Tampereen yliopisto

Jasmin Hildén

FUNKTION ÄÄRIARVOT JA HESSEN MATRIISI

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2021

Tiivistelmä

Jasmin Hildén: Funktion ääriarvot ja Hessen matriisi
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Joulukuu 2021

Tässä tutkielmassa käsitellään yhden ja usean muuttujan funktioiden ääriarvoja sekä niiden ominaisuuksia. Esitetään eri menetelmiä, joiden avulla voidaan löytää funktion ääriarvot ja tutkia niiden luonnetta. Tutkielman luvussa 2 käydään läpi määritelmiä, lauseita todistuksineen sekä esimerkkejä yhden reaalimuuttujan funktioiden paikallisille sekä globaaleille ääriarvoille. Alaluvussa 2.1 annetaan määritelmät funktion paikallisille ääriarvoille sekä funktion kriittiselle pisteelle, jonka avulla esitetään, minkälaisissa pisteissä funktiolla voi esiintyä ääriarvoja. Esitetään myös lauseet ensimmäisen kertaluvun derivaatan testille ja toisen kertaluvun derivaatan testille, joiden avulla muun muassa voidaan määrittää funktion paikalliset ääriarvot. Esitetään lisäksi esimerkkejä alaluvussa annetuille määritelmille ja lauseille. Alaluvussa 2.2 annetaan määritelmät päätepisteiden ääriarvoille sekä globaaleille ääriarvoille ja esitetään niitä tukevia esimerkkejä. Alaluvussa 2.3 esitetään lause yhden muuttujan funktion ääriarvojen olemassaololle avoimilla väleillä, todistetaan se ja annetaan lausetta havainnollistava esimerkki. Ääriarvojen olemassaolon lauseen yhteydessä hyödynnetään raja-arvon käsitettä sekä yhden muuttujan funktion globaalin ääriarvon määritelmää.

Luvussa 3 käydään läpi määritelmiä ja lauseita usean reaalimuuttujan funktioiden paikallisille ja globaaleille ääriarvoille sekä esitetään määritelmä Hessen matriisille. Esitetään käsitteitä tukevia esimerkkejä, mutta rajoitetaan usean muuttujan funktioiden käsittely esimerkeissä ainoastaan kahden muuttujan funktioihin yksinkertaisuuden takia. Hyödynnetään usean muuttujan funktioiden ääriarvojen tutkinnassa funktion gradienttia ja osittaisderivaattoja. Alaluvussa 3.1 annetaan määritelmät usean muuttujan funktioiden paikallisille ja globaaleille ääriarvoille sekä rajoitetulle joukolle. Esitetään lisäksi lause ääriarvokohdille, usean muuttujan funktion toisen kertaluvun derivaatan testin lause ja ääriarvolause. Toisen kertaluvun derivaatan testin avulla voidaan määrittää funktion mahdolliset paikalliset ääriarvot ja satulapisteet. Esitetään myös niitä havainnollistavia esimerkkejä ja todistuksia lauseille. Alaluvussa 3.2 esitetään lause Hessen matriisille ja toisen kertaluvun derivaatan testi Hessen muodolle. Lopuksi esitetään esimerkki havainnollistamaan Hessen matriisia, jossa hyödynnetään toisen kertaluvun derivaatan testiä sekä matriisilaskennan determinantin määritelmää 2×2 -matriisille. Esitetään myös esimerkkiin liittyvä kuvaaja, jolla havainnollistetaan ääriarvopisteiden tutkimista.

Avainsanat: ääriarvo, paikallinen ääriarvo, globaali ääriarvo, kriittinen piste,
Hessen matriisi

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan yhden ja usean muuttujan funktioiden ääriarvoja sekä niiden ominaisuuksia. Monilla tieteenaloilla kuten taloustieteessä, tekniikan aloilla ja luonnontieteissä on monien ongelmien kohdalla tärkeä määrittää, kuinka suuri tai pieni jokin tietty suure voi olla. Jos ongelma voidaan esittää matemaattisessa muodossa, se yleensä pelkistyy jonkin funktion suurimman tai pienimmän arvon selvittämiseen. Tässä tutkielmassa esitetään, miten määrittää funktion ääriarvoja eri tavoilla ja havainnollistetaan annettuja määritelmiä ja lauseita esimerkkien avulla.

Tutkielman luvussa 2 esitellään määritelmiä ja lauseita, joita käytetään yhden reaalimuuttujan funktion ääriarvojen tutkimisessa. Aluksi annetaan määritelmät funktion paikalliselle ääriarvolle ja kriittiselle pisteelle, joita hyödyntäen esitetään lauseet ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatan testeille. Tämän jälkeen annetaan määritelmät funktion päätepisteiden ääriarvoille ja globaaleille ääriarvoille ja lopuksi esitetään lause funktion globaalien ääriarvojen olemassaololle avoimella välillä. Luvun lopussa lukijalla on käsitys yhden muuttujan funktion ääriarvojen tutkimisesta, siitä, mikä on ääriarvo ja miten sitä voi hyödyntää.

Tutkielman luvussa 3 esitellään määritelmiä ja lauseita, joita käytetään usean reaalimuuttujan funktion ääriarvojen tutkimisessa. Rajoitetaan luvussa olevien funktioiden käsittely yksinkertaisuuden vuoksi vain kahden muuttujan funktioihin. Hyödynnetään tuloksissa funktion osittaisderivaattoja ja gradienttia. Annetaan määritelmä funktion paikallisille ja globaaleille ääriarvoille sekä rajoitetulle joukolle. Esitetään funktion ääriarvokohtia koskeva lause, toisen kertaluvun derivaatan testin lause ja ääriarvolause. Näiden jälkeen lukijalla on käsitys usean muuttujan funktion ääriarvojen tutkimisesta ja miten niitä voidaan ratkaista. Lopuksi esitetään vielä sovelluksena Hessen matriisi, jolla voidaan myös tutkia funktion ääriarvoja.

Tutkielman lukijalta oletetaan analyysin perusteiden tai lukion pitkän matematiikan tuntemusta, koska oletetaan, että lukija tuntee esimerkiksi jatkuvuuden, raja-arvon ja derivaatan käsitteet entuudestaan. Tutkielmassa käytetään päälähdekirjoina Saturnino L. Salaksen, Einar Hillen ja Garret J. Etgenin kirjaa *Calculus: One and Several Variables* sekä Howard Antonin ja Chris Rorresin kirjaa *Elementary Linear Algebra: Application Version*.

2 Funktion ääriarvot

Luvussa 2 esitetään määritelmiä ja lauseita, jotka ovat tarpeellisia funktion ääriarvojen tarkastelussa. Esitetään määritelmät yhden muuttujan funktioiden paikallisille ja globaaleille ääriarvoille sekä esitetään määritelmiä tukevia esimerkkejä. Esitetään myös ääriarvojen olemassaoloa koskeva lause. (Vrt. [1, s. 237] ja [3, s. 212–228])

Käsitellään luvussa 2 yhden reaalimuuttujan funktioita $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$, jossa $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Nyt merkintä $D(f)$ tarkoittaa funktion f määrittelyjoukkoa ja $D(f)$ on joukon $\mathbb{R}$ osajoukko.

2.1 Paikallinen ääriarvo

Määritelmä 2.1 (Paikallinen ääriarvo)**.** Olkoon funktion f yhden muuttujan funktio ja olkoon c funktion määrittelyjoukon sisäinen piste. Funktiolla f on *paikallinen maksimi* pisteessä c, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in (c-\delta, c+\delta).$$

Funktiolla f on *paikallinen minimi* pisteessä c, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in (c-\delta, c+\delta).$$

Funktion f *paikallista maksimia* ja *paikallista minimiä* kutsutaan funktion f *paikallisiksi ääriarvoiksi*.

Lause 2.1. *Jos funktiolla f on paikallinen maksimi tai paikallinen minimi pisteessä c, tällöin joko*

$$f'(c) = 0 \quad \textit{tai} \quad f'(c) \textit{ ei ole olemassa.}$$

Todistus. Olkoon funktiolla f paikallinen ääriarvo pisteessä c. Oletetaan, että $f'(c)$ on olemassa. Jos $f'(c) > 0$ tai $f'(c) < 0$, niin lauseen 4.1.2. [3, s.198] nojalla jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset luvut x_1 ja x_2, jotka kuuluvat välille $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, että

$$f(x_1) < f(c) < f(x_2).$$

Tällöin on mahdotonta, että pisteessä c olisi olemassa funktion f paikallinen maksimi tai minimi. Näin ollen, jos $f'(c)$ on olemassa, sen on oltava 0 tai $f'(c)$ ei ole olemassa. □

Lauseen 2.1 nojalla saadaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 2.2 (Kriittinen piste)**.** Funktion f määrittelyjoukon $D(f)$ pisteitä c, joille pätee joko

$$f'(c) = 0 \quad \text{tai} \quad f'(c) \text{ ei ole olemassa,}$$

kutsutaan funktion f *kriittisiksi pisteiksi*.

Esimerkki 2.1. Olkoon $f(x) = 5 - x^2$. Nyt funktion f derivaatta on

$$f'(x) = -2x$$

ja f' on olemassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jolloin funktion f mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia. Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan pisteessä $x = 0$, niin $x = 0$ on funktion f ainoa kriittinen piste. Nyt $f(0) = 5$ on paikallinen maksimi, koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. □

Esimerkki 2.2. Olkoon

$$f(x) = |x+2| + 1 = \begin{cases} -x-1, & \text{kun } x < -2 \\ x+3, & \text{kun } x \geq -2. \end{cases}$$

Nyt funktion f derivaatta on

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < -2 \\ \text{ei ole olemassa,} & \text{kun } x = -2 \\ 1, & \text{kun } x > -2. \end{cases}$$

Derivaatta $f'(x)$ ei ole koskaan 0 ja ainoa piste, jossa derivaattaa ei ole olemassa, on $x = -2$. Siis piste $x = -2$ on funktion f ainoa kriittinen piste ja $f(-2) = 1$ on paikallinen minimi. □

Esimerkki 2.3. Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Funktion f määrittelyjoukko on $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Nyt funktion f derivaatta on

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

ja funktio f on jatkuva ja derivoituva määrittelyjoukossaan. Nyt $f'(x)$ ei ole koskaan 0 ja tämän vuoksi funktiolla ei ole kriittisiä pisteitä. Piste $x = 2$ on ainoa piste, jossa derivaattaa ei ole olemassa, mutta koska piste $x = 2$ ei kuulu funktion määrittelyjoukkoon, niin se ei ole funktion f kriittinen piste. Siis funktiolla ei ole kriittisiä pisteitä eikä paikallisia ääriarvoja. □

Huomautus. Se, että piste c on funktion f kriittinen piste, ei takaa, että $f(c)$ on funktion f paikallinen ääriarvo.

Esimerkki 2.4. Olkoon

$$f(x) = x^5$$

ja funktion derivaatta on

$$f'(x) = 5x^4.$$

Derivaatta saa arvon 0 pisteessä $x = 0$, mutta $f(0) = 0$ ei ole paikallinen ääriarvo, sillä funktio f on kaikkialla kasvava. □

Lause 2.2 (Ensimmäisen kertaluvun derivaatan testi)**.** *Oletetaan, että piste c on funktion f kriittinen piste ja funktio f on jatkuva pisteessä c. Jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että:*

(i) $f'(x) > 0$ *kaikilla x:n arvoilla avoimella välillä* $(c-\delta, c)$ *ja* $f'(x) < 0$ *kaikilla x:n arvoilla avoimella välillä* $(c, c+\delta)$, *niin* $f(c)$ *on paikallinen maksimi,*

(ii) $f'(x) < 0$ *kaikilla x:n arvoilla avoimella välillä* $(c-\delta, c)$ *ja* $f'(x) > 0$ *kaikilla x:n arvoilla avoimella välillä* $(c, c+\delta)$, *niin* $f(c)$ *on paikallinen minimi,*

(iii) $f'(x)$ *on pelkästään positiivinen tai negatiivinen väleillä* $(c-\delta, c)$ *ja* $(c, c+\delta)$, *niin* $f(c)$ *ei ole paikallinen ääriarvo.*

Todistus. Lauseen 2.2 todistus on suora seuraus lauseesta 2.1.

(i) Funktio f kasvaa välillä $(c-\delta, c]$ ja vähenee välillä $[c, c+\delta)$.

(ii) Funktio f vähenee välillä $(c-\delta, c]$ ja kasvaa välillä $[c, c+\delta)$.

(iii) Jos $f'(x) > 0$ väleillä $(c-\delta, c)$ ja $(c, c+\delta)$ ja f on jatkuva pisteessä c, niin funktio f kasvaa välillä $(c-\delta, c]$ sekä välillä $[c, c+\delta)$. Tämän seurauksena tässä tapauksessa funktio f kasvaa välillä $(c-\delta, c+\delta)$. Samanlainen argumentti osoittaa, että jos $f'(x) < 0$ välillä $(c-\delta, c)$ sekä välillä $(c, c+\delta)$, niin funktio f vähenee välillä $(c-\delta, c+\delta)$.

□

Esimerkki 2.5. Olkoon

$$f(x) = x^4 - 3x^3$$

ja funktion f derivaatta

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 = x^2(4x - 9).$$

Funktion ainoat kriittiset pisteet ovat $x = 0$ ja $x = \frac{9}{4}$. Derivaatta $f'(x)$ vähenee kriittisen pisteen $x = 0$ molemmin puolin, joten $f(0) = 0$ ei ole paikallinen ääriarvo. Derivaatta $f'(x)$ saa kriittisen pisteen $x = \frac{9}{4}$ vasemmalla puolella negatiivisia ja oikealla puolella positiivisia arvoja, joten $f(\frac{9}{4}) = -\frac{2187}{256}$ on paikallinen minimi. □

Lause 2.3 (Toisen kertaluvun derivaatan testi)**.** *Oletetaan, että* $f'(c) = 0$ *ja että* $f''(c)$ *on olemassa.*

(i) *Jos* $f''(c) > 0$*, niin funktiolla* $f(x)$ *on paikallinen minimi pisteessä* c*.*

(ii) *Jos* $f''(c) < 0$*, niin funktiolla* $f(x)$ *on paikallinen maksimi pisteessä* c*.*

Todistus. Osan (i) todistus löytyy [3, s.217]. Todistetaan osa (ii).
Koska f'' on f':n derivaatta, on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että jos

$$c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta,$$

niin

$$f'(x_1) < f'(c) < f'(x_2)$$

Koska $f'(c) = 0$, saadaan

$$f'(x) > 0, \text{kun } x \in (c - \delta, c) \quad \text{ja} \quad f'(x) < 0, \text{kun } x \in (c, c + \delta).$$

Lauseen 2.2 nojalla funktiolla $f(x)$ on paikallinen maksimi pisteessä c. □

Esimerkki 2.6. Olkoon

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

ja

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1).$$

Tällöin

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Funktion f kriittiset pisteet ovat $x = -1$ ja $x = 3$, sillä $f'(x) = 0$, kun $x = -1$ tai $x = 3$. Koska $f''(-1) = -12 < 0$ ja $f''(3) = 12 > 0$, voidaan sanoa lauseen 2.3 nojalla, että $f(-1) = 9$ on paikallinen maksimi ja $f(3) = -23$ on paikallinen minimi. □

2.2 Globaali ääriarvo

Määritelmä 2.3 (Päätepisteen ääriarvo)**.** Jos piste c on funktion f määrittelyjoukon päätepiste, niin sanotaan, että funktiolla f on *vasemmanpuoleinen päätepisteen maksimi* pisteessä c, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in [c, c+\delta).$$

Jos piste c on funktion f määrittelyjoukon päätepiste, niin sanotaan, että funktiolla f on *oikeanpuoleinen päätepisteen maksimi* pisteessä c, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in (c-\delta, c].$$

Sanotaan, että funktiolla f on *vasemmanpuoleinen päätepisteen minimi* pisteessä c, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in [c, c+\delta).$$

Sanotaan, että funktiolla f on *oikeanpuoleinen päätepisteen minimi* pisteessä c, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in (c-\delta, c].$$

Määritelmä 2.4 (Globaali ääriarvo)**.** Funktiolla f on *globaali maksimi* pisteessä d, jos

$$f(d) \geq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in D(f).$$

Funktiolla f on *globaali minimi* pisteessä d, jos

$$f(d) \leq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in D(f).$$

Huomautus. Määritelmässä 2.4 piste d kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon ja se voi olla joko määrittelyjoukon sisäinen piste tai päätepiste.

Lause 2.4 (Ääriarvojen olemassaolo)**.** *Jos funktion f määrittelyjoukko $D(f)$ on suljettu ja rajoitettu väli tai tällaisten välien yhdiste ja jos funktio f on jatkuva määrittelyjoukossaan, niin funktiolla f on oltava olemassa globaali minimi ja globaali maksimi.*

Esimerkki 2.7. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ kriittiset pisteet ja kaikki ääriarvot välillä $[-3, 3]$.

Ratkaisu. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[-3, 3]$, tiedetään, että funktiolla f globaalit ääriarvot tällä välillä. Etsitään funktion kriittiset pisteet. Funktion $f(x)$ derivaatta

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x - 1)(x + 2).$$

Nyt $f'(x)$ on määritelty kaikilla x:n arvoilla välillä $(-3, 3)$ ja $f'(x) = 0$, kun $x = -2$ tai $x = 1$, joten nämä ovat funktion kriittiset pisteet. Siis

$$\begin{aligned}
f(-3) &= 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) = 9 \quad \text{päätepisteen minimi,}\\
f(-2) &= 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = 20 \quad \text{paikallinen maksimi,}\\
f(1) &= 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = -7 \quad \text{paikallinen minimi,}\\
f(3) &= 2(3)^3 + 3(3)^2 - 12(3) = 45 \quad \text{päätepisteen maksimi.}
\end{aligned}$$

Nyt $f(3) = 45$ on suurin maksimi, joten se on funktion globaali maksimi. Vastaavasti $f(1) = -7$ on pienin minimi, joten se on funktion globaali minimi. □

Esimerkki 2.8. Määritä funktion kriittiset pisteet ja kaikki ääriarvot, kun

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ x - 3, & \text{kun } 1 \le x \le 4, \\ 5 - x, & \text{kun } 4 < x \le 7. \end{cases}$$

Ratkaisu. Koska f on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, joka on suljettu väli $[0, 7]$, tiedetään, että funktiolla on globaalit ääriarvot tällä välillä. Funktio on derivoituva avoimella välillä $(0, 7)$, paitsi pisteissä $x = 1$ ja $x = 4$. Nyt funktion $f(x)$ derivaatta

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{kun } 0 \le x < 1 \\ \text{ei ole olemassa,} & \text{kun } x = 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x < 4 \\ \text{ei ole olemassa,} & \text{kun } x = 4 \\ -1, & \text{kun } 4 < x \le 7. \end{cases}$$

Koska $f'(x)$ ei ole olemassa pisteissä $x = 1$ ja $x = 4$, ne ovat funktion kriittiset pisteet. Funktiolla ei ole muita kriittisiä pisteitä, sillä $f'(x) \neq 0$ funktion määrittelyjoukossa.

Siis

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \quad \text{päätepisteen maksimi,}\\
f(1) &= -2 \quad \text{paikallinen minimi,}\\
f(4) &= 1 \quad \text{paikallinen maksimi,}\\
f(7) &= -2 \quad \text{päätepisteen minimi.}
\end{aligned}$$

Nyt $f(4) = 1$ on suurin maksimi, joten se on funktion globaali maksimi. Vastaavasti $f(1) = f(7) = -2$ on pienin minimi, joten se on funktion globaali minimi. □

Esimerkki 2.9.

(a) Kun $x \to \infty$, niin myös $4x^4 \to \infty$, joten $4x^4 - 12x^3 + 16x - 24 \to \infty$.

(b) Kun $x \to -\infty$, niin myös $9x^3 \to -\infty$, joten $9x^3 + 6x^2 + 33 \to -\infty$. □

Huomautus. Jos $f(x) \to \infty$, niin funktiolla ei voi olla globaalia maksimia, ja jos $f(x) \to -\infty$, niin funktiolla ei voi olla globaalia minimiä.

Esimerkki 2.10. Määritä funktion kriittiset pisteet ja kaikki ääriarvot, kun

$$f(x) = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}.$$

Ratkaisu. Funktion määrittelyjoukko on $[0, \infty)$. Derivoimista varten funktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}.$$

Nyt välillä $(0, \infty)$ funktion derivaatta on

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

Koska $f'(x) = 0$, kun $x = 1$, niin $x = 1$ on kriittinen piste. Siis

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \quad \text{päätepisteen minimi,}\\
f(1) = 3\sqrt{1} - 1\sqrt{1} &= 2 \quad \text{paikallinen maksimi.}
\end{aligned}$$

Koska $f(x) = \sqrt{x}(3 - x) \to -\infty$, kun $x \to \infty$, niin funktiolla ei ole olemassa globaalia minimiä. Koska funktio kasvaa välillä $[0, 1]$ ja vähenee välillä $[2, \infty)$, niin paikallinen maksimi on myös globaali maksimi, eli $f(1) = 2$ on funktion globaali maksimi. □

Esimerkki 2.11. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \cos x$ kriittiset pisteet ja kaikki ääriarvot välillä $[0, 2\pi]$.

Ratkaisu. Funktio on jatkuva välillä $(0, 2\pi)$, joten tiedetään, että se saa globaalit ääriarvonsa tällä välillä, ja sen derivaatta on

$$f'(x) = \cos x - \sin x.$$

Nyt $f'(x) = 0$, kun

$$\cos x = \sin x.$$

Yhtälö toteutuu, kun $x = \frac{\pi}{4}$ tai $x = \frac{5\pi}{4}$, joten nämä pisteet ovat funktion kriittiset pisteet. Siis

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \quad \text{päätepisteen minimi,} \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \quad \text{paikallinen maksimi,} \\ f\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= -\sqrt{2} \quad \text{paikallinen minimi,} \\ f(2\pi) &= 1 \quad \text{päätepisteen maksimi.} \end{aligned}$$

Nyt $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ on funktion globaali maksimi. Vastaavasti $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ on funktion globaali minimi. □

2.3 Ääriarvojen olemassaolo

Lause 2.5 (Ääriarvojen olemassaolo avoimilla väleillä)**.** *Jos funktio f on jatkuva avoimella välillä (a, b) ja jos*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = M,$$

niin seuraavat päätelmät pätevät:

(i) *Jos $f(u) > L$ ja $f(u) > M$ jollekin pisteelle u välillä (a, b), niin funktiolla f on globaali maksimi välillä (a, b).*

(ii) *Jos $f(v) < L$ ja $f(v) < M$ jollekin pisteelle v välillä (a, b), niin funktiolla f on globaali minimi välillä (a, b).*

Todistus. Todistetaan kohta (i). Olkoon piste u avoimella välillä (a, b) siten, että $f(u) > L$ ja $f(u) > M$. Nyt L ja M ovat joko äärellisiä lukuja tai $-\infty$. Koska $\lim_{x \to a+} f(x) = L$, on oltava olemassa sellainen piste x_1 välillä (a, u), että

$$f(x) < f(u), \quad \text{kun } a < x < x_1.$$

Vastaavasti on oltava olemassa sellainen piste x_2 välillä (u, b), että

$$f(x) < f(u), \quad \text{kun } x_2 < x < b.$$

Siis $f(x) < f(u)$ kaikissa pisteissä välillä (a, b), jotka eivät ole suljetulla ja äärellisellä osavälillä $[x_1, x_2]$. Lauseen 2.4 nojalla funktiolla f, joka on jatkuva välillä $[x_1, x_2]$, on oltava globaali maksimi kyseisellä välillä pisteessä w. Koska u kuuluu välille $[x_1, x_2]$, on oltava $f(w) \geq f(u)$, joten $f(w)$ on funktion $f(x)$ maksimi kaikille välin (a, b) pisteille.

Todistetaan osa (ii). Olkoon piste v avoimella välillä (a, b) siten, että $f(v) < L$ ja $f(v) < M$. Nyt L ja M ovat joko äärellisiä lukuja tai ∞. Koska $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ on oltava olemassa sellainen piste x_1 välillä (a, v), että

$$f(x) > f(v), \quad \text{kun } a < x < x_1.$$

Vastaavasti on oltava olemassa sellainen piste välillä (v, b), että

$$f(x) > f(v), \quad \text{kun } x_2 < x < b.$$

Siis $f(x) > f(v)$ kaikissa pisteissä välillä (a, b), jotka eivät ole suljetulla ja äärellisellä osavälillä $[x_1, x_2]$. Lauseen 2.4 nojalla funktiolla f, joka on jatkuva välillä $[x_1, x_2]$, on oltava globaali minimi kyseisellä välillä pisteessä w. Koska v kuuluu välille $[x_1, x_2]$, on oltava $f(w) \leq f(v)$, joten $f(w)$ on funktion $f(x)$ minimi kaikille välin (a, b) pisteille. □

Esimerkki 2.12. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = x + \frac{16}{x}$$

on globaali minimi avoimella välillä $(0, \infty)$.

Ratkaisu. Nyt selvästi

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

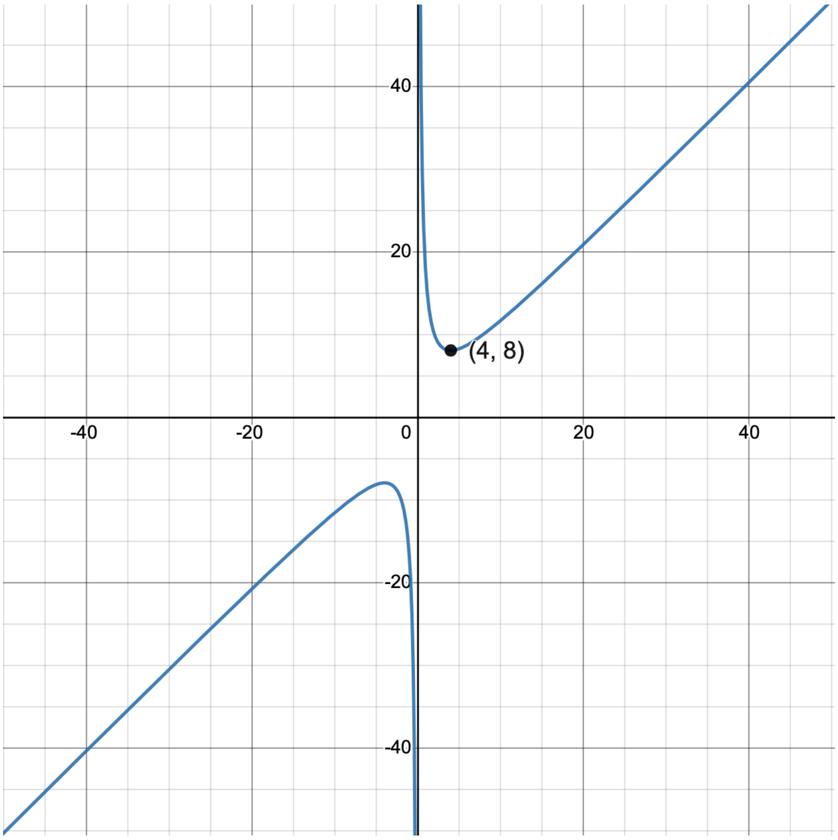
Koska $f(1) = 17 < \infty$, lauseen 2.5 nojalla funktiolla $f(x)$ on oltava olemassa globaali minimi jossakin pisteessä avoimella välillä $(0, \infty)$. Minimin selvittämiseksi on tarkistettava funktion $f(x)$ arvot kaikissa kriittisissä pisteissä kyseisellä välillä. Nyt

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = \frac{(x+4)(x-4)}{x^2}$$

ja

$$f'(x) = 0, \quad \text{kun } x = -4 \text{ tai } x = 4.$$

Koska funktion f määrittelyjoukko on avoimella välillä $(0, \infty)$, funktion ainoa kriittinen piste on $x = 4$, missä funktiolla $f(x)$ on arvo $f(4) = 8$, jonka on oltava funktion globaali minimi välillä $(0, \infty)$.



Kuva 2.1. Esimerkin 2.12 kuvaaja havainnollistaa funktion $f(x) = x + \frac{16}{x}$ globaalin minimin pisteessä $x = 4$ avoimella välillä $(0, \infty)$.

Esimerkki 2.13. Olkoon funktio $f(x) = xe^{-x^2}$. Etsi ja määritä funktion f kriittiset pisteet sekä määritä raja-arvot $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Ratkaisu. Nyt funktion f derivaatta on

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Derivaatta on 0, jos ja vain jos $1 - 2x^2 = 0$, koska e^{-x^2} on aina positiivinen. Täten kriittiset pisteet ovat $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Saadaan

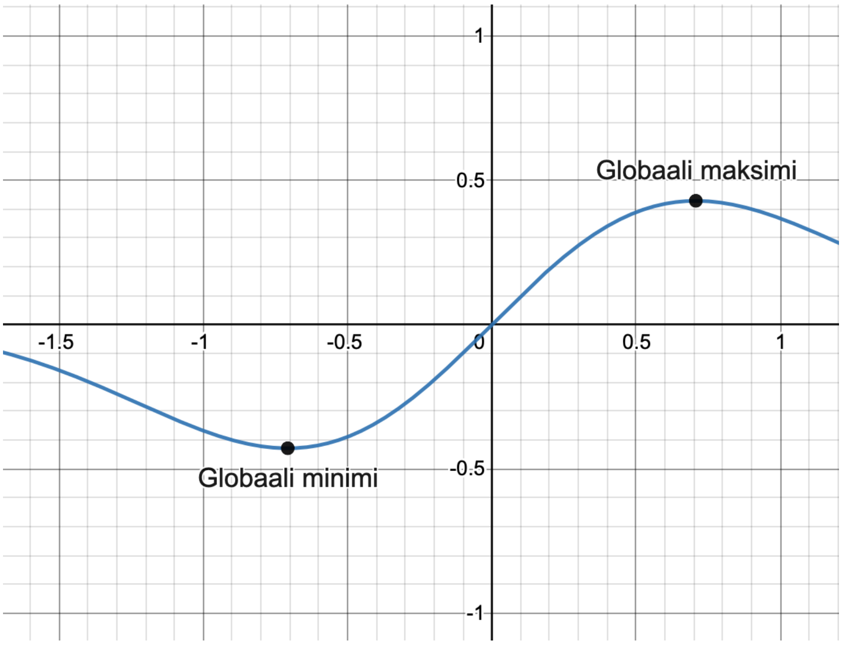
$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Funktion f derivaatta f' on positiivinen (tai negatiivinen), kun $1-2x^2$ on positiivinen (tai negatiivinen).

Nyt

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}\right) = 0 \cdot 0 = 0,$$

koska $\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{u\to\infty} ue^{-u} = 0$ lauseen 5 [1, s. 183] perusteella. Koska $f(x)$ on positiivinen pisteessä $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja negatiivinen pisteessä $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, funktiolla f on oltava globaali maksimi ja minimi lauseen 2.5 nojalla. Nämä ääriarvot voivat olla vain funktion f arvot sen kriittisissä pisteissä, joten globaali maksimi $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ ja globaali minimi $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$



Kuva 2.2. Esimerkin 2.13 kuvaaja havainnollistaa funktion $f(x) = xe^{-x^2}$ globaalit ääriarvot pisteissä $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3 Usean muuttujan funktion ääriarvot, ja Hessen matriisi

Luvussa 3 esitetään määritelmät usean muuttujan funktioiden paikallisille ja globaaleille ääriarvoille sekä Hessen matriisille. (Vrt. [1, s. 744], [2, s. 429–435], [3, s. 903–915] ja [4]).

Luvussa 3 esitetyissä esimerkeissä käsitellään vain kahden muuttujan funktioita $f(x, y)$, joille pätee: $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ ja $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Nyt merkintä $D(f)$ tarkoittaa funktion f määrittelyjoukkoa ja $D(f)$ on joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukko.

3.1 Usean muuttujan funktion ääriarvot

Määritelmä 3.1. Olkoon f usean muuttujan funktio ja olkoon $\mathbf{x}_0$ funktion määrittelyjoukon sisäinen piste.

Funktiolla f on *paikallinen maksimi* pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \quad \text{aina, kun } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$$

ja funktiolla f on *paikallinen minimi* pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{aina, kun } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta.$$

Lause 3.1. *Jos funktiolla f on paikallinen ääriarvo pisteessä $\mathbf{x}_0$, niin*

$$\textit{joko} \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \textit{tai} \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) \ \textit{ei ole olemassa}.$$

Todistus. Oletetaan, että funktiolla f on paikallinen ääriarvo pisteessä $\mathbf{x}_0$ ja että funktio on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}_0$ (toisin sanoen $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ on olemassa). Osoitetaan, että $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Olkoon $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Tapaus, jossa on n muuttujaa, on samankaltainen.

Koska funktiolla f on paikallinen ääriarvo pisteessä (x_0, y_0), funktio $g(x) = f(x, y_0)$ saa paikallisen ääriarvon pisteessä x_0. Koska funktio f on derivoituva pisteessä (x_0, y_0), funktio g on myös derivoituva pisteessä (x_0, y_0), joten

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Samankaltaisesti funktio $h(y) = f(x_0, y)$ saa ääriarvon pisteessä y_0, koska funktio h on derivoituva pisteessä (x_0, y_0), joten

$$h'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Gradientti $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, koska molemmat osittaisderivaatat ovat 0. □

Huomautus. Lauseen 3.1 perusteella paikallinen ääriarvo voi esiintyä vain kriittisessä pisteessä, mutta kriittinen piste ei ole välttämättä ääriarvopiste.

Esimerkki 3.1. Olkoon $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 1$, jolloin saadaan

$$\nabla f(x, y) = (2x + y + 3)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}.$$

Asetetaan $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, jotta voidaan etsiä kriittiset pisteet. Saadaan

$$2x + y + 3 = 0 \quad \text{ja} \quad x + 2y = 0.$$

Ainoa yhteinen ratkaisu molempiin yhtälöihin on $x = -2$, $y = 1$. Piste $(-2, 1)$ on siis ainoa kriittinen piste. Verrataan funktion f arvoa pisteessä $(-2, 1)$ funktion arvoon pisteessä $(-2 + h, 1 + k)$:

$$\begin{aligned} f(-2, 1) &= 4 - 2 + 1 - 6 + 1 = -2, \\ f(-2 + h, 1 + k) &= (-2 + h)^2 + (-2 + h)(1 + k) + (1 + k)^2 + 3(-2 + h) + 1 \\ &= h^2 - 4h + 4 + hk + h - 2k - 2 + k^2 + 2k + 1 - 6 + 3h + 1 \\ &= h^2 + hk + k^2 - 2. \end{aligned}$$

Nyt erotus

$$f(-2 + h, 1 + k) - f(-2, 1) = h^2 + hk + k^2.$$

Osoitetaan erotuksen olevan yhtä suuri tai suurempi kuin 0 täydentämällä se neliöksi

$$h^2 + hk + k^2 = h^2 + 2h\frac{k}{2} + \frac{k^2}{4} + \frac{3k^2}{4} = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0.$$

Siis $f(-2 + h, 1 + k) \geq f(-2, 1)$ kaikilla h:n ja k:n arvoilla. Tämän seurauksena funktiolla f on paikallinen minimi pisteessä $(-2, 1)$, joka on arvoltaan -2. □

Lause 3.2 (Toisen kertaluvun derivaatan testi)**.** *Oletetaan, että funktiolla f on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaattat pisteen (x_0, y_0) ympäristössä ja että $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Olkoon*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

ja muodostetaan diskriminantti $D = AC - B^2$.

1. *Jos* $D < 0$*, niin piste* (x_0, y_0) *on satulapiste.*

2. *Jos* $D > 0$*, niin funktiolla* f *on*

$$\begin{aligned} &\textit{paikallinen minimi pisteessä } (x_0, y_0) \quad \textit{jos } A > 0, \\ &\textit{paikallinen maksimi pisteessä } (x_0, y_0) \quad \textit{jos } A < 0. \end{aligned}$$

Huomautus. Funktiolla ei ole ääriarvoa satulapisteessä.

Esimerkki 3.2. Esimerkissä 3.1 selvitettiin, että piste $(-2, 1)$ on funktion

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 1$$

ainoa kriittinen piste. Nyt funktion f ensimmäiset osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 3 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

ja toiset osittaisderivaatat ovat vakiot

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Näin ollen $A = 2$, $B = 1$ ja $C = 2$, joten $D = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Nyt myös $A > 0$, joten lauseen 3.2 nojalla

$$f(-2, 1) = 4 - 2 + 1 - 6 + 1 = -2$$

on funktion f paikallinen minimi. □

Määritelmä 3.2 (Globaali maksimi ja globaali minimi)**.** Olkoon funktio f usean muuttujan funktio, jonka määrittelyjoukko on $D(f)$.

Funktiolla f on *globaali maksimi* pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \quad \text{aina, kun } \mathbf{x} \in D(f).$$

Funktiolla f on *globaali minimi* pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{aina, kun } \mathbf{x} \in D(f).$$

Lause 3.3. *Funktiolla* $f(x, y)$ *voi olla paikallinen tai globaali ääriarvo pisteessä* (a, b) *määrittelyjoukossaan vain, jos piste* (a, b) *toteuttaa jonkin seuraavista ehdoista:*

(a) *Piste* (a, b) *on funktion* f *kriittinen piste, eli joko*

$$\nabla f(a, b) = 0 \quad \textit{tai} \quad \nabla f(a, b) \textit{ ei ole olemassa.}$$

(b) *Piste* (a, b) *on funktion* f *määrittelyjoukon reunapiste.*

Todistus. Lause seuraa suoraan lauseesta 3.1. □

Määritelmä 3.3 (Rajoitettu joukko)**.** Joukko S on rajoitettu, jos on olemassa sellainen luku $R > 0$, että

$$||\mathbf{x}|| \leq R \quad \text{aina, kun } \mathbf{x} \in S$$

Lause 3.4 (Ääriarvolause)**.** *Jos funktio* f *on jatkuva suljetussa ja rajoitetussa joukossa* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*, funktiolla* f *on oltava olemassa globaali maksimi ja globaali minimi.*

Esimerkki 3.3. Olkoon funktio $f(x, y) = x^2+y^2$. Funktiolla f on olemassa kriittinen piste pisteessä $(0, 0)$, koska

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

ja molemmat gradientin osat ovat 0 pisteessä $(0, 0)$. Siis

$$f(x, y) > 0 = f(0, 0) \quad \text{jos} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Tällöin funktiolla f on oltava globaali minimiarvo 0 pisteessä $(0, 0)$. Jos funktion f määrittelyjoukko ei ole rajoitettu, funktiolla f ei ole maksimiarvoa. □

Esimerkki 3.4. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ globaalit ääriarvot suljetulla kiekolla $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Ratkaisu. Kiekko D on rajoitettu ja suljettu joukko ja funktio f, joka on jatkuva kaikkialla, on jatkuva joukossa D. Tiedetään lauseen 3.4 perusteella, että funktiolla f on olemassa globaali minimi ja globaali maksimi joukossa D.

Etsitään aluksi funktion kriittiset pisteet joukon D sisällä. Nyt funktion f gradientti on

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2)\mathbf{i} + (2y - 2)\mathbf{j},$$

joka on määritelty kaikkialla. Gradientti on nolla, kun

$$2x - 2 = 0 \quad \text{ja} \quad 2y - 2 = 0.$$

Ainoa ratkaisu, joka toteuttaa molemmat yhtälöt, on $x = 1$ ja $y = 1$. Piste $(1, 1)$ on siis ainoa, jossa funktion gradientti on 0 ja se on joukon D sisällä.

Etsitään ääriarvoja joukon D reunalta, joka voidaan parametrisoida yhtälöillä

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Funktion f arvot joukon reunalla saadaan funktiolla

$$\begin{aligned} F(t) = f(\mathbf{r}(t)) &= 9\cos^2 t + 9\sin^2 t - 6\cos t - 6\sin t + 4 \\ &= 13 - 6\cos t - 6\sin t, \quad \text{kun } 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Koska F on jatkuva funktio rajoitetussa ja suljetussa joukossa, sillä on olemassa globaali maksimi ja globaali minimi. Funktion F ääriarvot saadaan samalla tavalla, kuin luvussa 2 löydettiin globaaleja maksimeja. Jotta löydetään funktion F kriittiset pisteet, derivoidaan:

$$F'(t) = 6\sin t - 6\cos t.$$

Asetetaan $F'(t) = 0$ ja saadaan

$$\sin t = \cos t.$$

Yhtälön ratkaisut ovat $t = \frac{\pi}{4}$ ja $t = \frac{5\pi}{4}$.

Funktion f ääriarvot reunalla ovat

$$\begin{aligned} F(0) = F(2\pi) &= f(3,0) = 7, \\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 13 - 6\sqrt{2} \approx 4,51, \\ F\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= f\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 13 + 6\sqrt{2} \approx 21,49. \end{aligned}$$

Funktion arvo kriittisessä pisteessä $(1,1)$ on $f(1,1) = 2$.

Tällöin funktion f globaali maksimi joukossa D on $13 + 6\sqrt{2}$ ja funktion f globaali minimi joukossa D on 2. □

3.2 Hessen matriisi

Lause 3.5 (Hessen matriisi)**.** *Oletetaan, että funktio $f(x,y)$ on derivoituva kahden muuttujan reaalifunktio, jonka osittaisderivaatat ovat olemassa ja ne ovat jatkuvia. Funktion f* Hessen matriisi *H on 2×2 -matriisi, joka muodostuu funktion f osittaisderivaatoista:*

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Olkoon $D(x, y)$ determinantti

$$D(x, y) = \det(H(x, y)) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2.$$

Oletetaan, että piste (x_0, y_0) on funktion $f(x, y)$ kriittinen piste ja että funktiolla f on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaattat pisteen (x_0, y_0) ympäristössä. Tällöin toisen kertaluvun derivaatan testistä seuraa:

(a) *Funktiolla f on paikallinen minimi pisteessä (x_0, y_0), jos*

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0 \quad \textit{ja} \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0.$$

(b) *Funktiolla f on paikallinen maksimi pisteessä (x_0, y_0), jos*

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0 \quad \textit{ja} \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0.$$

(c) *Funktiolla f on satulapiste pisteessä (x_0, y_0), jos*

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0.$$

(d) *Testin tulos on epäselvä, jos*

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0.$$

Lause 3.6 (Toisen kertaluvun derivaatan testin Hessen muoto)**.** *Oletetaan, että piste (x_0, y_0) on funktion $f(x, y)$ kriittinen piste ja että funktiolla f on jatkuvia toisen kertaluvun osittaisderivaattoja pisteen (x_0, y_0) ympäristössä. Jos $H(x_0, y_0)$ on funktion f Hessen matriisi pisteessä (x_0, y_0), niin toisen kertaluvun derivaatan testin Hessen muodosta seuraa:*

(a) *Funktiolla f on paikallinen minimi pisteessä (x_0, y_0), jos $H(x_0, y_0)$ on positiivisesti definiitti eli matriisin kaikki ominaisarvot ovat positiivisia.*

(b) *Funktiolla f on paikallinen maksimi pisteessä (x_0, y_0), jos $H(x_0, y_0)$ on negatiivisesti definiitti eli matriisin kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia.*

(c) *Funktiolla f on satulapiste pisteessä (x_0, y_0), jos $H(x_0, y_0)$ on indefiniitti eli matriisilla on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja.*

Todistus. Todistetaan osa (a). Jos $H(x_0, y_0)$ on positiivisesti definiitti, niin symmetristen matriisien lauseen nojalla (ks. [2, s. 426]) matriisin $H(x_0, y_0)$ jokaisella pääalimatriisilla on positiiviset determinantit. Tällöin

$$\det[H(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

ja

$$\det[f_{xx}(x_0, y_0)] = f_{xx}(x_0, y_0) > 0,$$

joten funktiolla f on paikallinen minimi pisteessä (x_0, y_0) lauseen 3.5 (a)-kohdan nojalla.

Todistetaan osa (b). Jos $H(x_0, y_0)$ on negatiivisesti definiitti, niin symmetristen matriisien lauseen nojalla (ks. [2, s. 426]) matriisin $H(x_0, y_0)$ pääalimatriisien determinanttien arvot vaihtelevat negatiivisten ja positiivisten arvojen välillä niin, että ensimmäisen pääalimatriisin determinantti on negatiivinen. Tällöin

$$\det[H(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

ja

$$\det[f_{xx}(x_0, y_0)] = f_{xx}(x_0, y_0) < 0,$$

joten funktiolla f on paikallinen maksimi pisteessä (x_0, y_0) lauseen 3.5 (b)-kohdan nojalla.

Todistetaan osa (c). Jos $H(x_0, y_0)$ on indefiniitti, eli sillä on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja, niin symmetristen matriisien lauseen nojalla (ks. [2, s. 426]) matriisin yhdellä pääalimatriisilla on oltava positiivinen determinantti ja yhdellä pääalimatriisilla on oltava negatiivinen determinantti. Tällöin

$$\det[H(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0,$$

joten funktiolla f on satulapiste pisteessä (x_0, y_0) lauseen 3.5 nojalla.

□

Esimerkki 3.5. Etsi funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 8xy + 3$ kriittiset pisteet ja määritä Hessen matriisin ominaisarvojen avulla kriittisten pisteiden luonteet.

Ratkaisu. Kriittisten pisteiden määrittämiseen tarvitaan funktion f ensimmäiset ja toiset osittaisderivaatat, jotka ovat

$$f_x(x, y) = x^2 + y^2 - 8y, \qquad f_y(x, y) = 2xy - 8x, \qquad f_{xy}(x, y) = 2y - 8,$$
$$f_{xx}(x, y) = 2x, \qquad f_{yy}(x, y) = 2x.$$

Siis Hessen matriisi on

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x & 2y-8\\ 2y-8 & 2x\end{bmatrix}.$$

Kriittisten pisteiden löytämiseksi asetetaan $f_x = 0$ ja $f_y = 0$, joka tuottaa yhtälöt

$$f_x(x,y) = x^2 + y^2 - 8y = 0 \quad \text{ja} \quad f_y(x,y) = 2xy - 8x = 2x(y-4) = 0.$$

Toisen yhtälön ratkaisuksi tulee $x = 0$ tai $y = 4$. Sijoitetaan $x = 0$ ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan y:n ratkaisuksi $y = 0$ tai $y = 8$, ja sijoittamalla $y = 4$ ensimmäiseen yhtälöön saadaan x:n ratkaisuksi $x = 4$ tai $x = -4$. Siis saadaan neljä kriittistä pistettä:

$$(0,0), \quad (0,8), \quad (4,4), \quad (-4,4).$$

Hessen matriisi tuottaa seuraavat arvot kriittisissä pisteissä:

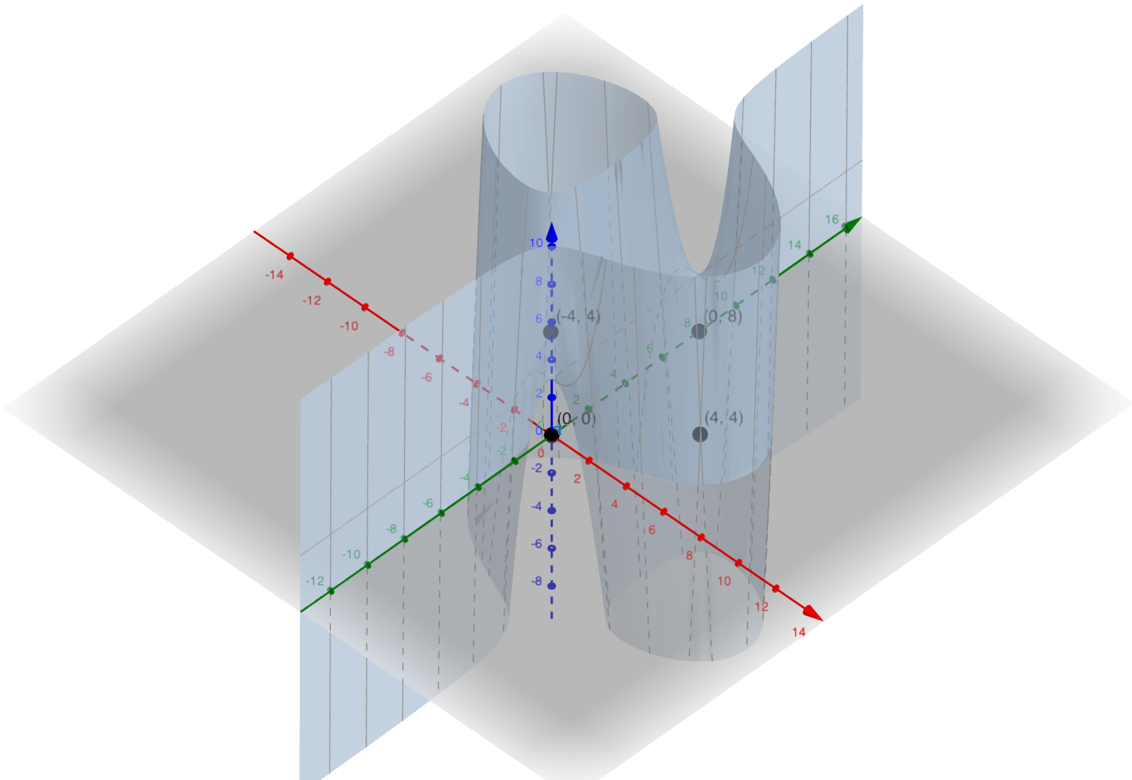
$$H_1(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -8\\ -8 & 0\end{bmatrix}, \quad H_2(0,8)=\begin{bmatrix} 0 & 8\\ 8 & 0\end{bmatrix},$$
$$H_3(4,4)=\begin{bmatrix} 8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}, \quad H_4(-4,4)=\begin{bmatrix} -8 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}.$$

Etsitään matriisien ominaisarvot ja määritetään pisteiden luonteet. Nyt

$$0=\det(H_1-\lambda I)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & -8\\ -8 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-64=(\lambda-8)(\lambda+8)$$
$$0=\det(H_2-\lambda I)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 8\\ 8 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-64=(\lambda-8)(\lambda+8)$$
$$0=\det(H_3-\lambda I)=\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0\\ 0 & 8-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda+8)^2=(\lambda-8)(\lambda-8)$$
$$0=\det(H_4-\lambda I)=\begin{vmatrix} -8-\lambda & 0\\ 0 & -8-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda-8)^2=(\lambda+8)(\lambda+8).$$

Pisteen $(0,0)$ sekä pisteen $(0,8)$ tapauksissa matriisin ominaisarvot ovat -8 ja 8, pisteen $(4,4)$ tapauksessa matriisin ominaisarvot ovat 8 ja 8 ja pisteen $(-4,4)$ tapauksessa matriisin ominaisarvot ovat -8 ja -8.

Lauseen 3.6 nojalla pisteet $(0,0)$ ja $(0,8)$ ovat satulapisteitä, piste $(4,4)$ on paikallinen minimi ja piste $(-4,4)$ on paikallinen maksimi. □



Kuva 3.1. Esimerkin 3.5 funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 8xy + 3$ kuvaaja havainnollistaa funktion $f(x, y)$ satulapisteet $(0, 0)$ ja $(0, 8)$, minimin $(4, 4)$ ja maksimin $(-4, 4)$.

Lähteet

[1] Adams, R. A. & Essex, C. *Calculus: a Complete Course* 7th ed. University of British Columbia, Pearson, 2010.

[2] Anton, H. & Rorres, C. *Elementary Linear Algebra: Applications Version* 11th ed. Wiley, New York, 2014.

[3] Salas, S. L., Hille, E. & Etgen, G. J. *Calculus: One and Several Variables* 9th ed. Wiley & Sons, New York, 2003.

[4] Wikipedia. *Second derivative test*. 11.11.2021. https://en.wikipedia.org/wiki/Second_partial_derivative_test