Tampereen yliopisto

Rasmus Tamminen

GAUSSIN–JORDANIN ELIMINOINTIMENETELMÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2021

Tiivistelmä

Rasmus Tamminen: Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Joulukuu 2021

Tässä tutkielmassa perehdytään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmään. Menetelmä on hyödyllinen työväline lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen ja ratkaisujen lukumäärän selvittämiseen. Tarkoituksena on muuntaa lineaarinen yhtälöryhmä sitä vastaavaksi kokonaismatriisiksi, jonka jälkeen tätä matriisia käsitellään määriteltyjen rivioperaatioiden mukaisesti. Perimmäinen tavoite on saada matriisi sellaiseen muotoon, että lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat luettavissa matriisin riveiltä. Eliminointimenetelmä on luonteeltaan hyvin mekaaninen ja nykyisin laajasti koneistettu metodi. Teoreettiselta osuudeltaan tutkielma ei ole kovin haastava ja eliminointimenetelmää käytettäessä laskuoperaatiot pysyvät maltillisina.

Rakenteeltaan tutkielma jakautuu kahteen käsittelylukuun johdannon lisäksi. Molemmissa käsittelyluvuissa on alilukuja, jotka sisältävät tärkeitä esitietoja tai välituloksia varsinaiselle aiheelle. Luvussa 2 keskitytään ensin lineaarisiin yhtälöryhmiin, sillä ne ovat kriittisessä asemassa matriisiesityksen kannalta. Siitä luonnollisesti jatkuen esitellään lineaaristen yhtälöryhmien matriisiesitys ja määritellään kerroinmatriisi. Lopuksi käydään läpi lineaaristen yhtälöryhmien käsittelyoperaatioita, joita seuraa kokonaismatriisin määritelmä ja sen käsittelyyn soveltuvat rivioperaatiot.

Luvussa 3 aletaan käsittelemään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää. Aluksi määritellään riviporrasmuoto ja todetaan, miten se liittyy termiin Gaussin eliminointi. Sitten määritellään redusoitu riviporrasmuoto, jonka jälkeen saadaan käytyä läpi kokonaisuudessaan esimerkki Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmästä. Viimeisenä aiheena selvitetään, miten lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen lukumäärä riippuu Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmästä. Havainnollistamisen vuoksi tutkielmaan on sisällytetty muutama kuvaaja, joista käy ilmi eri ratkaisujen lukumäärien geometrinen esitys. Tutkielmassa ei perehdytä Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän muihin sovelluksiin, joita on lineaarialgebran alalla merkittävästi.

Avainsanat: Lineaarinen yhtälöryhmä, kokonaismatriisi, Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielmassa perehdytään lineaaristen yhtälöryhmien käsittelyyn *Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän* avulla. Menetelmä itsessään esitellään luvussa 3.

Luvussa 2 käydään läpi hieman tärkeimpiä käsitteitä ja valmistelevia menetelmiä. Kyseinen luku on jaettu kolmeen osaan, joista aliluvussa 2.1 kerrataan lineaaristen yhtälöryhmien perusteita. Sen lisäksi perehdytään lineaarisen yhtälöryhmän matriisiesitykseen sekä yhtälöryhmien käsittelyyn tarvittaviin operaatioihin. Näistä esityksistä johdetaan rivioperaatiot, joita sovelletaan, kun lineaarinen yhtälöryhmä on saatettu matriisimuotoonsa.

Luvussa 3 käsitellään tutkielman aihetta esittelemällä yksityiskohtainen algoritmi matriisin eliminointimenetelmän tueksi. Tämän jälkeen menetelmästä näytetään vielä esimerkki, jonka jälkeen kappaleessa 3.3 havainnollistetaan eri tapauksia lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuista.

Lukijalta edellytetään yliopistomatematiikan ymmärtämistä perustasolla, etenkin lineaarialgebran osalta. Päälähteenä käytetään M. Anthonyn ja M. Harveyn teosta Linear algebra: Concepts and methods. Toisena lähteenä toimii C. Jr Edwardsin ja D. Penneyn Elementary linear algebra.

2 Hyödyllisiä käsitteitä ja menetelmiä

2.1 Lineaariset yhtälöryhmät

Matriisin ratkaiseminen muistuttaa merkittävästi lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemista. Lineaarinen yhtälöryhmä ratkaistaan eliminoimalla muuttujia yhtälöistä, jolloin saadaan ratkaistua vaiheittain muuttujien arvot.

Lineaarinen yhtälöryhmä muodostuu m määrästä lineaarisia yhtälöitä, joissa on n muuttujaa $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Yhtälöryhmä on yleisesti muotoa

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

jossa termit a_{ij} ovat yhtälön *kertoimia* [1, s. 59].

Esimerkki 2.1. Yhtälöryhmässä

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

on kolme lineaarista yhtälöä sekä kolme muuttujaa x_1, x_2 ja x_3.

Yhtälöryhmällä on olemassa ratkaisujoukko $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ($\in \mathbb{R}$), jos kaikki m yhtälöä toteutuvat, kun [1, s. 60]

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n.$$

Joillakin lineaarisilla yhtälöryhmillä on olemassa useita ratkaisuja, kun taas joillakin ei ole olemassa yhtään ratkaisua.

Esimerkki 2.2. Alla olevalla lineaarisella yhtälöryhmällä on olemassa useita ratkaisuja. Se koostuu kolmesta lineaarisesta yhtälöstä ja neljästä muuttujasta x_1, x_2, x_3 ja x_4:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_2 - x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Lineaariselle yhtälöryhmälle eräs ratkaisu on

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1,$$

jonka voi tarkistaa sijoittamalla muuttujien arvot alkuperäisiin yhtälöihin. Ratkaisuja on itse asiassa ääretön määrä ja niiden löytämistä käsitellään myöhemmin. Lineaariselle yhtälöryhmälle ei välttämättä löydy yhtään ratkaisua, kuten yhtälöryhmässä

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Tällä yhtälöryhmällä ei ole yhtään ratkaisua

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad x_3 = s_3, \quad x_4 = s_4,$$

joka toteuttaisi yhtälöt takaisinsijoituksella. Vähentämällä puolittain toinen yhtälö ensimmäisestä yhtälöstä, saadaan lineaarinen yhtälöryhmä muotoon:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \end{aligned}$$

josta seuraa ristiriita ensimmäisen ja kolmannen yhtälön välillä.

2.2 Lineaarisen yhtälöryhmän matriisiesitys

Lineaariset yhtälöryhmät voidaan esittää myös matriiseina, jolloin niitä voidaan käsitellä matriiseille ominaisilla tavoilla. Matriisiesitys koostuu annetun yhtälöryhmän kertoimista, muuttujista ja yhtälöiden oikeasta puolesta.

Määritelmä 2.1 (Kerroinmatriisi). Matriisia $A = (a_{ij})$, missä alkio (i, j) vastaa kerrointa a_{ij} lineaarisessa yhtälöryhmässä, kutsutaan *kerroinmatriisiksi*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisin lisäksi lineaarisen yhtälöryhmän esittämiseen matriisimuodossa tarvitaan kaksi vektoria. Ensimmäinen vektori on muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($\in \mathbb{R}$) muodostama $n \times 1$ -vektori

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisin A ja vektorin $\mathbf{x}$ tulo tuottaa $m \times 1$ -matriisin, joka kuvaa annetun lineaarisen yhtälöryhmän vasenta puolta. Matriisi $A\mathbf{x}$ on siis muotoa

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Lineaarisen yhtälöryhmän oikeaa puolta kuvaa $m \times 1$ -vektori $\mathbf{b}$, joka muodostuu lineaarisen yhtälöryhmän oikeasta puolesta. Tällöin voidaan sanoa, että lineaarinen yhtälöryhmä on ekvivalentti matriisiesityksen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kanssa [1, s. 61].

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan esimerkissä 2.1 esiteltyä lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän vasen puoli vastaa nyt kerroinmatriisin A ja vektorin $\mathbf{x}$ tuloa

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \end{pmatrix}.$$

Lineaarisen yhtälöryhmän oikeaa puolta kuvaa vektori $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Näin määriteltynä pätee $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siispä

$$\begin{pmatrix} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Rivioperaatiot

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen käytetään yleisesti tapaa, jossa yhtälöitä käsitellään yksinkertaisempiin muotoihin. Yhtälöistä siis eliminoidaan suurin osa muuttujista, jolloin saadaan ratkaistua erään muuttujan arvo ja siitä takaisinsijoituksella muut muuttujat.

Yhtälöitä voidaan käsitellä kolmella operaatiolla ilman, että lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko muuttuu. Taulukossa 2.1 on havainnollistettu kyseiset operaatiot:

Taulukko 2.1. Lineaarisen yhtälöryhmän käsittelyoperaatiot [1, s. 63]

Operaatio	**Kuvaus**
1	yhtälön molemmat puolet kerrotaan nollasta poikkeavalla kertoimella
2	kahden yhtälön paikkaa voidaan vaihtaa keskenään
3	sopivalla kertoimella kerrottu yhtälö voidaan lisätä toiseen yhtälöön

Sovelletaan näitä operaatioita lineaariseen yhtälöryhmään, joka on esiintynyt esimerkeissä 2.1 ja 2.3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Lineaarisen yhtälöryhmän viimeisestä yhtälöstä ratkaistaan muuttuja x_3 kertomalla yhtälö puolittain luvulla -1, jolloin $x_3 = -1$. Lisäämällä toinen yhtälö (kerrottuna luvulla 1) ensimmäiseen yhtälöön saadaan uusi yhtälö. Ensimmäinen yhtälö on nyt muotoa $2x_1 = 2$ ja kolmas muotoa $x_3 = -1$. Ne voidaan korvata alkuperäisten yhtälöiden tilalle. Muodostuu uusi lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ x_3 &= -1, \end{aligned}$$

josta saadaan ratkaistua x_1 kertomalla ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla $\frac{1}{2}$. Nyt ensimmäisestä yhtälöstä on saatu ratkaistua, että $x_1 = 1$. Sijoittamalla toiseen yhtälöön muuttujien x_1 ja x_3 paikalle niiden ratkaistut arvot, saadaan ratkaistua muuttujan x_2 arvo. Yhtälö on nyt muotoa $1 - x_2 - 1 = -2$, joka on edelleen $-x_2 = -2$, jolloin yhtälö kerrotaan puolittain luvulla -1. Ratkaisuksi saadaan $x_2 = 2$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$.

Kun käsitellään lineaarisesta yhtälöryhmästä muodostettua matriisia, sen rivien käsittely perustuu samoihin operaatioihin kuin yhtälöryhmiä käsiteltäessä. Voidakseen käsitellä matriisia, kuten lineaarista yhtälöryhmää, tarvitsee kerroinmatriisi A ja vektori $\mathbf{b}$ sovittaa yhdeksi matriisiksi.

Määritelmä 2.2 (Kokonaismatriisi). Jos $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on lineaarinen yhtälöryhmä, jossa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

niin matriisi

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

on lineaarista yhtälöryhmää kuvaava *kokonaismatriisi* [1, s. 63].

Kokonaismatriisin ratkaisut saadaan käsittelemällä sen rivejä, kuten lineaarisen yhtälöryhmän yhtälöitä. Rivien käsittely toteutetaan kolmella taulukon 2.2 rivioperaatiolla:

Taulukko 2.2. Rivioperaatiot [2, s. 14]

Rivioperaatio	Kuvaus	Merkintätapa
1	rivi p kerrotaan nollasta poikkeavalla kertoimella c	cR_p
2	rivin p vaihtaminen rivin q kanssa	$R_p \leftrightarrow R_q$
3	kertoimella c kerrottu rivi q voidaan lisätä riviin p	$R_p + cR_q$

3 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Tässä luvussa perehdytään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmään, jonka avulla lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut saadaan luettua suoraan operoidusta kokonaismatriisista $(A|\mathbf{b})$. Kokonaismatriisi saadaan ratkaistua, kun se saatetaan riviporrasmuotoon ja siitä edelleen redusoituun riviporrasmuotoon. Tähän muotoon saattaminen onnistuu rivioperaatioiden avulla, joiden tueksi luvussa esitellään yksityiskohtainen algoritmi.

3.1 Riviporrasmuoto

Määritelmä 3.1 (Johtava alkio). Matriisin jokaisen nollarivistä poikkeavan rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on rivin *johtava alkio*.

Määritelmä 3.2 (Riviporrasmuoto). Matriisin sanotaan olevan *riviporrasmuodossa*, kun se toteuttaa seuraavat ehdot.

- Kaikilla nollarivistä poikkeavilla riveillä johtava alkio on 1.
- Alemman rivin johtava alkio on oikeammalla kuin sitä edeltävän rivin johtava alkio.
- Nollarivit ovat matriisin alimpina riveinä. [1, s. 66]

Perehdytään nyt *Gaussin eliminointimenetelmän* algoritmiin, jonka avulla matriisi saatetaan riviporrasmuotoon (vrt. [1, s. 64]). Algoritmin rivioperaatioina käytetään taulukossa 2.2 esiteltyjä rivioperaatioita. Olkoon algoritmin havainnollistamiseksi esimerkkinä kokonaismatriisi

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Valitaan vasemmanpuoleisin sarake, joka ei ole nollasarake. Nollasta poikkeava sarake on matriisin $(A|\mathbf{b})$ ensimmäinen sarake:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Hankitaan sarakkeen ylimmäksi alkioksi nollasta poikkeava alkio. Ensimmäisessä sarakkeessa nollasta poikkeava alkio on toisella ja kolmannella rivillä. Vaihdetaan siis ensimmäinen rivi erään alemman rivin kanssa, tässä tapauksessa toisen rivin kanssa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Muunnetaan ensimmäisen sarakkeen ylin alkio luvuksi 1, joko kertomalla sopivalla vakiolla c tai vaihtamalla rivejä keskenään. Millään rivillä ei ole ensimmäisessä sarakkeessa alkiota 1, joten rivinvaihto ei ole hyödyllistä. Kerrotaan matriisin ensimmäinen rivi luvulla $\frac{1}{2}$, jolloin ylimmän rivin johtava alkio on 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Kerrotaan ylin rivi sopivalla kertoimella c ja lisätään se alempiin riveihin siten, että johtavan alkion alla olevat alkiot ovat nollia. Matriisin toisella rivillä ensimmäinen alkio on jo nolla, mutta alimpaan riviin lisätään ensimmäinen rivi kerrottuna luvulla $c = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(5) Jätetään ylin rivi huomioimatta ja toistetaan vaiheet (1) – (4). Nollasta poikkeava sarake on nyt toinen sarake ja sen ylin alkio on 1. Siispä toisen rivin johtava alkio on 1. Kerrotaan toinen rivi luvulla -3 ja lisätään se kolmanteen riviin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Nyt peitetään kokonaismatriisin $(A|\mathbf{b})$ kaksi ylintä riviä. Huomataan, että kolmannen rivin nollasta poikkeava sarake on kolmas sarake ja sen johtava alkio on 2. Kerrotaan kolmas rivi luvulla $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nyt matriisi $(A|\mathbf{b})$ on saatettu riviporrasmuotoon, koska matriisi täyttää määritelmän 3.2 ehdot. Tästä muodosta voidaan ratkaista alkuperäisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut takaisinsijoitusmenetelmällä. Matriisin alimmalta riviltä nähdään, että $x_3 = -4$. Tästä saadaan ratkaistua toisen rivin muuttuja, jolloin $x_2 = 0$ ja edelleen sijoittamalla ylimpään yhtälöön muuttujien x_3 ja x_2 arvot, saadaan, että $x_1 = 2$.

3.2 Redusoitu riviporrasmuoto

Määritelmä 3.3 (Redusoitu riviporrasmuoto). Matriisi A on saatettu *redusoituun riviporrasmuotoon*, kun se toteuttaa seuraavat ehdot.

- Kaikilla nollarivistä poikkeavilla riveillä johtava alkio on 1.
- Alemman rivin johtava alkio on oikeammalla kuin sitä edeltävän rivin johtava alkio.
- Nollarivit ovat matriisin alimpina riveinä.
- Jokaisen johtavan alkion omaavaan sarakkeen muut alkiot ovat nollia. [1, s. 67]

Redusoidun riviporrasmuodon avulla lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat luettavissa suoraan redusoidun matriisin riveiltä. Kun Gaussin eliminointimenetelmää jatketaan redusoituun riviporrasmuotoon asti, kutsutaan prosessia *Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmäksi*. Redusoitua matriisia A merkitään *rref(A)*. Jatketaan aliluvun 3.1 algoritmia siten, että matriisi saatetaan redusoituun riviporrasmuotoon.

(6) Aloitetaan alimmasta rivistä ja edetään kohti ylintä riviä. Lisätään rivi sopivasti kerrottuna ylempiin riveihin siten, että rivin johtavan alkion sarakkeessa on yläpuolellakin vain nollia. Lisätään rivi 3 riviin 2 yhden kerran ja riviin 1 kerrottuna luvulla -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-R_3]{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lisätään vielä rivi 2 riviin 1, jolloin määritelmän 3.3 ehdot ovat täyttyneet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nyt redusoidussa riviporrasmuodossa olevasta kokonaismatriisista voidaan lukea suoraan alkuperäisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut. Ensimmäinen rivi antaa muuttujan x_1 arvon, toinen rivi muuttujan x_2 arvon ja kolmas rivi antaa muuttujan x_3 arvon. Täten $x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -4$

Esimerkki 3.1. Saatetaan kerroinmatriisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

redusoituun riviporrasmuotoon noudattamalla Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän algoritmia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1}$$

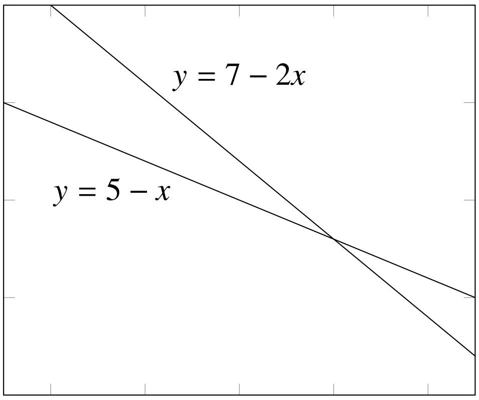
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_4]{R_2 - R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3}$$

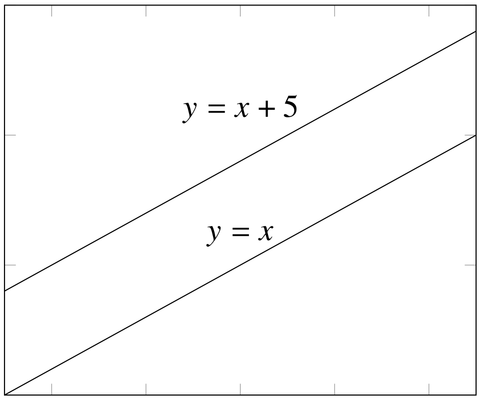
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = rref(A).$$

3.3 Ratkaisujen määrä ja vapaa muuttuja

Kokonaismatriisin saattaminen redusoituun riviporrasmuotoon antaa siis lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut suoraan luettavaksi rivi riviltä. Redusoimalla voidaan myös selvittää ratkaisujen määrä. Geometrisesti lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisut nähdään kuvaajien leikkauspisteistä. Esimerkiksi kahden muuttujan tapauksessa jokainen leikkauspiste tarkoittaa yhtä ratkaisujoukkoa ja suorien leikkaamattomuus tarkoittaa, että lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Kuvassa 3.1 on havainnollistettu yksinkertaisilla yhtälöillä ja niiden kuvaajilla näitä geometrisiä esityksiä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuille.



(a) Lineaariset yhtälöt, joilla on tasan yksi ratkaisu.



(b) Lineaariset yhtälöt, joilla ei ole ratkaisua.

Kuva 3.1. Geometrisiä esityksiä lineaarisille yhtälöryhmille

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan nyt kuvan 3.1 tilanteita yhtälöryhmien ja matriisien kannalta, eli saatetaan molempien kuvaajien tapaukset redusoituun riviporrasmuotoon. Toiminnan samaistamiseksi aiempaan, merkitään $x = x_1$ ja $y = x_2$.

Aloitetaan tapauksesta, jossa löytyy tasan yksi ratkaisu. Muutetaan yhtälöt lineaaristen yhtälöryhmien tuttuun esitysmuotoon siirtämällä muuttujat vasemmalle puolelle:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Ilmaistaan lineaarinen yhtälöryhmä kokonaismatriisina ja saatetaan se redusoituun riviporrasmuotoon.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Redusoidusta matriisista huomataan, että $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$. Siispä kuvaajien leikkauspiste on $(2, 3)$ ja ratkaisuja on tasan yksi.

Käsitellään vielä tapaus, jossa ei ole yhtäkään ratkaisua. Siirretään taas muuttuja x yhtälön vasemmalle puolelle. Yhtälöryhmä

$$-x + y = 5$$

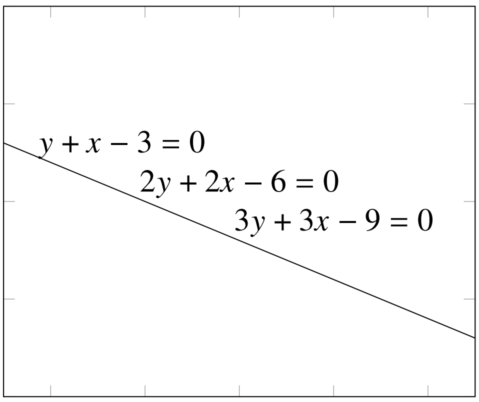
$$-x + y = 0$$

muutetaan kokonaismatriisiksi ja redusoidaan mahdollisimman pitkälle:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Nyt kuitenkin huomataan matriisin alimmalta riviltä, että $0 + 0 = -5$. Tämä on ilmiselvä ristiriita, joten lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Lineaarisella yhtälöryhmällä voi olla ääretön määrä ratkaisuja, mikä tarkoittaa, että yhtälöryhmän kuvaajat leikkaavat toisensa kaikissa pisteissä. Piirtämällä yhtälöiden kuvaajat, huomataan niiden olevan päällekkäin. Kuvassa 3.2 on kolmen yhtälön muodostama lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on ääretön määrä ratkaisuja.



Kuva 3.2. Lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on ääretön määrä ratkaisuja.

Redusoimalla lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on ääretön määrä ratkaisuja, huomataan, että joillakin riveillä voi johtavan alkion jälkeen esiintyä nollasta poikkeavia lukuja. Nämä ovat *vapaita muuttujia*. Ne ovat mielivaltaisia reaalilukuja, jotka antavat lineaariselle yhtälöryhmälle tietyn ratkaisun. Yleisessä muodossa vapaata muuttujaa merkitään sopivalla kirjaimella, kuten s tai t, riippuen vapaiden muuttujien määrästä.

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan esimerkissä 2.2 esiteltyä lineaarista yhtälöryhmää:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
-x_2 - x_3 - x_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

Muunnetaan tämä kerroinmatriisiksi ja redusoidaan käyttäen Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_3}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Redusoidusta matriisista nähdään, että kolmannen rivin muuttujaa x_4 ei vastaa mikään lukuarvo. Siispä x_4 on vapaa muuttuja. Merkitään $x_4 = s$ $(\in \mathbb{R})$, jolloin yhtälöryhmän ratkaisut voidaan selvittää redusoidusta matriisista. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan $x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -s, \quad x_4 = s$. Yleinen ratkaisu voidaan esittää myös vektorimuodossa:

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Siispä esimerkissä 2.2 todettu ratkaisu pätee, kun $s = 1$. Tällöin lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan $x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1$.

Lähteet

[1] Anthony, M. & Harvey, M. *Linear Algebra: Concepts and methods*. Yhdistynyt kuningaskunta: Cambridge University Press, 2012.

[2] Edwards, C., Jr & Penney, D. *Elementary linear algebra*. Yhdysvallat: Prentice-Hall, 1988.