Tampereen yliopisto

Elina Nieminen

HYPERBOLISEN TASON GEOMETRIAA TARSKIN AKSIOOMIEN AVULLA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2022

Tiivistelmä

Elina Nieminen: Hyperbolisen tason geometriaa Tarskin aksioomien avulla
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2022

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan hyperbolisen tason geometriaan Tarskin aksioomien avulla. Alfred Tarski oli puolalainen, muuan muassa geometriaan erikoistunut, matemaatikko. Hän kehitteli 1920-luvulla oman aksioomajärjestelmänsä euklidiselle avaruudelle ja myöhemmin myös hyperboliselle avaruudelle. Tässä tutkielmassa tutustutaan näihin kumpaankin aksioomajärjestelmään. Pohjana Tarskin euklidisen geometrian aksioomille toimivat kreikkalaisen matemaatikko Eukleideen aksioomat, joihin myös tutustutaan tässä tutkielmassa. Tarskin aksioomien avulla todistetaan joitakin tärkeitä hyperbolisen tason tuloksia, kuten janojen kongruenssin transitiivuus. Suuri osa todistettavista tuloksista on yhteneviä euklidisen geometrian tulosten kanssa. Lisäksi vertaillaan Tarskin euklidisten ja hyperbolisten aksioomien välisiä eroja ja yhtäläisyyksiä.

Pääpaino tässä tutkielmassa on Tarskin hyperbolisen tason aksioomissa. Hyperbolinen taso on eräs epäeuklidinen geometria, missä tason voidaan ajatella olevan ikään kuin satulan mallinen eli moneen suuntaan kaareutuva. Tyypillistä hyperboliselle tasolle on geometristen kuvioiden vääristyminen.

Avainsanat: hyperbolinen geometria, Alfred Tarski, aksioomat

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään hyperbolisen tason geometriaan Tarskin aksioomien avulla. Hyperbolinen geometria on eräs epäeuklidinen geometria, missä tason voidaan ajatella olevan ikään kuin satulan mallinen eli moneen suuntaan kaareutuva. Tyypillistä hyperboliselle tasolle on geometristen kuvioiden vääristyminen.

Aloitetaan tähän aiheeseen tutustuminen käymällä läpi historiaa ja esitietoja luvussa 2. Tämän luvun ensimmäisessä alaluvussa 2.1 tutustutaan euklidiseen geometriaan. Alaluvussa 2.2 tutustutaan tarkemmin epäeuklidisen geometrian syntyyn. Alaluvussa 2.3 käydään läpi tässä tutkielmassa tarvittavia merkintöjä. Lopuksi alaluvussa 2.4 tutustutaan Tarskin euklidisen geometrian aksioomiin, jotka toimivat pohjana hyperbolisen tason aksioomille. Näihin aksioomiin tutustutaan luvussa 3.

Luvuissa 4 ja 5 käydään läpi hyperbolisen geometrian tuloksia, jotka voidaan todistaa luvussa 3 esitettyjen aksioomien avulla. Nämä molemmat luvut on jaettu alalukuihin sen perusteella, minkä tyyppisiä geometrisia ominaisuuksia tulokset koskevat. Tärkeimmät tulokset esitetään alaluvuissa 5.1 (janojen kongruenssin transitiivisuus) sekä 5.4 (Paschin ja viiden janan aksioomat). Näiden lisäksi käsitellään tuloksia liittyen janan ominaisuuksiin (alaluku 4.1), välissäoloon (alaluku 4.2), janojen eripituisuuteen (alaluku 4.3), laskutoimituksiin (alaluku 4.4), peilauksiin (alaluku 5.2) sekä kohtisuoruuteen (alaluku 5.3).

Lopuksi luvussa 6 pohditaan Tarskin hyperbolisen tason aksioomien yksinkertaisuutta (alaluku 6.1) ja vertaillaan euklidisen ja hyperbolisen tason aksioomia keskenään (alaluku 6.2).

Tässä tutkielmassa oletetaan, että lukijalla on perustiedot geometriasta sekä aksiomaattisesta ajattelusta. Aiempia tietoja Tarskista tai hyperbolisuudesta ei tarvita. Päälähteenä käytetään Victor Pambuccianin artikkelia ”The Simplest Axiom System for Plane Hyperbolic Geometry” julkaisussa *Studia Logica* [7]. Muita tärkeitä lähteitä ovat Alfred Tarskin ja Steven Givantin artikkeli ”Tarski's System of Geometry” julkaisussa *The Bulletin of Symbolic Logic* [2] sekä Thomas Heathin teos *The Thirteen Books of Euclid's Elements* [5].

2 Historiaa ja esitietoja

Tässä luvussa esitellään lyhyesti hyperbolisen geometrian historiaa. Jotta päästäisiin hyperboliseen geometriaan, on kuitenkin ensin perehdyttävä lyhyesti euklidiseen geometriaan. Alaluvussa 2.1 tutustutaan euklidisen geometrian syntyyn sekä Eukleideen aksioomiin ja postulaatteihin. Sen jälkeen alaluvussa 2.2 tutustutaan epäeuklidisen geometrian syntyyn. Alaluvussa 2.3 käydään läpi muutamia tässä tutkielmassa käytettäviä merkintöjä. Lopuksi alaluvussa 2.4 tutustutaan tarkemmin Alfred Tarskiin ja hänen työhönsä geometrian aksioomien parissa.

2.1 Eukleideen aksioomat

Eukleides (n. 300 eaa) oli kreikkalainen matemaatikko, joka loi pohjan aksiomaattiselle geometrialle. Eukleides esittää teoksessaan *Alkeet* 23 määritelmää, 5 postulaattia sekä 5 aksioomaa [5, s. 153-155]. Postulaatin ja aksiooman ero on hyvin pieni ja tässä tutkielmassa ne rinnastetaan tarkoittamaan samaa asiaa eli yleisesti hyväksyttyä totuutta, jolle ei esitetä perusteluja tai todistusta. Eukleideen postulaatteja pidetään paljon merkityksellisempinä kuin varsinaisia aksioomia [6, s. 4].

Aksioomien ja postulaattien avulla Eukleides todistaa monia geometrian tuloksia. Idea aksioomaattisessa geometriassa on se, että pelkästään pohjaksi annettujen aksioomien avulla pystytään todistamaan kaikki mahdolliset geometrian tulokset. Eukleideen toteutus ei tässä kuitenkaan aivan onnistunut, sillä hän käytti tulosten todistamiseen myös muita tuloksia aksioomiensa ja postulaattiensa ulkopuolelta. [6, s. 14-20]

Myöhemmin monet muut matemaatikot, esimerkiksi Alfred Tarski ja David Hilbert, ovat kehittäneet oman aksioomajärjestelmän, koettaen parannella Eukleideen alkuperäistä järjestelmää. Kaikissa aksioomajärjestelmissä idea on kuitenkin sama ja jokainen aksioomajärjestelmä sisältää niin kutsutun paralleeliaksiooman. Eukleideen aksioomissa tämä on viides postulaatti. Paralleeliaksiooman idea euklidisessa geometriassa on, että tietyn pisteen kautta on mahdollista piirtää ainoastaan yksi suora, joka on samansuuntainen tietyn toisen suoran kanssa. Tämä on juurikin se piirre, joka erottaa euklidisen ja epäeuklidisen geometrian toisistaan. Hyperbolisessa geometriassa paralleeliaksiooman sijasta on mahdollista sallia useiden tällaisten suorien olemassaolo. Tähän perehdytään lisää seuraavassa alaluvussa 2.2. [6, s. 321-322]

Seuraavaksi käydään läpi Eukleideen postulaatit, kuten ne on esitetty lähteessä [5, s.153-155]. Postulaattien yhteydessä näkyvät kuvat on piirretty GeoGebra-ohjelmistolla [12] lähteestä [6, s. 2-4] mallia ottaen.

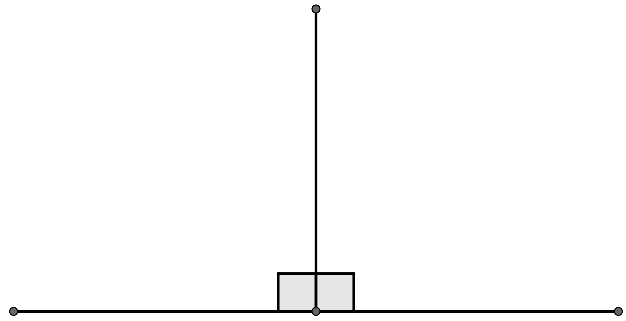
Postulaatti EP 1. On mahdollista piirtää jana mistä tahansa pisteestä mihin tahansa pisteeseen.

Postulaatti EP 2. On mahdollista pidentää janaa kumpaan tahansa suuntaan toisella janalla.

Postulaatti EP 3. On mahdollista piirtää ympyrä millä tahansa keskipisteellä ja säteellä.

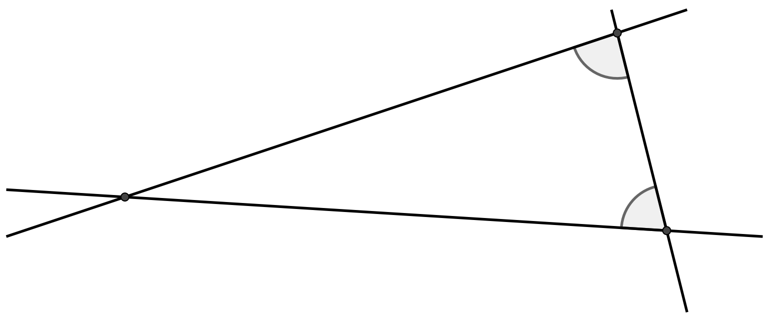
Postulaatti EP 4. Kaikki suorat kulmat ovat keskenään yhtä suuria.

Eukleides määrittelee suoran kulman seuraavasti: kun janan päälle laitetaan seisomaan toinen jana siten, että muodostuvat kulmat ovat yhtä suuret, niin nämä kulmat ovat suoria kulmia (ks. kuva 2.1) [5, s. 153-155].



Kuva 2.1. Eukleideen määritelmä suoralle kulmalle.

Postulaatti EP 5. Jos suora leikkaa kahta muuta suoraa siten, että leikkauskohtien muodostamat samalla puolella olevat sisäkulmat ovat yhteensä alle kahden suoran kulman, niin nämä kaksi suoraa leikkaavat sillä puolella leikkaavaa suoraa, jolla kulmat ovat (ks. kuva 2.2).



Kuva 2.2. Eukleideen viides postulaatti.

Tämä viides postulaatti on niin kutsuttu paralleeliaksiooma, joka määrittelee sen, että on kyse euklidisesta avaruudesta. Tätä postulaattia on pidetty hieman monimutkaisena, eikä kovin itsestään selvänä. Sitä on yritetty monen matemaatikon toimesta todistaa muista postulaateista, mutta turhaan. Postulaattia on jopa yritetty korvata kokonaan toisella. Näistä tunnetuin on John Playfair (1748-1819), joka korvasi Eukleideen viidennen postulaatin omalla, Playfairin postulaatilla, vuonna 1795. Tämä Playfairin postulaatti on nykyään tunnetumpi euklidisen avaruuden paralleeliaksioomana kuin alkuperäinen Eukleideen versio. [6, s. 8–10]

Postulaatti EP 6 (Playfairin postulaatti)**.** Kahta suoraa ei voi piirtää saman pisteen kautta niin, että suorat ovat samansuuntaisia saman tietyn suoran kanssa ja niin, että kyseiset suorat eivät leikkaa toisiaan.

Seuraavaksi käydään läpi Eukleideen 5 aksioomaa, kuten lähteessä [5, s. 153-155] on esitetty.

Aksiooma EA 1. Asiat, jotka ovat yhtä suuria saman asian kanssa, ovat myös keskenään yhtä suuria.

Aksiooma EA 2. Jos sama lisätään samoihin, myös summat ovat samat.

Aksiooma EA 3. Jos sama vähennetään samoista, myös erotukset ovat samat.

Aksiooma EA 4. Asiat, jotka vastaavat toisiaan, ovat yhtä suuret.

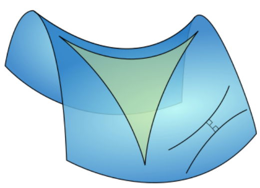
Aksiooma EA 5. Kokonainen on suurempi kuin osa.

2.2 Epäeuklidinen geometria

Tässä alaluvussa tutustutaan tarkemmin epäeuklidiseen geometriaan.

Eukleideen aksioomat, postulaatit ja niiden avulla muodostetut tulokset muodostavat niin kutsutun euklidisen geometrian. Tämä on se perinteinen, alakoulussa opittu geometria, jossa tasot ovat suoria. Mutta jos aksioomista poistetaan viides postulaatti, paralleeliaksiooma, saadaan neutraali geometria. Ja jos tähän lisätään paralleeliaksiooman tilalle seuraavanlainen aksiooma: jos tarkastellaan suoraa l ja pistettä a, niin on olemassa vähintään kaksi suoran l suuntaista suoraa, jotka kulkevat pisteen a kautta, niin saadaan epäeuklidinen geometria, jossa tasot ovatkin kaarevia.

Ensimmäisenä tämä ajatus pitää Eukleideen viidettä postulaattia epätotena tuli esiin 1820-luvulla kolmen eri matemaatikon toimesta: Nikolai Lobachevsky (1792 - 1856), János Bolyai (1802-1860) sekä Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Alun perin tämä epäeuklidinen geometria oli nimenomaan hyperbolista geometriaa, missä oli mahdollista piirtää useita yhdensuuntaisia suoria saman pisteen kautta. Myöhemmin epäeuklidisen geometrian käsitettä laajennettiin sisältämään myös elliptinen geometria, jossa ei ole mahdollista piirtää yhtäkään yhdensuuntaista suoraa tietyn pisteen kautta. Elliptinen taso voidaan käsittää pallon pintana, kun taas hyperbolinen taso kaareutuu moneen suuntaan (ks. kuva 2.3). Tätä voidaan ajatella esimerkiksi satulan pintana. [6, s. 10-13]



Kuva 2.3. Hyperbolinen taso. Kuva lähteestä [11].

2.3 Merkintöjä

Tässä alaluvussa käydään läpi muutamia tässä tutkielmassa käytettäviä merkintöjä, jotka lukijan on hyvä ymmärtää ennen varsinaisiin aksioomiin ja tuloksiin siirtymistä.

Merkintä. Tutkielmassa käytetään seuraavanlaisia vakiintuneita merkintöjä.

- Merkitään $\forall$, kun tarkoitetaan "kaikilla".
- Merkitään $\exists$, kun tarkoitetaan "on olemassa".
- Merkitään $\exists^{=1}$, kun tarkoitetaan "on olemassa tasan yksi".
- Merkitään $\neg$, kun tarkoitetaan "negaatio". Tämän merkin perässä oleva väite ei päde.
- Merkitään $\wedge$, kun tarkoitetaan "ja".
- Merkitään $\vee$, kun tarkoitetaan "tai".

Seuraavat kaksi merkintää ovat tutkielman kannalta erittäin oleellisia, sillä pelkästään niiden avulla pystytään ilmaisemaan kaikki Tarskin aksioomat, sekä euklidiset että hyperboliset. Nämä käsitteet ovat primitiivisiä.

Merkintä. Merkitään $ab \equiv cd$, kun halutaan kertoa kahden janan olevan samanpituisia. Tätä kutsutaan janojen kongruenssiksi.

Merkintä. Merkitään $B(abc)$, kun halutaan kertoa pisteen b olevan pisteiden a ja c välissä. Toisin sanoen, piste b on janalla ac. Luvussa 3 aksioomassa T 5 todetaan, että sama pätee myös toisinpäin, siis piste b on janalla ca.

Seuraavat merkinnät ovat johdettuja käsitteitä edellisistä merkinnöistä. Niitä ei välttämättä tarvita, mutta ne helpottavat pitkien kaavojen lukemista.

Merkintä. Merkitään $L(abc)$, kun halutaan kertoa pisteiden a,b ja c olevan samalla suoralla, mutta niiden järjestystä ei tiedetä. Toisin sanoen pätee $B(abc)$, $B(bca)$, $B(cab)$, $B(acb)$, $B(bac)$ tai $B(cba)$. Luvussa 3 esitetyn aksiooman T 5 perusteella näistä voidaan kuitenkin sulkea pois kolme viimeistä.

Merkintä. Merkitään, että $M(ab)$ on janan ab keskipiste. Keskipiste on kyseisellä janalla sijaitseva piste, joka on yhtä kaukana janan kummastakin päätepisteestä, siis piste c, jolla $B(acb) \wedge ac \equiv bc$. Aksioomassa T 14 (ks. luku 3) kuvataan keskipisteen olemassaoloa.

Seuraavat merkinnät liittyvät luvuissa 4 ja 5 käsiteltäviin tuloksiin. Merkintöjen yhteydessä on annettu myös määritelmä kyseiseen merkintään liittyen. Määritelmät ovat lähteestä [7, 391-399].

Merkintä. Merkitään $ab \geqq ac$, kun halutaan kertoa janan ab olevan pidempi kuin jana ac. Pitemmyys määritellään seuraavasti.

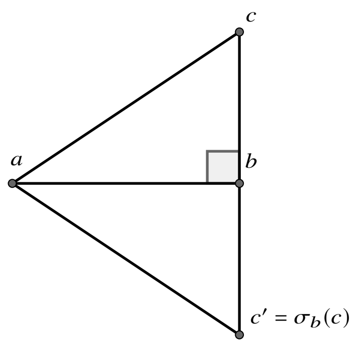
$$\forall a,b,c\ (ab \geqq ac \leftrightarrow \exists c'\ (B(ac'b) \wedge ac \equiv ac'))$$

Tämä määrittely tarkoittaa käytännössä sitä, että kun tarkastellaan kahta eripituista janaa, joilla on yksi yhteinen päätepiste, niin on olemassa sellainen piste pidemmällä janalla, joka on yhtä kaukana janojen yhteisestä päätepisteestä kuin lyhyemmän janan päätepiste.

Merkintä. Merkitään, että $\sigma_o(a)$ on pisteen a peilikuva pisteen o suhteen. Piste $\sigma_o(a)$ on se yksikäsitteinen piste a', jolla $B(aoa') \wedge oa \equiv oa'$.

Merkintä. Merkitään $ab \perp bc$, kun halutaan kertoa kahden janan olevan kohtisuorassa toisiaan vasten. Kohtisuoruus määritellään seuraavasti (ks. kuva 2.4).

$$\forall a,b,c\ (ab \perp bc \leftrightarrow a \neq b \wedge b \neq c \wedge ac \equiv a\sigma_b(c))$$



Kuva 2.4. Kohtisuoruuden määritelmä.

2.4 Tarskin geometria

Tässä alaluvussa perehdytään tarkemmin siihen, kuka oli Alfred Tarski ja mikä hänen merkityksensä oli geometriaan. Lisäksi tutustutaan Tarskin aksioomiin euklidisessa geometriassa, jotka toimivat pohjana tämän tutkielman varsinaisena aiheena oleville hyperbolisen tason aksioomille.

Alfred Tarski (1901-1983) oli puolalainen, muun muassa geometriaan erikoistunut, matemaattinen loogikko. Vuosina 1926-1927 hän esitteli Varsovan yliopistossa ensimmäisen version euklidisen geometrian aksioomistaan. Tarski kehitteli aksioomiaan opiskelijoidensa kanssa vielä vuoteen 1965 asti, jolloin aksioomat saavuttivat lopullisen, nykyisen muotonsa. [2, s. 175]

Tarskin alkuperäisessä aksioomajärjestelmässä oli peräti 24 aksioomaa. Vuosien kuluessa hän kuitenkin karsi niitä huomattuaan, että jotkin niistä pystyttiin johtamaan aiemmista aksioomista. Lopulta jäljelle jäi 13 aksioomaa. [2, s. 189]

Tarskin aksioomajärjestelmä eroaa muista aksioomajärjestelmistä siten, että geometrisia objekteja ovat ainoastaan pisteet. Muissa, esimerkiksi Hilbertin järjestelmässä, geometrisia objekteja ovat pisteiden lisäksi suorat ja tasot. Tarskin aksioomajärjestelmässä käytetään ainoastaan kahta geometrista notaatiota: välissäolo ($B(abc)$, *betweenness*) sekä janojen kongruenssi eli samanpituisuus ($\equiv$, *equidistance*). Näihin notaatioihin tutustuttiin tarkemmin luvussa 2.3. [2, s. 177]

Seuraavaksi luetellaan Tarskin aksioomat euklidisessa geometriassa, kuten ne on esitetty lähteessä [2, s. 177–188]. Näitä aksioomia ei selitetä tässä sen tarkemmin, sillä ne ovat vain taustatietona ja varsinainen mielenkiinto on hyperbolisen tason aksioomissa, jotka käydään tarkemmin läpi luvussa 3. On kuitenkin huomattava, että näille aksioomille löytyy vastaavuudet hyperbolisen geometrian aksioomajärjestelmästä, tätä vertailua käydään tarkemmin läpi alaluvussa 6.2. Poikkeuksena on tietenkin paralleeliaksiooma, joka ei päde hyperbolisessa tasossa, vaan sille löytyy korvaava aksiooma. Tässä euklidisessa aksioomajärjestelmässä paralleeliaksioomaa vastaa aksiooma TE 10 eli Eukleideen aksiooma.

Aksiooma TE 1.

$$\forall a, b \; (ab \equiv ba)$$

Aksiooma TE 2.

$$\forall a, b, p, q, r, s \; (ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs)$$

Aksiooma TE 3.

$$\forall a, b, c \; (ab \equiv cc \rightarrow a = b)$$

Aksiooma TE 4 (Janan konstruktio)**.**

$$\forall a, b, c, q \; \exists x \; (B(qax) \wedge ax \equiv bc)$$

Aksiooma TE 5 (Viiden janan aksiooma)**.**

$$\forall a, b, c, d, a', b', c', d'$$
$$(a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \rightarrow cd \equiv c'd')$$

Aksiooma TE 6 (Välissäolon surkastunut tapaus)**.**

$$\forall a, b \; B(aba) \rightarrow a = b$$

Aksiooma TE 7 (Paschin aksiooma)**.**

$$\forall a, b, c, p, q \; (B(apc) \wedge B(qcb) \rightarrow \exists x \; (B(axq) \wedge B(bpx)))$$

Aksiooma TE 8.

$$\exists a, b, c \; (\neg B(abc) \wedge \neg B(bca) \wedge \neg B(cab))$$

Aksiooma TE 9.

$$\forall a, b, c, p_0, p_1 \; (p_0 \neq p_1 \wedge ap_0 \equiv ap_1 \wedge bp_0 \equiv bp_1 \wedge cp_0 \equiv cp_1 \\ \rightarrow B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab))$$

Aksiooma TE 10 (Eukleideen aksiooma)**.**

$$\forall a, b, c, d, t \; (B(adt) \wedge B(bdc) \wedge a \neq d \rightarrow \exists x, y \; (B(abx) \wedge B(acy) \wedge B(ytx)))$$

Aksiooma TE 11 (Jatkumoskeema)**.**

$$\exists a \, \forall x, y \; ((x \in X \wedge y \in Y \rightarrow B(axy)) \rightarrow \exists b \, \forall x, y \; (x \in X \wedge y \in Y \rightarrow B(xby)))$$

Tässä aksioomassa joukot X ja Y ovat parametrein määriteltävissä olevia joukkoja.

Aksiooma TE 12 (Välissäolon sisäinen transitiivisuus)**.**

$$\forall a, b, c, d \; (B(abd) \wedge B(bcd) \rightarrow B(abc))$$

Aksiooma TE 13 (Välissäolon ulkoinen vertailullisuus)**.**

$$\forall a, b, c, d \; (B(abc) \wedge B(abd) \wedge a \neq b \rightarrow B(acd) \vee B(adc))$$

3 Tarskin aksioomat hyperbolisessa tasossa

Tässä luvussa käydään läpi Tarskin aksioomat hyperbolisessa tasossa. Aksioomia on yhteensä 22 ja ne esitetään samassa järjestyksessä kuin lähteessä [7, s. 387–389]. Lähteessä esitettyä aksioomien järjestystä voisi kyseenalaistaa, esimerkiksi kahden eri pisteen olemassaolo todetaan vasta aksioomassa T 21, kun jo sitä ennen on melko selvää, että tarvitaan kaksi toisistaan eroavaa tason pistettä. Kuitenkin selkeyden vuoksi tässä tutkielmassa pysytään lähteen alkuperäisessä järjestyksessä. Jokaista aksioomaa avataan sanallisesti sekä tarvittaessa kuvallisesti. Asian ymmärtämisen helpottamiseksi kuvia on yksinkertaistettu siltä osin, kun tulokset ovat yhteisiä euklidisen geometrian kanssa. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että janat on piirretty suoraan tasoon eikä kaarevina, niin kuin ne hyperbolisessa tasossa oikeasti olisivat. Kaikki aksioomia koskevat tässä luvussa nähtävät kuvat on piirretty GeoGebra-ohjelmistolla [12], mallia lähteestä [7, s. 389] ottaen. Luvun lopussa esiintyvät kuvat nelikulmioista on myöskin piirretty GeoGebra-ohjelmistolla [12], mallia lähteestä [6, s. 340-341] ottaen.

Näitä aksioomia on hyvä verrata luvun 2.4 aksioomiin. Tarskin euklidisen geometrian aksioomajärjestelmässä aksioomat ovat yleisesti paljon vahvemmassa muodossa kuin tässä hyperbolisen geometrian järjestelmässä. Lukujen 4 ja 5 aikana tullaan huomaamaan, että moni tämän luvun aksioomista voidaan kuitenkin saattaa alaluvussa 2.4 esitettyyn vahvempaan muotoon. On hyvä huomata, että lähteessä [7] on pyritty esittämään hyperbolisen tason aksioomat mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa, tarkoittaen sitä, että ne on pyritty esittämään mahdollisimman vähällä muuttujamäärällä. Tästä johtuen aksioomia on melko paljon eivätkä ne suoraan vastaa esitystavaltaan Tarskin euklidisia aksioomia. On myöskin huomattava, että alaluvun 2.4 aksiooma TE 10 eli Eukleideen aksiooma ei toteudu tässä hyperbolisen geometrian aksioomajärjestelmässä ja on kumottavissa. Tarskin aksioomajärjestelmien vertailua jatketaan alaluvussa 6.2.

Aksiooma T 1.

$$\forall a, b, c, d\ (ab \equiv cd \rightarrow cd \equiv ab)$$

Tämä aksiooma kertoo, että jos jana ab on samanpituinen kuin jana cd, niin jana cd on samanpituinen kuin jana ab.

Aksiooma T 2.

$$\forall a, b, c, d\ (ab \equiv cd \rightarrow ab \equiv dc)$$

Jos jana ab on samanpituinen kuin jana cd, niin jana ab on samanpituinen kuin jana dc. Tämä aksiooma yksinään ei vielä tarkoita sitä, että jana cd olisi samanpituinen kuin jana dc. Siis vielä ei voi väittää, että jana olisi aina samanpituinen kummasta päästä tahansa mitattuna. (Tämä todistetaan kyllä myöhemmin apulauseessa 4.4).

Aksiooma T 3.

$$\forall a, b\ (ab \equiv aa \rightarrow a = b)$$

Janan aa pituus on nolla ja jos pisteestä a lähtee pisteeseen b nollan pituinen jana, pisteiden on oltava samassa kohtaa, siis ne ovat sama piste.

Tämä aksiooma on heikompi muoto aksioomasta TE 3.

Aksiooma T 4. Tässä aksioomassa on kaksi osaa.

1. $\forall a, b, c, d, e\ (ab \equiv cd \wedge cd \equiv ce \rightarrow ab \equiv ce)$

2. $\forall a, b, c, d, e\ (ab \equiv cd \wedge cd \equiv ae \rightarrow ab \equiv ae)$

Ensimmäinen osa kertoo, että jos janat ab ja cd ovat samanpituisia ja janat cd ja ce ovat samanpituisia, niin myös janat ab ja ce ovat samanpituisia. Tässä on huomattava, että jana ce lähtee pisteestä c, eikä siten voi olla mikä tahansa tason jana.

Toinen osa kertoo, että jos janat ab ja cd ovat samanpituisia ja janat cd ja ae ovat samanpituisia, niin myös janat ab ja ae ovat samanpituisia. Tässä on huomattava, että jana ae lähtee pisteestä a, eikä siten voi olla mikä tahansa jana.

Kun nämä kaksi kohtaa yhdistetään, saadaan tulos, että jos janaa ab tai janaa cd jatketaan johonkin suuntaan samanpituisella janalla, niin kyseinen jatke on samanpituinen myös toiseen janaan nähden.

Tämä aksiooma on heikompi versio aksioomasta TE 2 sekä aksioomasta EA 1. Myöhemmin luvussa 5 todistetaan tästä aksioomasta vahvempi versio.

Aksiooma T 5.

$$\forall a, b, c\ (B(abc) \rightarrow B(cba))$$

Jos piste b on pisteiden a ja c välissä, niin piste b on pisteiden c ja a välissä. Jos piste b on pisteiden a ja c välissä, niin ne ovat kaikki samalla suoralla. Silloin samaa suoraa toiseen suuntaan edetessä piste b on edelleen samojen pisteiden välissä.

Aksiooma T 6.

$$\forall a, b, c, d\ (B(abd) \wedge B(bcd) \rightarrow B(abc))$$

Jos piste b on pisteiden a ja d välissä ja jos piste c on pisteiden b ja d välissä, niin tällöin ne ovat kaikki samalla suoralla siten, että ensin tulee a, sitten tulee b, sitten tulee c ja sitten tulee d. Tällöin piste b on pisteiden a ja c välissä.

Tämä aksiooma on täysin vastaava aksiooman TE 12 kanssa.

Aksiooma T 7.

$$\forall a, b, c, d\ (a \neq b \wedge ((B(abc) \wedge B(abd)) \vee (B(abc) \wedge B(dab)) \vee (B(bca) \wedge B(bda))) \\ \rightarrow L(acd))$$

Tässä merkintä $L(acd)$ tarkoittaa sitä, että pätee $B(acd)$ tai $B(cda)$ tai $B(dac)$, koska aksiooma T 5 sulkee pois osan vaihtoehdoista. Aksiooman ensimmäisen toteaman mukaan piste b on pisteiden a ja c välissä ja lisäksi b on pisteiden a ja d välissä, joten tällöin pätee joko $B(acd)$ tai $B(adc)$. Toisesta toteamasta seuraa, että pätee $B(dac)$. Kolmannesta toteamasta seuraa, että pätee $B(cda)$ tai $B(dca)$.

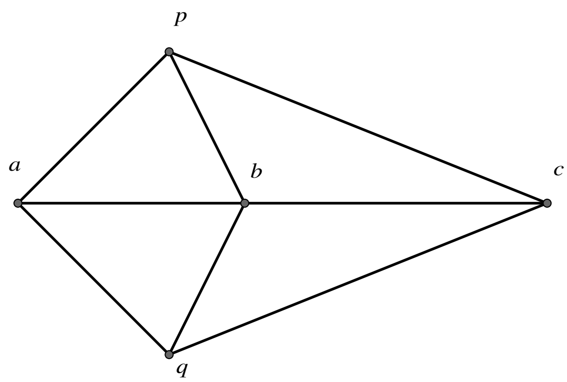
Vertaa tätä aksioomaa aksiooman TE 13 kanssa.

Aksiooma T 8.

$$\forall a,b,c,p,q\ (p \neq q \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \wedge cp \equiv cq \rightarrow L(abc))$$

Tämä aksiooma kuvaa sitä, että jos tarkastellaan kahta kiinteää pistettä p ja q, jotka eroavat toisistaan ja kolmea pistettä a, b ja c, joista jokainen on yhtä kaukana kummastakin pisteestä p ja q, niin nämä kolme pistettä a, b ja c ovat samalla suoralla (ks. kuva 3.1).

Tämä aksiooma vastaa aksioomaa TE 9.



Kuva 3.1. Tarskin aksiooma 8.

Aksiooma T 9.

$$\forall a,b,c,d,e\ (a \neq b \wedge ac \equiv ad \wedge bc \equiv bd \wedge B(abe) \rightarrow ec \equiv ed)$$

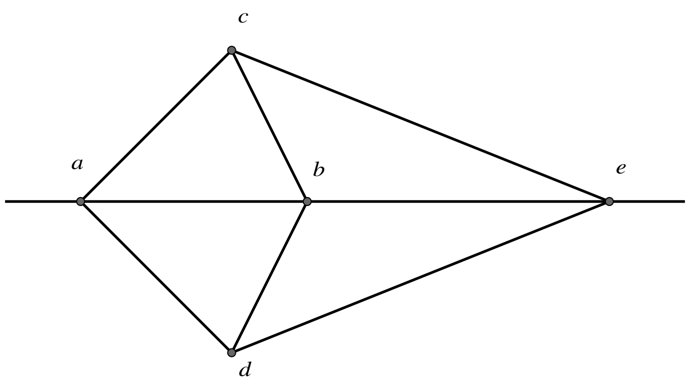
Tämä aksiooma on samankaltainen edellisen aksiooman T 8 kanssa. Kun edellisessä aksioomassa oletetaan kolmen pisteen ominaisuudet ja todetaan niiden sitten olevan samalla suoralla, niin tässä sen sijaan oletetaan kahden pisteen ominaisuudet ja suorallaolo ja todetaan niiden perusteella kolmannen pisteen ominaisuudet. Tässä siis oletetaan, että kun kahden pisteen a ja b etäisyydet kiinteistä pisteistä c ja d ovat samat ja pisteet a, b ja e ovat samalla suoralla, niin myös pisteen e etäisyys pisteeseen c on sama kuin pisteeseen d (ks. kuva 3.2).

Tämän aksiooman avulla voidaan myös tulkita, että jos kaksi yhtenevää kolmiota jakavat yhden sivun (tässä kolmiot ovat $\triangle(abc)$ ja $\triangle(abd)$), ja tämän yhteisen sivun jatkeelta otetaan piste e ja piirretään kolmiot $\triangle(aec)$ ja $\triangle(aed)$, niin nämä kolmiot ovat myös yhtenevät keskenään.

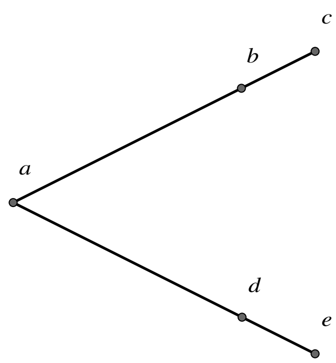
Aksiooma T 10.

$$\forall a,b,c,d,e\ (B(abc) \wedge (B(ade) \vee B(aed)) \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow B(ade) \wedge bc \equiv de)$$

Tämä aksiooma kuvastaa aksioomaa EA 3 eli sitä, että jos samanpituisista etäisyyksistä (tässä ac ja ae) vähennetään samanpituiset etäisyydet (tässä ab ja ad), niin erotukset (tässä bc ja de) ovat yhtä suuret (ks. kuva 3.3).



Kuva 3.2. Tarskin aksiooma 9.



Kuva 3.3. Tarskin aksiooma 10.

Aksiooma T 11.

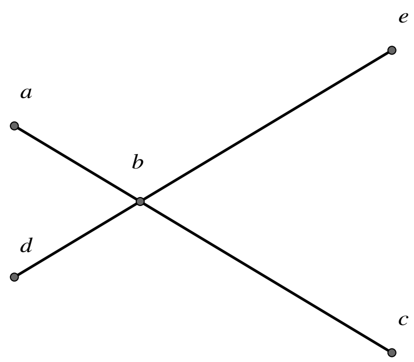
$$\forall a, b, c, d, e\ (B(abc) \wedge B(dbe) \wedge ba \equiv bd \wedge bc \equiv be \rightarrow ac \equiv de)$$

Tämä aksiooma kuvastaa aksioomaa EA 2 eli sitä, että jos samanpituisiin etäisyyksiin (tässä ba ja bd) lisätään samanpituiset etäisyydet (tässä bc ja be), niin summat (tässä ac ja de) ovat yhtä suuret (ks. kuva 3.4).

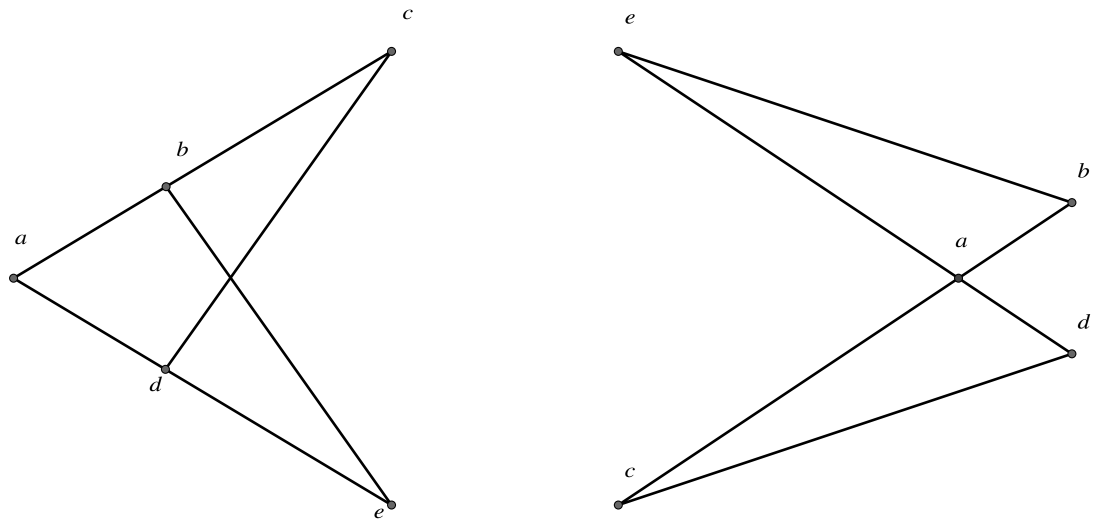
Aksiooma T 12.

$$\forall a, b, c, d, e\ (ab \equiv ad \wedge ((B(abc) \wedge B(ade)) \vee (B(cab) \wedge B(ead))) \wedge ac \equiv ae \rightarrow dc \equiv be)$$

Tämä aksiooma kuvaa tunnettua kolmioiden yhtenevyyslausetta, missä kaksi kolmiota tunnistetaan yhteneviksi, jos niillä on kaksi samanpituista sivua sekä yksi samansuuruinen kulma. Tässä kolmioilla $\triangle acd$ ja $\triangle aeb$ on yhteinen kulma $\angle eac$ (tai $\angle dab$) ja kaksi samanpituista sivua, ac ja ae sekä ad ja ab, jolloin niiden kolmannetkin sivut ovat yhtä pitkiä, be ja dc. Vastaavasti kolmioilla $\triangle abe$ ja $\triangle adc$ on yhtä pitkät sivut ab ja ad sekä ac ja ae ja niiden yhdet kulmat, $\angle dac$ ja $\angle bae$, ovat toistensa ristikulmat (siis yhtä suuret), jolloin myös niiden kolmannet sivut, be ja dc ovat yhtä pitkät (ks. kuva 3.5).



Kuva 3.4. Tarskin aksiooma 11.



Kuva 3.5. Tarskin aksiooma 12.

Aksiooma T 13.

$$\forall a, b, c, d, e\ (c \neq a \wedge B(cad) \wedge ab \equiv ad \wedge (B(ced) \vee B(cde)) \wedge cb \equiv ce \rightarrow B(ced))$$

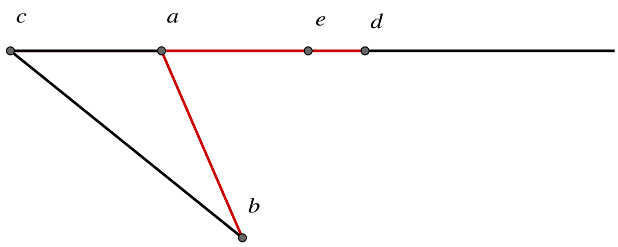
Tämä aksiooma kuvastaa kolmioepäyhtälöä eli sitä, kuinka kolmion sivun pituus on korkeintaan sen kahden muun sivun pituuksien summa ja vähintään sen kahden muun sivun pituuksien erotus.

Tässä siis piste d on yhtä kaukana pisteestä a kuin piste b ja piste e on yhtä kaukana pisteestä c kuin piste b, jolloin piste e on lähempänä pistettä c kuin piste d. Siis kolmion sivujen ab ja ca, joka on yhtä pitkä kuin suoralla etäisyys $ca + ad$, on pidempi kuin kolmion kolmas sivu cb, joka on yhtä pitkä kuin suoralla etäisyys ce (ks. kuva 3.6).

Aksiooma T 14.

$$\forall a, b\ \exists c\ (B(acb) \wedge ca \equiv cb)$$

Tämä aksiooma kertoo, että janalla ab on aina olemassa keskipiste c. Keskipiste on tässä määritelty niin, että sen etäisyys janan päätepisteisiin on yhtä suuri.



Kuva 3.6. Tarskin aksiooma 13.

Aksiooma T 15.

$$\forall a, b, c\ \exists d\ (B(cad) \wedge ab \equiv ad)$$

Tämä aksiooma kuvaa janan siirtoa. Siis kun tarkastellaan tietyn pituista janaa ab ja pistettä c, joka ei välttämättä ole samalla suoralla pisteiden a ja b kanssa, niin voidaan aina löytää piste d siten, että pisteet c, a ja d ovat samalla suoralla ja jana ad on yhtä pitkä janan ab kanssa.

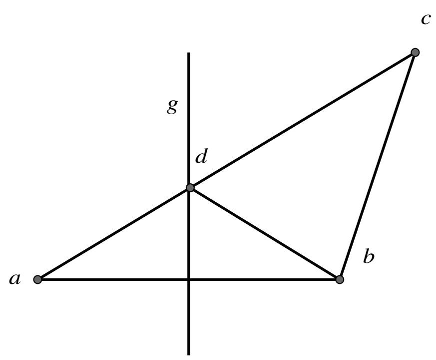
Tämä aksiooma on versio aksioomasta TE 4.

Ilmaistaan jatkossa tässä aksioomassa esiintyvää pistettä d merkinnällä $T'(abc)$.

Aksiooma T 16.

$$\forall a, b, c\ \exists d\ (\neg L(abc) \longrightarrow (B(adc) \vee B(bdc)) \wedge da \equiv db)$$

Tässä aksioomassa oletetaan, että pisteet a, b, c eivät ole samalla suoralla, siis ne muodostavat kolmion. Tälle kolmiolle on olemassa sellainen piste d, että d sijaitsee joko kolmion sivulla ac tai sivulla bc ja siten, että etäisyys pisteestä d pisteeseen a on sama kuin pisteeseen b. Tämä aksiooma voidaan tulkita niin, että kolmion sivun keskinormaali (kohtisuora jana, joka jakaa sivun tasan kahtia) leikkaa jotain kolmion toista sivua (ks. kuva 3.7, kuvassa suora g on kolmion sivun ab keskinormaali).



Kuva 3.7. Tarskin aksiooma 16.

Aksiooma T 17. Tässä aksioomassa on kaksi osaa.

1. $\forall a, b, c, d\ \exists e\ (B(bad) \wedge ab \equiv ad \wedge B(bcd) \longrightarrow ae \equiv ad \wedge be \equiv bc)$

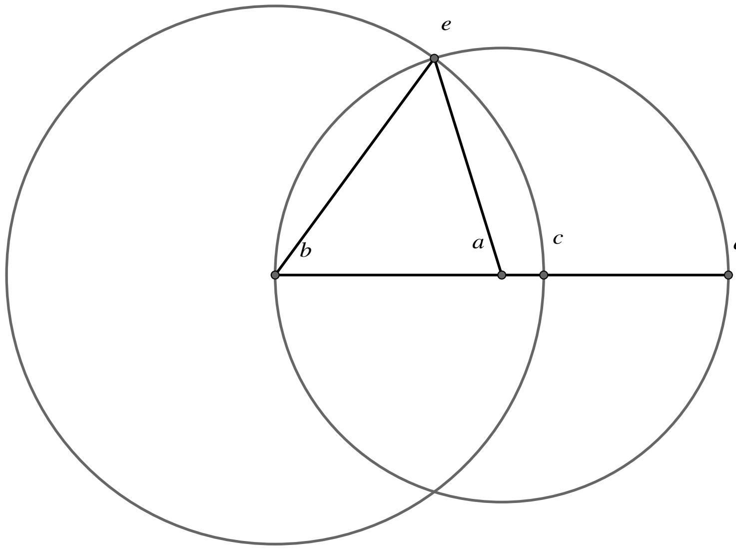
2. $\forall a, b, c, \ \exists d \ (B(abc) \rightarrow ac \equiv ad \wedge ad \equiv bd)$

Aksiooman ensimmäinen osa kertoo, että kaikilla pisteillä a, b, c, d, joille pätee, että pisteet b, a, d sekä pisteet b, c, d ovat keskenään samalla suoralla ja janan ab pituus on sama kuin janan ad, on olemassa piste e, jolle janan ae pituus on sama kuin janan ad ja janan be pituus on sama kuin janan bc.

Tämä voidaan tulkita myös niin, että kaksi ympyrää, joiden keskipisteet ovat b ja a ja joista toisen säde on yhtä pitkä kuin ympyröiden keskipisteiden etäisyys ba ja toisen säde pienempi tai yhtäsuuri kuin keskipisteiden etäisyys tuplana eli $bc \leq bd$, leikkaavat. Heti, jos toisen ympyrän säde on suurempi kuin keskipisteiden etäisyys tuplana, ympyrät mahtuvat sisäkkäin eivätkä leikkaa (ks. kuva 3.8).

Aksiooman toinen osa kertoo, että kaikilla pisteillä a, b, c, jotka ovat samalla suoralla siten, että piste b on pisteiden a ja c välissä, on olemassa piste d, jolle piste d on yhtä kaukana pisteestä a kuin piste c on pisteestä a ja piste d on yhtä kaukana pisteistä a ja b.

Tämä voidaan tulkita myös niin, että kaksi ympyrää (keskipisteet a ja b), joilla on samanpituinen säde (ad ja bd), säteen ollessa pidempi tai yhtä pitkä kuin ympyröiden keskipisteiden etäisyys ($ad \equiv ac \leq ab$), leikkaavat toisiaan (ks. kuva 3.9).

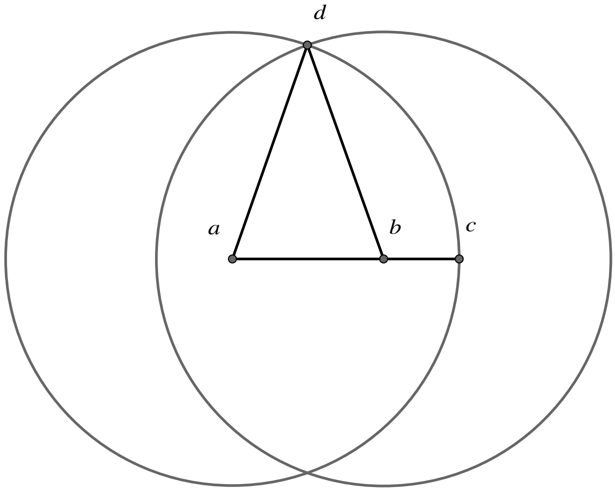


Kuva 3.8. Tarskin aksiooma 17, osa 1.

Aksiooma T 18.

$$\forall a, b, c \ \exists d \ (\forall x \ (B(abc) \wedge b \neq a \wedge b \neq c$$
$$\rightarrow ((B(abx) \wedge ba \equiv bx) \rightarrow da \equiv dx) \wedge ((B(adx) \wedge da \equiv dx) \rightarrow ca \equiv cx))$$

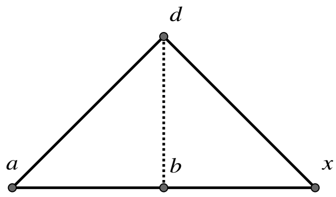
Olkoot a, b, c eri pisteitä siten, että piste b on pisteiden a ja c välissä. Tällöin on olemassa sellainen piste d, että jos piste b on pisteiden a ja x välinen keskipiste, $b = M(ax)$, niin pisteet a ja x ovat yhtä kaukana pisteestä d. Samoin jos piste d on



Kuva 3.9. Tarskin aksiooma 17, osa 2.

pisteiden a ja x välinen keskipiste, $d = M(ax)$, niin pisteet a ja x ovat yhtä kaukana pisteestä c.

Tämä voidaan tulkita niin, että aksiooma kuvaa suorakulmaisen kolmion olemassaoloa, kun annetaan hypotenuusa (kuvassa 3.10 ad tai xd) sekä kolmion kanta (kuvassa 3.10 ab tai xb). Suora kulma muodostuu annetun janan keskipisteen kummallekin puolelle (kuvassa 3.10 kulmat $\angle abd$ tai $\angle xbd$).



Kuva 3.10. Tarskin aksiooma 18

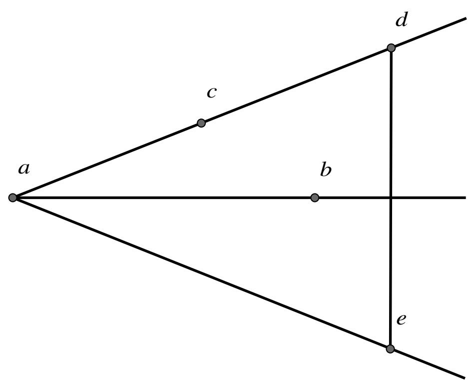
Aksiooma T 19.

$$\forall a,b,c\ \exists d,e\ (\neg L(abc) \rightarrow (B(acd) \vee B(adc)) \wedge de \equiv ab \wedge ad \equiv ae \wedge bd \equiv be)$$

Tarkastellaan sellaisia pisteitä a,b,c, jotka eivät ole samalla suoralla, jolloin ne muodostavat kulman (kuvassa 3.11 kulma $\angle bac$). Tällöin on olemassa sellainen piste d, joka on samalla kulman sivulla kuin piste c (pisteet a,c,d ovat samalla suoralla) ja piste e, joka on kulman $\angle bac$ vastakulman sivulla yhtä kaukana pisteestä a kuin piste d on pisteestä a siten, että pisteiden d ja e välinen etäisyys on yhtä pitkä kuin pisteiden a ja b välinen etäisyys (ks. kuva 3.11).

Tämä aksiooma voidaan tulkita niin, että annetun kulman toiselta sivulta on mahdollista löytää sellainen piste, josta voidaan piirtää annetun janan pituinen jana kulman vastakulman sivulle. Tässä annettu jana on ab. Tämä aksiooma myös mahdollistaa kulman puolittajan olemassaolon.

Tämä aksiooma on eräänlainen versio Aristoteleen aksioomasta, joka kertoo, että jos annetaan mikä tahansa jana ab ja mikä tahansa kulma, niin on olemassa piste y kulman toisella sivulla, jolle jana xy, missä piste x sijaitsee annetun kulman toisella sivulla, on pidempi kuin annettu jana ab [3, s. 204].



Kuva 3.11. Tarskin aksiooma 19.

Aksiooma T 20.

$$\forall a, b, c, x, y, z\ (\neg L(xyz) \wedge B(xay) \wedge ax \equiv ay \wedge B(ybz) \wedge by \equiv bz \wedge B(zcx) \wedge cz \equiv cx \\ \rightarrow \neg L(abc))$$

Tämä aksiooma kertoo, että kolmion sivujen keskipisteet eivät voi sijaita samalla suoralla. Tässä kolmion sivut ovat xy, jonka keskipiste on a, yz, jonka keskipiste on b ja zx, jonka keskipiste on c.

Aksiooma T 21.

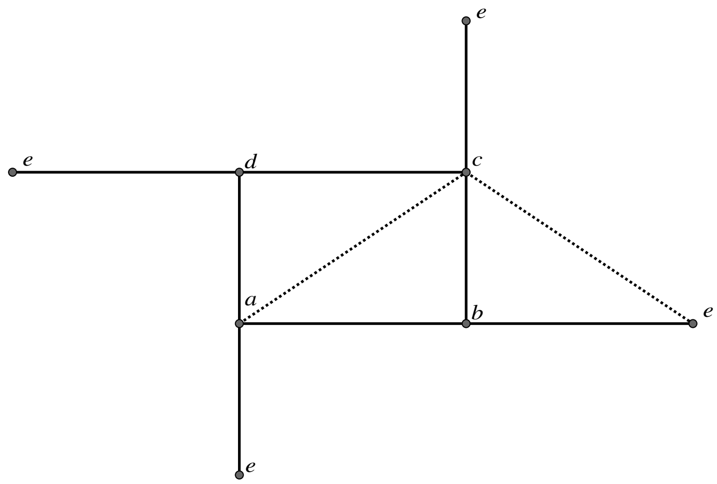
$$\exists a, b\ (a \neq b)$$

Tämä aksiooma kertoo yksinkertaisesti sen, että on olemassa kaksi toisistaan eroavaa pistettä.

Aksiooma T 22.

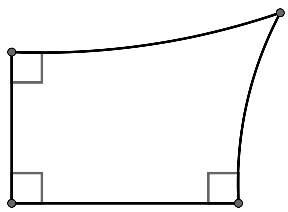
$$\forall a, b, c, d\ \exists e\ (a = b \vee b = c \vee c = d \vee d = a \\ \vee (b = M(ae) \wedge \neg(ca \equiv ce)) \vee (c = M(be) \wedge \neg(db \equiv de)) \\ \vee (d = M(ce) \wedge \neg(ac \equiv ae)) \vee (a = M(de) \wedge \neg(db \equiv be)))$$

Tämä aksiooma on lopulta se, joka määrittelee, että on kyse hyperbolisesta geometriasta. Tässä merkintä $M(ab)$ tarkoittaa janan ab keskipistettä (ks. luku 2.3 ja aksiooma T 14). Tämän aksiooman perusteella voidaan tulkita, että suorakulmioita ei ole olemassa hyperbolisessa tasossa. Aksiooman mukaan on mahdollista valita pisteet a, b, c, d miten vain ja niille on aina olemassa piste e, joka toteuttaa jonkun annetuista ehdoista. Joten jos valitaan pisteet a, b, c, d niin, että ne muodostavat suorakulmion, niin piste e ei voisi sijaita missään. Tällöin olisi pädettävä jokin seuraavista: $a = b \vee b = c \vee c = d \vee d = a$, jolloin kuvio olisi kolmio (ks. kuva 3.12).

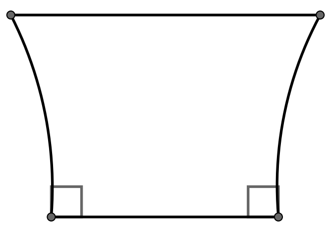


Kuva 3.12. Tarskin aksiooma 22.

Jos suorakulmioita ei ole olemassa, niin miltä näyttävät nelikulmiot hyperbolisessa tasossa? Tutustutaan tässä kahteen esimerkkiin: Lambertin nelikulmioon ja Saccherin nelikulmioon. Lambertin nelikulmiossa on kolme suoraa kulmaa ja kaksi suoraa sivua. Kaksi muuta sivua ovat kaarevia ja neljäs kulma on terävä kulma (ks. kuva 3.13). Saccherin nelikulmiossa sen sijaan on kaksi suoraa kulmaa ja kaksi terävää kulmaa sekä kaksi suoraa sivua ja kaksi kaarevaa sivua (ks. kuva 3.14). [6, s. 340-341]



Kuva 3.13. Lambertin nelikulmio.



Kuva 3.14. Saccherin nelikulmio.

4 Hyperbolisen tason ominaisuuksia

Tässä luvussa käsitellään hyperbolisen geometrian perustuloksia, jotka todistetaan edellisessä luvussa 3 esiteltyjen Tarskin aksioomien avulla. Tulokset esitetään yhtenevästi lähteen [7, s. 390–393] kanssa.

Ensimmäiseksi alaluvussa 4.1 käsitellään janan ominaisuuksia koskevia tuloksia. Sen jälkeen siirrytään alaluvussa 4.2 välissäolon ominaisuuksiin. Tässä alaluvussa todistetaan myös janan keskipisteen yksikäsitteisyys. Sen jälkeen siirrytään alalukuun 4.3, jossa käsitellään eripituisten janojen ominaisuuksia. Alaluvussa 4.4 käydään läpi muutamia laskutoimitusten ominaisuuksia.

4.1 Janan ominaisuuksia

Apulause 4.1.

$$\forall a, b \; (B(abb))$$

Tässä apulauseessa halutaan osoittaa, että janan päätepiste on aina janan päätepisteiden välissä. Toisin sanoen siis välissäoloon riittää etäisyys 0.

Todistus. Aloitetaan todistus tarkastelemalla aksioomaa T 15. Tämä aksiooma ei rajoita mitenkään pisteitä a, b, c, joten pisteet voidaan valita siten, että kaksi niistä ovat sama piste. Valitaan tähän siis pisteet b, b ja a. Nyt aksiooman T 15 perusteella on olemassa piste b', jolle $B(abb')$ ja $bb \equiv bb'$. Nyt aksiooman T 1 perusteella voidaan sanoa, että $bb' \equiv bb$. Ja lopuksi aksiooman T 3 avulla saadaan $b = b'$. Siis pätee $B(abb)$. □

Apulause 4.2.

$$\forall a, b \; (aa \equiv bb)$$

Tässä apulauseessa halutaan osoittaa, että etäisyys pisteestä itseensä (eli etäisyys 0) on aina sama pisteestä riippumatta.

Todistus. Aloitetaan tarkastelemalla aksioomaa T 14. Se kertoo, että janalla ab on keskipiste c, jolle $ca \equiv cb$. Edellisen apulauseen 4.1 perusteella voidaan sanoa, että pätee $B(caa)$ ja $B(cbb)$. Nyt aksiooman T 10 perusteella voidaan päätellä, että $aa \equiv bb$. □

Lause 4.3.

$$\forall a, b, c \; (ab \equiv cc \rightarrow a = b)$$

Tämä lause on vahvempi muoto aksioomasta T 3 ja täsmälleen sama muoto kuin aksioomassa TE 3. Kun aksioomassa T 3 väitteestä $ab \equiv aa$ seuraa $a = b$ ja piste a on janan ab toinen päätepiste, tässä tuloksessa valitaan mielivaltaisesti piste c, joka ei siis välttämättä ole samalla suoralla pisteiden a ja b kanssa.

Todistus. Aloitetaan todistus olettamalla, että $ab \equiv cc$ pätee. Apulauseen 4.2 seurauksena $cc \equiv aa$. Nyt voidaan päätellä aksiooman T 4 kohdan 2 avulla, että $ab \equiv aa$ ja aksiooman T 3 avulla, että $a = b$. On siis päädytty tuloksesta $ab \equiv cc$ tulokseen $a = b$. □

Apulause 4.4.

$$\forall a, b\ (ab \equiv ab)$$

Tässä apulauseessa halutaan osoittaa, että jana ab on aina yhtä pitkä itsensä kanssa.

Todistus. Aloitetaan tarkastelemalla aksioomaa T 15 pisteillä a, b, b. Aksiooman mukaan on olemassa piste d, jolle $ab \equiv ad$ ja $B(bad)$. Nyt aksiooman T 1 avulla saadaan, että $ad \equiv ab$ ja aksiooman T 4 kohdan 1 avulla $ab \equiv ab$. □

Lause 4.5.

$$\forall a, b\ (ab \equiv ba)$$

Tässä lauseessa halutaan osoittaa, että jana on yhtä pitkä kummasta päästä tahansa mitattuna. Siis jana ab on yhtä pitkä kuin jana ba. Tämä tulos on vastaava aksiooman TE 1 kanssa.

Todistus. Hyödynnetään ensin apulausetta 4.4 ja todetaan, että $ab \equiv ab$. Nyt aksiooman T 2 perusteella voidaan kääntää oikean puoleinen jana, jolloin saadaan $ab \equiv ba$. □

4.2 Välissäolon ominaisuuksia

Seuraavat tulokset 4.6 - 4.13 liittyvät välissäoloon (katso määritelmä alaluvussa 2.3) sekä janan eri pisteisiin ja niiden ominaisuuksiin. Tämä luku sisältää myös tärkeän tuloksen janan keskipisteen yksikäsitteisyydestä.

Apulause 4.6.

$$\forall a, b, c\ (B(abc) \land ab \equiv ac \rightarrow b = c)$$

Tässä apulauseessa halutaan osoittaa, että jos piste b on pisteiden a ja c välissä ja etäisyys pisteestä a pisteisiin b ja c on yhtä pitkä, niin pisteiden b ja c on oltava sama piste.

Todistus. Aloitetaan todistus olettamalla, että oletukset $B(abc)$ ja $ab \equiv ac$ pätevät. Apulauseiden 4.1 ja 4.4 avulla voidaan päätellä, että aksiooman T 10 oletukset pätevät kun $d = c$ ja $e = c$. Siis pätee $B(abc) \land (B(acc) \lor B(acc))$ ja $ab \equiv ac$ ja $ac \equiv ac$, jolloin seuraa, että $B(acc)$ ja $bc \equiv cc$. Nyt lauseen 4.3 avulla $b = c$. □

Lause 4.7.

$$\forall a, b\ (B(aba) \rightarrow a = b)$$

Tässä lauseessa halutaan osoittaa, että jos piste b on kahden saman pisteen välissä, niin nämä kaikki ovat silloin samoja pisteitä. Tämä tulos on vastaava aksiooman TE 6 kanssa.

Todistus. Aksiooman T 14 perusteella janalla ba on olemassa keskipiste c, jolle $B(bca)$ ja $cb \equiv ca$. Oletetaan sitten, että oletus $B(aba)$ pätee. Nyt aksiooman T 6 perusteella tuloksista $B(aba)$ ja $B(bca)$ seuraa, että $B(abc)$. Nyt aksiooman T 5 perusteella saadaan $B(cba)$. Ja apulauseen 4.6 avulla voidaan nyt päätellä, että kun $B(cba)$ ja $cb \equiv ca$, niin $b = a$, jolloin pätee myös $a = b$. Nyt siis on osoitettu, että oletuksesta $B(aba)$ seuraa $a = b$. □

Apulause 4.8. *Jokaisella janalla on vähintään 5 pistettä.*

Tässä lauseessa ei oteta huomioon surkastuneen janan tapauksia.

Todistus. Aksiooman T 14 perusteella janalla ab on aina keskipiste x. Aksioomien T 3 ja T 1 avulla voidaan todeta, että tämä keskipiste eroaa janan päätepisteistä, siis $a \neq x \wedge b \neq x$. Nyt aksiooman T 15 perusteella on olemassa piste y, jolle $B(aby) \wedge ba \equiv by$ ja on olemassa piste z, jolle $B(baz) \wedge ab \equiv az$. Lauseen 4.7 perusteella $y \neq a \wedge z \neq b$ ja aksiooman T 3 perusteella $y \neq b \wedge z \neq a$. Nyt aksiooman T 5 avulla saadaan, että pätee $B(yba) \wedge B(bxa) \wedge B(zab)$ ja aksiooman T 6 avulla $B(ybx)$, joten lauseen 4.7 perusteella $x \neq y$. Samoin aksiooman T 6 avulla saadaan, että pätee $B(xaz)$ ja taas lauseen 4.7 avulla $x \neq z$. Nyt jos olisi $y = z$, niin aksiooman T 6 avulla $B(aby) \wedge B(baz) \to B(aba)$. Tällöin olisi $a = b$, mikä aiheuttaa ristiriidan. Siis on oltava $y \neq z$. Näin on saatu 5 eri pistettä janalle ab: a, b, x, y, z. □

Apulause 4.9. *Jokaisen suoran voi suunnata, toisin sanoen on olemassa suoran lineaarijärjestys, jolle pätee $B(abc)$, jos ja vain jos $a \geq b \geq c$ tai $c \geq b \geq a$.*

Todistus. Lähteessä [10] on todistettu, että jos kaikilla janoilla on vähintään 5 pistettä (ks. apulause 4.8) ja välissäolorelaatio toteuttaa aksioomat T 5, T 6, T 7 ja lauseen 4.7, niin välissäolorelaatio toteuttaa myös järjestysrelaation. Näin ollen voidaan jatkossa olettaa, että järjestysrelaation ominaisuudet pätevät hyperbolisessa tasossa kaikille janoille. □

Lause 4.10.

$$\forall a, b, m, n \; (a \neq b \wedge L(abm) \wedge ma \equiv mb \wedge L(abn) \wedge na \equiv nb \to m \equiv n)$$

Tämä lause todistaa janan keskipisteen yksikäsitteisyyden. Yllä oleva kaava siis sanoo seuraavaa. Pisteet a ja b eroavat toisistaan eli janan pituus ei ole 0. Pisteet a, b ja m ovat samalla suoralla siten, että piste m on yhtä kaukana pisteistä a ja b, jolloin se on janan ab keskipiste. Samoin pisteet a, b ja n ovat samalla suoralla siten, että piste n on yhtä kaukana pisteistä a ja b. Tästä seuraa, että pisteet m ja n ovat sama piste eli keskipiste on uniikki. Lauseen todistus, muista tämän luvun todistuksista poiketen, on lähteestä [9, s. 164].

Todistus. Oletetaan, että janalla ab on keskipisteet n ja m ja $n \neq m$. Oletetaan myös, että $B(anm)$. Nyt on olemassa sellainen piste n', joka on samalla suoralla pisteiden m ja b kanssa ja jolle pätee, että $mn \equiv mn'$. Myös $ma \equiv mb$ ja $B(mna)$. Täten $B(mn'b)$ ja $na \equiv n'b$. Mutta pätee $na \equiv nb$, koska n on janan ab keskipiste. Täten $n'b \equiv nb$, jolloin $n' = n$. Tämä aiheuttaa ristiriidan, sillä pätee $B(anm)$ ja $B(mn'b)$. On siis oltava $n = m$. □

Apulause 4.11.

$$\forall a, b, c\ \exists^{=1} b'\ (a \neq c \rightarrow (B(ab'c) \vee B(acb')) \wedge ab \equiv ab')$$

Kaikilla a, b, c on olemassa tasan yksi sellainen piste b' että kun pisteet a ja c ovat eri piste, niin joko b' on pisteiden a ja c välissä tai c on pisteiden a ja b' välissä ja etäisyys pisteestä a pisteeseen b on sama kuin pisteeseen b'. Tässä piste b ei välttämättä ole samalla suoralla muiden pisteiden kanssa.

Merkitään tässä lauseessa esitettyä yksikäsitteistä pistettä $b' = T(abc)$.

Todistus. Tarkastellaan sellaisua pisteitä a, b, c, b', joille pätee, että pisteet a, c, b' ovat samalla suoralla ja $a \neq c$. Koska piste b' voidaan valita mielivaltaisesti, valitaan se sellaiseksi, että se toteuttaa ehdon $ab \equiv ab'$. Tälläinen piste on olemassa aksiooman T 15 perusteella kaikille pisteille a, b, c. Nyt koska apulause 4.9 pätee, niin pisteet suoralla voidaan laittaa järjestykseen. Siis pätee joko $B(acb')$ tai $B(ab'c)$ tai $B(cab')$. Tällöin on löydetty sellainen piste b', joka täyttää lauseen ehdot.

Todistetaan pisteen b' yksikäsitteisyys. Oletetaan, että lauseen mukainen piste b' on olemassa ja samoin on olemassa lauseen mukainen piste d'. Siis pätee $(B(ab'c) \vee B(acb')) \wedge ab \equiv ab'$ ja $(B(ad'c) \vee B(acd')) \wedge ab \equiv ad'$. Nyt aksiooman T 1 perusteella $ab \equiv ab' \rightarrow ab' \equiv ab$ ja aksiooman T 4 kohdan 1 perusteella $ab' \equiv ab \wedge ab \equiv ad' \rightarrow ab' \equiv ad'$. Nyt koska pätee $B(ab'c) \vee B(acb')$ ja $B(ad'c) \vee B(acd')$, niin pätee $B(ab'd') \vee B(ad'b')$. Näistä kummastakin seuraa apulauseen 4.6 perusteella $b' = d'$. Siis lauseen piste b' on yksikäsitteinen. □

Apulause 4.12.

$$\forall a, b, c\ (B(abc) \rightarrow \exists b'\ (B(ab'c) \wedge cb \equiv ab')$$

Todistus. Oletetaan ensin, että väite $B(abc)$ pätee. Aksiooman T 14 mukaan janalla ac on keskipiste m ja aksiooman T 15 mukaan on olemassa b', jolle $B(bmb') \wedge mb \equiv mb'$. Apulauseen 4.9 perusteella pätee $B(abm) \vee B(amb)$ ja kummassakin tapauksessa apulauseen 4.9 ja aksioomien T 1, T 2, T 12 ja T 10 perusteella saadaan $cb \equiv ab'$ ja nyt aksiooman T 10 ja apulauseen 4.9 perusteella pätee $B(ab'c)$. □

Apulause 4.13.

$$\forall a, b, b', c\ (B(abc) \wedge (B(cb'a) \vee B(cab')) \wedge ab \equiv cb' \rightarrow B(cb'a))$$

Todistus. Tulos seuraa apulauseista 4.12, 4.11 ja aksioomasta T 5. □

4.3 Eripituisten janojen ominaisuuksia

Seuraavat apulauseet 4.14 - 4.19 koskevat eripituisia janoja ja niiden ominaisuuksia (ks. määritelmä alaluvussa 2.3).

Apulause 4.14.

$$\forall a, b, c\ (ab \geqq ac \vee ac \geqq ab)$$

Tämä tarkoittaa sitä, että kaksi eripituista janaa, joilla on yksi yhteinen päätepiste, ovat vertailtavissa pituuden suhteen.

Todistus. Huomataan, että tapaus $a = c$ on selvä. Voidaan siis olettaa, että $a \neq c$. Olkoon $b' = T(abc)$ (ks. merkintä apulauseesta 4.11). Jos $B(ab'c)$ pätee, niin silloin on oltava $ac \geqq ab$ kun valitaan $c' = b'$ määritelmässä luvussa 2.3. Jos taas pätee $B(acb')$, niin on oltava $a \neq b$, sillä $ab \equiv ab'$ ja $b' \neq a$. Joten aksiooman T 10 perusteella pätee $B(aT(acb)b)$, siis $ab \geqq ac$ määritelmän mukaan, kun $c' = T(acb)$. Näin ollen tämä apulause on todistettu. □

Apulause 4.15.

$$\forall a, b, c\ (ab \geqq ac \rightarrow \exists b'\ (B(acb') \wedge ab \equiv ab')$$

Todistus. Havaitaan ensin, että jos valitaan $a = c$, niin voidaan valita $b' = b$, jolloin tapaus on selvä. Oletetaan siis, että $a \neq c$ ja $b' = T(abc)$. Tällöin pätee $(B(acb') \vee B(ab'c)) \wedge ab \equiv ab'$. Nyt pitemmyyden määritelmän mukaan on olemassa c', jolle $B(ac'b) \wedge ac \equiv ac'$. Aksioomien T 1 ja T 10 perusteella saamme, että $B(acb')$. (Ks. merkintä $T(abc)$ apulauseesta 4.11.) □

Apulause 4.16.

$$\forall a, b, c, c'\ \exists b'\ (ac \equiv ac' \wedge B(abc) \rightarrow B(ab'c') \wedge ab \equiv ab' \wedge bc \equiv b'c')$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $a \neq c$, jolloin myös $a \neq c'$. Oletetaan sitten, että pätee $ac \equiv ac' \wedge B(abc)$. Nyt apulauseesta 4.11 seuraa, että pisteille abc' on olemassa tasan yksi piste b', jolle $a \neq c' \rightarrow (B(ab'c') \vee B(ac'b')) \wedge ab \equiv ab'$. Nyt pätee siis $B(abc)$ ja $B(ab'c') \vee B(ac'b')$ sekä $ab \equiv ab'$ ja $ac \equiv ac'$. Näin ollen aksiooman T 10 oletukset täyttyvät, kun pisteinä ovat a, b, c, b', c' ja tästä seuraa $B(ab'c') \wedge bc \equiv b'c'$. □

Apulause 4.17.

$$\forall a, b, c\ (bc \geqq ba \wedge ab \geqq ac \rightarrow cb \geqq ca)$$

Todistus. Aloitetaan todistus toteamalla, että pitemmyyden määritelmän mukaan on olemassa piste p, jolle $B(bpc) \wedge ba \equiv bp$ ja piste q, jolle $B(aqb) \wedge ac \equiv aq$. Apulauseen 4.16 ja aksiooman T 5 perusteella saadaan, että on olemassa piste q', jolle $B(bq'p) \wedge bq \equiv bq' \wedge qa \equiv q'p$. Näin ollen aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 mukaan pätee $ac \equiv pq'$. Nyt apulauseen 4.9 perusteella $B(cpq')$. Apulauseen 4.12 perusteella on olemassa piste r, jolle $B(crq') \wedge q'p \equiv cr$. Käyttämällä aksioomia T 1, T 2 ja T 4 kohtaa 2, voidaan edellä päätellyistä tuloksista $ac \equiv pq'$ ja $q'p \equiv cr$ päätellä, että $ca \equiv cr$. Apulauseen 4.9 mukaan pätee myös tulos $B(crb)$, joten $cb \geqq ca$ pitemmyyden määritelmän mukaan, kun $c' = r$. □

Apulause 4.18.

$$\forall a, b, c, d\ (ab \geqq ac \wedge ac \geqq ad \rightarrow ab \geqq ad)$$

Jos jana ab on pidempi kuin jana ac ja jana ac on pidempi kuin jana ad, niin myös jana ab on pidempi kuin jana ad.

Todistus. Oletetaan, että pätee $ab \geqq ac \wedge ac \geqq ad$. Pitemmyyden määritelmän mukaan nyt pätee $ab \geqq ac \leftrightarrow \exists c'\ (B(ac'b) \wedge ac \equiv ac')$ sekä $ac \geqq ad \leftrightarrow \exists d'\ (B(ad'c) \wedge ad \equiv ad')$. Käyttämällä apulausetta 4.11 pisteillä a, d, b saadaan, että on olemassa sellainen piste b', että kun $a \neq b$, niin $B(ab'b) \vee B(abb') \wedge ad \equiv ab'$. Nyt aksiooman T 1 avulla saadaan, että $ad \equiv ad' \rightarrow ad' \equiv ad$ ja aksiooman T 4 kohdan 1 avulla saadaan, että $ad' \equiv ad \wedge ad \equiv ab' \rightarrow ad' \equiv ab'$. Nyt kun valitaan piste e siten, että pätee $B(ad'e)$ ja $ae \equiv ab$, niin voidaan sijoittaa pisteet a, d', e, b', b aksioomaan T 10 ja saadaan $B(ad'e) \wedge (B(ab'b) \vee B(abb')) \wedge ad' \equiv ab' \wedge ae \equiv ab \rightarrow B(ab'b) \wedge d'e \equiv b'b$. Tällöin pätee $B(ab'b) \wedge ad \equiv ab'$, joten pitemmyyden määritelmän mukaan $ab \geqq ad$. □

Apulause 4.19.

$$\forall a, b, c\ ((ab \geqq ac \wedge ba \geqq bc) \vee (bc \geqq ba \wedge cb \geqq ca) \vee (ca \geqq cb \wedge ac \geqq ab))$$

Tämä apulause todistaa, että jokaisessa kolmiossa on yksi sivu, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin kaksi muuta sivua.

Todistus. Apulauseen 4.14 perusteella pätee $ab \geqq ac$ tai $ac \geqq ab$. Oletetaan ensin, että $ab \geqq ac$. Apulauseen 4.14 mukaan pätee myös $ba \geqq bc$ tai $bc \geqq ba$. Jos pätee $ba \geqq bc$, niin tapaus on selvä, sillä väittämän ensimmäinen osio pätee. Jos taas pätee $bc \geqq ba$, niin apulauseen 4.17 perusteella $cb \geqq ca$, jolloin väittämän toinen kohta pätee. Oletetaan seuraavaksi, että $ac \geqq ab$, jolloin saadaan vastaavasti kuten edellä, että jokin lauseen kolmesta tapauksesta pätee. □

4.4 Laskutoimitusten ominaisuuksia

Seuraavat apulauseet 4.20 - 4.22 liittyvät laskutoimituksiin.

Apulause 4.20.

$$\forall a, b, c, b', c'\ (B(abc) \wedge B(ab'c') \wedge ab \equiv ab' \wedge bc \equiv b'c' \rightarrow ac \equiv ac')$$

Tämä apulause kuvastaa aksioomaa EA 2 eli sitä, että kun samansuuruisiin asioihin lisätään samansuuruiset asiat, niin myös summat ovat samansuuruisia. Tässä kyseissä apulauseessa samansuuruiset asiat ovat samasta pisteestä a lähtevät kaksi suoraa.

Todistus. Aloitetaan todistus käyttämällä apulauseesta 4.11 saatavaa tulosta siitä, että on olemassa piste c'', jolle $(B(ab'c'') \vee B(ac''b')) \wedge ac \equiv ac''$. Nyt aksiooman T 10 perusteella pätee $B(ab'c'') \wedge bc \equiv b'c''$. Aksioomien T 2 ja T 4 kohdan 2 sekä apulauseen 4.6 avulla saadaan $c'' = c'$. □

Apulause 4.21.

$$\forall a, b, a', b' \; (B(a'ab) \land B(abb') \land aa' \equiv bb' \to ba' \equiv ab')$$

Tämä apulause on muunnos edellisestä apulauseesta 4.20.

Todistus. Olkoon $m = M(ba)$, jolloin apulauseen 4.20 perusteella pätee $ma' \equiv mb'$. Koska apulauseen 4.9 mukaan pätee $B(maa')$ ja $B(mbb')$, niin voidaan päätellä aksiooman T 11 avulla, että $ba' \equiv ab'$. □

Apulause 4.22.

$$\forall a, b, c, b', c' \; (B(abc) \land B(ab'c') \land ac \equiv ac' \land bc \equiv b'c' \to ab \equiv ab')$$

Tämä apulause kuvastaa aksioomaa EA 3 eli sitä, kuinka samansuuruisista vähentämällä samansuuruiset, saadaan samansuuruiset erotukset. Tässä kyseissä apulauseessa samansuuruiset asiat ovat samasta pisteestä a lähtevät kaksi suoraa.

Todistus. Aloitetaan todistus käyttämällä apulauseesta 4.11 saatavaa tulosta siitä, että on olemassa piste b'', jolle $(B(ab''c') \lor B(ac'b'')) \land ab \equiv ab''$. Aksiooman T 10 avulla saadaan, että $B(ab''c') \land bc \equiv b''c'$. Nyt aksioomien T 4 kohdan 2, T 1 ja T 2 avulla saadaan $c'b' \equiv c'b''$. Apulauseiden 4.9 ja 4.6 avulla saadaan $b'' = b'$. □

5 Teorian kehittelyä aksioomajärjestelmässä

Tässä luvussa käydään läpi lisää hyperbolisen geometrian tuloksia ja kehitellään hyperbolisen aksioomajärjestelmän teoriaa. Tulokset esitetään yhtenevästi lähteen [7, s. 393–402] kanssa.

Eräs tämän tutkielman päätuloksista käsitellään alaluvussa 5.1. Tulos todistaa, että janojen yhtenevyys on transitiivinen. Tämän jälkeen käsitellään alaluvuissa 5.2 ja 5.3 tuloksia peilauksista ja tuloksia kohtisuoruudesta. Lopuksi alaluvussa 5.4 todistetaan tärkeät tulokset Paschin aksiooman ja viiden janan aksiooman paikkaansapitävyydestä hyperbolisessa tasossa.

5.1 Janojen kongruenssin transitiivisuus

Tässä alaluvussa todistetaan yksi tämän tutkielman tärkeimmistä tuloksista: janojen kongruenssin transitiivisuus. Tällä tarkoitetaan sitä, että janojen pituuksia vertailtaessa kahden janan samanpituisuudesta seuraa, että jos jokin kolmas jana on samanpituinen jomman kumman janan kanssa, niin se on samanpituinen myös toisen kanssa. Tämä tulos on vahvempi muoto aksioomasta T 4 ja eräs versio aksioomasta TE 2. On huomattava, että Tarski on valinnut euklidisen geometrian aksioomiinsa tässä luvussa esitettävän muodon transitiivisuudesta, lause 5.1, kun taas hyperbolisen geometrian aksioomiin heikomman muodon, jossa transitiivisuus pätee ainoastaan vertailtavien janojen yhden päätepisteen ollessa sama. Tätä valintaa voisi kyseenalaistaa, sillä tässä esitettävä tulos on aivan yhtä uskottava aksioomaksi kuin luvun 3 versio, aksiooma T 4. Tässä tutkielmassa on kuitenkin pitäydytty aksioomien alkuperäisessä asettelussa.

Lause 5.1.

$$\forall a, b, c, d, e, f\ (ab \equiv cd \wedge cd \equiv ef \rightarrow ab \equiv ef)$$

Todistus. Aloitetaan lauseen todistus jakamalla se muutamaan tapaukseen. Jokaisen tapauksen todistus käydään erikseen läpi. Apulauseen 4.19 perusteella jokin seuraavista on pädettävä: $ae \geqq ac \wedge ea \geqq ec$ tai $ac \geqq ae \wedge ca \geqq ce$ tai $ce \geqq ca \wedge ec \geqq ea$. Tämän lisäksi apulauseen 4.14 perusteella on pädettävä $ab \geqq ae$ tai $ae \geqq ab$.

	$ae \geqq ac \wedge ea \geqq ec$	$ac \geqq ae \wedge ca \geqq ce$	$ce \geqq ca \wedge ec \geqq ea$
$ab \geqq ae$	tapaus 1	tapaus 2	tapaus 3
$ae \geqq ab$	tapaus 4	tapaus 5	tapaus 6

Tapaukset 3 ja 6 Tapauksista voidaan heti sulkea pois tapaukset 3 ja 6, sillä $ce \geqq ca \wedge ec \geqq ea$ voidaan saattaa samaan muotoon kuin $ac \geqq ae \wedge ca \geqq ce$, kun lauseen väittämä muotoillaan aksioomia T1 ja T 2 käyttäen muotoon $ef \equiv cd \wedge cd \equiv ab \rightarrow ef \equiv ab$.

Tapaukset 1 ja 2 Oletetaan, että $ab \geqq ae$ pätee. Tällöin apulauseen 4.15 perusteella on olemassa piste x, jolle $B(aex) \wedge ab \equiv ax$. Nyt aksiooman T 17 kohdan 2 avulla saadaan, että on olemassa piste p, jolle $ax \equiv ap \wedge ap \equiv ep$. Aksiooman T 4 kohdan 1 avulla voidaan päätellä, että $ab \equiv ap$ ja koska pätee myös $ab \equiv cd$, niin aksioomia T 1, T 2 ja T 4 kohtaa 1 käyttämällä saadaan $cd \equiv ap \wedge cd \equiv ep$. Tästä ja tuloksesta $cd \equiv ef$ saadaan pääteltyä aksioomien T 1 ja T 4 kohdan 2 avulla, että $ep \equiv ef$. Tästä ja tuloksesta $ab \equiv ep$ saadaan aksiooman T 4 kohdan 1 avulla, että $ab \equiv ef$. Näin ollen lause on todistettu tapauksissa 1 ja 2.

Tapaus 4 Oletetaan nyt, että $ae \geqq ab$ ja $ae \geqq ac \wedge ea \geqq ec$ pätevät. Oletetaan sitten, että pisteet a, c, e ovat eri pisteitä. Jos ne olisivat sama piste, lauseen väite seuraisi aksioomista T 4 kohta 1 ja T 1. Nyt apulauseen 4.15 mukaan on olemassa piste h, jolle $B(ach) \wedge ae \equiv ah$. Aksiooman T 17 kohdan 2 mukaan nyt on olemassa piste p, jolle $ah \equiv ap \wedge ap \equiv cp$. Aksiooman T 4 kohdan 1 perusteella saadaan, että $ae \equiv ap$. Aksiooman T 15 mukaan tällöin on olemassa sellaiset d' ja b', että $B(pcd') \wedge cd \equiv cd'$ ja $B(pab') \wedge ab \equiv ab'$.

Otetaan seuraavaksi käyttöön yksi apulause. Tätä ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta halutessaan todistuksen voi katsoa lähteestä [7, s. 394].

Apulause 5.2.

$$d'p \geqq d'e$$

Käyttämällä apulausetta 5.2, aputulosta 4.15 sekä aksioomia T 4 kohta 1 ja T 17 kohta 2 saadaan, että on olemassa piste q, jolle $d'p \equiv d'q \wedge d'q \equiv eq$. Koska aksioomien T 1 ja T 2 mukaan $pa \equiv pc$ ja aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 mukaan $ab' \equiv cd'$ ja $B(pab') \wedge B(pcd')$, niin $pb' \equiv pd'$ apulauseen 4.20 perusteella.

Olkoon nyt $q' = T(eqa)$ (ks. merkintä apulauseesta 4.11). Nyt, jos käytetään toistuvasti aksioomia T 1, T 2, T 4 kohta 1, niin saamme $pb' \equiv eq$ ja $pb' \equiv eq'$. Olkoon nyt $q_0 = T'(ab'e)$ (ks. merkintä aksioomasta T 15). Koska $ap \equiv ae$ aksiooman T 1 perusteella, niin $pb' \equiv eq_0$ aksiooman T 11 perusteella. Joten apulauseen 4.9, aksiooman T 15 ja apulauseen 4.6 perusteella $q_0 = q'$. Tällöin $ab' \equiv aq'$ ja $B(eaq')$, joten $ab \equiv aq'$.

Olkoon nyt e' peilaus pisteestä e pisteen a suhteen (katso määritelmä luvussa 2.3). Tällöin $B(eae') \wedge ae \equiv ae'$. Nyt $B(aq'e')$ olettaen, että $ab \equiv aq'$, $B(eaq')$, $ae \geqq ab$. Nyt ovat voimassa aksiooman T 17 kohdan 1 oletukset, joten on olemassa piste r, jolle $ae \equiv ar \wedge eq' \equiv er$, joten myös $eq \equiv er$. Nyt apulauseen 4.16 perusteella on olemassa piste m, jolle $B(d'mq) \wedge d'c \equiv dm \wedge cp \equiv mq$ ja on olemassa piste n, jolle $B(qne) \wedge qm \equiv qn \wedge md' \equiv ne$. Nyt apulauseen 4.11 perusteella on olemassa piste n', jolle $(B(rn'e) \vee B(ren')) \wedge rn' \equiv ra$. Nyt aksiooman T 15 mukaan on olemassa piste b'', jolle $B(rab'') \wedge ab' \equiv ab''$. Koska $ae \equiv ap$ ja $ae \equiv ar$, niin $ap \equiv ar$ aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 mukaan. Nyt aksioomien T 1, T 2 ja T 11 mukaan $b'p \equiv b''r$. Olettaen, että $ab \equiv ab' \wedge cd \equiv cd' \wedge ab \equiv cd \wedge pb' \equiv pd'$ saamme, että $pd' \equiv rb''$. Koska $pd' \equiv d'q$, niin $d'q \equiv rb''$. Koska $d'q \equiv eq$, niin $rb'' \equiv eq$. Olettaen, että pätee $eq \equiv er$, saadaan $re \equiv rb''$. Koska $B(rn'e)$ aksiooman T 10 perusteella ja

$rn' \equiv qn$ aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 avulla, niin $qn \equiv qm$ aksiooman T 1 perusteella ja $qm \equiv cp$ ja $cp \equiv ca$ ja $pa \equiv ar$ ja $ar \equiv rn'$ aksioomien T 1 ja T 2 perusteella. Koska $B(qne) \wedge eq \equiv er \wedge nq \equiv n'r \wedge B(rn'e)$, niin on oltava $en \equiv en'$ apulauseen 4.22 mukaan. Koska aksiooman T 1 mukaan pätee $rb'' \equiv re$ ja $ra \equiv rn'$ ja myös $B(rab'') \wedge B(rn'e)$, niin pätee aksiooman T 10 mukaan, että $ab'' \equiv n'e$. Olettaen, että $ab \equiv ab'$ ja $ef \equiv en'$ ja $ab'' \equiv en'$, saadaan $ef \equiv ab''$ ja siten myös $ab \equiv ef$.

Tapaus 5 Oletetaan, että nyt pätevät $ae \geqq ab$ ja $ac \geqq ae \wedge ca \geqq ce$. Koska $ac \geqq ae$, niin aksiooman T 17 kohdan 2, T 4 kohdan 1 ja apulauseen 4.15 perusteella on olemassa piste p, jolle $ac \equiv ap \wedge ap \equiv ep$. Aksiooman T 15 perusteella on olemassa piste f', jolle $B(pef') \wedge ef \equiv ef'$ ja piste b', jolle $B(pab') \wedge ab \equiv ab'$.

Otetaan nyt taas käyttöön yksi apulause, jonka todistuksen voi halutessaan katsoa lähteestä [7, s. 394].

Apulause 5.3.

$$pf' \geqq cf'$$

Nyt apulauseen 5.3, apulauseen 4.15, aksiooman T 4 kohdan 1 ja T 17 kohdan 2 perusteella on olemassa piste q, jolle $f'p \equiv f'q \wedge f'q \equiv cq$. Nyt apulauseen 4.11 ja aksiooman T 10 perusteella on olemassa piste e', jolle $B(f'e'q) \wedge f'e \equiv f'e' \wedge ep \equiv e'q$ ja piste d', jolle $B(qd'c) \wedge qe' \equiv qd' \wedge e'f' \equiv d'c$. Nyt aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 avulla saadaan $ef \equiv d'c$. Koska $cd \equiv ef$, niin $cd \equiv cd'$ aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 2 perusteella. Nyt aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 toistuva käyttö antaa tuloksen $ac \equiv qd'$.

Olkoon nyt $t = T'(cd'a)$ ja $u = T'(abc)$ (ks. merkintä aksioomasta T 15). Aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 perusteella pätee $ct \equiv au$ sekä $B(act)$ ja $B(cau)$, jolloin myös $at \equiv cu$ apulauseen 4.21 perusteella sekä $cq \equiv at$. Näin ollen pätee $cq \equiv cu$ aksiooman T 4 kohdan 2 perusteella. Koska $ac \geqq ae$ ja $ae \geqq ab$, niin $ac \geqq ab$ apulauseen 4.18 perusteella. Näin ollen $B(auc')$. Aksiooman T 17 kohdan 1 mukaan on olemassa piste r, jolle $ac \equiv ar \wedge cu \equiv cr$, joten aksiooman T 4 kohdan 1 mukaan $cq \equiv cr$. Apulauseen 4.11 ja aksiooman T 10 mukaan on olemassa piste d'', jolle $B(cd''r) \wedge cd' \equiv cd'' \wedge d'q \equiv d''r$. Aksiooman T 15 perusteella on olemassa piste b'', jolle $B(rab'') \wedge ab \equiv ab''$. Käyttäen aksioomia T 1, T 2 ja T 4 kohtaa 1 saadaan $ar \equiv ap$ ja $ab'' \equiv ab'$, joten aksiooman T 11 perusteella $rb'' \equiv pb'$. Nyt saadaan $d'q \equiv ac$, jolloin $d'q \equiv ar$ ja aksiooman T 4 kohdan 2 sekä aksiomien T 1 ja T 2 perusteella $ar \equiv d''r$. Koska myös $cd \equiv cd''$ aksioomien 4 kohdan 1 ja aksiooman T 1 perusteella sekä $cd \equiv ab$ aksiooman T 1 perusteella sekä $ab \equiv ab''$, niin saadaan aksioomia T 1 ja T 4 kohtaa 1 hyödyntämällä $cd \equiv ab''$. Tuloksista $d''c \equiv ab''$, $rd'' \equiv ra$ ja $B(rd''c) \wedge B(rab'')$ saadaan apulauseen 4.20 avulla $rc \equiv rb''$. Koska $cq \equiv cr$ ja $cq \equiv qf'$ ja $qf' \equiv f'p$, niin saadaan $b''r \equiv f'p$ aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 avulla. Ja koska $rb'' \equiv pb'$, niin $f'p \equiv pb'$ aksioomien T 1, T 2 ja T 4 kohdan 2 perusteella. Koska $pe \equiv pa$ ja $B(pef')$ ja $B(pab')$, niin $ef' \equiv ab'$ aksioomien T 1, T 2 ja T 10 perusteella. Koska $ab \equiv ab'$ ja $ef \equiv ef'$ niin $ab \equiv ef$ aksioomien

T 1, T 2 ja T 4 kohdan 1 avulla. Näin ollen lause on todistettu tapauksessa 5 ja siten kaikissa mahdollisissa tapauksissa.

□

5.2 Peilauksen ominaisuuksia

Seuraavat tulokset 5.4 - 5.7 liittyvät peilauksiin (katso määritelmä alaluvussa 2.3).

Lause 5.4.

$$\exists a, b, c\ (\neg L(abc))$$

Tämä tulos kertoo, että on olemassa sellaiset pisteet a, b, c, että ne eivät sijaitse samalla suoralla keskenään. Toisin sanoen kyseiset pisteet muodostavat kolmion. Tämä on vahvempi muoto aksioomasta T 21 ja vastaava tulos aksiooman TE 8 kanssa.

Todistus. Olkoon $a \neq b$, kuten aksiooman T 21 mukaan on aina mahdollista. Aksiooman T 17 kohdan 2 mukaan on olemassa piste c, jolle $ab \equiv ac \wedge ac \equiv bc$, joten ei voi olla mahdollista, että $L(abc)$ pätee. Muuten pisteen c olisi oltava janan ab keskipiste, jolloin pätisi $B(acb)$ ja tästä seuraisi tuloksen $ac \equiv ab$ kanssa se, että $c = b$ (apulauseen 4.6 mukaan), josta puolestaan seuraisi, että $a = b$ (lauseen 4.3 mukaan). □

Apulause 5.5.

$$\forall a, b\ (ab \equiv \sigma_o(a)\sigma_o(b))$$

Tässä σ tarkoittaa peilausta, katso määritelmä luvussa 2.3. Tämä apulause todistaa, että peilaukset ovat isometrioita eli pisteiden peilikuvat ovat aina yhtä etäällä toisistaan kuin itse pisteet.

Todistus. Jos $o = a$ tai $o = b$, niin $\sigma_o(a) = o$ tai $\sigma_o(b) = o$ ja tämä apulause on osa peilauksen määritelmää. Oletetaan siis, että $a \neq o \wedge b \neq o$. Olkoon nyt $a' = \sigma_o(a)$ ja $b' = \sigma_o(b)$ sekä olkoon $a'' = T'(oab)$ ja $b'' = T'(oba)$ (ks. merkintä aksioomasta T 15). Nyt apulauseen 4.9 mukaan pätee $B(oa''b') \vee B(ob'a'')$ ja $B(oa'b'') \vee B(ob''a')$. Koska $ob' \equiv ob''$ ja $oa' \equiv oa''$, niin aksiooman T 10 perusteella pätee $B(oa''b') \wedge B(oa'b'')$ tai $B(ob'a'') \wedge B(ob''a')$. Aksiooman T 12 perusteella saadaan, että $ab \equiv a''b''$ ja $a'b' \equiv a''b''$, joten $ab \equiv a'b'$. □

Lause 5.6.

$$\forall a, b, c, d\ \exists e\ (B(cde) \wedge ab \equiv de)$$

Tämä tulos vastaa aksioomaa TE 4.

Todistus. Olkoon $o = M(ad)$ ja $b' = \sigma_o(b)$. Nyt apulauseen 5.5 perusteella $ab \equiv db'$. Aksiooman T 15 perusteella saadaan, että on olemassa piste e, jolle $B(cde) \wedge db' \equiv de$, jolloin $ab \equiv de$. □

Apulause 5.7.

$$\forall a, b, c, d, e\ (a \neq b \wedge ac \equiv ad \wedge bc \equiv bd \wedge L(abe) \rightarrow ec \equiv ed)$$

Tämä apulause on muunnelma aksioomasta T 9, tässä vaihdetaan välissäolon $B(abe)$ tilalle $L(abe)$.

Todistus. On osoitettava, että aksiooma T 9 pysyy totena, vaikka $B(abe)$ korvataan väittämällä $L(abe)$. Jos pätee $B(bae)$, niin kirjoitetaan $bc \equiv bd \wedge ac \equiv ad$, kun aksiooman alkuperäinen muoto on $ac \equiv ad \wedge bc \equiv bd$. Tällöin aksiooma pätee. Jos sen sijaan pätee $B(aeb)$, niin aksioomasta T 9 seuraa $\sigma_b(a)c \equiv \sigma_b(a)d$. Nyt apulauseen 4.9 mukaan pätee $B(\sigma_b(a)be)$, joten voidaan käyttää aksioomaa T 9 ja saadaan $ec \equiv ed$. □

5.3 Kohtisuoruuden ominaisuuksia

Seuraavat tulokset 5.8 - 5.10 käsittelevät janojen kohtisuoruutta (ks. määritelmä alaluvussa 2.3).

Apulause 5.8.

$$\forall a, b, c, x\ (ab \perp bc \wedge L(abx) \wedge x \neq b \rightarrow xb \perp bc)$$

Tämä apulause kertoo, että jos jotkin kaksi janaa ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin toiselta janalta voidaan valita janan päätepisteeksi jokin muu piste siten, että janat pysyvät kohtisuorassa toisiaan vasten.

Todistus. Oletetaan, että $ab \perp bc \wedge L(abx) \wedge x \neq b$. Kohtisuoruuden määritelmästä seuraa, että kun pätee $ab \perp bc$, niin $a \neq b \wedge b \neq c \wedge ac \equiv a\sigma_b(c)$. Huomataan, että peilauksen määritelmästä seuraa, että $bc \equiv b\sigma_b(c)$. Nyt jos käytetään apulausetta 5.7 pisteillä $a, b, c, \sigma_b(c), x$, niin huomataan, että oletukset $a \neq b \wedge ac \equiv a\sigma_b(c) \wedge bc \equiv b\sigma_b(c) \wedge L(abx)$ pätevät ja tästä seuraa $xc \equiv x\sigma_b(c)$. Huomataan, että nyt kohtisuoruuden määritelmän perusteella, kun oletukset $x \neq b \wedge b \neq c \wedge xc \equiv x\sigma_b(c)$ pätevät, seuraa $xb \perp bc$. □

Apulause 5.9.

$$\forall a, b, c\ (ab \perp bc \rightarrow cb \perp ba)$$

Tämä apulause todistaa, että kohtisuoruus on symmetrinen. Toisin sanoen, jos janat ab ja bc ovat keskenään kohtisuorassa, niin samoin ovat janat cb ja ba.

Todistus. Tämä seuraa apulauseesta 5.5.

Oletetaan, että pätee $ab \perp bc$. Nyt kohtisuoruuden määritelmästä seuraa, että $a \neq b \wedge b \neq c \wedge ac \equiv a\sigma_b(c)$. Peilauksen määritelmästä vuorostaan seuraa $B(cb\sigma_b(c)) \wedge bc \equiv b\sigma_b(c)$. Apulauseesta 5.5 seuraa, että $ca \equiv \sigma_b(c)\sigma_b(a)$. Tästä taas seuraa peilauksen määritelmän perusteella, että $B(ab\sigma_b(a)) \wedge ba \equiv b\sigma_b(a)$. Nyt siis pätee $ac \equiv a\sigma_b(c) \wedge bc \equiv b\sigma_b(c) \wedge ba \equiv b\sigma_b(a)$. Näin ollen on oltava myös $ca \equiv c\sigma_b(a)$. Tällöin kohtisuoruuden määritelmän nojalla $cb \perp ba$. □

Apulause 5.10. *Jokaiselle janalle ab on olemassa jokin jana, joka on kohtisuorassa janaa ab kohti.*

Todistus. Oletetaan, että pisteet a ja b ovat eri pisteitä, eli $a \neq b$. Aksiooman T 17 kohdan 2 perusteella on olemassa piste c, jolle $ab \equiv ac \wedge ac \equiv bc$. Olkoon nyt $o = M(ab)$, tällöin kohtisuoruuden määritelmän nojalla pätee $co \perp oa$. Nyt apulauseen 5.8 perusteella pätee myös $co \perp ab$. □

Apulause 5.11. *On olemassa uniikki kohtisuora jana mistä tahansa pisteestä mille tahansa janalle.*

Emme käy tässä tarkemmin tämän apulauseen todistusta, halutessaan sen voi katsoa lähteestä [9]. Käytämme jatkossa merkintää $F(abc)$ ilmaisemaan sitä pistettä, jossa jana ab leikkaa sen uniikin kohtisuoran kanssa, joka lähtee pisteestä c janalle ab.

5.4 Paschin aksiooma ja viiden janan aksiooma

Tässä alaluvussa todistetaan, että Paschin aksiooma ja viiden janan aksiooma pätevät luvussa 3 esitetyn aksioomajärjestelmän muodostamassa hyperbolisessa tasossa.

Paschin aksiooma on tämän tutkielman alaluvussa 2.4 numeroitu TE 7. Paschin aksiooma voidaan jakaa sisäiseen ja ulkoiseen Paschin aksioomaan. Lähteessä [4] on osoitettu, että sisäisestä Paschin aksioomasta seuraa koko Paschin aksiooma. Siksi tässä tutkielmassa todistetaan ainoastaan, että Paschin sisäinen aksiooma pätee (lause 5.14).

Viiden janan aksiooma puolestaan on numeroitu TE 5. Aloitetaan tämä luku viiden janan aksiooman käsittelystä ja sen jälkeen käsitellään Paschin aksiooma. Molemmat todistukset esitetään lähdettä [7, s. 400-402] vastaavalla tavalla.

Lause 5.12.

$$\begin{gathered}\forall a, b, c, x, a', b', c', x' (\neg L(abx) \wedge L(abc) \wedge L(a'b'c') \\ \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ac \equiv a'c' \wedge ax \equiv a'x' \wedge bx \equiv b'x' \\ \rightarrow xc \equiv x'c')\end{gathered}$$

Todistus. Olkoon o janan aa' keskipiste eli $o = M(aa')$. Peilataan pisteet a', b', c', x' pisteen o suhteen. Koska pisteen kautta peilaukset ovat isometrioita (ks. apulause 5.5), niin tällöin lause pätee oletuksella $a' = a$.

Oletetaan nyt, että $a' = a$ ja että $b' = b$. Tällöin olisi oltava myös $c' = c$. Nyt jos $x' = x$, niin tapaus on selvä. Jos olisi $x' \neq x$, niin tämä lause vastaisi apulausetta 5.7.

Oletetaan siis, että $a' = a$ ja $b' \neq b$ ja että m on janan bb' keskipiste eli $m = M(bb')$. Pisteiden b', c', x' peilaus janan am suhteen (jana jos $a \neq m$, piste jos $a = m$) kuvaa pisteet b' ja c' pisteille b ja c ja pisteen x' pisteelle x''. Nyt $ax'' \equiv ax'$ apulauseen 5.5 perusteella, joten myös $ax'' \equiv ax$ ja $b'x' \equiv bx''$. Näin ollen pätee $bx \equiv bx''$ ja $c'x' \equiv cx''$. Apulauseen 5.7 avulla voidaan päätellä, että $cx \equiv cx''$, joten myös $cx \equiv c'x'$. □

Siirrytään seuraavaksi Paschin aksiooman todistamiseen. Sitä ennen on käytävä läpi hieman teoriaa, johon todistus perustuu. Teoria ja Paschin aksiooman todistus tukeutuvat täysin lähteeseen [7].

Aksioomat T 1 -T 22 muodostavat joukon, josta voidaan muodostaa useita erilaisia malleja M. Malli tarkoittaa loogista rakennetta, joka sisältää pistejoukon ja pistejoukon alkioiden välisiä suhteita kuvaavia funktioita. Jokaisen mallin M pistejoukko on jonkin projektiivisen tason $P(K,k)$, missä K on Pythagoraan kunta, pistejoukon osajoukko. Pythagoraan kunnalla tarkoitetaan kuntaa, jossa kahden neliön summa on aina neliö. Pistejoukko P_M koostuu pisteistä $(a,b,1)$ ja sisältää pisteen $(0,0,1)$. Suorajoukko L_M koostuu kaikista suorista, jotka kulkevat jonkun pistejoukon P_M sisältämän pisteen kautta. [7, s. 400-401]

Projektiivinen taso $P(K,k)$ koostuu:

- pisteistä (a,b,c) siten, että pisteistä a,b,c vähintään yksi on nollasta poikkeava,
- suorista $[u,v,w]$ siten, että suorista u,v,w vähintään yksi on nollasta poikkeava,
- suorallaolosta(*incidence relation*, piste p on suoralla l) siten, että piste (a,b,c) on relaatiossa suoran $[u,v,w]$ kanssa jos ja vain jos $au+bv+cw=0$,
- kohtisuoruusrelaatiosta $[u,v,w] \perp [u',v',w'] \leftrightarrow uu'+vv'+kww'=0$,
- kongruenssirelaatiosta $\mathbf{ab} \equiv \mathbf{cd} \leftrightarrow \frac{F(\mathbf{a},\mathbf{b})^2}{Q(\mathbf{a})Q(\mathbf{b})} = \frac{F(\mathbf{c},\mathbf{d})^2}{Q(\mathbf{c})Q(\mathbf{d})}$, missä $\mathbf{a}=(x_a,y_a,1)$, $F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = k(x_a x_b + y_a y_b)+1$ ja $Q(\mathbf{a}) = F(\mathbf{a},\mathbf{a})$,
- välissäolosta $B(\mathbf{abc}) \leftrightarrow (\mathbf{a} < \mathbf{b} < \mathbf{c} \vee \mathbf{c} < \mathbf{b} < \mathbf{a})$.

[7, s. 400-401]

Nyt voidaan todistaa seuraava apulause. Sen todistusta ei käydä tässä tarkemmin läpi, mutta sen voi halutessaan katsoa lähteestä [7, s. 402].

Apulause 5.13.

$$\forall a,b,c,d\ (\neg L(abd) \wedge B(abc) \rightarrow B(aF(adb)F(adc)))$$

Katso merkintä $F(adb)$ apulauseesta 5.11.

Lause 5.14.

$$\forall a,b,c,d,e\ \exists f\ ((\neg L(acd) \wedge B(abc) \wedge B(ade)) \rightarrow (B(bfe) \wedge B(cfd)))$$

Todistus. Huomataan ensin, että aksiooman T 18 perusteella voidaan sanoa, että M on metrisesti konveksi eli jos $\mathbf{a},\mathbf{b} \in P_M$, niin P_M sisältää kaikki pisteet $\mathbf{x}$ suoralla $\mathbf{ab}$, joille on olemassa sellainen piste a, että $\mathbf{d} = (m,n,1)$ ja $\mathbf{dx} \perp \mathbf{xa} \wedge \mathbf{ad} \perp \mathbf{db}$. Siis jos $\mathbf{x} = (\alpha,\beta,1)$ on suoralla $\mathbf{ab}$ ja molemmat α ja β ovat pisteiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ x- ja y-koordinaattien välissä, niin pätee $B(\mathbf{axb})$.

Nyt voidaan löytää suorien $\mathbf{cd}$ ja $\mathbf{be}$ leikkauspiste, jossa voidaan valita, että $\mathbf{a} = (0,0,1)$ ja, että $\mathbf{ad}$ on x-akseli. Voidaan myös todistaa, että kyseisen leikkauspisteen koordinaatit ovat janojen päätepisteiden välissä. Nyt apulauseesta 5.13 seuraa tämän lauseen väittämä. □

6 Tarskin aksioomajärjestelmän tarkastelua

Tässä luvussa pohditaan luvussa 3 esitettyjen Tarskin hyperbolisen tason aksioomien yksinkertaisuutta (alaluvussa 6.1) ja vertaillaan euklidisen ja hyperbolisen tason aksioomia keskenään (alaluvussa 6.2). Yksinkertaisuudella tarkoitetaan sitä, että aksioomajoukko ei sisällä toisistaan riippuvia aksioomia ja että aksioomat on koostettu mahdollisimman vähällä muuttuja- ja notaatiomäärällä.

6.1 Yksinkertaisuus

Tässä alaluvussa pohditaan Tarskin hyperbolisen tason aksioomien yksinkertaisuutta.

Tässä tutkielmassa esitetty järjestelmä koostuu aksioomista, jotka käyttävät korkeintaan viittä muuttujaa ja poikkeuksena mukana on yksi kuuden muuttujan aksiooma T 20. On kuitenkin todistettu, että aksiooma T 20 pystytään korvaamaan viiden muuttujan aksioomalla. Näin ollen täydellisen aksioomajärjestelmän pystyy koostamaan pelkästään viiden muuttujan aksioomista. [8, s. 347-348]

Lisäksi joitain tämän aksioomajärjestelmän aksioomia saadaan muokattua yksinkertaisempaan muotoon. Lähteessä [1, s. 610-613] osoitetaan, että aksioomat saadaan seuraavaan muotoon: T 1 - T 6, T 8, T 9, T 11, T 12, T 14 - T 19, T 21, T 22. Alkuperäisestä aksioomajoukosta siis poistetaan vielä aksiooman T 20 lisäksi aksioomat T 7, T 10 ja T 13. Ne korvataan seuraavilla aksioomilla (esitetty tässä yhtenevästi lähteen [1, s. 610-613] kanssa).

Aksiooma T 23 (Versio aksioomasta T 7)**.**

$$\forall a, b, c, d \ (a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(dab) \rightarrow L(acd))$$

Aksiooma T 24 (Versio aksioomasta T 7)**.**

$$\forall a, b, c, d \ (a \neq b \wedge B(bca) \wedge B(bda) \rightarrow L(acd))$$

Aksiooma T 25 (Versio aksioomasta T 10)**.**

$$\forall a, b, c, d, e \ (B(abc) \wedge B(ade) \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow B(ade)$$

Aksiooma T 26 (Versio aksioomasta T 10)**.**

$$\forall a, b, c, d, e \ (B(abc) \wedge B(aed) \wedge ab \equiv ad \wedge ac \equiv ae \rightarrow bc \equiv de$$

Aksiooma T 27 (Versio aksioomasta T 13)**.**

$$\forall a, b, c, d, e \ (c \neq a \wedge B(cad) \wedge ab \equiv ad \wedge B(ced) \wedge cb \equiv ce \rightarrow B(ced))$$

Vaikka tässä versiossa aksioomien määrä lisääntyy yhdellä, ovat itse aksioomat kuitenkin loogiseltaan rakenteeltaan yksinkertaisempia. On täysin mahdollista, että Tarskin hyperbolisen tason aksioomista löytyy vielä lisää yksinkertaistettavaa, joko yksinkertaisempia muotoja nykyisistä aksioomista tai täysin muista aksioomista riippuvia aksioomia [1, s. 613]. Yhteenvetona voidaan siis todeta, että tässä tutkielmassa esitetty Tarskin hyperbolinen aksioomajärjestelmä ei ole yksinkertaisin mahdollinen.

6.2 Aksioomajärjestelmien vertailua

Tässä alaluvussa vertaillaan Tarskin euklidisia ja hyperbolisia aksioomia keskenään. Euklidinen järjestelmä on esitetty alaluvussa 2.4 ja hyperbolinen luvussa 3. Euklidiset aksioomat on numeroitu TE 1 - TE 13 ja hyperboliset T 1 - T 22. Osalla euklidisen järjestelmän aksoomia on useampi vastaavuus hyperbolisessa järjestelmässä, heikompi muoto ja vahvempi muoto. On huomattava, että euklidisen järjestelmän aksioomalle TE 11 ei löydy suoraa vastaavuutta hyperbolisesta järjestelmästä. Euklidisessa järjestelmässä esitetty paralleeliaksiooma TE 10 ei päde hyperbolisessa aksioomajärjestelmässä, mutta sille löytyy korvaava aksiooma T 22. Juuri tämä aksioomien TE 10 ja T 22 eroavaisuus erottaa nämä aksioomajärjestelmät toisistaan.

Vertailutaulukko:

Euklidisen geometrian aksiooma	Vastaavuus hyperbolisessa järjestelmässä
TE 1	lause 4.5
TE 2	T 4 / lause 5.1 ja T 1
TE 3	T 3 / lause 4.3
TE 4	T 15 / lause 5.6
TE 5	lause 5.12
TE 6	lause 4.7
TE 7	lause 5.14
TE 8	lause 5.4
TE 9	T 8
TE 10 (paralleeliaksiooma)	T 22
TE 11	
TE 12	T 6
TE 13	T 7

Lähteet

[1] Alama, Jesse (2014), "The Simplest Axiom System for Plane Hyperbolic Geometry revisited, again", *Studia Logica* Vol. 102 (No. 3) s. 609-615.

[2] Givant, Steven & Tarski, Alfred (1999), "Tarski's System of Geometry", *The Bulletin of Symbolic Logic* Vol. 5 (No. 2) s. 175-214.

[3] Greenberg, Marvin Jay (2010), "Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries", *The American Mathematical Monthly* Vol. 117 (No. 3) s. 198-219.

[4] Gupta, H. N. (1965), *Contributions to the axiomatic foundations of geometry*. Berkeley: University of California.

[5] Heath, Thomas (1956), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications.

[6] Lee, John M. (2013), *Axiomatic Geometry*. Rhode Island: American Mathematical Society.

[7] Pambuccian, Victor (2004), "The Simplest Axiom System for Plane Hyperbolic Geometry", *Studia Logica* Vol. 77 (No. 3) s. 385-411.

[8] Pambuccian, Victor (2011), "The Simplest Axiom System for Plane Hyperbolic Geometry revisited", *Studia Logica* Vol. 97 (No. 3) s. 347-349.

[9] Rigby, J. F. (1968), "Axioms for absolute geometry", *Canadian Journal of Mathematics* Vol. 20 s. 158-181.

[10] Szmielew, Wanda (1983), *From affine to Euclidean geometry. An axiomatic approach*. Warsaw: PWN.

[11] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperbolic_triangle.svg. Viittausajankohta 12.1.2022.

[12] https://www.geogebra.org/classic. Viittausajankohta 12.1.2022.