisen yhteydessä (jossakin pisteessä).

Lause 3.2. *Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti avoimella välillä (a,b). Jos jokainen f_n on jatkuva jossain pisteessä $x_0 \in (a,b)$, niin f on jatkuva pisteessä $x_0 \in (a,b)$.*

Todistus (vrt. [3, s. 185]). Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\text{kun } n \geq N \text{ ja } x \in (a,b), \quad \text{niin } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3.$$

Jos f_N on jatkuva jossain pisteessä $x_0 \in (a,b)$, niin voidaan valita δ siten, että

$$\text{kun } |x - x_0| < \delta \text{ ja } x \in (a,b), \quad \text{niin } |f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon/3.$$

Oletetaan nyt, että $|x - x_0| < \delta$ ja $x \in (a,b)$. Tällöin (kolmioepäyhtälön nojalla)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Siis f on jatkuva pisteessä $x_0 \in (a,b)$. □

Lopuksi osoitamme alla olevassa lauseessa integroituvuuden periytyvän tasaisen suppenemisen yhteydessä (suljetulla välillä).

Lause 3.3. *Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti suljetulla välillä $[a,b]$. Jos jokainen f_n on integroituva välillä $[a,b]$, niin myös f on integroituva välillä, ja lisäksi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x (\lim_{n\to\infty} f_n(t))\,dt$$

tasaisesti kaikilla $x \in [a,b]$.

Todistus (vrt. [3, s. 186-187]). Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti, voidaan valita $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\text{kun } n \geq N, \quad \text{niin } |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Nyt, kun $n = N$, voidaan päätellä määritelmän 2.3 nojalla, että

$$U(f - f_N, P) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{ja} \quad L(f - f_N, P) \geq -\frac{\epsilon}{3}$$

jokaisella välin $[a,b]$ jaolla P. Edellinen päätelmä perustuu siihen, että erotuksen $f - f_N$ ylärajaksi asetettiin $\frac{\epsilon}{3(b-a)}$ (, ja samalla alarajaksi $-\frac{\epsilon}{3(b-a)}$), minkä jälkeen näistä muodostettiin integraalien ylä- ja alarajat kertomalla välin pituudella $(b-a)$.

Jos funktio on integroituva, tarkoittaa se, että integraalin ylä- ja alaraja saadaan mielivaltaisen lähelle toisiaan tihentämällä jakoa P. Koska f_N on integroituva, teemme näin eli

$$U(f_N, P) - L(f_N, P) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Edeltävistä tuloksista seuraa, että

$$U(f,P)-L(f,P) \leq U(f-f_N,P)+U(f_N,P)-L(f_N,P)-L(f-f_N,P) < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Siis f on integroituva.

Lisäksi edeltävien vaiheiden sekä lauseen 2.1 nojalla

$$\left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \frac{\epsilon(x-a)}{3(b-a)} < \epsilon$$

kaikilla $x \in [a,b]$ ja $n \geq N$. Tästä seuraa (huom. $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x (\lim_{n\to\infty} f_n(t))\,dt.$$

□

Lähteet

[1] Lebl, J., *Basic analysis: Introduction to real analysis*, 2013

[2] Trench, William F., *Introduction to real analysis*, 2013

[3] Wade, William R., *An introduction to analysis, second edition*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2000.