Tampereen yliopisto

Sofia Rautakoski

SARJOJEN SUPPENEMISTESTEJÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Tammikuu 2022

Tiivistelmä

Sofia Rautakoski: Sarjojen suppenemistestejä
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Tammikuu 2022

Matematiikassa ja sen sovelluksissa voidaan kohdata tilanteita, joissa tarvitsee tietää, suppeneeko sarja vai hajaantuuko se, mutta sarjan summalla ei välttämättä ole merkitystä. Tässä tutkielmassa käsitelläänkin sarjojen suppenemistestejä, joiden avulla voidaan selvittää, suppeneeko vai hajaantuuko sarja laskematta sen summaa. Testit on valittu siten, että ne ovat ymmärrettävissä lukion matematiikan pitkän oppimäärän osaamistasolla.

Tutkielma muodostuu johdannosta ja kahdesta käsittelyluvusta. Luvussa 2 tutustutaan muutamiin sarjoja koskeviin määritelmiin ja lauseisiin. Lisäksi esitellään p-harmoninen sarja ja geometrinen sarja. Tässä luvussa esitellyt määritelmät ja lauseet ovat esitietoja luvussa 3 käsiteltäviä suppenemistestejä varten.

Luvussa 3 esitellään sarjojen suppenemistestejä. Ensimmäisen testi eli triviaalitesti on yksinkertainen: Sarja ei voi supeta, jos sen termit eivät lähesty nollaa. Jos siis lisätään yhteen äärettömästi lukujonon lukuja, jotka eivät koskaan lähesty nollaa, tuloksena saatu summa on varmasti ääretön. Seuraavaksi esitellään suppenemistestejä ei-negatiivisille sarjoille, eli sarjoille, joiden kaikki termit ovat suurempia tai yhtä suuria kuin nolla.

Suorassa vertailutestissä vertaillaan tutkittavan sarjan termejä tunnettun verrokkisarjan termeihin. Jos verrokkisarja suppenee ja tutkittavan sarjan termit ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin vastaavat verrokkisarjan termit, niin tutkittava sarja suppenee. Raja-arvojen vertailutestissä lasketaan tutkittavan sarjan ja verrokkisarjan termien suhteen raja-arvo, kun sarjojen termit lähestyvät ääretöntä. Raja-arvosta ja verrokkisarjan suppenemiskäyttäytymisestä voidaan päätellä suppeneeko tutkittava sarja. Suhdetestin mukaan sarja suppenee, jos tutkittavan sarjan termit pienenevät nopeammin tai yhtä nopeasti kuin tunnetussa suppenevassa sarjassa. D'Alembertin suhdetestissä lasketaan sarjan termin ja sitä seuraavan termin raja-arvo, kun termit lähestyvät ääretöntä. Jos tämä raja-arvo on pienempi kuin yksi, sarja suppenee. Integraalitestissä valitaan tutkittavan sarjan avulla sopiva funktio ja lasketaan sen integraali yhdestä äärettömään. Jos integraali on olemassa äärellisenä, sarja suppenee.

Lopuksi tutustutaan vuorottelevien sarjojen suppenemistestiin, jota voidaan soveltaa vain vuorotteleville sarjoille. Jokaisen suppenemistestin käyttöä havainnollistetaan esimerkeillä.

Avainsanat: sarjan suppeneminen, sarjan hajaantuminen, suppenemistesti, triviaalitesti, suora vertailutesti, raja-arvojen vertailutesti, suhdetesti, d'Alembertin suhdetesti, integraalitesti, vuorottelevien sarjojen suppenemistesti, p-harmoninen sarja, geometrinen sarja

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tämän tutkielman luvussa 3 tarkastelemme sellaisia sarjojen suppenemistestejä, jotka ovat ymmärrettävissä lukiosta saatavalla matematiikan osaamisella.

Valmisteluna luvussa 3 käsittelemiämme sarjojen suppenemistestejä varten esitämme luvussa 2 muutamia sarjoja koskevia määritelmiä ja lauseita. Esittelemme myös p-harmonisen sarjan ja geometrisen sarjan, joita käytämme verrokkisarjoina suppenemistesteissä.

Luvussa 3.1 tutustumme triviaalitestiin, jossa annamme yksinkertaisen ehdon sarjan suppenemiselle: Sarjan termien täytyy lähestyä nollaa, jotta se voi supeta. Jos näin ei ole, sarja hajaantuu.

Luvussa 3.2 tutustumme ei-negatiivisten sarjojen suppenemistesteihin. Tässä luvussa esitellään viisi erilaista suppenemistestiä: luvussa 3.2.1 suora vertailutesti, luvussa 3.2.2 raja-arvojen vertailutesti, luvussa 3.2.3 suhdetesti, luvussa 3.2.4 d'Alembertin suhdetesti ja luvussa 3.2.5 integraalitesti. Jokaisen testin yhteydessä käymme myös esimerkin avulla lävitse, kuinka suppenemistestiä käytetään. Nämä suppenemistestit ovat epänegatiivisille sarjoille, eli sarjan termien täytyy olla suurempia tai yhtä suuria kuin nolla. Voimme kuitenkin käyttää testejä myös muille sarjoille, jos otamme jokaisesta sarjan termistä itseisarvon. Näin voimme testien avulla tutkia myös sellaisten sarjojen suppenemista, jotka sisältävät negatiivisia termejä. Luvussa 2.2 esitellyn lauseen 2.6 mukaisesti, alkuperäinen sarjakin suppenee, jos siitä muodostettu sarja – jossa jokaisesta alkuperäisen sarjan termistä on otettu itseisarvo – suppenee.

Luvussa 3.3 tutustumme vuorotteleville sarjoille soveltuvaan suppenemistestiin ja annamme esimerkin sen käytöstä.

Lukijalta edellytämme lukion matematiikan pitkän oppimäärän tuntemista, erityisesti lukujonojen, sarjojen ja differentiaali- ja integraalilaskennan osalta. Lähdeteoksina käytämme Thomsonin Elementary Real Analysis -teosta, sekä Ponnusamyn Foundations of Mathematical Analysis -teosta.

2 Esitietoja

2.1 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Luvussa 2 esitämme muutamia sarjoja koskevia määritelmiä ja lauseita. (vrt. [2, s. 90, 100] ja [1, s. 147–148]). Aluksi täsmennämme, mitä tarkoittaa sarja ja osasumma, sekä miten ne merkitään.

Kutsumme äärettömän reaalilukujonon jäsenten summaa (äärettömäksi) sarjaksi. Jonon $\{a_n\}_{n\geq 1}$ jäsenten summaa $a_1 + a_2 + a_3 \dots$ eli sarjaa merkitsemme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Sarjan n:s osasumma tarkoittaa lukujonon jäsenten summaa ensimmäisestä jäsenestä n:teen jäseneen eli summaa $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Merkitsemme sarjan n:ttä osasummaa $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Määritelmä 2.1. Olkoon $\{a_k\}$ reaalilukujono. Sanomme, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on *suppeneva*, tai suppenee kohti lukua c, jos osasummien jono $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ suppenee kohti lukua c. Tällöin merkitsemme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c.$$

Jos sarja ei suppene, sanomme, että se hajaantuu.

2.2 Sarjoja koskevia lauseita

Seuraavaksi esitämme muutamia keskeisiä sarjoja koskevia lauseita (ks. [1, s. 39 ja 160] ja [2, s. 91]). Sivuutamme niiden todistukset.

Ensin esittelemme kuitenkin lauseen 2.1, joka koskee lukujonojen suppenemista.

Lause 2.1. *Kasvava tai vähenevä lukujono suppenee, jos ja vain jos se on rajoitettu.*

Lause 2.2. *Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on suppeneva, jos ja vain jos sen osasummat toteuttavat* Cauchyn kriteerin sarjojen suppenemiselle. *Siis jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku N siten, että kaikilla osasummilla pätee*

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon, \textit{kun } m > n \geq N,$$

tai vastaavasti

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \textit{kun } n \geq N \textit{ ja } p > 0.$$

Lause 2.3. *Jos molemmat sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevat, niin silloin myös sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$$

suppenee ja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Lause 2.4. *Olkoon c mikä tahansa reaaliluku. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin silloin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ suppenee ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Lause 2.5. *Jos molemmat sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevat ja $a_k \leq b_k$ jokaisella $k \geq 1$, niin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Lause 2.6. *Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee, niin silloin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.*

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee, niin sanomme, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti.

2.3 Muutamia tunnettuja sarjoja

Tutustumme seuraavaksi muutamaan tunnettuun sarjaan, jotka ovat hyödyllisiä suppenemistesteissä. Esiteltävät sarjat ovat nimeltään p-harmoninen sarja ja geometrinen sarja. Tiedämme, milloin nämä sarjat suppenevat, joten usein voimme käyttää niitä suppenemistesteissä verrokkisarjoina.

P-harmoninen sarja. *Sanomme sarjaa*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots,$$

kun $0 < p < \infty$, p-harmoniseksi sarjaksi. P-harmoninen sarja suppenee, kun $p > 1$. P-harmoninen sarja hajaantuu, kun $0 < p \leq 1$.

Geometrinen sarja. *Geometrinen sarja on muotoa*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots,$$

missä suhdeluku r on vakio. Geometrinen sarja suppenee, kun $-1 < r < 1$ eli kun $|r| < 1$. Muulloin geometrinen sarja hajaantuu.

3 Sarjojen suppenemistestejä

Olemme monesti kiinnostuneet siitä, että suppeneeko sarja vai hajaantuuko se, mutta usein sarjan summalla ei ole niin suurta merkitystä. Aikojen saatossa onkin kehitelty useita testejä vastaamaan tähän ongelmaan. Seuraavaksi tutustumme sellaisiin sarjojen suppenemistesteihin, jotka ovat ymmärrettävissä lukiosta saatavalla matematiikan tietämyksellä.

3.1 Triviaalitesti sarjojen hajaantumiselle

Triviaalitestin mukaan sarja voi supeta vain silloin, kun sarjan termit lähestyvät nollaa. Jos sarja ei läpäise triviaalitestiä, voimme todeta sen hajaantuvan. Toisaalta jos sarja läpäisee triviaalitestin, niin se ei välttämättä kuitenkaan suppene, vaan sen todistamiseksi pitää tehdä vielä muita tutkimuksia.

Lause 3.1. *Välttämätön ehto sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenemiselle on, että $a_k \to 0$, kun $k \to \infty$. Jos sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ termit eivät suppene kohti nollaa, niin sarja hajaantuu.*

Todistus (vrt. [1, s. 167]). Todistus seuraa lauseesta 2.2, kun asetamme $m = n + 1$. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneva sarja. Oletamme, että osasummien jono $\{S_n\}$ suppenee kohti raja-arvoa L. Tällöin

$$S_{n+1} - S_n = a_n \quad (n \geq 2)$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = L - L = 0.$$

Näin ollen, kun sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, on oltava $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. □

Huomautus. Emme voi käyttää triviaalitestiä sarjan suppenemisen todistamiseen, sillä vaikka $a_k \to 0$, kun $k \to \infty$ niin sarja ei välttämättä suppene. Toisaalta jos sarjan termit eivät lähesty nollaa, voimme triviaalitestin perusteella todeta, että sarja hajaantuu.

Esimerkki 3.1. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+2}{7k-4}$$

suppenemista. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k+2}{7k-4} = \lim_{k\to\infty} \frac{(5k+2)1/k}{(7k-4)1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{5+2\cdot\frac{1}{k}}{7-4\cdot\frac{1}{k}},$$

ja koska $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, niin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5+2\cdot\frac{1}{k}}{7-4\cdot\frac{1}{k}} = \frac{5+2\cdot 0}{7-4\cdot 0} = \frac{5}{7} \neq 0.$$

Täten lauseen 3.1 mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+2}{7k-4}$ hajaantuu.

Esimerkki 3.2. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

suppenemista. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{1/2}} = 0.$$

Sarjan termit siis lähestyvät nollaa. Triviaalitestin perusteella emme voi kuitenkaan tästä päätellä, että sarja suppenee.

Koska sarja on p-harmoninen sarja, jossa $p = 1/2$, niin tiedämme luvun 2.3 perusteella, että sarja hajaantuu.

3.2 Suppenemistestejä ei-negatiivisille sarjoille

Seuraavat suppenemistestit ovat ei-negatiivisille sarjoille. Toisin sanoen voimme käyttää niitä sellaisten sarjojen tapauksessa, joissa sarjan kaikki termit ovat suurempia tai yhtäsuuria kuin nolla.

3.2.1 Suora vertailutesti

Suorassa vertailutestissä vertaamme sarjan – jonka suppenemista haluamme selvittää – termejä tunnetun sarjan termeihin. Jos tunnettu sarja suppenee ja sen termit ovat suurempia tai yhtä suuria kuin tarkastelemamme sarjan vastaavat termit, voimme päätellä, että tarkastelemamme sarja suppenee. Usein voimme verrata tarkasteltavaa sarjaa johonkin p-harmoniseen sarjaan tai geometriseen sarjaan, sillä tiedämme luvun 2.3 perusteella, että p-harmoninen sarja suppenee, kun $p > 1$, ja geometrinen sarja suppenee, kun suhdeluvun itseisarvo $|r| < 1$.

Lause 3.2. *Oletamme, että sarjan* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jokainen termi on pienempi kuin vastaavan sarjan* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *termi, eli*

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

jokaisella $k \geq 1$. *Jos suurempi sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *suppenee, niin silloin myös pienempi sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*

Todistus (vrt. [2, s. 105]). Jos $0 \leq a_k \leq b_k$ kaikilla $k \geq 1$, silloin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Näin ollen luku $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on yläraja sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ osasummien jonolle. Tästä seuraa, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. □

Esimerkki 3.3. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 + k^3 + 7}$$

suppenemista. Muokkaamalla sarjaa saamme, että

$$\frac{k^2}{k^4 + k^3 + 7} = \frac{k^2 \cdot 1/k^2}{(k^4 + k^3 + 7) \cdot 1/k^2} = \frac{1}{k^2 + k + \frac{7}{k^2}} = \frac{1}{k^2(1 + \frac{1}{k} + \frac{7}{k^4})}.$$

Tiedämme, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, sillä se on p-harmoninen sarja, missä $p = 2$. Nyt

$$0 \leq \frac{1}{k^2(1 + \frac{1}{k} + \frac{7}{k^4})} \leq \frac{1}{k^2}$$

aina, kun $k \geq 1$. Siis lauseen 3.2 mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+k^3+7}$ suppenee.

Esimerkki 3.4. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5 + 4^k}$$

suppenemista. Nyt

$$\frac{1}{5 + 4^k} \leq \frac{1}{4^k}$$

aina, kun $k \geq 1$. Huomaamme, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

on geometrinen sarja, missä suhdeluku $r = \frac{1}{4}$, joten $|r| < 1$. Siis luvun 2.3 mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ suppenee, joten lauseen 3.2 mukaan myös tutkimamme pienempi sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5+4^k}$ suppenee.

Suoran vertailutestin seurauksen 3.1 avulla voimme tutkia myös tarkasteltavan sarjan hajaantumista. Jos tunnetun sarjan termit ovat pienempiä kuin tarkastelemamme sarjan vastaavat termit ja tunnettu sarja hajaantuu, tällöin myös tarkastelemamme eli suurempi sarja hajaantuu.

Seuraus 3.1. *Oletamme, että sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jokainen termi on suurempi kuin vastaavan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ termi, eli*

$$0 \leq c_k \leq a_k$$

aina, kun $k \geq 1$. Jos pienempi sarja $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ hajaantuu, niin silloin myös suurempi sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

Todistus (vrt. [2, s. 106]). Tämä seuraa lauseesta 3.2, sillä jos suurempi sarja ei hajaannu, niin silloin se suppenee. Lauseen 3.2 mukaan tällöin myös pienempi sarja suppenee. Joten nyt kun pienempi sarja hajaantuu, niin myös suuremman sarjan on hajaannuttava. □

Esimerkki 3.5. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k) + 3}{k}$$

suppenemista. Nyt $\ln(k) + 3 > 1$ aina, kun $k \geq 1$, joten

$$\frac{\ln(k) + 3}{k} > \frac{1}{k}$$

aina, kun $k > 1$. Tiedämme luvun 2.3 perusteella, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ on p-harmoninen sarja, missä $p = 1$, joten kyseinen sarja hajaantuu. Tutkimamme sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)+3}{k}$ termit ovat siis suurempia kuin hajaantuvan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ termit jokaisella $k > 1$. Täten seurauksen 3.1 perusteella myös tutkimamme sarja hajaantuu.

3.2.2 Raja-arvojen vertailutesti

Raja-arvojen vertailutestissä laskemme kahden eri sarjan termien suhteen a_k/b_k raja-arvon, kun $k \to \infty$. Tässä testissä meidän ei tarvitse tarkistaa, että sarjan $\sum a_k$ termit ovat suurempia tai pienempiä kuin sarjan $\sum b_k$ termit, sillä riittää laskea raja-arvo ja tarkastella sitä. Kun tiedämme sarjasta $\sum b_k$ suppeneeko vai hajaantuuko se, ja lisäksi raja-arvon, voimme päätellä sarjan $\sum a_k$ käyttäytymisen.

Jos raja-arvo on pienempi kuin ääretön ja sarja $\sum b_k$ suppenee, niin tällöin myös sarja $\sum a_k$ suppenee ja jos sarja $\sum b_k$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum a_k$ hajaantuu.

Koska emme voi jakaa nollalla, meidän pitää huomioida – sen lisäksi, että molemmat sarjat ovat positiivitermisiä – se, että b_k ei saa olla nolla.

Lause 3.3. *Oletamme, että $a_k \geq 0$ ja $b_k > 0$ aina kun $k \geq N_0$ siten, että*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L.$$

Tällöin jokin seuraavista on voimassa:

1. *Jos $0 < L < \infty$, niin silloin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ molemmat joko suppenevat tai hajaantuvat.*

2. *Jos $L = 0$, niin silloin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee aina, kun sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee.*

3. *Jos $L = \infty$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu aina, kun sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu.*

Todistus (vrt. [1, s. 175]). Koska a_k ja b_k ovat positiivisia, kun $k \geq N_0$, voimme päätellä, että $L \geq 0$ tai $L = \infty$. Todistamme seuraavaksi lauseen 3.3 kohdat kunkin erikseen.

1. Olkoon $0 < L < \infty$. Nyt $\lim \frac{a_k}{b_k} = L$, joten olkoon $\varepsilon = \frac{L}{2}$ Tällöin on olemassa positiivinen luku N siten, että jokaisella $k \geq N$ ($\geq N_0$) on voimassa

$$\left.\begin{matrix} L - \frac{a_k}{b_k} \\ \frac{a_k}{b_k} - L \end{matrix}\right\} \leq \left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| < \frac{L}{2}$$

eli

$$\frac{L}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} < \frac{3L}{2}.$$

Nyt kun kerromme edellisen lausekkeen termit luvulla b_k (> 0) saamme

$$0 < \frac{L}{2} b_k \leq a_k < \frac{3L}{2} b_k \quad \text{jokaisella } k \geq N \ (\geq N_0).$$

Täten suoran vertailutestin (lauseet 3.2 ja 3.1) mukaisesti, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee, myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Jos taas sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

2. Olkoon $L = 0$. Tällöin on olemassa luku N siten, että

$$\frac{a_k}{b_k} < 1, \text{ eli } 0 < a_k < b_k, \quad \text{jokaisella } k \geq N \ (\geq N_0).$$

Täten suoran vertailutestin (lause 3.2) mukaisesti, kun sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee, myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.

3. Olkoon $L = \infty$. Tällöin on olemassa luku N siten, että

$$\frac{a_k}{b_k} > 1, \text{ eli } a_k > b_k, \quad \text{jokaisella } k \geq N \ (\geq N_0).$$

Näin ollen suoran vertailutestin mukaisesti (lause 3.1), kun sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu, myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu. □

Esimerkki 3.6. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 + k^3 + 7}$$

suppenemista raja-arvojen vertailutestillä. Olkoon

$$b_k = \frac{1}{k^2},$$

jolloin $\sum b_k$ suppenee, sillä se on p-harmoninen sarja, missä $p = 2$. Laskemme seuraavaksi raja-arvon ja saamme

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^4 + k^3 + 7} \cdot \frac{k^2}{1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^4}{k^4 + k^3 + 7} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^4 \cdot 1}{k^4 \cdot (1 + \frac{k^3}{k^4} + \frac{7}{k^4})} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k} + \frac{7}{k^4}} \\
&= \frac{1}{1 + 0 + 0} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Täten, koska raja-arvo on pienempi kuin ääretön ja $\sum b_k$ suppenee, niin lauseen 3.3 mukaisesti myös tutkimamme sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+k^3+7}$ suppenee.

Esimerkki 3.7. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9k^2 + 2}{\sqrt{k}(k^2 - 1)}$$

suppenemista raja-arvon vertailutestillä. Olkoon

$$b_k = \frac{k^2}{\sqrt{k}(k^2)} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

jolloin $\sum b_k$ hajaantuu, sillä se on p-harmoninen sarja, missä $p = 1/2$. Laskemme seuraavaksi raja-arvon ja saamme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{9k^2+2}{\sqrt{k}(k^2-1)} \cdot \frac{\sqrt{k}}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{9k^2+2}{k^2-1} = 9.$$

Täten lauseen 3.3 perusteella tutkimamme sarja $\sum a_k$ hajaantuu.

3.2.3 Suhdetesti

Suhdetestissä vertailemme tutkittavan sarjan $\sum a_k$ termien suhteita tunnetun suppenevan sarjan $\sum b_k$ termien suhteisiin. Jos sarjassa $\sum a_k$ suhde a_{k+1}/a_k on jostain k:n arvosta aina pienempi tai yhtä suuri kuin sarjan $\sum b_k$ vastaava suhde b_{k+1}/b_k, niin silloin sarja $\sum a_k$ suppenee. Tämä johtuu siitä, että tällöin sarjan $\sum a_k$ termit pienenevät nopeammin tai yhtä nopeasti kuin suppenevan sarjan $\sum b_k$ termit, joten sarjan $\sum a_k$ täytyy myös supeta.

Lause 3.4. *Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiiviterminen sarja ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppeneva positiiviterminen sarja. Tällöin jos suhteille pätee*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

kaikilla k (tai kaikilla $k > N$), niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.

Todistus (vrt. [2, s. 109]). Oletamme, että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ovat positiivitermisiä. Nyt jos suhteille pätee

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

kaikilla $k > N$, niin tällöin suhteilla on voimassa myös

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \leq \frac{a_k}{b_k}.$$

Tämä tarkoittaa, että jono $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ on laskeva, kun $k > N$. Jono $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ on siis ylhäältä rajoitettu, ja merkitsemme ylärajaa kirjaimella C. Voimme siis päätellä, että

$$a_k \leq Cb_k$$

kaikilla $k > N$. Täten lauseiden 2.4 ja 3.2 perusteella sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. □

Esimerkki 3.8. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{3}{9^k - 7}$$

suppenemista suhdetestillä. Olkoon

$$b_k = \frac{1}{9^k} = \left(\frac{1}{9}\right)^k.$$

Tällöin $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on suppeneva sarja, sillä se on geometrinen sarja, jossa $|r| < 1$. Nyt

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{9^{k+1}} \cdot \frac{9^k}{1} = \frac{9^k}{9 \cdot 9^k} = \frac{1}{9}$$

ja

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{9^{k+1}-7} \cdot \frac{9^k-7}{3} = \frac{9^k-7}{9 \cdot 9^k - 7} = \frac{1-\frac{7}{9^k}}{9-\frac{7}{9^k}}.$$

Nyt suhteille pätee

$$\frac{1-\frac{7}{9^k}}{9-\frac{7}{9^k}} \leq \frac{1}{9}$$

aina, kun $k \geq 1$, joten

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \text{aina, kun } k \geq 1.$$

Siis lauseen 3.4 perusteella sarja $\sum a_k$ suppenee.

3.2.4 D'Alembertin suhdetesti

Suhdetestissä (lause 3.4) meidän täytyi löytää sarja, johon tutkittavaa sarjaa verrataan. D'Alembertin suhdetestissä verrokkisarjaa ei tarvitse etsiä, sillä meidän riittää laskea termien suhteiden a_{k+1}/a_k raja-arvo, kun k lähestyy ääretöntä. Jos tämä raja-arvo on pienempi kuin yksi, niin tutkimamme sarja suppenee. Jos taas raja-arvo on suurempi kuin yksi, niin sarja hajaantuu. Siinä tapauksessa, että raja-arvo on tasan yksi, me emme voi tällä testillä päätellä sarjan suppenemisesta mitään.

Lause 3.5. *Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiiviterminen sarja. Jos*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

niin silloin sarja $\sum a_k$ suppenee.

Todistus (vrt. [2, s. 109 – 110]). Jos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

niin silloin on olemassa luku $c < 1$ siten, että

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < c$$

aina, kun k on riittävän suuri. Näin ollen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee lauseen 3.4 perusteella, kun vertaamme sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ geometriseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} c^k$, jossa $0 < c < 1$. □

Esimerkki 3.9. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$$

suppenemista d'Alembertin suhdetestillä. Nyt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^k} = \frac{5 \cdot 5^k \cdot k!}{(k+1)k! \cdot 5^k} = \frac{5}{k+1},$$

joten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+1} = 0 < 1.$$

Siis raja-arvo on pienempi kuin yksi, joten lauseen 3.5 perusteella tutkimamme sarja suppenee.

3.2.5 Integraalitesti

Integraalitestissä tutkimme funktion f integraalia. Funktion f on oltava laskeva ja jatkuva funktio välillä $[1, \infty)$, sekä sen arvojen on oltava positiivisia, eli suurempia tai yhtä suuria kuin nolla välillä $[1, \infty)$. Jos integraali $\int_1^n f(x)\,dx$ – kun n lähestyy ääretöntä – on olemassa, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ suppenee. Jos taas integraali funktiosta f on ääretön, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ hajaantuu.

Lause 3.6. *Olkoon f ei-negatiivinen laskeva funktio välillä $[1, \infty)$ siten, että on olemassa integraali $\int_1^n f(x)\,dx$ kaikilla $n > 1$. Jos raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx < \infty$$

on olemassa, tällöin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ suppenee. Jos

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \infty,$$

niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ hajaantuu.

Todistus (vrt. [2, s. 115]). Koska funktio f on laskeva, on oltava

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx.$$

Kun sovellamme tätä vertailua luvuille $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ saamme, että

$$(*) \qquad \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

Sarja suppenee jos, ja vain jos sen osasummien jono on rajoitettu. Huomaamme kohdasta $(*)$, että jos integraalin raja-arvo on äärellinen, niin tällöin sarjan osasummat ovat rajoitettuja ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ suppenee. Jos integraalin raja-arvo on ääretön, tällöin osasummat ovat rajoittamattomia ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ hajaantuu. □

Esimerkki 3.10. Tutkimme sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+8)^2}$$

suppenemista integraalitestillä. Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{(x+8)^2}.$$

Funktio f on vähenevä ja jatkuva välillä $[1, \infty)$ ja lisäksi $f(x) \ge 0$ aina, kun $x \ge 1$. Nyt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{(x+8)^2}\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big/_{1}^{n} \frac{-1}{x+8} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+8} - \frac{-1}{1+8} \\
&= 0 + \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Siis integraali on äärellisenä olemassa, joten lauseen 3.6 perusteella sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2}$ suppenee.

3.3 Suppenemistesti vuorotteleville sarjoille

Luvussa 3.2 olemme tutustuneet moniin testeihin, jotka soveltuvat sarjoille, joiden kaikki termit ovat positiivisia. On olemassa kuitenkin paljon sarjoja, joiden merkki vaihtelee tai jotka sisältävät negatiivisia termejä. Tällöin voimme hyödyntää edellä luvussa 3.2 esiteltyjä ei-negatiivisille sarjoille tarkoitettuja testejä, kun käytämme testiä sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, eli otamme sarjan jokaisesta termistä sen itseisarvon. Jos jonkin aiemmin esitellyn testin mukaan tämä sarja suppenee, niin silloin alkuperäinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti. Kun sarja suppenee itseisesti, se suppenee myös tavallisessa mielessä. Meidän on kuitenkin huomattava, että jos sarja ei suppene itseisesti, se voi kuitenkin supeta tavallisesti.

Vuorottelevan sarjan tapauksessa voimmekin tutkia suppenemista myös seuraavalla testillä, jonka esittelemme lauseessa 3.7.

Lause 3.7. *Vuorotteleva sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

missä $a_k \geq 0$ *aina, kun* $k \geq 1$*, suppenee, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

2. $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *on laskeva jono, eli* $a_{n+1} \leq a_n$ *aina, kun* $n \geq 1$.

Todistus (vrt. [1, s. 185]). Olkoon $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$. Meidän täytyy todistaa, että jono S_n suppenee, kun $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ on laskeva jono. Huomaamme, että kun $n > 1$, niin

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2(n-1)}$$

on voimassa, koska kun $\{a_k\}$ on vähenevä, niin jokainen sulkeissa oleva luku on ei-negatiivinen. Tästä seuraa, että $\{S_{2n}\}$ on kasvava. Lisäksi, koska

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

niin huomaamme, että $\{S_{2n}\}$ on ylhäältä rajoitettu lukuun a_1. Näin ollen lauseen 2.1 mukaan lukujono $\{S_{2n}\}$ suppenee kohti jotain lukua. Merkitsemme tätä lukua kirjaimella C. Nyt koska

$$S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

näemme, että

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = C + 0 = C.$$

Täten lukujonon $\{S_n\}$ sekä parilliset että parittomat osajonot suppenevat kohti samaa lukua C, joten myös $\{S_n\}$ suppenee kohti lukua C. Näin ollen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

on suppeneva, ja sen summa on C. □

Esimerkki 3.11. Tutkimme vuorottelevan harmonisen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

suppenemista vuorottelevien sarjojen suppenemistestillä. Nyt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

joten testin ensimmäinen ehto on voimassa. Lisäksi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

on voimassa, koska $n + 1 \geq n$, joten toinenkin ehto täyttyy. Näin ollen lauseen 3.7 mukaan vuorotteleva harmoninen sarja suppenee.

Lähteet

[1] Ponnusamy S. *Foundations of Mathematical Analysis*. Boston: Birkhäuser, 2012.

[2] Thomson Brian S., Bruckner Andrew M., Bruckner Judith B. *Elementary Real Analysis*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001.