Tampereen yliopisto

Marika Laitinen

# LOHKOMATRIISIEN KÄÄNTÄMINEN

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Petteri Laakkonen
Tammikuu 2022

# TIIVISTELMÄ

Marika Laitinen: Lohkomatriisien kääntäminen
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Tammikuu 2022

---

Tämän työn aiheena on lohkomatriisien kääntäminen. Käänteismatriisit ovat hyödyllisiä työkaluja lineaariyhtälöiden ja muiden matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Monissa tilanteissa matriisin hajottaminen lohkoihin voi auttaa käänteismatriisin ratkaisemisessa. Työn tavoitteena on esittää menetelmiä $2 \times 2$ lohkomatriisien kääntämiseen.

Monessa lohkomatriisin kääntämiseen liittyvässä menetelmässä hyödynnetään Schurin komplementtia. Schurin komplementin yhtälö voidaan muodostaa tilanteissa, joissa matriisin johtava tai viimeinen lohko on ei-singulaarinen. Lisäksi työssä esitellään Schurin determinanttia.

Työssä esitellään kolme erilaista tapaa kääntää lohkomatriiseita: Banachiewicz-Schur muoto, Drazin käänteismatriisi ja Moore-Penrose käänteismatriisi. Banachiewicz-Schur muotoa voidaan käyttää matriiseille, joissa itse matriisi sekä sen johtava tai viimeinen lohko ovat ei-singulaarisia. Drazin ja Moore-Penrose käänteismatriisit ovat käänteismatriisien yksikäsitteisiä yleistyksiä sellaisissa tilanteissa, joissa matriisi ei ole kääntyvä. Drazin käänteismatriisi voidaan määrittää lohkomatriiseille, joiden johtava ja viimeinen lohko ovat neliömatriiseja, mutta ne saavat olla singulaarisia. Moore-Penrose käänteismatriisi voidaan puolestaan määrittää mille tahansa lohkomatriisille.

Avainsanat: lohkomatriisi, käänteismatriisi

# ABSTRACT

Marika Laitinen: Inverse of partitioned matrices
Bachelor's thesis
Tampere University
Engineering and Natural Sciences
January 2022

The subject of this work is the inversion of partitioned matrices also known as block matrices. Inverse matrices are useful tools for solving linear equations and in other mathematical problems. In many situations, partitioning the matrix can help solve the inverse matrix. The aim of this work is to present methods for inverting $2 \times 2$ block matrices.

Many methods for inverting a block matrix utilize Schur complement. The equation for Schur complement can be formed in situations where the leading or final block of the matrix is nonsingular. In addition, the Schur determinant is introduced in the work.

The work presents three different methods to find the inverse of block matrix: The Banachiewicz-Schur form, Drazin inverse and Moore-Penrose inverse. The Banachiewicz-Schur form can be used for matrices in which the matrix itself and its leading or final block are nonsingular. The inverse matrices of Drazin and Moore-Penrose are unique generalizations of inverse matrices applicable for singular matrices. The Drazin inverse can be defined for block matrices whose leading and last blocks are square matrices, but they can be singular. The Moore-Penrose inverse, in turn, can be solved for any arbitrary block matrix.

Keywords: block matrix, partitioned matrix, inverse of matrix

# ALKUSANAT

Tämä kandidaatintyö käsittelee lohkomatriisien kääntämistä ja se on laadittu osana Tampereen yliopiston tekniikan ja luonnontieteiden tutkinto-ohjelman opintoja.

Haluaisin kiittää kandidaatintyöni ohjaajaa Petteri Laakkosta mielenkiintoisesta aihe-ehdotuksesta lohkomatriisien maailmasta. Kiitos kuuluu myös perheenjäsenilleni, jotka olivat tukenani koko kirjoitusprosessin ajan.

Tampereella, 31. tammikuuta 2022

Marika Laitinen

# SISÄLLYSLUETTELO

# LYHENTEET JA MERKINNÄT

| | |
|---|---|
| $a_{(ij)}$ | Matriisin A alkio |
| $A^*$ | Matriisin A konjugaattitranspoosi |
| $A_{(ij)}$ | Matriisin A lohko |
| $\mathbb{R}$ | reaaliluvut |
| rank$(A)$ | Matriisin A aste |
| TAU | Tampereen yliopisto (engl. Tampere University) |

# 1. JOHDANTO

Matriisit ja niiden käänteismatriisit ovat tärkeitä työvälineitä lineaariyhtälöiden ja monen muun matemaattisen ongelman ratkaisemiseen. Suuria tai muuten monimutkaisia matriiseja voi olla vaikeaa kääntää. Tosinaan matriisit eivät ole kääntyviä, jolloin voidaan hyödyntää yleistettyjä käänteismatriiseja. Monissa tilanteissa matriisin jakaminen lohkoihin voi auttaa käänteismatriisin ratkaisemisessa. Optimaalisessa tilanteessa jokin tai jotkut lohkot ovat esimerkiksi nolla-, identiteetti- tai kolmiomatriiseja tai muuten helpommin käsiteltäviä kuin alkuperäinen matriisi.

Tämän työn tavoitteena on esitellä erilaisia menetelmiä kääntää lohkomatriiseja. Lisäksi tavoitteena on perehtyä esiteltyjen menetelmien vaatimiin oletuksiin. Työn matriisit on rajattu $2 \times 2$ lohkomatriiseihin. Lukijalta oletetaan perustietämystä matriisilaskennasta. Erityisesti perustietämys matriisien kääntyvyydestä ja lohkomatriisien laskutoimituksista on hyvä hallita. Näihin voi perehtyä esimerkiksi lähteen [5 s. 16, 35–46] avulla.

Työssä esitellään ensin Schurin komplementti, joka on hyödyllinen apuväline matriisien sovelluksia ratkaistaessa. Erityisesti lohkomatriisin käänteismatriiseja tutkittaessa Schurin komplementtia tarvitaan monen menetelmän kohdalla. Schurin komplementin johtamisen ja oletusten lisäksi työssä esitellään Schurin determinanttia.

Seuraavissa luvuissa esitellään erilaisille lohkomatriiseille tarkoitettuja käänteismatriisin ratkaistumenetelmiä. Ensimmäisenä esitellään Banachiewicz-Schur muotoa, joka on toimiva menetelmä lohkomatriiseille, joiden johtava tai viimeinen lohko on ei-singulaarinen neliömatriisi.

Muut esitellyt menetelmät tuottavat yksikäsitteisiä yleistyksiä tavallisen käänteismatriisin sijaan. Drazin käänteismatriisi sallii käännettävän matriisin ensimmäisen ja viimeisen neliölohkon olevan singulaarinen. Moore-Penrose käänteismatriisi voidaan ratkaista mille tahansa mielivaltaiselle lohkomatriisille. Näiden käänteismatriisien ratkaisuyhtälöt sekä tarkempia ehtoja näille menetelmille esitellään luvuissa 4 ja 5.

# 2. SCHURIN KOMPLEMENTTI

Schurin komplementti liittyy $2 \times 2$ lohkomatriiseihin, joissa johtava lohko on kääntyvä. Vaikka kaavan nimi päätyi Issai Schurille, tutki Emilie Haynesworth samaa asiaa jo viisikymmentä vuotta aiemmin. Schur myös näytti, miten Schurin komplementtia voidaan hyödyntää lohkomatriisin determinantin määrittämisessä. Schurin matemaattinen tutkimus käsitteli pääosin lineaarialgebraa ja matriisilaskentaa [4, s. 1 ja 9]. Tässä luvussa esiteltävä Schurin komplementti yhdistää näitä molempia.

Shcurin komplementti on tärkeä apuväline useissa matriisianalyysiin liittyvissä ongelmissa, ja se onkin erityisen hyödyllinen lohkomatriiseihin liittyvissä tapauksissa. Useat lohkomatriisien kääntämiseen keskittyvät yhtälöt hyödyntävät Schurin komplementtia tai sen johdannaisia. [4, s. 10]

Schurin komplementti voidaan ratkaista monella eri tavalla, kuten Gaussin eliminointimenetelmää mukaillen tai jakomenetelmällä. Näistä esitellään seuraavana Gaussin eliminointimenetelmää mukaillen ratkaistu Schurin komplementti.

## 2.1 Schurin komplementin ratkaisu mukaillen Gaussin eliminointimenetelmää

Tässä aliluvussa esitelty teoria löytyy lähteestä [4, s. 17–18]. Schurin komplementti voidaan ratkaista menetelmään soveltuvasta matriisista muuttamalla matriisi Gaussin eliminointimenetelmän avulla yläkolmiomuotoon. Olkoon $M$ matriisi, joka on kokoa $n \times n$, jossa alkio $m_{(11)}$ eroaa nollasta. Tutkitaan lineaarista yhtälöryhmää

$$Mz = 0, \tag{2.1}$$

missä $z$ on muuttujia sisältävä pystyvektori.

Kirjoitetaan matriisi $M$ muotoon

$$M = \begin{pmatrix} a & b^T \\ c & D \end{pmatrix},$$

jossa $a$ on vakio, joka ei ole nolla ($a \neq 0$), $b$ ja $c$ ovat kokoa $n - 1$ olevia sarakevektoreita ja $D$

on neliömatriisi, jonka koko on $(n-1)\times(n-1)$. Pyritään saamaan matriisi alakolmio muotoon. Tämä onnistuu kertomalla alkuperäinen matriisi vasemmalta lohkomatriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & I \end{pmatrix}$, jossa 0 on vektorin $b$ kokoinen nollavektori. Saadaan matriisi $M$ muokattuun muotoon

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b^T \\ c & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b^T \\ 0 & D - ca^{-1}b^T \end{pmatrix}.$$

Matriisi $M_0$ voidaan saattaa muotoon

$$\begin{pmatrix} a & b^T \\ 0 & D - ca^-1b^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Tällöin edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön (2.1) kanssa. Koska matriisin vasemman alakulman lohko on nolla, ratkaistava yhtälö voidaan yksinkertaistaa lineaarisesta $n\times n$ yhtälöryhmästä kokoon $(n-1)\times(n-1)$. Ratkaistava yhtälö on siis muotoa

$$(D - ca^{-1}b^T)y = 0.$$

Samaa menetelmää voidaan soveltaa matriiseille, kun ne jaetaan lohkoihin, jotka olkoot $A, B, C$ ja $D$. Tällöin matriisi $M$ voidaan esittää muodossa

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Schurin komplementtia tutkittaessa olkoon lohko $A$ ei-singulaarinen, eli se on kääntyvä neliömatriisi. Sijoittamalla matriisi $M$ yhtälöön (2.1) saadaan aikaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} Ax + By = 0 \\ Cx + Dy = 0. \end{cases}$$

Kuten yksittäisen matriisin tapauksessakin voidaan edellisen yhtälön alempaan riviin lisätä ylempi rivi kerrottuna vasemmalta termillä $-CA^{-1}$. Tällöin siis lisättävä termi on $-Cx - CA^{-1}By$. Lisätään tämä termi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja saadaan se muotoon

$$\begin{aligned} Cx - Cx + Dy - CA^{-1}By = 0 &\Leftrightarrow 0 + (D - CA^{-1}B)y = 0 \\ &\Leftrightarrow (D - CA^{-1}B)y = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Näin saadaan eliminoitua muuttuja $x$ yhtälöstä ja ratkaistava yhtälö riippuu enää vain yhdestä muuttujasta. Tätä tulosta hyödynnetään Schurin komplementin määritelmässä.

**Määritelmä 2.1.** Olkoon matriisi $M$ yhtälön (2.2) mukainen ja lohko $A$ ei-singulaarinen. Schurin komplementti matriisista $M$ lohkon $A$ suhteen on yhtälön (2.3) tapaan

$$M/A = S = D - CA^{-1}B. \tag{2.4}$$

Tällöin Schurin komplementtista käytetään merkintöjä $M/A$ ja $S$. Vastaavasti olkoon matriisin $M$ yhtälön (2.2) mukainen ja sen lohko $D$ ei-singulaarinen. Tällöin Schurin komplementti matriisista $M$ lohkon $D$ suhteen on

$$M/D = G = A - BD^{-1}C. \tag{2.5}$$

Schurin komplementtia voidaan hyödyntää monissa lohkomatriiseihin ja niiden kääntämiseen liittyvissä yhtälöissä. Schurin komplementtia voidaan hyödyntää esimerkiksi Aitken lohkodiagonalisoinnissa, jossa Schurin komplementtia apuna käyttäen lohkomatriisi voidaan hajottaa helpommin käsiteltävään muotoon. Schurin komplementin hyödyntämiseen lohkodiagonalisoinnissa voi tutustua lisää esimerkiksi lähteessä [3, s. 291–294]. Scurin komplementti on hyödyllinen sovellus myös esimerkiksi optimointi ongelmissa ja tilanteissa, joissa on monta muuttujaa [4, s. 2, 186]. Schurin komplementtia tarvitaan myös useassa lohkomatriisien kääntämiseen liittyvässä yhtälössä. Esitellään niistä ensimmäisenä Banachiewiczin käänteismatriisin yhtälö seuraavassa luvussa.

## 2.2 Schurin determinantti

Schurin determinantti tarjoaa apuvälineen lohkomatriisin determinantin laskemiseen. Seuraavana esiteltävä menetelmä pätee $2 \times 2$ kokoisille lohkomatriiseille, joiden johtava lohko on ei-singulaarinen. Seuraava tulos ja sen todistus on lähteessä [4, s. 4–5].

**Lause 2.2.** *Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen, jossa lohkot $A, B, C$ ja $D$ ovat kokoa $n \times n$ olevia matriiseja. Olkoot matriisit $A$ ja $C$ kommutoivia eli niiden tulo on vaihdannainen. Tällöin matriisin $M$ determinantti det($M$) on yhtäsuuri kuin matriisin $AD - CB$ determinantti.*

*Todistus.* Oletetaan, että lauseen 2.2 mukaisen matriisin $M$ lohkon $A$ determinantti ei ole nolla. Olkoon identiteetti matriisi $I$ kokoa $n \times n$. Esitetään matriisin $M$ tulo toisen matriisin kanssa, joiden tulon determinantti on determinantti Schurin komplementista. Tulo saadaan muotoon

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1} \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Tulon determinantti voidaan laskea tulontekijöiden determinanttien tulona. Saadaan siis lauseke

$$\det(A^{-1}) \cdot \det(M) = \det(D - CA^{-1}B).$$

Tämä lauseke voidaan jakaa lohkon $A$ käänteismatriisin determinantilla $\det(A^{-1})$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B).$$

Koska matriisit $A$ ja $C$ ovat kommutoivia voidaan yhtälöä sieventää edelleen muotoon

$$\det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

Tilanteessa, jossa lohkon $A$ determinantti on nolla, muokataan matriisi $M$ muotoon

$$M_1 = \begin{pmatrix} A + Ix & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

missä $x$ on muuttuja, jonka itseisarvo on nollasta poikkeava hyvin pieni luku. Termin $Ix$ lisäys kääntymättömään matriisiin $A$ takaa ensimmäisen lohkon determinantin olevan nollasta poikkeava ja siten myös kääntyvä. Koska matriisit $A$ ja $C$ ovat kommutoivia, niin myös matriisit $A + Ix$ ja $C$ kommutoivat keskenään. Nyt edellistä vastaavalla tavalla saadaan tulon determinantiksi $\det((A - Ix)D - CB)$. Kun $x$ lähestyy nollaa on tulon determinantti tässäkin tapauksessa $\det(AD - CB)$. $\square$

Lauseen 2.2 perusteella voidaan määritellä Schurin determinantti.

**Seuraus 2.3.** *[4, s. 5] Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen ja sen johtava lohko $A$ ei-singulaarinen. Tällöin matriisin $M$ determinantti voidaan esittää johtavan lohkon $A$ ja Schurin komplementin $S$ determinanttien avulla*

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(S) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B). \tag{2.6}$$

Alunperin Schurin determinantin yhtälö on esitetty lauseen 2.2 oletuksilla. Kuitenkin seuraavassa luvussa esitellyn Banachiewicz-Schur muodon kehittäjä Banachiewicz on näyttänyt, että yhtälö pätee myös silloin, kun matriisit $A$ ja $C$ eivät kommutoi. Lauseen 2.2 todistuksen alkuosassa on osoitettu Schurin determinantti tapaukselle, jossa matriisit $A$ ja $C$ eivät kommutoi. [4, s. 10]

Schurin determinanttia voidaan hyödyntää monissa matriiseihin liittyvissä yhtälöissä. Esimerkiksi lausetta 2.2 käyttämällä on pystytty saamaan determinanttikaavoja kompleksisille lohkomatriiseille. [4, s. 5].

# 3. BANACHIEWICZ-SCHUR MUOTO

Banachiewiczin käänteismatriisin yhtälö on kehitetty ei-singulaarisille lohkomatriiseille. Tadeusz Banachiwicz lähti liikkeelle Schurin determinanttikaavasta (2.6), jota hän hyödynsi oman käänteismatriisin yhtälönsä johtamisessa. Hänen luomansa yhtälö lohkomatriisien kääntämiselle tunnetaan nimellä Banachiewiczin käänteismatriisin yhtälö tai Banachiewicz-Schur muoto. [4, s. 10–11]

Banachiewicz-Schur muotoon voidaan päästä käänteismatriisin määritelmän kautta, kun hyödynnetään Schurin komplementtia. Tiedetään, että matriisin ja sen käänteismatriisin tulo $MM^{-1}$ on identiteetti matriisi $I$. Kun lohko $A$ on kokoa $n_1 \times n_1$ oleva matriisi ja lohko $D$ on kokoa $n_2 \times n_2$ oleva matriisi, saadaan aikaan matriisiyhtälö

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

missä lohkot $X, Y, Z$ ja $W$ ovat muuttujia sisältäviä matriiseja. [1, s.79]

Yhtälöstä (3.1) voidaan ratkaista vasemmanpuoleinen matriisi kolmiomatriisiksi eliminoimalla lohkoja sopivalla tavalla. Oletetaan, että lohko $A$ ja sen Schurin komplementti $S$ ovat ei-singulaarisia. Kertomalla matriisiyhtälön molemmat puolet vasemmalta matriisilla $\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix}$ saadaan matriisiyhtälö muotoon

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista lohkot $X, Y, Z$ ja $W$. [1, s.79] Tämän yhtälön ratkaisu tunnetaan Banachiewicz-Schur muotona. Esitellään seuraavaksi tällä menetelmällä saatava käänteismatriisin yhtälö.

**Lause 3.1.** *[4, s. 19] Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen ja ei-singulaarinen. Lisäksi olkoon johtava lohko $A$ ei-singulaarinen. Tällöin myös Schurin komplementti $S$ matriisista $M$ lohkon $A$ suhteen on ei-singulaarinen ja matriisin $M$ käänteismatriisi on muotoa*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

*Tällöin matriisin $M$ käänteismatriisin $M^{-1}$ oikea alalohko on siis Schurin komplementin käänteismatriisi $S^{-1}$.*

*Todistus.* Yhtälön (3.2) matriisi $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$ on kääntyvä täsmälleen silloin kuin matriisit $A$ ja $S$ ovat kääntyviä. Tiedetään, että matriisin ja sen käänteismatriisin tulo $MM^{-1}$ on identitetti matriisi $I$. Olkoon matriisi $M$ yhtälön (2.2) mukainen ja ei-singulaarinen. Lisäksi olkoon johtava lohko $A$ ei-singulaarinen. Lasketaan matriisin $M$ ja yhtälön (3.3) mukaisen käänteismatriisin $M^{-1}$ tulo

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}1BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

ja varmistetaan, että tulo on identiteettimatriisi. Merkitään tuloa matriisilla $N$, jotta laskuvaiheen merkinnät ovat tiiviimpiä. Keskitytään edellisen yhtälön oikeaan puoleen ja saadaan tulon ratkaisuksi

$$\begin{pmatrix} A(A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1}) + B(-S^{-1}CA^{-1}) & A(-A^{-1}BS^{-1}) + BS^{-1} \\ C(A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1}) + D(-S^{-1}CA^{-1}) & C(-A^{-1}BS^{-1}) + DS^{-1} \end{pmatrix} = N. \tag{3.4}$$

Sievennetään matriisin $N$ lohkojen lausekkeet erikseen, jotta laskujen eteneminen on mahdollisimman selkeää. Aloitetaan sieventämällä lohkon $N_{(11)}$ lauseke.

$$\begin{aligned} A(A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1}) + B(-S^{-1}CA^{-1}) =& AA^{-1} + AA^{-1}BS^{-1}CA^{-1} - BS^{-1}CA^{-1} \\ =& I + BS^{-1}CA^{-1} - BS^{-1}CA^{-1} \\ =& I \end{aligned}$$

Siis tulon vasen yläkulma on identiteetti matriisi $I$. Jatketaan sievennystä lohkon $N_{(12)}$ lausekkeella.

$$\begin{aligned} A(-A^{-1}BS^{-1}) + BS^{-1} =& - AA^{-1}BS^{-1} + BS^{-1} \\ =& - BS^{-1} + BS^{-1} \\ =& 0 \end{aligned}$$

Tulon oikea yläkulma on nollamatriisi. Sievennetään seuraavaksi lohkon $N_{(21)}$ lauseke.

$$\begin{aligned} C(A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1}) + D(-S^{-1}CA^{-1}) =& CA^{-1} + CA^{-1}BS^{-1}CA^{-1} - DS^{-1}CA^{-1} \\ =& SS^{-1}CA^{-1} + CA^{-1}BS^{-1}CA^{-1} - DS^{-1}CA^{-1} \\ =& (S + CA^{-1}B - D)S^{-1}CA^{-1} \\ =& (S - (D - CA^{-1}B))S^{-1}CA^{-1} \\ =& (S - S)S^{-1}CA^{-1} \\ =& 0\ S^{-1}CA^{-1} \\ =& 0 \end{aligned}$$

Sievennyksessä on kerrottu ensimmäinen termi identiteettimatriisin muodolla $I = SS^{-1}$, mikä ei muuta lausekkeen totuusarvoa. Lisäksi yhtälön (2.4) mukaisen Schurin komplementin lausekkeen tilalle on sijoitettu $S$. Näin myös tulon vasemmasta alakulmasta tulee nollamatriisi. Sievennetään vielä matriisin viimeisenä lohkon $N_{(22)}$ lauseke.

$$\begin{aligned} C(-A^{-1}BS^{-1}) + DS^{-1} &= -\,CA^{-1}BS^{-1} + DS^{-1} \\ &=(-CA^{-1}B + D)S^{-1} \\ &=(D - CA^{-1}B)S^{-1} \\ &=SS^{-1} \\ &=I \end{aligned}$$

Myös viimeisen lohkon sieventämisessä hyödynnetään Schurin komplementin yhtälöä (2.4). Tulon oikeaan alakulmaan saadaan siis myös identiteettimatriisi. Sijoitetaan osissa saadut tulokset paikoilleen matriisituloon (3.4) ja saadaan tulos

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-}1BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I.$$

Matriisin $M$ ja annetun käänteismatriisin $M^{-1}$ tulo on identiteettimatriisi, joten $M^{-1}$ todella on matriisin $M$ käänteismatriisi. □

Vastaavanlaista menetelmää voidaan soveltaa, kun yhtälön (2.2) mukaisen matriisin $D$ lohko on ei-singulaarinen lohkon $A$ sijaan. Tällaisessa tilanteessa matriisiyhtälöstä (3.1) pyritään saattamaan lohko $M_{(12)}$ nollaksi. Näin ratkaistava matriisiyhtälö sadaan muotoon

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & -BD^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Tämän yhtälön ratkaisu voidaan esittää Banachiewiczin käänteismatriisin yhtälöä mukaillen. Esitellään seuraavaksi tällä menetelmällä saatava käänteismatriisin yhtälö. Seuraava tulos on lähteestä [4, s. 13].

**Lause 3.2.** *Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen ja ei-singulaarinen Lisäksi olkoon oikean alakulman lohko $D$ ei-singulaarinen. Tällöin myös Schurin komplementti $G$ matriisista $M$ lohkon $D$ suhteen on ei-singulaarinen ja matriisin $M$ käänteismatriisi on muotoa*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}BD^{-1} \\ -G^{-1}CD^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CG^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

*Tällöin matriisin $M$ käänteismatriisin $M^{-1}$ johtava lohko on siis Schurin komplementin käänteismatriisi $G^{-1}$.*

*Todistus.* Lause 3.2 voidaan todistaa samaan tapaan kuin lause 3.1. Sivuutetaan kuitenkin varsinainen todistus tälle lauseelle edellisen lauseen samankaltaisen todistuksen vuoksi. □

Schurin komplementtien $S$ ja $G$ käänteismatriiseille saadaan johdettua edellisten lauseiden avulla yhtälöt, kun lohkot $A$ ja $D$ ovat molemmat ei-singulaarisia [4, s. 165]. Tällöin voidaan merkitä yhtälöiden (3.3) ja (3.6) johtavat lohkot yhtäsuuriksi. Saadaan siis aikaan yhtälö, joka on muotoa

$$G^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1}. \tag{3.7}$$

Vastaavalla tavalla saadaan Schurin komplementin $S$ käänteismatriisi

$$S^{-1} = D^{-1} + CG^{-1}BD^{-1}. \tag{3.8}$$

Banachiewicz-Schur muoto on siis yksi tapa kääntää $2 \times 2$ lohkomatriisi, kun matriisi ja sen johtava lohko ovat ei-singulaarisia. Matriisille voidaan esittää matriisiyhtälö käänteismatriisin ratkaisemista varten. Yhtälön ratkaisusta saadaan Banachiewicz-Schur muoto, jolla voidaan ratkaista minkä tahansa ehdot täyttävän lohkomatriisin käänteismatriisi. Samantapaista menetelmää voidaan käyttää, kun matriisin lisäksi sen oikean alakulman lohko on ei-singulaarinen.

# 4. DRAZIN KÄÄNTEISMATRIISI

Drazin käänteismatriisi voidaan määrittää lohkomatriisille, joka on neliö, mutta Banachiewicz-Schur muodosta poiketen matriisin saa olla singulaarinen. Kun käsitellään yhtälön (2.2) mukaista lohkomatriisia, tulee lohkojen $A$ ja $D$ olla neliömatriiseja. Drazin käänteismatriisi on yksikäsitteinen matriisi, joka toteuttaa määritelmässä 4.1 annetut ehdot. Tällaisella yleistetyillä käänteismatriisilla ei ole aivan kaikkia perinteisen käänteismatriisin ominaisuuksia. [2, s. 18, 20]

Drazin käänteismatriisin määritelmään liittyy matriisin indeksi. Olkoon $k$ pienin ei-negatiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa yhtälön $\text{rank}(M^{k+1}) = \text{rank}(M^k)$, missä rank on matriisin astetta. Tarvitaan siis luku $k$, jolla matriisi korotettuna potenssiin $k$ saa saman asteen kuin matriisi korotettuna potenssiin $k + 1$. Tämän toteuttavaa lukua $k$, kutsutaan matriisin $M$ indeksiksi. [2, s. 18]

Merkitään matriisin $M$ Drazin käänteismatriisia merkinnällä $M^d$. Jos matriisin $M$ indeksi $k$ on nolla ja matriisi $M$ on kääntyvä, on sen Drazin käänteismatriisi $M^d$ tavallinen käänteismatriisi $M^{-1}$ [2, s. 18]. Drazin käänteismatriisi toteuttaa seuraavan määritelmän ehdot.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon $M$ neliömatriisi, joka on kokoa $n \times n$. Kun $k$ on matriisin $M$ indeksi, niin Drazin käänteismatriisi $M^d$ on se yksikäsitteinen matriisi, joka toteuttaa ehdot

$$M^{k+1}M^d = M^k \tag{4.1}$$

$$M^d M M^d = M^d \tag{4.2}$$

$$M M^d = M^d M. \tag{4.3}$$

Drazin käänteismatriisin ratkaisemiseksi on esitetty erilaisia tapoja, joissa on kullekin tavalle ominaisia ehtoja käännettävälle $n \times n$ lohkomatriisille. Muutamalla menetelmällä ehdot liittyvät osittain luvussa 2 esitettyyn Schurin komplementtiin. [2, s. 20–21] Esitellään seuraavaksi kääntämismenetelmää, jonka ehdoissa käytetään Schurin komplementtia. Lisäksi Drazin käänteismatriisin ratkaisemisessa hyödynnetään luvussa 3 esiteltyä Banachiewicz-Schur muotoa.

Tämän luvun aikana Schurin komplementit $S$ ja $G$ annetaan yleisessä muodossa, jossa käänteismatriisit korvataan Drazin käänteismatriiseilla. Jos lohkot $A$ ja $D$ ovat neliömatriiseja, Schurin komplementiksi lohkon $A$ suhteen asetetaan $S = D - CA^dB$. Vastaavasti Schurin komplementiksi lohkon $D$ suhteen asetetaan $G = A - BD^dC$. Lisäksi ehdoissa tarvitaan erotusta identiteettimatriisin ja matriisin ja Drazin käänteismatriisin tulon välillä. Merkitään tätä erotusta matriisille $M$ merkinnällä $M^\pi = I - MM^d$.

**Lause 4.2.** *[2, s. 21] Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen lohkomatriisi, missä lohkot $A$ ja $D$ ovat neliömatriiseja, jotka toteuttavat ehdot*

$$S^{\pi}CA^{d} = 0,\ A^{\pi}BS^{d} = 0,\ S^{d}CA^{\pi} = 0 \text{ ja } A^{d}BS^{\pi} = 0. \tag{4.4}$$

*Lisäksi on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku $k$, joka toteuttaa yhtälön $M^{k}P = 0$, missä $P$ on matriisi $\begin{pmatrix} A^{\pi} & 0 \\ 0 & S^{\pi} \end{pmatrix}$. Tällöin voidaan esittää Drazin käänteismatriisi $M^{d}$ muodossa*

$$M^{d} = \begin{pmatrix} A^{d} + A^{d}BS^{d}CA^{d} & -A^{d}BS^{d} \\ -S^{d}CA^{d} & S^{d} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

*Todistus.* Merkitään

$$N = \begin{pmatrix} A^{d} + A^{d}BS^{d}CA^{d} & -A^{d}BS^{d} \\ -S^{d}CA^{d} & S^{d} \end{pmatrix}.$$

Kun ehdot (4.4) toteutuvat, voidaan laskea matriisitulo

$$NM = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{d} + A^{d}BS^{d}CA^{d} & -A^{d}BS^{d} \\ -S^{d}CA^{d} & S^{d} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} AA^{d} + AA^{d}BS^{d}CA^{d} - BS^{d}CA^{d} & -AA^{d}BS^{d} + BS^{d} \\ CA^{d} + CA^{d}BS^{d}CA^{d} - DS^{d}CA^{d} & -CA^{d}BS^{d} + DS^{d} \end{pmatrix} = T. \tag{4.6}$$

Merkitään tuloa matriisilla $T$, jotta laskuvaiheen merkinnät ovat tiiviimpiä. Sievennetään matriisin $T$ lohkojen lausekkeet erikseen, jotta laskujen eteneminen on mahdollisimman selkeää. Aloitetaan sieventämällä lohkon $T_{(11)}$ lauseke.

$$\begin{aligned} AA^{d} + AA^{d}BS^{d}CA^{d} - BS^{d}CA^{d} &= AA^{d} + (I - A^{\pi})BS^{d}CA^{d} - BS^{d}CA^{d} \\ &= AA^{d} + BS^{d}CA^{d} + A^{\pi}BS^{d}CA^{d} - BS^{d}CA^{d} \\ &= AA^{d} + A^{\pi}BS^{d}CA^{d} \\ &= AA^{d} + 0CA^{d} \\ &= AA^{d} \end{aligned}$$

Tulokseen pääsemiseksi on hyödynnetty $A^{\pi}$ määritelmää sekä ehtoa $A^{\pi}BS^{d} = 0$. Jatketaan sievennystä lohkon $T_{(12)}$ lausekkeella.

$$\begin{aligned} -AA^{d}BS^{d} + BS^{d} &= (A^{\pi} - I)BS^{d} + BS^{d} \\ &= A^{\pi}BS^{d} - BS^{d} + BS^{d} \\ &= A^{\pi}BS^{d} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lohkon lauseketta sieventäessä on hyödynnetty $A^\pi$ määritelmää sekä ehtoa $A^\pi BS^d = 0$. Sievennetään seuraavaksi lohkon $T_{(21)}$ lauseke.

$$\begin{aligned} CA^d + CA^d BS^d CA^d - DS^d CA^d =& CA^d + (D - S)S^d CA^d - DS^d CA^d \\ =& CA^d + DS^d CA^d - SS^d CA^d - DS^d CA^d \\ =& CA^d - SS^d CA^d \\ =& (I - SS^d)CA^d \\ =& S^\pi CA^d \\ =& 0 \end{aligned}$$

Sievennyksessä on hyödynnetty Schurin komplementin yhtälöä sekä ehtoa $S^\pi CA^d = 0$. Sievennetään vielä lopuksi lohkon $T_{(22)}$ lauseke.

$$-CA^d BS^d + DS^d = (D - CA^d B)S^d = SS^d$$

Viimeisen lohkon sievennyksessä on hyödynetty Schurin komplementin määritelmää. Sijoitetaan osissa saadut tulokset paikoilleen matriisituloon 4.6 ja saadaan se muotoon

$$NM = \begin{pmatrix} AA^d & 0 \\ 0 & SS^d \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti saadaan laskettua $MN = \begin{pmatrix} AA^d & 0 \\ 0 & SS^d \end{pmatrix}$.
Edellisen perusteella voidaan todistaa, että

$$M^2 N = \begin{pmatrix} A^2 A^d & BS^d S \\ CAA^d & DSS^d \end{pmatrix} = M - MP.$$

Näistä voidaan päätellä, että $M^{k+1}N = M^k$ vain jos $M^k P = 0$. Voidaan myös tulon avulla todistaa, että $NMN = N$. Matriisi $N$ siis toteuttaa Drazin käänteismatriisin ehdot ja on siis matriisin $M$ Drazin käänteismatriisi $M^d$. □

Vastaava yhtälö Drazin käänteismatriisin löytämiseksi voidaan muodostaa lohkon $D$ ja siihen liittyvän Schurin komplementin $G$ avulla.

**Lause 4.3.** *[2, s. 21] Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen lohkomatriisi, missä lohkot $A$ ja $D$ ovat neliömatriiseja, jotka toteuttavat ehdot*

$$G^\pi BD^d = 0, \; D^\pi CG^d = 0, \; G^d BD^\pi = 0 \textit{ ja } D^d CG^\pi = 0. \tag{4.7}$$

*Lisäksi on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku $k$, joka toteuttaa yhtälön $M^k Q = 0$, missä $Q$ on* *matriisi* $\begin{pmatrix} G^\pi & 0 \\ 0 & D^\pi \end{pmatrix}$*. Kun kaikki edelliset ehdot toteutuvat, voidaan Drazin käänteismatriisi* $M^d$ *esittää muodossa*

$$M^d = \begin{pmatrix} G^d & -G^dBD^d \\ -D^dCG^d & D^d + D^dCG^dBD^d \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

*Todistus.* Lause 4.3 voidaan todistaa samaan tapaan kuin lause 4.2. Sivuutetaan kuitenkin varsinainen todistus tälle lauseelle edellisen lauseen samankaltaisen todistuksen vuoksi. □

Koska Drazin käänteismatriisi on yksikäsitteinen, niin se on aina sama laskettiin se millä kaavalla hyvänsä. Tässä on kyseessä se, että milloin molemmat kaavoista ovat yhtä aikaa voimassa.

Drazin matriisien yhtälöt (4.5) ja (4.8) ovat yhtä aikaa voimassa, kun matriisin $M$ lohkot ja Schurin komplementit toteuttavat ehdot

$$S^\pi C = 0,\ A^\pi B = 0,\ CA^\pi = 0,\ BS^\pi = 0 \text{ ja } D^\pi = S^\pi. \tag{4.9}$$

Tässä työssä ei kuitenkaan perehdytä muotojen yhden aikaiseen voimassaoloon ja jätetään tapauksen esittely tähän.

Drazin käänteismatriisi voidaan ratkaista vain neliömatriiseille. Kuitenkin poiketen normaalin käänteismatriisin tapauksesta neliömatriisin ei tarvitse olla ei-singulaarinen. Drazin käänteismatriisi voidaan ratkaista yhtälön (2.2) mukaiselle lohkomatriisille, kun sen lohkot $A$ ja $D$ ovat neliömatriiseita. Lohkon ja Schurin komplementin Drazin käänteismatriisien avulla voidaan määrittää koko matriisin Drazin käänteismatriisi yhtälön (4.5) tai yhtälön (4.8) mukaisesti. [2, s. 20–22]

# 5. MOORE-PENROSE KÄÄNTEISMATRIISI

Moore-Penrose käänteismatriisi on olemassa kaikille mielivaltaisille matriiseille $M$, eikä matriisin tarvitse siis välttämättä olla neliömatriisi. Moore-Penrose käänteismatriisi on Drazin käänteismatriisin tapaan yksikäsitteinen käänteismatriisin yleistys. Moore-Penrose käänteismatriisilla on tietyt seuraavassa määritelmässä esitellyt ehdot, jotka sen tulee täyttää. Merkitään matriisin $M$ Moore-Penrose käänteismatriisia merkinnällä $M^+$. Jos matriisi $M$ on kääntyvä, sen Moore-Penrose käänteismatriisi $M^+$ on tavallinen käänteismatriisi $M^{-1}$. [2, s. 18–19]

**Määritelmä 5.1.** Olkoon matrisii $M$ mielivaltainen matriisi. Matriisin $M$ Moore-Penrose käänteismatriisi $M^+$ on se yksikäsitteinen matriisi, joka toteuttaa ehdot

$$MM^+M = M \tag{5.1}$$

$$M^+MM^+ = M^+ \tag{5.2}$$

$$(MM^+)^* = MM^+ \tag{5.3}$$

$$(M^+M)^* = M^+M. \tag{5.4}$$

Tällaisen matriisin löytäminen voi olla haastavaa $n \times n$ lohkomatriisille ainoastaan määritelmän 5.1 perusteella. Eri lähteissä onkin esitetty erilaisia ehtoja matriisille $M$, milloin Moore-Penrose käänteismatriisin löytäminen yksinkertaistuu. Tässä työssä keskitytään Banachsiewicz-Schur muotoa mukailevaan tapaan esittää Moore-Penrose käänteismatriisi, mikä on tullut jo tutuksi luvussa 3.

Tässä luvussa Schurin komplementit $S$ ja $G$ annetaan yleisessä muodossa, jossa käänteismatriisit korvataan Moore-Penrose käänteismatriiseilla. Matriisien lohkoihin $A$ ja $D$ liittyvät Schurin komplementit asetetaan siis muotoihin $S = D - CA^+B$ ja $G = A - BD^+C$. Lisäksi ehdoissa oleellisessa osassa on erotus identiteettimatriisin ja matriisin ja Moore-Penrose käänteismatriisin tulon välillä. Merkitään näitä erotuksia matriisille $M$ merkinnöillä $E_M = I - M^+M$ ja $F_M = I - MM^+$. [2, s. 18]

Moore-Penrose käänteismatriisi esitetään muodossa

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ + A^+BS^+CA^+ & -A^+BS^+ \\ -S^+CA^+ & S^+ \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

kun ehdot

$$F_AB = 0,\ CE_A = 0,\ BE_S = 0 \text{ ja } F_SC = 0 \tag{5.6}$$

toteutuvat. Moore-Penrose kääntesimatriisi voidaan esittää muodossa

$$M^+ = \begin{pmatrix} G^+ & -G^+BD^+ \\ -D^+CG^+ & D^+ + D^+CG^+BD^+ \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

kun ehdot

$$F_DC = 0,\ BE_D = 0,\ CE_G = 0 \text{ ja } F_GB = 0. \tag{5.8}$$

toteutuvat. [2, s. 19–20]

**Lause 5.2.** *[2, s. 19] Olkoon matriisi $M$ yhtälön* (2.2) *mukainen lohkomatriisi, joka toteuttaa ehdot*

$$F_AB = 0,\ CE_A = 0,\ F_DC = 0,\ BE_D = 0,\ BE_S = 0 \textit{ ja } F_SC = 0. \tag{5.9}$$

*Edellä esitellyt Moore-Penrose käänteismatriisin $M^+$ esitysmuodot* (5.5) *ja* (5.8) *ovat yhtä suuret:*

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ + A^+BS^+CA^+ & -A^+BS^+ \\ -S^+CA^+ & S^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^+ & -G^+BD^+ \\ -D^+CG^+ & D^+ + D^+CG^+BD^+ \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

*Todistus.* Tässä esitettävä todistus mukailee lähdettä [2, s. 19–20]. Pyritään siis todistamaan, että molempien muotojen yhteiset ehdot (5.9) kattavat myös erillisten muotojen ehdot (5.6) ja (5.8). Oletetaan molempien muotojen yhteiset ehdot (5.9) voimassaoleviksi. Todistetaan, että molempien lauseessa esitettyjen muotojen johtavat lohkot ovat samat $G^+ = A^+ + A^+BS^+CA^+$. Merkitään $H = A^+ + A^+BS^+CA^+$ lausekkeiden yksinkertaisempaa merkitsemistä varten. Saadaan aikaan yhtälö

$$\begin{aligned} GH =& (A - BD^+C)(A^+ + A^+BS^+CA^+) \\ =& AA^+ + AA^+BS^+CA^+ - BD^+CA^+ - BD^+CA^+BS^+CA^+ \\ =& AA^+ + BS^+CA^+ - BD^+CA^+ - BD^+(D - S)S^+CA^+ \\ =& AA^+ + BS^+CA^+ - BD^+CA^+ - BD^+DS^+CA^+ + BD^+SS^+CA^+ \\ =& AA^+ + BS^+CA^+ - BD^+CA^+ - BS^+CA^+ + BD^+CA^+ \\ =& AA^+. \end{aligned}$$

Tulon sievennyksessä on käytetty Schurin komplementin kaavaa $S = D - CA^+B$. Lisäksi sivennyksessä on käytetty rivin (5.9) ehtoja $F_AB = 0, BE_D = 0$ ja $F_SC = 0$, jotka oletettiin voimassaoleviksi. Ehdosta $F_AB = 0$ saadaan muoto $B = AA^+B$ ja vastaavasti kahdesta seuraavasta ehdosta saadaan $BD^+D = B$ ja $SS^+C = C$, mitkä voidaan sijoittaa lausekkeeseen.

Samaan tapaan eri ehtoja hyödyntämällä voidaan todistaa myös, että $HG = A^+A$. Vaatimukset $HGH = H$ ja $GHG = G$ seuraavat suoraviivaisesti tuloksista $GH = AA^+$ ja $HG = A^+A$ sekä Moore-Penrose käänteismatriisin määritelmästä. Matriisi $H$ siis toteuttaa Moore-Penrose käänteismatriisin ehdot ja on siis Schurin komplementin $G$ Moore-Penrose käänteismatriisi $G^+$. Huomataan, että $G^+G = A^+A$ ja $GG^+ = AA^+$. Tästä seuraa, että lauseen ehdot $F_AB = 0$ ja $CE_A = 0$, voidaan esittää myös muodoissa $F_GB = 0$ ja $CE_G = 0$. Näin ollen siis ehdot (5.9) kattavat molempien muotojen erilliset ehdot. □

Lauseen 5.2 alkuperäisistä ehdoista seuraa jo aiemmin todistetut $G^+G = A^+A$ ja $GG^+ = AA^+$. Lisäksi ehdoista seuraa, että $S^+S = D^+D$ ja $SS^+ = DD^+$. Ehdoista voidaan myös selvittää Schurin komplementtien $S$ ja $G$ Moore-Penrose käänteismatriisit lohkojen $D$ ja $A$ Moore-Penrose käänteismatriisien avulla. Nämä yhtälöt voidaan esittää muodossa

$$S^+ = D^+ + D^+CG^+BD^+ \tag{5.11}$$

$$G^+ = A^+ + A^+BS^+CA^+. \tag{5.12}$$

Edelliset seuraukset ovat voimassa myös, jos lauseen 5.2 neljä ensimmäistä ehtoa $F_AB = 0$, $CE_A = 0$, $F_DC = 0$ ja $BE_D = 0$ ovat voimassa ja matriisin $M$ aste on lohkojen $A$ ja $D$ asteiden summa [2, s. 20]. Huomataan, että Schurin komplementtien Moore-Penrose kääntesimatriisien yhtälöt ovat samaa muotoa kuin Schurin komplementtien tavalliset käänteismatriisit yhtälöissä (3.7) ja (3.8). Ainoana erona aiemmin saatuihin tuloksiin on, että Schurin komplementtien $S$ ja $G$ käänteismatriisit ovat nyt Moore-Penrose käänteismatriiseita.

Moore-Penrose käänteismatriisi on monikäyttöinen, sillä se voidaan löytää kaikille matriiseille $M$. Menetelmä on erityisen hyödyllinen matriisille, josta voidaan muodostaa lohkomatriisi. Matriisi voi olla ei singulaarinen, ja diagonaalin lohkojen ei tarvitse välttämättä olla neliöitä. Sopivin valinnoin Moore-Penrose käänteismatriisi tarvitsee löytää alkuperäistä kokoa pienemmälle matriisille eli johtavalle lohkolle $M_{(11)} = A$ tai viimeiselle lohkolle $M_{(22)} = D$. Lohkon Moore-Penrose käänteismatriisin avulla voidaan määrittää Scurin komplementin Moore-Penrose käänteismatriisi. Näiden avulla voidaan määrittää koko matriisin Moore-Penrose käänteismatriisi yhtälön (5.10) mukaisesti. [2, s. 18–20]

# 6. YHTEENVETO

Tässä työssä tarkasteltiin erilaisia tapoja etsiä lohkomatriisille käänteismatriisi. Käänteismatriisit ovat hyvin tarpeellisia monenlaisissa matemaattisissa analyyseissa. Monissa tilanteissa matriisin jakamisesta lohkoihin on paljon hyötyä tehokkuuden kannalta. Näin on usein myös matriisien käänteismatriisien löytämisen suhteen.

Työssä esiteltiin ja johdettiin yhtälö Schurin komplementille, joka on hyödyllinen apuväline lohkomatriisien kääntämisessä monen muun lohkomatriiseihin liittyvän sovelluksen ohessa. Schurin komplementti voidaan laskea $2 \times 2$ lohkomatriisille, kun matriisin johtava tai viimeinen lohko on ei-singulaarinen. Tällöin Schurin komplementti on yhtälön (2.4) tai yhtälön (2.5) mukainen. Lisäksi työssä esiteltiin Schurin determinanttia.

Ensimmäisenä lohkomatriisin kääntämiseen tarkoitetuista menetelmistä esiteltiin Banachiewicz-Schur muoto. Tätä menetelmää käänteismatriisin ratkaisuun voidaan käyttää, kun matriisi $M$ ja sen lohko $M_{(11)}$ tai $M_{(22)}$ ovat ei-singulaarisia. Banachiewicz käänteismatriisit voidaan ratkaista yhtälöillä (3.3) tai (3.6) riippuen siitä kumpi edellä mainituista lohkoista oli ei-singulaarinen.

Työssä tutustuttiin myös Moore-Penrose ja Drazin käänteismatriiseihin. Nämä molemmat menetelmät ovat yksikäsitteisiä käänteismatriisien yleistyksiä, eivätkä ne siis välttämättä toimi kaikissa tilanteissa tavallisen käänteismatriisin tapaan. Yleistettyjen käänteismatriisien etuna kuitenkin on se, että voimme luopua oletuksesta, että matriisi ja lohkomatriisien tapauksessa myös johtava lohko ovat ei-singulaarisia.

Drazin käänteismatriisi voidaan määrittää lohkomatriiseille, joiden lohkot $M_{(11)}$ tai $M_{(22)}$ ovat neliömatriiseja, mutta ne saavat olla singulaarisia. Täten myös matriisi $M$ on neliömatriisi. Drazin käänteismatriisin voidaan ratkaista yhtälöllä (4.5) tai (4.8). Tarkemmat ehdot yhtälöiden toteutumiselle esitettiin työssä.

Moore-Penrose käänteismatriisi voidaan puolestaan ratkaista mille tahansa mielivaltaiselle lohkomatriisille. Tämän menetelmän mukainen matriisi voidaan esittää yhtälön (5.10) perustella. Myös Moore-Penrose käänteismatriisin tarkemmat ehdot esitettiin työssä yhtälön esittelyn yhteydessä.

Työssä esiteltiin siis laajemmin kolme erilaista tapaa kääntää lohkomatriiseja. Menetelmillä on useita, paikoin suhteellisen tiukkoja, ehtoja, jotta niitä voidaan hyödyntää. Kaikille lohkomatriiseille ei siis välttämättä ole kovin helppoa löytää käänteismatriisia. Toisaalta lohkomatriisien kääntämiseen liittyvät yhtälöt voivat helpottaa matriisin kääntämistä merkittävästi. Lohkoihin jakaminen voi tuottaa matriisista sopivia pienempiä matriiseja, kuten nolla- tai kolmimatriiseja tai muuten helpommin käsiteltäviä matriiseja. Tällaisissa tilanteissa lohkomatriisn kääntäminen paljon yksinkertaisempaa kuin suuren matriisin kääntäminen.

# LÄHTEET

[1] Banerjee, S. ja Roy, A. (2014) Linear algebra and matrix analysis for statistics. 1st edition. Boca Raton: CRC Press, Taylor Francis Group.

[2] Dragana S. Cvetković-Ilić, Expression of the Drazin and MP-inverse of partitioned matrix and quotient identity of generalized Schur complement, Applied Mathematics and Computation, Volume 213, Issue 1, 2009, Pages 18-24,ISSN 0096-3003

[3] Isotalo, J., Puntanen, S. ja Styan G. (2011) Matrix Tricks for Linear Statistical Models Our Personal Top Twenty. 1st edition. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

[4] Zhang, F. (2005) The Schur Complement and Its Applications. 1st edition. 2005. New York, NY: Springer US.

[5] Zhang, F. (2011) Matrix Theory Basic Results and Techniques. 2nd edition. 2011. New York, NY: Springer New York.