Aino Lehtimäki

PYÖRÄHDYSKAPPALEEN PINTA-ALA JA TILAVUUS

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Heinäkuu 2021

Tiivistelmä

Aino Lehtimäki: Pyörähdyskappaleen pinta-ala ja tilavuus
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Heinäkuu 2021

Tässä työssä käsitellään pyörähdyskappaleen pinta-alaa ja pyörähdyskappaleen tilavuutta. Tutkielmassa käsitellään ja määritetään ensin Riemannin summa, joka on pohjana määrätyn integraalin määrittelylle. Tämän jälkeen tutkielmassa käsitellään ja määritetään integraalilaskennan väliarvolause, jota tarvitaan myöhemmin käyrän kaaren pituuden määrittelyssä.

Määrätyn integraalin sovellutuksista ensin määritetään tasoalueen pinta-ala, jonka määrittelyssä hyödynnetään suoraan määrätyn integraalin määritelmää. Pyörähdyskappaleen tilavuuden määrittelyssä lähtökohtana pidetään suoran lieriön tilavuuden kaavaa ja hyödynnetään myös tasoalueen pinta-alan määritelmää. Tutkielmassa ennen pyörähdyskappaleen pinta-alan määritystä määritetään vielä käyrän kaaren pituus, tässä hyödynnetään aiemmin määritettyä integraalilaskennan väliarvolausetta. Tämän jälkeen pyörähdyskappaleen pinta-alan määrittelyssä lähtökohtana pidetään ympyrän pinta-alan kaavasta johdettavaa katkaistun ympyräkartion vaipan alan kaavaa, ja hyödynnetään edellisessä alaluvussa määritetyn käyrän kaaren pituuden kaavaa ja integraalilaskennan väliarvolausetta.

Tutkielma sisältää esimerkit tasoalueen pinta-alasta, pyörähdyskappaleen tilavuudesta, käyrän kaaren pituudesta, sekä pyörähdyskappaleen pinta-alasta.

Avainsanat: Riemannin summa, integraalilaskennan väliarvolause, tasoalueen pinta-ala, pyörähdyskappaleen tilavuus, käyrän kaaren pituus ja pyörähdyskappaleen pinta-ala

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan määrättyä integraalia ja erityisesti sen sovellustuksista *pyörähdyskappaleen tilavuutta* ja *pyörähdyskappaleen pinta-alaa*. Pyörähdyskappaleen tilavuuden lauseke johdetaan luvun 3 alaluvussa 3.2 hyödyntäen *Riemannin summaa* ja *määrätyn integraalin* määritelmää. Pyörähdyskappaleen pinta-alan lauseke johdetaan luvun 3 alaluvussa 3.4 hyödyntäen *käyrän kaaren pituutta* ja *integraalilaskennan väliarvolausetta*. Aiheet avataan esimerkein.

Luvun 2 alaluvussa 2.1 määritetään *Riemannin summa*, jota käytetään määrätyn integraalin täsmällisen määrittelyn perustana.

Luvun 3 alaluvussa 3.1 käydään läpi *tasoalueen pinta-alan* määritystä *määrätyn integraalin* avulla. Aihetta avataan parilla esimerkillä.

Käyrän kaaren pituus määritellään luvun 3 alaluvussa 3.3. Tätä varten on alaluvussa 2.2 todistettu *integraalilaskennan väliarvolause*. Aihetta avataan esimerkillä.

Lukijalta edellytetään yliopistomatematiikan alkeiden hallintaa ja analyysin tuntemusta. Lukijan odotetaan ymmärtävän esimerkiksi infimumin ja supremumin käsitteet, sekä funktion raja-arvon ja jatkuuvuuden käsitteet. Lukijan odotetaan myös ymmärtävän funktion derivaatan, sekä derivoituvan funktion ominaisuuksien määritelmät ja käsitteet, ja pinta-alojen ja porrasfunktioiden määritelmät ja käsitteet, sekä Riemann-integraalin määritelmät ja käsitteet. Päälähteinä käytetään A. Lahtisen ja E. Pehkosen teosta Matematiikkaa soveltajille, ja E. Launosen, E. Sorvalin ja P. Toivosen teosta Teknisten ammattien matematiikka 3Y. Lisäksi lähteenä on käytetty P. Koiviston Analyysi B luentomonistetta.

2 Määrätty integraali

2.1 Riemannin summa

Aloitetaan ensin määrätyn integraalin täsmällisellä määrittelyllä *Riemannin summan* avulla.

Olkoon funktio f rajoitettu välillä $[a, b]$ ja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin välin $[a, b]$ jako. Nyt jakoon P liittyvä Riemannin summa on (ks. [1, s. 75])

$$S_P(f, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi)(x_j - x_{j-1}),$$

missä $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ on mielivaltainen välin $[x_{j-1}, x_j]$ piste.

Lause 2.1. *Rajoitettu funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos Riemannin summilla on raja-arvo*

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(f, \xi),$$

missä $S_P(f, \xi)$ on funktion f välin $[a, b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa. Tällöin

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \to 0} S_P(f, \xi).$$

Todistus (vrt. [1, s. 146–149]). 1º: Todistetaan ensin suunta ”⇒”. Oletetaan siis, että f on rajoitettu ja Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, ja osoitetaan, että

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(f, \xi) = \int_a^b f,$$

missä $S_P(f, \xi)$ on funktion f välin $[a, b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska f on rajoitettu, on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x)| \leq M \tag{2.1}$$

kaikilla $x \in [a, b]$, ja koska f on Riemann-integroituva, niin Riemannin ehdon (ks. [1, s. 99]) nojalla on olemassa sellaiset välin $[a, b]$ porrasfunktiot g ja h, että $g \leq f \leq h$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Olkoon edelleen $P_0 = \{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ jokin sellainen välin $[a, b]$ jako, että P_0 sisältää kaikki, sekä porrasfunktion g, että porrasfunktion h porraspisteet. Merkitään

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8m \cdot M}.$$

Olkoon nyt $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin sellainen välin $[a, b]$ jako, että $|P| < \delta$. Tällöin jokaista Riemannin summaa $S_P(f, \xi)$ kohti on olemassaa sellainen funktio s, että

$$S_P(f, \xi) = \int_a^b s. \tag{2.3}$$

Koska $g \leq f \leq h$, niin tällöin

$$g \leq s = f(\xi_k) \leq h \tag{2.4}$$

kaikilla jaon P osaväleillä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, jotka eivät sisällä jaon P_0 pisteitä.

Tarkastellaan sitten jaon P osavälejä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, jotka sisältävät jaon P_0 pisteitä. Välin $[a, b]$ päätepisteitä lukuunottamatta kukin jaon P_0 piste sisältyy yhteen tai kahteen jaon P (suljettuun) osaväliin. Täten jaon P_0 pisteitä sisältäviä jaon P osavälejä on korkeintaan $2m$ kappaletta.

Olkoon nyt

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{jos } x \in I_k' \quad \text{ja} \quad \nexists j \in \{0, 1, \ldots, m\} \quad \text{s.e. } z_j \in I_k, \\ -M, & \text{jos } x \in I_k' \quad \text{ja} \quad \exists j \in \{0, 1, \ldots, m\} \quad \text{s.e. } z_j \in I_k, \end{cases}$$

ja

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{jos } x \in I_k' \quad \text{ja} \quad \nexists j \in \{0, 1, \ldots, m\} \quad \text{s.e. } z_j \in I_k, \\ M, & \text{jos } x \in I_k' \quad \text{ja} \quad \exists j \in \{0, 1, \ldots, m\} \quad \text{s.e. } z_j \in I_k, \end{cases}$$

missä $I_k' =]x_{k-1}, x_k[$ ja $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Jaon P jakopisteissä asetetaan $\tilde{g}(x_k) = -M$ ja $\tilde{h}(x_k) = M$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Tällöin $\tilde{g}$ ja $\tilde{h}$ ovat porrasfunktioita välillä $[a, b]$ ja ominaisuuden $g \leq f \leq h$, sekä epäyhtälöiden (2.1) ja (2.4) perusteella

$$\tilde{g} \leq f \leq \tilde{h} \quad \text{ja} \quad \tilde{g} \leq s \leq \tilde{h}.$$

Täten Riemann-integraalin määrittelyn ja lauseen 4.7 (ks. [1, s. 87]) nojalla

$$\int_a^b \tilde{g} \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \tilde{h} \quad \text{ja} \quad \int_a^b \tilde{g} \leq \int_a^b s \leq \int_a^b \tilde{h}$$

ja edelleen

$$\left| \int_a^b s - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g}. \tag{2.5}$$

Koska $g \leq h$ välillä $[a, b]$, niin lauseen 4.7 (ks. [1, s. 87]) nojalla

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} h$$

jokaisella jaon P osavälillä $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Lisäksi jaon P_0 pisteitä sisältäviä jaon P osavälejä on korkeintaan $2n$ kappaletta ja porrasfunktion arvolla jakopisteessä ei ole vaikutusta porrasintegraalin arvoon. Täten

$$\int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \leq \int_a^b h - \int_a^b g + 2m \cdot |P| \cdot 2M \overset{(2.2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 4m \cdot |P| \cdot M. \tag{2.6}$$

Siis

$$\begin{aligned} \left| S_P(f, \xi) - \int_a^b f \right| &\overset{(2.3)}{=} \left| \int_a^b s - \int_a^b f \right| \\ &\overset{(2.5)}{\leq} \int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \\ &\overset{(2.6)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 4m \cdot |P| \cdot M \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4m \cdot \frac{\varepsilon}{8m \cdot M} \cdot M \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(f, \xi) = \int_a^b f.$$

2º: Todistetaan sitten suunta "$\Leftarrow$". Oletetaan siis, että f on rajoitettu ja Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, ja

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(f, \xi) = L,$$

missä $S_P(f, \xi)$ on funktion f välin $[a, b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa, ja osoitetaan, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = L.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|P| < \delta$, niin

$$|S_P(f, \xi) - L| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.7}$$

valittiinpa pisteet ξ_j miten tahansa.

Olkoon nyt $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sellainen välin $[a, b]$ (esimerkiksi tasavälinen) jako, että $|P| < \delta$. Valitaan sellaiset pisteet $\underline{\xi}_k, \overline{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, että

$$f(\underline{\xi}_k) \leq \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

ja

$$f(\overline{\xi}_k) \geq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

Olkoon edelleen

$$f(x) = f(\underline{\xi}_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \text{kun } x \in [x_{k-1}, x_k[\quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

ja

$$h(x) = f(\overline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \text{kun } x \in [x_{k-1}, x_k[\quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sekä $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin g ja h ovat porrasfunktioista ja $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$, sekä

$$\begin{aligned}
\int_a^b h - \int_a^b g &= \sum_{k=1}^{n} \left(f(\overline{\xi}_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \left(f(\underline{\xi}_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\overline{\xi}_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{Merk. } S_P(f, \overline{\xi}_k)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (x_k - x_{k-1}) \\
&\quad - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{Merk. } S_P(f, \underline{\xi}_k)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (x_k - x_{k-1}) \\
&= S_P(f, \overline{\xi}_k) - S_P(f, \underline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})}_{=b-a} \\
&= S_P(f, \overline{\xi}_k) - S_P(f, \underline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= S_P(f,\overline{\xi}_k) - L + L - S_P(f,\underline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \left| S_P(f,\overline{\xi}_k) - L \right| + \left| L - S_P(f,\underline{\xi}_k) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa kaavasta (2.7). Siis f on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. □

Funktion f Riemann-integraalia voidaan nyt kutsua funktion f *määrätyksi integraaliksi* välillä $[a, b]$ ja merkitä sitä

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

(ks. [2, s. 154])

2.2 Integraalilaskennan väliarvolause

Tarkastellaan vielä *integraalilaskennan väliarvolausetta* ennen määrätyn integraalin sovellutuksien ja erityisesti *pyörähdyskappaleen tilavuuden* ja *pyörähdyskappaleen pinta-alan* tarkastelua. Integraalilaskennan väliarvolauseesta käytetään lyhennettä IVAL.

Lause 2.2. (Integraalilaskennan väliarvolause). *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa sellainen $\xi \in\,]a, b[$, että*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a).$$

Todistus (vrt. [1, s. 138–139]). Koska f on jatkuja suljetulla välillä $[a, b]$, on olemassa sellaiset pisteet $x_1, x_2 \in [a, b]$, että

$$m = f(x_1) = \min \{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$$

ja

$$M = f(x_2) = \max \{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$$

lisäksi seurauksen 5.26 (ks. [1, s. 127]) nojalla

$$m(b - a) = \int_a^b m\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b M\, dx = M(b - a). \tag{2.8}$$

Koska f on jatkuva, niin seurauksen 5.34 (ks. [1, s. 133]) perusteella yhtäsuuruus epäyhtälöissä (2.8) on voimassa vain silloin, kun f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.

Jos f on vakiofunktio, niin mikä tahansa välin $]a, b[$ piste kelpaa pisteeksi ξ. Jos f taas ei ole vakiofunktio, niin

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Koska $b - a > 0$ (toisin sanoen $[a, b]$ on väli), niin tällöin

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M.$$

Lisäksi $x_1 \neq x_2$. Rajoittamatta todistuksen yleisyyttä voidaan olettaa, että $x_1 < x_2$.

Funktio f on nyt jatkuva suljetulla välillä $[x_1, x_2]$, joten se saavuttaa tällä välillä kaikki suurimman ja pienimmän arvonsa väliset arvot. Koska $f(x_1) = m$ ja $f(x_2) = M$, on täten olemassa sellainen $\xi \in\,]x_1, x_2[$ (jolloin myös $\xi \in\,]a, b[$), että

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

eli

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

□

3 Määrätyn integraalin sovellutuksia

3.1 Tasoalueen pinta-ala

Tarkasteltaessa tasoalueen pinta-alaa, voidaan sen määritelmää verrata määrätyn integraalin määritelmään ja huomata, että

Määritelmä 3.1. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja ei-negatiivinen, niin käyrän $y = f(x)$, x -akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(vrt. [2, s. 173])

Tästä voidaan johtaa seuraava yleisempi tulos koskien kahden käyrän rajaaman alueen pinta-alaa.

Lause 3.1. *Olkoon funktiot f ja g jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin käyrien $y = f(x)$, $y = g(x)$ ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman alueen pinta-ala on*

$$A(a) = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| = \int_a^b |\, f(x) - g(x)\,|\; dx.$$

(vrt. [2, s. 173])

Esimerkki 3.1. Määritetään funktion $f(x) = \ln(x)$, x-akselin, sekä suorien $x = 2$ ja $x = 4$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Alueen pinta-alaksi saadaan määritelmän 3.1 mukaan.

$$\begin{aligned}
A(a) &= \int_2^4 \ln(x)\,dx \\
&= \Big/_{\!2}^{4}\; x\ln(x) - x \\
&= [(4\ln(4) - 4) - (2\ln(2) - 2)] \\
&= 6\ln(2) - 2 \\
&\approx 2.16 \text{ pinta-alayksikköä.}
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.2. Määritetään funktioiden $f(x) = \cos(x)$ ja $g(x) = \sin(x)$ kuvaajien, sekä suorien $x = \pi$ ja $x = 2\pi$ rajaaman alueen pinta-ala.

Selvitetään nyt funktioiden kuvaajien leikkauspiste välillä $[\pi, 2\pi]$. Leikkauspiste on nyt

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm x + n \cdot 2\pi \\
&\Leftrightarrow \quad -2x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + n \cdot x \text{, koska nyt } n = 1\text{, niin} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{4},
\end{aligned}$$

välillä $[\pi, 2\pi]$, kun $n \in \mathbb{Z}$. Jakamalla tarkastelu osiin saadaan määritettyä rajattu lauseen 3.1 pinta-ala.

$$\begin{aligned}
A(a) &= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} |(f(x) - g(x))|\, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} |(g(x) - f(x))|\, dx \\
&= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} |(\cos(x) - \sin(x))|\, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} |(\sin(x) - \cos(x))|\, dx \\
&= \Big/_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} |(\sin(x) - (-\cos(x)))| + \Big/_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} |(-\cos(x) - \sin(x))| \\
&= \left|\left[\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right) - (\sin(\pi) - (-\cos(\pi)))\right]\right| \\
&\quad + \left|\left[(-\cos(2\pi) - \sin(2\pi)) - \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right]\right| \\
&= \left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + 1\right) + \left(-1 - 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \\
&= 2\sqrt{2} \\
&\approx 2.83 \text{ pinta-alayksikköä.}
\end{aligned}$$

Huomautus. Suoritettaessa *"integrointia y-akselin"* suhteen vaihdetaan y:n ja x:n rooli, jolloin saadaan käyrän $x = f(y)$, y-akselin, ja suorien $y = c$ ja $y = d$ rajoittaman alueen pinta-alaksi

$$A(a) = \int_{c}^{d} f(y)\, dy.$$

(ks. [2, s. 174]

Esimerkki 3.3. Määritetään paraabelin $y^2 - 2y + 4x = 0$ ja y-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

Koska paraabeli $x = \frac{2y-y^2}{4}$ leikkaa y-akselin pisteissä $y = 0$ ja $y = 2$, niin paraabelin ja y-akselin rajoittaman alueen pinta-alaksi saadaan määritelmän 3.1 mukaan.

$$\begin{aligned}
A(a) &= \int_0^2 \left(\frac{2y - y^2}{4}\right) dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 2y - y^2\, dy \\
&= \frac{1}{4} \Big/_0^2\, y^2 - \frac{y^3}{3} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(4 - \frac{8}{3}\right) \\
&= 1 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3} \\
&\approx 0.33 \text{ pinta-alayksikköä.}
\end{aligned}$$

3.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus

Pyörähdyskappaleen tilavuuden tarkastelussa lähtökohtana pidetään suoran lieriön tilavuuden kaavaa $v = ah$, missä a on pohjan pinta-ala ja h on lieriön korkeus.

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Kun käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyröhdyskappale, jonka tilavuus nyt aiotaan määrittää.

Pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on jokaisella $x \in [a, b]$ ympyrä, jonka pinta-ala on

$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja P jokin välin $[a, b]$ jako jakopisteillä $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ja muodostetaan summa *Riemannin summan* nojalla

$$S_P = \sum_{j=1}^{n} A(x_j)(x_j - x_{j-1}),$$

jonka jokainen termi merkitsee sellaisen suoran ympyrälieriön tilavuutta, jonka pohjana on kappaleen x-akselia vastaan kohtisuora leikkaus vastaavan osavälin loppupisteessä ja korkeutena nyt osavälin pituus. Summa S_P merkitsee siis kaikkien välin $[a, b]$ tällaisten lieriöiden tilavuuksien summaa jaossa P.

Koska nyt funktio f on jatkuva ja Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $A(x)$ on jatkuva ja Riemann-integroituva. Kun jakoa tihennetään, siten että kaikkien osavälien pituudet lähenevät nollaa, niin summien S_P jono lähenee määrättyä integraalia.

$$\int_a^b A(x)\, dx.$$

(vrt. [2, s. 176])

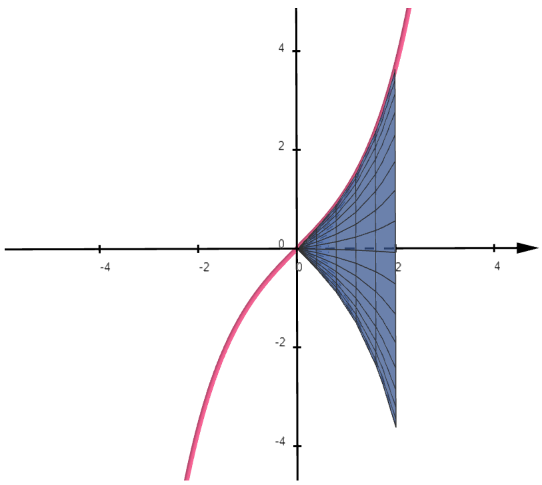
Nyt voidaan määritellä pyörähdyskappaleen tilavuuden käsite määrättyä integraalia käyttäen.

Määritelmä 3.2. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Kun käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyy pyörähdyskappale, jonka tilavuus on nyt

$$V(v) = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

(vrt. [2, s. 176])

Esimerkki 3.4. Funktion $f(x) = \sinh(x)$ kuvaajan, x-akselin, ja suorien $x = 0$ ja $x = 2$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määritetään syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.



Kuva 3.1. Funktion $f(x) = \sinh(x)$ pyörähdyskappale välillä [0,2].

Tilavuus saadaan määritettyä määritelmän 3.2 mukaan.

$$\begin{aligned}
V(v) &= \pi \int_0^2 [\sinh(x)]^2\, dx \\
&= \frac{\pi}{2} \Big/_0^2 \frac{1}{2}\sinh(2x) - x \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\sinh(4) - 2\right) - \left(\frac{1}{2}\sinh(0) - 0\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{-1+e^8}{4e^4} - 2\right) \\
&\approx 18.29\,\text{tilavuusyksikköä.}
\end{aligned}$$

Huomautus. Pyörähdyskappaleen tilavuus lasketaan vastaavasti y:n suhteen, jos tasoalue pyörähtää y-akselin ympäri. (ks. [2, s. 177])

3.3 Käyrän kaaren pituus

Ennen pyörähdyskappaleen pinta-alan määrittelyä tulee vielä tarkastella käyrän kaaren pituuden määrittelyä.

Jos vektorifunktio r, $r(t) = x(t)i + y(t)j$ on jatkuva välillä I, niin voidaan määritellä tasokäyrä

$$C = \{(x, y) \mid r = r(t),\ t \in I\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Määritellään sitten tasokäyrän C pituus seuraavalla tavalla.

Olkoon jako P jokin välin $[a, b]$ jako jakopisteillä $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Merkitään sitä

$$T_P = \sum_{j=1}^{n} |\, r(t_j) - r(t_{j-1})\,|.$$

Tällöin T_P on pisteiden $r(t_0), \ldots, r(t_n)$ kautta kulkevan murtoviivan pituus.

Likiarvo käyrän kaaren pituudelle on sitä parempi, mitä tiheämpi jako on. Tuntuukin siis luonnolliselta määritellä käyrän C *kaaren pituudeksi* luku

$$T = \lim_{|P|\to 0} T_P$$

jos se on olemassa ja on äärellinen. Ja käyrän C pituudeksi $+\infty$ jos se ei ole äärellinen.

Olkoon vektorifunktion r derivaatta olemassa ja se on jatkuva välillä $[a, b]$. Muokataan nyt jakoa P vataavan murtoviivan pituuden lauseketta T_P

$$T_P = \sum_{j=1}^{n} |\, r(t_j) - r(t_{j-1})\,| = \sum_{j=1}^{n} [(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Nyt *väliarvolauseen* nojalla välillä $]t_{j-1}, t_j[$ on olemassa pisteet ξ_j ja η_j, joille $x(t_j) - x(t_{j-1}) = x'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) ja y(t_j) - y(t_{j-1}) = y'(\eta_j)(t_j - t_{j-1})$. Siis

$$T_P = \sum_{j=1}^{n} [(x'(\xi_j))^2 + (y'(\eta_j))^2]^{\frac{1}{2}} (t_j - t_{j-1}).$$

Jos $\xi_j = \eta_j$ kaikilla j arvoilla, on T_P jatkuvan funktion $|r'(t)| = \sqrt{x'(\xi_j) + y'(\eta_j)}$ *Riemannin summa*. Tällöin sillä on raja-arvo, kun $|P| \longrightarrow 0$ ja

$$\lim_{|P| \to 0} T_P = \int_a^b |r'(t)| \, dt.$$

(vrt. [2, s. 178-179])

Lause 3.2. *Olkoon funktio* $r\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *jatkuva ja derivoituva, silloin sen määräämällä käyrällä C on kaaren pituus*

$$T = \int_a^b |r'(t)| \, dt.$$

(vrt. [2, s. 179])

Seuraus 3.1. *Olkoon funktio* $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *jatkuva ja dervioituva, silloin käyrän* $y = f(x)$ *kaaren pituus välillä* $[a, b]$ *on äärellinen ja saadaan määrättynä integraalina*

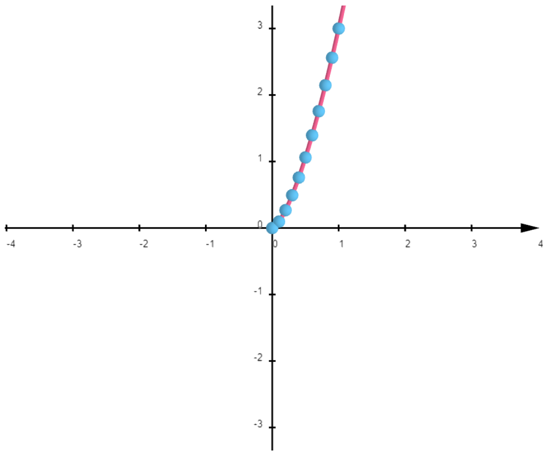
$$T = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Todistus (vrt. [2, s.179]). Edellä olevassa päättelyssä saa murtoviivan pituus T_P nyt muodon

$$T_P = \sum_{j=1}^{n} [1 + f'(\xi_j)^2]^{\frac{1}{2}} (t_j - t_{j-1}).$$

Tämä on jatkuvan funktio $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ Riemannin summa, joten sillä on väitetty integraali raja-arvona, kun $|P| \longrightarrow 0$. □

Esimerkki 3.5. Määritetään funktion $f(x) = 3x^{\frac{3}{2}}$ käyrän kaaren pituus välillä $[0, 1]$.



Kuva 3.2. Funktion $f(x) = 3x^{\frac{3}{2}}$ kuvaaja jakopisteillä välillä [0,1].

Koska funktio f on potenssifunktiona jatkuva ja dervioituva välillä $[0, 3]$, niin käyrän kaaren pituus saadaan määritettyä seurauksessa 3.1 esitettynä integraalina.

Koska funktion $f(x)$ derivaattafunktio $f'(x)$ on

$$f'(x) = \frac{6}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

niin käyrän kaaren pituudeksi saadaan

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\, dx \\ &= \Big/_0^1 \frac{2}{27}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{27}(1 + 9 \cdot 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27}(1 + 9 \cdot 0)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{20\sqrt{10} - 2}{27} \\ &\approx 2.27\,\text{pituusyksikköä.} \end{aligned}$$

3.4 Pyörähdyskappaleen pinta-ala

Pyörähdyskappaleen pinta-alaa tarkasteltaessa sen määrittelyssä lähtökohtana pidetään ympyrän pinta-alan kaavasta johdettavaa katkaistun ympyräkartion vaipan alan kaavaa $A(a) = 2\pi ps$, missä p on pohjien säteiden (r_1 ja r_2) keskiarvo ja s on sivujana.

Olkoon funktio f jatkuva, dervioituva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$. Kun käyrän $y = f(x)$ kaari pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$ saadaan määriteltyä sen pinnan ala seuraavasti.

Muodostetaan nyt välin $[a, b]$ jako P jakopistein $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ja olkoon näitä jakopisteitä vastaavat käyrän $y = f(x)$ pisteet $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Tarkastellaan nyt sitä viivaa, joka syntyy murtoviivan $P_0, P_1, \ldots, P_n$ pyörähtäessä x-akselin ympäri. Jänteen $P_{j-1}P_j$ pyörähdyksessä syntyvän pinnan ala on $A(a) = 2\pi p_j s_j$, missä $p_j = \frac{1}{2}[f(x_{j-1}) + f(x_j)]$ ja s_j on jänteen pituus, eli

$$s_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + [f(x_j) - f(x_{j-1})]^2}$$

Koska funktio f on derivoituva välillä $[a, b]$, niin oletuksen mukaan on *väliarvolauseen* nojalla olemassa $\xi_j \in \left]x_{j-1}, x_j\right[$ siten, että pätee

$$s_j = \sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2}(x_j - x_{j-1})$$

Edelleen, koska funktio f on jatkuva, niin on olemassa sellainen $\eta_j \in \left]x_{j-1}, x_j\right[$, että $f(\eta_j) = \pi_j$. Tämän nojalla voidaan koko murtoviivan $P_0, P_1, \ldots, P_n$ pyörähdyksessä syntyvän pinnan ala esittää summana

$$A_P = \sum_{j=1}^{n} 2\pi f(\eta_j)\sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2}(x_j - x_{j-1}).$$

Koska funktio $2\pi f(\eta_j)\sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2}$ on jatkuva ja siis Riemann-integroituva, voidaan osoittaa, että summien A_P jono lähenee määrättyä integraalia

$$\int_a^b 2\pi f(\eta_j)\sqrt{1 + [f'(\xi_j)]^2}\, dx,$$

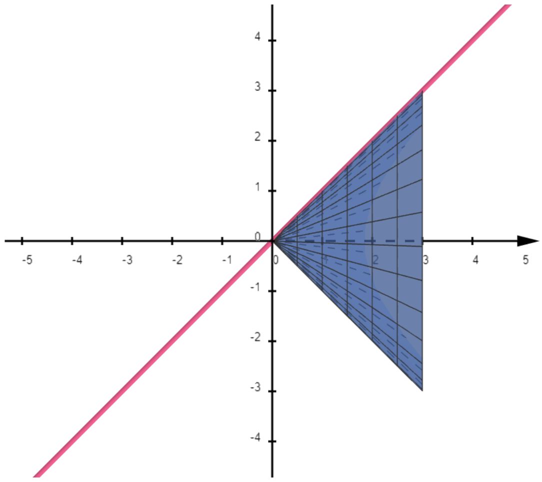
kun välin $[a, b$ jakoa tihennetään siten, että $|P| \to 0$. Nyt voidaan siis määritellä kaava pyörähdyskappaleen pinnan alalle. (vrt. [2, s. 181-182])

Määritelmä 3.3. Olkoon funktio f jatkuva ja derivoituva välillä $[a, b]$. Kun käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyy pyröhdyskappale, jonka pinta-ala määrättynä integraalina

$$A(a) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

(vrt. [2, s. 182])

Esimerkki 3.6. Funktion $f(x) = x$ kuvaajan, x-akselin, ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määritetään syntyvän pyörähdyskappaleen pinta-ala.



Kuva 3.3. Funktion $f(x) = x$ pyörähdyskappale välillä [0,3].

Pyörähdyskappaleen pinta-ala saadaan määritettyä määritelmän 3.3 mukaan. Koska funktion $f(x)$ derivaattafunktio $f'(x)$ on

$$f'(x) = 1,$$

niin pyörähdyskappaleen pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned}
A(a) &= 2\pi \int_0^3 |x|\sqrt{1 + [1]^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^3 x\sqrt{2}\, dx \\
&= 2\pi \Big/_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{2}} \\
&= 2\pi \left(\frac{3^2}{\sqrt{2}} - \frac{0^2}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{18\pi}{\sqrt{2}} \\
&\approx 39.98 \text{ pinta-alayksikköä.}
\end{aligned}$$

Lähteet

[1] Koivisto, P. *Analyysi B*. Analyysi B luentomoniste, 2021.

[2] Lahtinen, A. Pehkonen, E. *Matematiikkaa soveltajille*. Saarijärvi: Gummerus Kirjapaino Oy, 2000.

[3] Launonen, E. Sorvali, E. Toivonen, P. *Teknisten ammattien matematiikka 3Y*. Helsinki: WSOY, 1998.