Tampereen yliopisto

Taru Sammaljärvi

# MODAALILOGIIKAN ALGEBRALLINEN SEMANTIIKKA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2021

# Tiivistelmä

Taru Sammaljärvi: Modaalilogiikan algebrallinen semantiikka
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2021

---

Tämän tutkielman aiheena on modaalilogiikka ja sille johdettu algebrallinen semantiikka. Modaalilogiikka tutkii modaliteettien logiikkaa. Modaliteetit ovat eräänlaisia vaihtoehtoja pelkälle tosi/epätosi lajittelulle. Tutkielmassa käsitellään lähinnä perusmodaalilogiikkaa, jolloin käytössä ovat modaalioperaattorit välttämättömyysoperaattori ja mahdollisuusoperaattori. Tutkielmassa esitellään modaalilogiikan kieli ja käytetyin modaalilogiikan semantiikka, Kripke-semantiikka. Kripke-semantiikka perustuu mahdollisen maailman käsitteeseen, sekä struktuureihin kehys ja malli.

Algebrallisen semantiikan johtamiseen vaadittavana taustateoriana tutkielmassa käydään läpi universaalialgebran perusteita. Tutkielmassa määritellään algebran tyyppi, jonka määrittelee samanpaikkaisten funktioiden lukumäärä. Tutkielmassa määritellään myös algebrojen välinen homomorfismi, jolla voidaan verrata samantyyppisiä algebrallisia rakenteita keskenään. Algebrojen välinen homomorfismi takaa algebrallisten ominaisuuksien säilymisen. Kun homomorfismi on lisäksi bijektiivinen, sitä kutsutaan isomorfismiksi. Isomorfismiset algebrat ovat struktuureiltaan samat perusjoukkoa lukuun ottamatta. Lisäksi tutkielmassa määritellään alialgebran käsite ja algebrojen tulo.

Algebrallisen semantiikan johtaminen aloitetaan lauselogiikan algebralisoimisesta. Lauselogiikan algebralisoi Boolen algebraksi nimetty rakenne, jossa on kaksi kaksipaikkaista laskutoimitusta, yksi yksipaikkainen laskutoimitus sekä kaksi nollapaikkaista laskutoimitusta eli vakiota ja laskutoimituksilla on halutut ominaisuudet. Tutkielmassa esitellään kaksi erilaista Boolen algebraa lauselogiikan semantiikalle. Toinen on totuusarvojen algebra, jossa perusjoukkona on 0 ja 1 eli logiikan tosi ja epätosi. Toinen on potenssijoukon algebra, jonka perusjoukkona on mahdollisten maailmojen joukon potenssijoukko. Lisäksi todistetaan, että totuusarvojen algebran potenssialgebra ja potenssijoukon algebra ovat toistensa kanssa isomorfisia. Kun lisätään Boolen algebraan modaalinen operaatio, saadaan rakenne nimeltään Boolen algebra, johon on lisätty operaatio. Tutkielmassa esitellään operaattori, joka lisätään aikaisemmin saatuun potenssijoukon algebraan. Operaattori kertoo, mitkä maailmat ovat toistensa suhteen mahdollisia. Näin saadaan johdettua algebra, jota kutsutaan täydeksi kompleksialgebraksi. Tutkielmassa todistetaan, että täyden kompleksialgebran alialgebrojen luokka algebralisoi modaalilogiikan semantiikan.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# Sisältö

# 1 Johdanto

Tässä pro-gradu -tutkielmassa muodostetaan algebrallinen semantiikka modaalilogiikalle. Tutkielma perustuu pääasiassa P. Blackburnin, M. de Rijken ja Y. Veneman teokseen Modal Logic [1]. Teos käsittelee modaalilogiikkaa laajasti. Tutkielman luvussa 4 esitetyn algebrallisen semantiikan johtaminen mukailee teoksen lukua 5.

Luvussa 2 johdatellaan lukija aluksi lyhyen historiaosuuden jälkeen logiikan maailmaan lauselogiikan avulla. Tämän jälkeen päästään syventymään modaalilogiikan käsitteisiin. Luvussa esitellään myös yleinen modaalilogiikan similariteettityyppi. Tutkielma keskittyy kuitenkin pääosassa perusmodaalilogiikkaan. Perusmodaalilogiikan tunnetuin semantiikka on nimeltään Kripke-semantiikka. Kripke-semantiikka perustuu struktuureihin kehys ja malli sekä mahdollisen maailman käsitteeseen.

Modaalilogiikan algebrallisen semantiikan ymmärrys vaatii taakseen myös algebran teoriaa. Luvussa 3.1 määritellään algebran peruskäsitteitä universaalialgebran näkökulmasta. Tärkeimpinä jatkoa ajatellen määritellään Boolen algebra sekä homomorfismin ja isomorfismin käsitteet. Luvussa 3.2 tutustutaan algebrallisen logiikan käsitteisiin.

Luvussa 4 lähdetään rakentamaan modaalilogiikan algebrallista semantiikkaa. Aluksi muodostetaan lauselogiikan algebra, johon löydetään kaksi Boolen algebraan perustuvaa näkökulmaa totuusarvojen algebra ja joukkoalgebra. Totuusarvojen algebran tuloalgebra ja joukkoalgebra ovat isomorfisia. Nämä algebralisoivat lauselogiikan semantiikan. Myös aksioomat voitaisiin algebralisoida, mutta tässä tutkielmassa ei käsitellä aksioomia (tarkemmin [1]). Kun on saatu lauselogiikan algebra, siirretään saadut tarkastelut modaalilogiikkaan. Modaalilogiikan algebraan tarvitaan lisäksi modaalioperaattori, joten saatua algebraa kutsutaankin Boolen algebraksi, johon on lisätty operaatio (lyhyemmin BAO). Lisäämällä tämä operaatio aikaisempaan joukkoalgebraan saadaan algebra nimeltään kompleksialgebra. Kompleksialgebroiden luokka algebralisoi modaalisemantiikan.

# 2 Logiikka

Nykyisenlainen logiikka on luotu 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa matemaatikkojen ja filosofien toimesta (mm. George Boole 1850-luvulla). Logiikan semantiikka muodostettiin alkujaan algebrana (Boolen algebra), sillä siihen aikaan universaali algebra oli vakiinnuttanut paikkansa postulaattitieteenä. Modaalikäsitteet eivät tuolloin vielä kuuluneet logiikan piiriin, niitä pidettiin pikemminkin psykologisina kuin loogisina. Vaikka modaalikäsitteiden ja niiden logiikan tutkijoita on ollut jo Aristoteleen ajoilta lähtien, modaalilogiikan nähdään syntyneen uudelleen 1900-luvulla. Lukasiewiczin ideoiden pohjalta kehiteltiin modaalilogiikan algebrallista semantiikkaa 1940-luvulla. Boolen algebran, johon on lisätty operaatio (BAO) esittelivät Jonsson ja Tarski vuonna 1948 [4, s. 322]. Nykyinen mahdollisten maailmojen käsitteeseen perustuva modaalilogiikan semantiikka kehiteltiin 1950-luvun loppupuolella. Semantiikkaa kutsutaan Kripke-semantiikaksi, sillä se perustuu Saul Kripken muotoiluun. [9, s. 22–27].

## 2.1 Lauselogiikka

Modaalilogiikka rakentuu klassisen lauselogiikan päälle. Määritellään siis ensin lauselogiikan käsitteitä. Formaali logiikka tutkii kieliä, joilla on täsmällinen rakenne. Symboleista muodostetaan merkkijonoja, joilla ilmaistaan väitelauseita. Lauselogiikka muodostaa logiikan perusosan. Lauselogiikassa tarkastellaan yksinkertaisten lauseiden yhdistämistä.

Formaali looginen systeemi koostuu *kielestä* ja *päättelysäännöistä*. Logiikan kieli muodostuu *aakkostosta* (epätyhjä joukko symboleja), sekä niistä muodostetuista *sanoista* (peräkkäinen jono symboleja). Osalla sanoista on erityinen asema, näitä kutsutaan *kaavoiksi*. Kielen *syntaksi* määrittelee, miten kaavoja muodostetaan. Päättelysäännöt muodostuvat kaavajoukosta, joita kutsutaan *aksioomiksi* ja joukosta sääntöjä.

Määritellään ensin lauselogiikan kieli ja sen syntaksi. Perussymboleiksi on valittu *falsum* $\bot$, *negaatio* $\neg$ ja *disjunktio* $\vee$. Muut symbolit *verum* $\top$, *konjunktio* $\wedge$, *implikaatio* $\rightarrow$ sekä *ekvivalenssi* $\leftrightarrow$ ovat lyhennysmerkintöjä ja ne voidaan määritellä perussymbolien avulla. Lauselokgiikan syntaksi määritellään kaavanmuodostussääntöjen avulla.

**Määritelmä 2.1.** Klassinen lauselogiikan aakkosto koostuu seuraavista perussymboleista:

- joukko lausemuuttujia $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$,
- falsum $\bot$ (looginen epätosi),
- konnektiivit $\neg$, $\vee$,
- sulut (, ).

**Määritelmä 2.2.** [7, s. 43][8, s. 17]. Lauselogiikan kaavat muodostetaan seuraavasti:

1. Lausemuuttujat $p_i \in \Phi$ ovat kaavoja, $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. $\bot$ on kaava.
3. Jos $\phi$ on kaava, niin $\neg\phi$ on kaava.
4. Jos $\phi$ ja $\psi$ ovat kaavoja, niin $\phi \vee \psi$ on kaava.
5. Muita kaavoja ei ole.

Lausemuuttujista käytetään usein myös merkintöjä $p$, $q$, $r$, ... . Määritellään seuraavaksi lyhennysmerkintöinä käytetyt konnektiivit.

**Määritelmä 2.3.** [1, s. 10][9, s. 166]. Olkoot $\phi$ ja $\psi$ lauselogiikan kaavoja. Määritellään konnektiivit $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ja $\top$ seuraavasti:

(i) $\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$,

(ii) $\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$,

(iii) $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ ja

(iv) $\top := \neg\bot$.

Tutustaan seuraavaksi lauselogiikan semantiikkaan. Semantiikka tutkii merkityksiä. Lauselogiikassa lausemuuttujan tulkinta on joko tosi 1 tai epätosi 0, joten merkitykset ovat kaavojen totuusarvot. Lauselogiikan malli määritellään joukoksi lausemuuttujia, jotka saavat mallissa totuusarvon tosi.

**Määritelmä 2.4.** [7, s. 53]. Lauselogiikan *malli* (mahdollinen maailma) $M$ on (mikä tahansa) joukko lausemuuttujia joukosta $\Phi$.

**Määritelmä 2.5.** [7, s. 54][8, s. 25]. Olkoon $p$ lausemuuttuja, $\phi$ kaava ja $M$ lauselogiikan malli. Jos $\phi$ on *tosi mallissa* $M$, merkitään $M \models \phi$. Kaavojen totuus määritellään seuraavasti:

(i) $M \models p$ ,joss $p \in M$,

(ii) $M \models \neg\phi$ ,joss $M \not\models \phi$,

(iii) $M \models \phi \vee \psi$ ,joss $M \models \phi$ tai $M \models \psi$,

Vastaavasti voidaan johtaa totuusmääritelmät lyhennysmerkintöinä käytetyille konnektiiveille kun $\phi$ ja $\psi$ ovat kaavoja ja $M$ lauselogiikan malli.

(iv) $M \models \phi \wedge \psi$ ,joss $M \models \phi$ ja $M \models \psi$,

(v) $M \models \phi \rightarrow \psi$ ,joss $M \not\models \phi$ tai $M \models \psi$,

(iv) $M \models \phi \leftrightarrow \psi$ ,joss $M \models \phi$ ja $M \models \psi$ tai $M \not\models \phi$ ja $M \not\models \psi$.

Tutustutaan seuraavaksi validisuuden käsitteeseen. Lauseen sanotaan olevan validi, jos se on totta kaikissa lauselogiikan malleissa. Validisuudella on yhteys tautologian käsitteeseen.

**Määritelmä 2.6.** [7, s. 57][8, s. 28]. Lauselogiikan kaava $\phi$ on *validi* eli *loogisesti tosi* jos ja vain jos $\phi$ on tosi jokaisessa lauselogiikan mallissa. Tällöin merkitään $\models_C \phi$.

Lauselogiikan kaava $\phi$ on *tautologia* jos ja vain jos se on validi [8, s. 30]. Tautologia määritellään kaavaksi, joka on aina tosi riippumatta totuusjakaumista. Tautologiaa voidaan tutkia totuustaulumenetelmällä, joka on esitelty tarkemmin V. Rantalan ja A. Virtasen monisteessa Logiikan peruskurssi [8]. Lauselogiikan tautologiaa kutsutaan myös *klassiseksi tautologiaksi*.

## 2.2 Modaalilogiikka

Modaalilogiikassa klassiseen lauselogiikkaan on lisätty modaliteetit. Modaliteetit määrittelevät missä olosuhteissa väitelause on tosi eli ne edustavat erilaisia vaihtoehtoja pelkälle tosi/epätosi jaottelulle. Modaliteetteja ovat mm. *kontingentti* (satunnaisesti tosi tai epätosi), *välttämätön*, *mahdollinen*, *mahdoton* ja *välttämätön seuraus*. Mainitut modaliteetit ovat *aleettisia* eli totuutta käsitteleviä modaalikäsitteitä. Muita modaliteetteja ovat esimerkiksi *ajallinen* modaliteetti, jolloin joku on totta tiettynä ajanhetkenä tai *deonttinen* modaliteetti (on pakollista tai on sallittua). Modaalilogiikalla tarkoitetaan useimmiten aleettista modaalilogiikka. Modaalilogiikkaa voidaan käyttää kuitenkin myös yleisnimityksenä muista modaliteetteja käsittelevistä logiikoista. [9, s. 15–19].

Aleettisessa modaalilogiikassa käytössä ovat yleisesti modaalioperaattorit *välttämättömyysoperaattori* $\Box$ (”laatikko”) ja *mahdollisuusoperaattori* $\Diamond$ (”timantti”). Merkintä $\phi$ viittaa lauseeseen, jolloin merkintä $\Box\phi$ voidaan lausua ”$\phi$ on välttämättä tosi” tai ”$\phi$ on välttämätön”. Samoin merkintä $\Diamond\phi$ voidaan lausua ”$\phi$ on mahdollisesti tosi” tai ”$\phi$ on mahdollinen”. Operaattorit $\Box$ ja $\Diamond$ ovat toistensa duaaleja, joten ne voidaan määritellä toistensa avulla. Perussymboliksi riittääkin pelkkä mahdollisuusoperaattori $\Diamond$ , jolloin välttämättömyysoperaattori $\Box$ voidaan määritellä $\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi$. Myös muut aleettiset modaliteetit voidaan määritellä edellä esitettyjen operaattoreiden avulla, joten niille ei ole otettu käyttöön omia operaattoreita (symboleja). Esimerkiksi ”$\phi$ on mahdoton” voidaan ilmaista $\neg\Diamond\phi$.

Ei ole kuitenkaan välttämätöntä rajoittua vain yksipaikkaisiin modaalioperaattoreihin. Yleisesti voidaan määritellä similariteettityyppi, joka kertoo käytössä olevat modaalioperaattorit sekä niiden paikkaluvun. Modaalioperaattori voi siis koskea yhtä tai useampaa lausetta. Esimerkiksi aikalogiikassa on kahden yksipaikkaisen operaation F (future) ja P (past) lisäksi myös kaksipaikkainen U (until). Kaava F$\phi$ ilmaisee, että $\phi$ on tosi tulevaisuudessa ja P$\phi$ ilmaisee, että kaava $\phi$ oli tosi menneisyydessä. Kaava $\phi$U$\psi$ ilmaisee, että $\psi$ on tosi tulevaisuudessa ja $\phi$ on tosi siihen asti, kunnes $\psi$ muuttuu todeksi. Yleisesti voidaan merkitä modaalioperaattoria merkillä $\triangle$ ("kolmio"). Tällöin operaattorin $\triangle$ duaalioperaattori $\triangledown$ ("nabla") voidaan määritellä $\triangledown(\phi_1, ..., \phi_n) = \neg\triangle(\neg\phi_1, ..., \neg\phi_n)$ [1, s. 11].

**Määritelmä 2.7.** [1, s. 11]. *Similariteettityyppi* on pari $\tau = (O, \rho)$, missä $O$ on epätyhjä joukko modaalioperaattoreita ja $\rho : O \to \mathbb{N}$ on funktio, joka kertoo, kuinka monipaikkainen kukin operaattori on.

**Esimerkki 2.8.** Kun käytetään yhtä yksipaikkaista modaalioperaattoria $\Diamond$ on similariteettityyppi $\tau_0 = (\{\Diamond\}, \{(\Diamond, 1)\})$

Jatkossa tutkielma keskittyy perusmodaalilogiikkaan. Tällöin käytössä on yksipaikkainen mahdollisuusoperaattori $\Diamond$ eli esimerkin 2.8 mukainen similariteettityyppi $\tau_0$. Seuraavissa luvuissa määritellään perusmodaalilogiikan syntaksi ja semantiikka.

## 2.3 Modaalilogiikan syntaksi

Määritellään seuraavaksi modaalilogiikan aakkosto. Modaalilogiikan aakkosto saadaan lisäämällä lauselogiikan aakkostoon mahdollisuusoperaattori $\Diamond$. Välttämättömyysoperaattori $\Box$ on siis lyhennysmerkintä.

**Määritelmä 2.9.** [1, s.9]. Perusmodaalilogiikan kielen aakkosto muodostuu seuraavista perussymboleista:

- joukko lausemuuttujia $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$,
- falsum $\bot$ (looginen epätosi),
- konnektiivit $\neg$, $\vee$,
- mahdollisuusoperaattori $\Diamond$ ja
- sulut (, ).

Modaalilogiikan kaavanmuodostussäännöt saadaan lisäämällä lauselogiikan kaavanmuodostussääntöihin mahdollisuusoperaattorilla $\Diamond$ muodostettu kaava.

**Määritelmä 2.10.** [1, s.11][9, s. 166]. Modaalilogiikan kaavanmuodostussäännöt:

1. Lausemuuttujat $p_i \in \Phi$ ovat kaavoja, $i \in \{0, 1, 2, ...\}$.
2. $\bot$ on kaava.
3. Jos $\phi$ on kaava, niin $\neg\phi$ ja $\Diamond\phi$ ovat kaavoja.
4. Jos $\phi$ ja $\psi$ ovat kaavoja, niin $\phi \vee \psi$ on kaava.
5. Muita kaavoja ei ole.

Vastaavalla tavalla voisimme yleistää kaavanmuodostussäännön myös yleiselle modaalioperaattorille $\triangle$. Jos $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{\rho(\triangle)}$ ovat kaavoja, niin $\triangle(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{\rho(\triangle)})$ on kaava. Lyhennysmerkintöinä käytettyjen konnektiivien kaavat määritellään kuten lauselogiikassa (määritelmä 2.3).

## 2.4 Kripke-semantiikka

Perusmodaalilogiikan semantiikkaa kutsutaan Kripke-semantiikaksi, sen tunnetuksi tehneen Saul Kripken mukaan. Kripke-semantiikka perustuu mahdollisen maailman käsitteeseen. Modaalilogiikassa mahdollisella maailmalla voidaan tarkoittaa tilannetta, asiantilaa tai systeemiä. Mahdolliset maailmat ovat siis käsitteellisiä olioita. Voimme puhua mahdollisen maailman sijaan myös tilasta tai pisteestä. Modaalilogiikan täsmällinen semantiikka esitetään struktuurien - kehysten ja mallien - avulla. Määritellään ensin Kripke-kehys.

**Määritelmä 2.11.** Olkoon $W$ epätyhjä kaikkien mahdollisten maailmojen joukko ja $R$ kaksipaikkainen relaatio tässä joukossa. Struktuuria $F = (W, R)$ kutsutaan *Kripke-kehykseksi*. Relaatio määrittää nyt kullekin maailmalle $w \in W$, mitkä maailmat ovat mahdollisia $w$:n suhteen. Eli jos $w$ ja $w'$ ovat relaatiossa $R$ toisiinsa eli $wRw'$, niin $w'$ on mahdollinen suhteessa $w$:hen eli $w'$ on saavutettavissa maailmasta $w$.

Kripke-mallissa kehykseen liitetään vielä valuaatio $V$, joka liittää jokaiseen lausemuuttujaan totuusarvon jokaisessa maailmassa $w \in W$.

**Määritelmä 2.12.** Olkoon $\Phi$ joukko lausemuuttujia. *Kripke-malli* on pari $M = (F, V)$, missä $F$ on kehys ja $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ on valuaatio ($\mathcal{P}(W)$ on joukon $W$ potenssijoukko). $V(p)$ on siis niiden pisteiden (mahdollisten maailmojen) joukko, missä $p$ on tosi. Mallia $M$ kutsutaan myös *kehyksen $F$ malliksi*.

Kehys ja malli voidaan myös yleistää eri $\tau$-similariteettityypeille, jolloin kyseessä on $\tau$-kehys ja $\tau$-malli. Tällöin jokaista $n$-paikkaista modaalioperaattoria $\triangle$ kohti on $n + 1$-paikkainen relaatio $R_\triangle$ $W$:ssä. Kripke-mallia kutsutaan myös $\tau_0$-malliksi, esimerkin 2.8 mukaan. Määritellään seuraavaksi, milloin modaalilogiikan kaava $\phi$ on totta mallin $M$ maailmassa $w$.

**Määritelmä 2.13.** [1, s.17-18][9, s. 167]. Jos kaava $\phi$ on *tosi mallin $M$ maailmassa $w$*, merkitään $M, w \models \phi$. Olkoon $w \in W$ ja $M$ Kripke-malli. Tällöin *kaava $\phi$ on totta mallin $M$ maailmassa $w$* seuraavasti:

i. $M, w \models p$ ,joss $w \in V(p)$, missä $p \in \Phi$,

ii. $M, w \models \neg\phi$ ,joss $M, w \not\models \phi$,

iii. $M, w \models \phi \vee \psi$ ,joss $M, w \models \phi$ tai $M, w \models \psi$,

iv. $M, w \models \Diamond\phi$ ,joss $\exists v \in W$ s.e. $wRv$ ja $M, v \models \phi$.

Näistä voidaan johtaa myös lyhennysmerkintöinä käytettyjen konnektiivien totuusmääritelmät.

**Määritelmä 2.14.** Olkoon $w \in W$ ja $M$ Kripke-malli. Tällöin *kaava $\phi$ on totta mallin $M$ maailmassa $w$* seuraavasti:

v. $M, w \models \phi \wedge \psi$ ,joss $M \models \phi$ ja $M \models \psi$,

vi. $M, w \models \phi \to \psi$ ,joss $M, w \not\models \phi$ tai $M, w \models \psi$,

vii. $M, w \models \phi \leftrightarrow \psi$ ,joss $M, w \models \phi$ ja $M, w \models \psi$ tai $M, w \not\models \phi$ ja $M, w \not\models \psi$,

viii. $M, w \models \Box\phi$ ,joss $\forall v \in W$ jos $wRv$ niin $M, v \models \phi$.

Kaavalle $\phi$ voidaan tarkastella missä mallin $M$ maailmoissa $w$ kaava on tosi. Tällöin puhutaan kaavan $\phi$ totuusjoukosta mallissa $M$. Määritellään tämä täsmällisemmin.

**Määritelmä 2.15.** [9, s. 57]. Kaavan $\phi$ *totuusjoukko* mallissa $M$ on niiden maailmojen joukko, missä $\phi$ on tosi. Totuusjoukko merkitään $\|\phi\|^M = \{w \in W \mid M, w \models \phi\}$.

Yksittäisen kaavan totuutta voidaan tarkastella mallissa. Kaava voi olla totta myös kaikissa annetun mallin $M$ maailmoissa $w$. Kaavan totuutta voidaan tarkastella myös kehysten luokassa. Määritellään seuraavaksi näihin liittyvät käsitteet.

**Määritelmä 2.16.** Kaava $\phi$ on *validi* mallissa $M$ (merkintä $M \models \phi$), jos jokaisella $w \in W$ pätee $M, w \models \phi$. Kaava on *toteutuva* mallissa $M$, jos on olemassa $w \in W$ siten, että $M, w \models \phi$.

**Määritelmä 2.17.** Kaava $\phi$ on *validi maailmassa w, kehyksessa F* (merkintä $F, w \models \phi$), jos kaava $\phi$ on tosi maailmassa $w$ kaikissa kehyksen $F$ malleissa. Kaava $\phi$ on *validi kehyksessä F* (merkintä $F \models \phi$), jos kaava $\phi$ on tosi jokaisessa kehyksen $F$ maailmassa.

Kun kaavassa $\phi$ esiintyy jokin lausemuuttuja $p$, niin voidaan merkitä kaavaa $\phi[p]$. Modaalilogiikassa voidaan myös sijoittaa lausemuuttujan paikalle jonkin kaava $\psi$, jolloin käytetään merkintää $\phi[p/\psi]$. Tällöin siis kaavassa $\phi$ jokainen lausemuuttujan $p$ esiintymä korvataan lauseella $\psi$.

**Määritelmä 2.18.** [9, s. 47]. Olkoon $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \Phi$ lausemuuttujia. Olkoon $\phi$ ja $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ kaavoja. Tällöin $\phi[q_1/\psi_1, q_2/\psi_2, \ldots, q_k/\psi_k]$ on *sijoitus*, joka tarkoittaa kaavaa, joka saadaan kaavasta $\phi$ korvaamalla jokainen lausemuuttujan $q_i$ esiintymä kaavalla $\psi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Sijoituksen avulla saadaan määriteltyä modaalilogiikan tautologia. Jokainen lauselogiikan tautologiasta sijoittamalla saatu modaalilogiikan kaava on modaalilogiikan tautologia. [9, s. 47].

**Määritelmä 2.19.** [10, s. 12]. Kaava $\psi$ on modaalilogiikan tautologia, jos on olemassa sellainen lauselogiikan tautologia $\phi$ ja modaalilogiikan kaavat $\psi_1, \ldots, \psi_k$, että $\psi = \phi[q_1/\psi_1, \ldots, q_k/\psi_k]$. Lauselogiikan tautologioista sijoittamalla saatuja lauseita kutsutaan *klassisiksi tautologioiksi*. Jos kaava $\phi$ on klassinen tautologia, merkitään $\models_C \phi$.

# 3 Algebra

Algebra on yksi matematiikan päähaaroista, jossa tutkimuskohteina ovat laskutoimitusten ominaisuudet. Laskutoimitusten määritteleminen joukkoon tuottaa algebran perusrakenteen, esimerkiksi ryhmän, renkaan tai kunnan. Esimerkiksi reaaliluvut muodostavat kunnan, kun laskutoimituksina on yhteenlasku ja kertolasku. Abstraktissa algebrassa tarkastellaan yleensä yhtä algebran tyyppiä (esim. kunta) kerrallaan, kun taas universaalialgebra pyrkii tutkimaan rakenteita mahdollisimman yleisessä muodossa. Universaalialgebra tutkii siis yleistettyjä algebrallisia rakenteita. Universaalialgebraa on kehitetty 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa. Kehityksen tavoitteena oli vertailla erilaisia algebrallisia rakenteita, kuten tavallista numeroalgebraa ja Boolen algebraa ja muodostaa näin yleistä teoriaa.

## 3.1 Universaalialgebraa

Algebrallisella rakenteella tarkoitetaan joukkoa tai joukkoja, joissa on määritelty yksi tai useampi laskutoimitus eli funktio joukossa. Yksinkertainen esimerkki algebrallisesta rakenteesta on pari $(X, *)$, missä $X$ on epätyhjä joukko ja $*$ joukon laskutoimitus [5, s. 31].

**Määritelmä 3.1.** Joukon $A$ *järjestetty n-jono* on funktio $\{0, 1, \ldots, n-1\} \to A$. Merkitään joukon $A$ $n$-jonojen joukkoa $A^n$ ja määritellään $A^0 = \{()\}$ (tyhjä jono).

**Määritelmä 3.2.** [3, s. 23]. Olkoon $A$ epätyhjä joukko. Mikä tahansa funktio $f : A^n \to A$ on tällöin joukon $A$ $n$-paikkainen *laskutoimitus*. Lukua $n$ kutsutaan laskutoimituksen $f$ *paikkaluvuksi*. Laskutoimitusta $f : A^0 \to A$ kutsutaan *nollapaikkaiseksi* laskutoimitukseksi eli *vakioksi*.

Modaalilogiikan algebralisoimiseen tarvitaan jatkossa nollapaikkaisia (vakioita), yksipaikkaisia ja kaksipaikkaisia laskutoimituksia. Laskutoimituksilla voi olla erilaisia ominaisuuksia ja myös joukon alkiolla voi olla laskutoimituksen suhteen erityisasema. Määritelmän 3.2 mukaan joukon $X$ kaksipaikkainen laskutoimitus $*$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon $X$ alkiopariin $(x, y)$ jonkin yksikäsitteisen kolmannen alkion joukosta $X$. Tätä kutsutaan laskutoimituksen *tulokseksi* ja merkitään $x * y$. Määritelmän mukaan joukon $X$ (kaksipaikkainen) laskutoimitus on siis kuvaus $X \times X \to X$, jolle pätee $(x, y) \mapsto x * y$. [5, s. 31].

**Määritelmä 3.3.** [5, s. 33]. Joukon $X$ (kaksipaikkainen) laskutoimitus $*$ on

(i) *liitännäinen* (assosiatiivinen), jos $x * (y * z) = (x * y) * z$, kaikilla $x, y, z \in X$.

(ii) *vaihdannainen* (kommutatiivinen), jos $x * y = y * x$, kaikilla $x, y \in X$.

**Määritelmä 3.4.** Olkoon $X$ joukko ja $*$ joukossa $X$ määritelty kaksipaikkainen laskutoimitus. Joukon $X$ alkiota $e$ kutsutaan *neutraalialkioksi*, jos $e * x = x$ ja $x * e = x$ kaikilla $x \in X$

**Lause 3.5.** *Jos laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio, se on yksikäsitteinen.*

*Todistus.* Olkoon $e$ ja $e'$ kumpikin laskutoimituksen neutraalialkioita. Tällöin määritelmän mukaan $e' = e * e' = e$. [5, s. 35]. □

**Määritelmä 3.6.** [5, s. 36]. Olkoon $e$ kaksipaikkaisen laskutoimituksen $*$ neutraalialkio. Tällöin $x'$ on alkion $x$ *käänteisalkio*, jos $x * x' = e$ ja $x' * x = e$.

Algebrallisia rakenteita jaotellaan laskutoimitusten lukumäärän ja niiden ominaisuuksien perusteella. Monia tärkeitä algebrallisia rakenteita voidaan määritellä aksiomaattisesti. Tällöin määriteltävän rakenteen on toteutettava luettelo ehtoja eli aksioomat.

**Määritelmä 3.7.** Olkoon $X$ joukon $A$ osajoukko ja $*$ $n$-paikkainen laskutoimitus joukossa $A$. Tällöin joukon $X$ sanotaan olevan *suljettu* laskutoimituksen $*$ suhteen mikäli $*(x_1, \ldots, x_n) \in X$ kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in X$.

**Esimerkki 3.8.** Ryhmä on algebrallinen rakenne, joka on määritelty aksiomaattisesti. Joukko $G$ varustettuna kaksipaikkaisella laskutoimituksella $*$ on ryhmä, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa.

(i) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

(ii) Joukossa $G$ on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio.

(iii) Jokaisella $x \in G$ on olemassa käänteisalkio $x'$ laskutoimituksen $*$ suhteen.

Algebran tyyppi määrittelee, mitä laskutoimitussymboleja algebrassa on, ja mikä on näiden laskutoimitusten paikkaluku. Algebran laskutoimitukset muodostavat laskutoimitusten perheen. Määritellään nämä täsmällisemmin.

**Määritelmä 3.9.** [1, s. 497]. *Algebran tyyppi* on järjestetty pari $\mathcal{F} = (F, \rho)$, missä $F$ on epätyhjä joukko ja $\rho : F \longrightarrow \mathbb{N}$ funktio. Joukon $F$ alkiota kutsutaan *funktiosymboleiksi* ja $\rho$ kertoo kunkin funktion $f \in F$ paikkaluvun. Usein merkitään yksinkertaisesti $f \in \mathcal{F}$.

**Määritelmä 3.10.** *Perhe* on joukko, jonka alkiot ovat joukkoja. Olkoon $J$ epätyhjä indeksijoukko. *Indeksoitu perhe* $(A_j)_{j \in J}$ on joukko, jonka alkiot ovat joukkoja ja missä $j$ on indeksi, joka yksilöi joukon.

*Laskutoimitusten perhe* on siis joukko, jonka alkiot ovat laskutoimituksia. Tyypin $\mathcal{F}$ algebran $\mathfrak{A}$ laskutoimitusten perhettä joukossa $A$ merkitään $(f_{\mathfrak{A}})_{f \in F}$. Tällöin jokaista $n$ ja jokaista $n$-paikkaista laskutoimitusta $f_{\mathfrak{A}}$ vastaa $n$-paikkainen funktiosymboli $f$.

**Määritelmä 3.11.** [1, s. 498][3, s. 23]. Olkoon $\mathcal{F}$ algebran tyyppi. Tyypin $\mathcal{F}$ *algebra* on pari $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$, missä $A$ on epätyhjä joukko (universumi, perusjoukko) ja $(f_{\mathfrak{A}})_{f \in F}$ on laskutoimitusten perhe joukossa $A$. Kun $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ käytetään algebralle usein merkintää $\mathfrak{A} = (A, f_{1,\mathfrak{A}}, \ldots, f_{k,\mathfrak{A}})$, missä laskutoimitukset on lueteltu perusjoukon jälkeen.

**Esimerkki 3.12.** Määritellään algebran tyyppi $\mathcal{G}$, jossa funktiosymboleina on kaksipaikkainen $*$, yksipaikkainen $-$ ja vakio $e$. Olkoon tyypin $\mathcal{G}$ algebra $\mathfrak{G} = (G, *, -, e)$. Tällöin algebra $\mathfrak{G}$ on ryhmä, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa.

(i) Laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

(ii) Kaikilla $x \in G$, $e * x = x$ ja $x * e = x$.

(iii) Kaikilla $x \in G$, $-x * x = e$ ja $x * -x = e$.

Määritellään seuraavaksi logiikan algebralisoinnissa tarvittavat algebralliset rakenteet hila ja Boolen algebra.

**Määritelmä 3.13.** Algebran tyyppi $\mathcal{L}$ sisältää kaksi kaksipaikkaista funktiosymbolia $+$ ja $\cdot$.

Yleisesti esimerkiksi tyypin $\mathcal{L}$ algebraa voidaan merkitä $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot)$. Funktiosymboleiden alaindeksit voidaan jättää merkitsemättä, kun asiayhteydestä on selvä mihin algebraan funktiosymboli liittyy.

**Määritelmä 3.14.** [3, s. 28] [6, s. 5]. Tyypin $\mathcal{L}$ algebraa $\mathfrak{L} = (L, +, \cdot)$ kutsutaan *hilaksi*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

(L1) laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat vaihdannaisia,

(L2) laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat liitännäisiä,

(L3) kaikilla $x, y \in L$ pätee $x + (x \cdot y) = x$ ja $x \cdot (x + y) = x$ (absorptio),

(L4) kaikilla $x \in L$ pätee $x + x = x$ ja $x \cdot x = x$ (idempotenttisuus).

**Määritelmä 3.15.** Algebran tyyppiä, jossa on yksi vakio 0, yksi yksipaikkainen funktiosymboli $-$ ja yksi kaksipaikkainen funktiosymboli $+$, kutsumme nimellä *Bool*.

Bool-tyypin algebraa merkitään yleensä $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$. Tällöin yleisesti käytetään lyhennysmerkintöjä $a \cdot b = -(-a + -b)$ ja $1 = -0$.

**Määritelmä 3.16.** [1, s. 269][3, s. 25]. Bool-tyypin algebraa $\mathfrak{B} = (B, +, -, 0)$, kutsutaan *Boolen algebraksi*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa. Käytetään lyhennysmerkintöjä $\cdot$ ja 1 seuraavasti: $x \cdot y = -(-x + -y)$ ja $1 = -0$.

(B1) Kolmikko $(B, +, \cdot)$ muodostaa hilan,

(B2) kaikilla $x, y, z \in B$ pätee seuraavat osittelulait (distributiivisuus),

  (i) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$,

  (ii) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,

(B3) kaikilla $x \in B$ pätee $x + 0 = x$ ja $x \cdot 1 = x$ (neutraalialkiot),

(B4) kaikilla $x \in B$ pätee $x + (-x) = 1$ ja $x \cdot (-x) = 0$ (komplementti).

**Esimerkki 3.17.** Olkoon $X$ joukko. Algebra $\mathfrak{P}(X) = (\mathcal{P}(x), +, -, 0)$ on Boolen algebra, kun määritellään $A + B := A \cup B$, $-A := X \setminus A$ ja $0 := \emptyset$. Algebran perusjoukko $\mathcal{P}(x)$ on siis joukon $X$ potenssijoukko ja laskutoimituksina toimivat joukkojen yhdiste ja joukon komplementti. Tyhjä joukko on vakio. Samoin voidaan määritellä lyhennysmerkinnät $A \cdot B := A \cap B$ joukkojen leikkauksena ja $1 := X$. Nyt voidaan todeta, että algebrassa $\mathfrak{P}(X)$ pätee Boolen algebran aksiomat sillä:

(L1-2) laskutoimitukset $\cap$ ja $\cup$ ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä.

(L3) kaikilla $A, B \in \mathcal{P}(X)$ pätee $A \cap (A \cup B) = A$ ja $A \cup (A \cap B) = A$

(L4) kaikilla $A \in \mathcal{P}(X)$ pätee $A \cup A = A$ ja $A \cap A = A$

(B2) kaikilla $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ pätee osittelulait

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(B3) kaikilla $A \in \mathcal{P}(X)$ pätee $A \cap \emptyset = \emptyset$ ja $A \cup X = X$

(B4) kaikilla $A \in \mathcal{P}(X)$ pätee $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ ja $A \cup (X \setminus A) = X$

Saman tyyppisiä algebrallisia rakenteita voidaan verrata keskenään homomorfismin avulla. Homomorfismi on kuvaus, jonka ehdot takaavat, että kuvaus säilyttää laskutoimituksien tulokset. Homomorfismi siis säilyttää algebralliset ominaisuudet. Isomorfismi on bijektiivinen kuvaus ja se kuvaa struktuurit toisikseen algebralliset ominaisuudet säilyttäen molempiin suuntiin. Tällaiset isomorfiset struktuurit ovat täysin identtiset toistensa kanssa alkioiden nimeämistä lukuun ottamatta. Seuraavaksi määrittelemme täsmällisesti nämä käsitteet. [3, 5].

**Määritelmä 3.18.** [1, s. 498]. Olkoot $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$ ja $\mathfrak{B} = (B, (f_{\mathfrak{B}})_{f \in F})$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja. Funktio $\eta : A \to B$ on *homomorfismi*, jos kaikilla $f \in \mathcal{F}$ ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in A$ (missä $n$ on funktion $f$ paikkaluku) pätee:

$$\eta(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots a_n)) = f_{\mathfrak{B}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \tag{3.1}$$

**Määritelmä 3.19.** [1, s. 498][3, s.28]. Olkoot $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$ ja $\mathfrak{B} = (B, (f_{\mathfrak{B}})_{f \in F})$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja. Funktio $\eta : A \to B$ on *isomorfismi*, jos $\eta$ on bijektiivinen homomorfismi. Algebrat ovat *isomorfisia*, jos niiden välillä on isomorfismi.

**Esimerkki 3.20.** Olkoon $\mathfrak{A} = (A, +_{\mathfrak{A}}, -_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}})$ ja $\mathfrak{B} = (B, +_{\mathfrak{B}}, -_{\mathfrak{B}}, 0_{\mathfrak{B}})$ Boolen algebroja. Tällöin $\eta : A \to B$ on (Boolen) homomorfismi, jos:

$$\eta(a_1 +_{\mathfrak{A}} a_2) = \eta(a_1) +_{\mathfrak{B}} \eta(a_2),$$
$$\eta(-_{\mathfrak{A}} a_1) = -_{\mathfrak{B}} \eta(a_1),$$
$$\eta(0_{\mathfrak{A}}) = 0_{\mathfrak{B}}.$$

Homomorfismin ja isomorfismin avulla voidaan konstruoida annetuista algebroista uusia algebroja. Algebran sisältä voidaan löytää myös toinen algebran rakenne. Tätä kutsutaan alialgebraksi. Algebroja voidaan myös yhdistää keskenään tulon avulla. Määritellään seuraavaksi alialgebran käsite ja algebrojen tulo.

**Määritelmä 3.21.** Funktion $f : A^n \to A$ (paikkaluku $n$) *rajoittuma* osajoukkoon $B \subseteq A$ on funktio $(f \upharpoonright B) : B^n \to A$, $(f \upharpoonright B)(b_1, ..., b_n) = f(b_1, ..., b_n)$ kaikilla $b_1, ..., b_n \in B$.

**Määritelmä 3.22.** [1, s. 498][3, s. 28-29]. Olkoon $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$ ja $B \subseteq A$. Jos $B$ on suljettu kaikkien laskutoimitusten $f_{\mathfrak{A}}$ suhteen eli $f_{\mathfrak{A}}(b_1, ..., b_n) \in B$ kaikilla $b_1, ..., b_n \in B$, niin kutsumme algebraa $\mathfrak{B} = (B, (f_{\mathfrak{A}} \upharpoonright B)_{f \in F})$ $\mathfrak{A}$:n *alialgebraksi*.

**Määritelmä 3.23.** [5, s. 17–18]. Olkoon $A_1, A_2, \ldots, A_k$ joukkoja ja $J = \{1, \ldots, k\}$ indeksijoukko. Näiden joukkojen *karteesinen tulo* $\prod_{j \in J} A_j = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ koostuu $k$-jonoista $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_k)$, missä $a_j \in A_j$, $j \in J$. Käytetään myös merkintää $\mathbf{a}(j) = a_j$, kun $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

**Määritelmä 3.24.** [1, s. 498–499][3, s. 53]. Olkoon $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ indeksoitu algebrojen perhe. *Algebrojen tulo* $\prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$ on algebra, missä perusjoukko on perheen perusjoukkojen karteesinen tulo $A = \prod_{j \in J} A_j$ ja laskutoimitus $f_{\mathfrak{A}}$ on määritelty koordinaattikohtaisesti siten, että $f_{\mathfrak{A}}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})(j) = f_{\mathfrak{A}_j}(\mathbf{a_1}(j), ..., \mathbf{a_n}(j))$ kaikilla $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n} \in \prod_{j \in J} A_j$. Kun kaikki perheen algebrat ovat samoja eli $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}$ kaikilla $j \in J$ kutsumme algebrojen tuloa algebran $\mathfrak{A}$ *potenssialgebraksi* ja merkitsemme $\prod_{j \in J} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^J$.

Tuloalgebrassa perusjoukkona on siis joukko jonona. Myös funktion $f_{\mathfrak{A}}$ arvot ovat jonoja, jonka alkiot on muodostettu koordinaateittain. Jonon pituus riippuu kerrottavien algebrojen lukumäärästä. Havainnollistetaan tulo algebran muodostumista vielä esimerkillä.

**Esimerkki 3.25.** Olkoon $\mathfrak{A} = (A, +_{\mathfrak{A}}, -_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}})$ ja $\mathfrak{B} = (B, +_{\mathfrak{B}}, -_{\mathfrak{B}}, 0_{\mathfrak{B}})$ Boolen algebroja. Muodostetaan algebrojen $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ tulo $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, +, -, 0)$. Tällöin perusjoukkona on joukkojen $A$ ja $B$ karteesinen tulo, joka koostuu järjestetyistä pareista $(a, b)$ missä $a \in A$ ja $b \in B$. Laskutoimitukset on muodostettu seuraavasti:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= ((a_1 +_{\mathfrak{A}} a_2), (b_1 +_{\mathfrak{B}} b_2)) \\ -(a_1, b_1) &= (-a_1, -b_1) \\ 0 &= (0_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{B}}) \end{aligned}$$

## 3.2 Algebrallinen logiikka

Malliteoria on logiikan osa-alue, joka tutkii matemaattisia struktuureja (esim. ryhmä, graafi ja kunta) loogisten kaavojen avulla. Malli eli struktuuri koostuu perusjoukosta ja tämän alkioiden välisiä suhteita kuvaavista relaatioista. Universaalialgebra voidaan nähdä malliteorian haarana, jossa ollaan kiinnostuneita vain rakenteista, joissa kaikki relaatiot ovat funktioita [1, s. 500]. Määritellään ensin algebran looginen kieli ja tutkitaan sitten, miten sitä tulkitaan logiikassa.

**Määritelmä 3.26.** [1, s. 500][3, s. 62]. (Termit ja yhtälöt) Olkoon $\mathcal{F}$ algebran tyyppi. Olkoon $X$ joukko alkioita, joita kutsumme *muuttujiksi*. Voimme muodostaa joukosta $X$ *$\mathcal{F}$-termejä* (merkkijonoja) seuraavasti:

(T1) jokainen muuttuja $x \in X$ on $\mathcal{F}$-termi,

(T2) jokainen vakio $c$ on $\mathcal{F}$-termi,

(T3) jos $t_1, ..., t_n$ ovat $\mathcal{F}$-termejä ja $f$ on funktiosymboli, jonka paikkaluku on $n$, niin $f(t_1, ..., t_n)$ on $\mathcal{F}$-termi.

Joukosta $X$ muodostettujen kaikkien $\mathcal{F}$-termien joukkoa merkitään $Ter_{\mathcal{F}}(X)$. *Yhtälö* on pari termejä $(s, t)$, josta käytetään merkintää $s \approx t$.

Kun $*$ on kaksipaikkainen funktiosymboli, käytetään usein termille merkintää $t_1 * t_2$ merkinnän $*(t_1, t_2)$ sijasta. Yksipaikkaiselle laskutoimitukselle käytetään myös vastaavaa merkintää ilman sulkuja. Termit viittaavat siis algebran alkioihin, mutta jotta voidaan laskea termien arvo, täytyy tietää mitä termin muuttujat tarkoittavat. Tarvitaan ensin tulkintafunktio, joka liittää jokaiseen muuttujaan $x \in X$ joukon $A$ alkion, jonka jälkeen voidaan määritellä miten arvo eli valuaatio lasketaan.

**Määritelmä 3.27.** [1, s. 501]. Olkoon $\mathcal{F}$ algebran tyyppi, $X$ joukko muuttujia ja $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in \mathcal{F}})$ tyypin $\mathcal{F}$ algebra. Algebran $\mathfrak{A}$ *tulkintafunktio* on funktio $\theta : X \to A$. Nyt voimme laskea termin $t \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$ *arvon* $\tilde{\theta}(t)$ algebrassa $\mathfrak{A}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(x) &= \theta(x), \text{ kun } x \in X,\\ \tilde{\theta}(c) &= c_{\mathfrak{A}}, \text{ kun } c \text{ on vakio},\\ \tilde{\theta}(f(t_1, ..., t_n)) &= f_{\mathfrak{A}}(\tilde{\theta}(t_1), ..., \tilde{\theta}(t_n)), \text{ kun } f \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Arvofunktio riippuu siis kyseessä olevasta algebrasta. Tällöin käytetään usein merkintää $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t)$, kun on tarpeen korostaa, minkä algebran arvofunktio on kyseessä. Huomataan myös, että kolmas ehto muistuttaa homomorfismin määritelmää (3.18). Arvon laskeminen voidaankin muuttaa homomorfismiksi, luomalla termien joukolle $Ter_{\mathcal{F}}(X)$ algebrallinen rakenne.

**Määritelmä 3.28.** [1, s. 501]. (Termien algebra) Olkoon $\mathcal{F}$ algebran tyyppi ja $X$ joukko muuttujia. Kutsumme algebraa $\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) = (Ter_{\mathcal{F}}(X), (f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)})_{f \in F})$ *$X$:n termien algebraksi*. Jokainen funktiosymboli $f$ tulkitaan operaatioksi $f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)}$ seuraavasti:

$$f_{Ter_{\mathcal{F}}(X)}(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n).$$

Merkintä $f(t_1, ...t_n)$ tarkoittaa siis termiä merkkijonona ja $f_{Ter_{\mathcal{F}}(X)}$ on funktio $\mathcal{F}$-termien joukossa $Ter_{\mathcal{F}}(X)$.

Tämä $\mathcal{F}$-termien avulla muodostettu termien algebra osoittautuu hyödylliseksi. Voidaan esimerkiksi määritellä termien korvausfunktio homomorfismina termien algebralta itselleen. Määritellään ensin, mitä tarkoitetaan korvausfunktiolla ja todistetaan sitten, että korvausfunktio on homomorfismi.

**Määritelmä 3.29.** [1, s. 501]. Olkoon $\mathcal{F}$ algebran tyyppi ja $X$ joukko muuttujia. Funktiota $\sigma : X \to Ter_{\mathcal{F}}(X)$ kutsutaan *sijoitukseksi* ja sillä voidaan korvata muuttujat termeillä. Sijoitus voidaan vielä laajentaa *korvausfunktioksi* $\tilde{\sigma} : Ter_{\mathcal{F}}(X) \to Ter_{\mathcal{F}}(X)$, joka on määritelty seuraavasti:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) &:= \sigma(x), \\ \tilde{\sigma}(c) &:= c, \\ \tilde{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) &:= f(\tilde{\sigma}(t_1), \dots, \tilde{\sigma}(t_n)). \end{aligned}$$

**Lause 3.30.** *Olkoon* $\tilde{\sigma} : \mathrm{Ter}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathrm{Ter}_{\mathcal{F}}(X)$ *korvausfunktio. Tällöin* $\tilde{\sigma} : \mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)$ *on homomorfismi.*

*Todistus.* Nyt $\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) = (Ter_{\mathcal{F}}(X), (f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)})_{f \in F})$ on termien algebra. Tällöin korvausfunktio $\tilde{\sigma} : \mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)$ on homomorfismi, jos kaikilla $f \in \mathcal{F}$ ja $t_1, \dots, t_n \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$ pätee: $\tilde{\sigma}(f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)}(t_1, \dots, t_n)) = f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)}(\tilde{\sigma}(t_1), \dots, \tilde{\sigma}(t_n))$, mikä on suoraan korvausfunktion määritelmä. □

Myös arvon laskenta $\tilde{\theta}$ voidaan nyt palauttaa sopivan homomorfismin määrittelemiseen.

**Lause 3.31.** *Olkoon* $\mathcal{F}$ *algebran tyyppi,* $X$ *joukko muuttujia ja* $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$ *tyypin* $\mathcal{F}$ *algebra. Olkoon* $\theta : X \to A$ *mikä tahansa tulkintafunktio. Tällöin sitä vastaava arvofunktio* $\tilde{\theta} : \mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathfrak{A}$ *on homomorfismi.*

*Todistus.* Olkoon nyt $\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) = (Ter_{\mathcal{F}}(X), (f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)})_{f \in F})$ termien algebra ja $\mathfrak{A} = (A, (f_{\mathfrak{A}})_{f \in F})$ tyypin $\mathcal{F}$ algebra. Funktio $\tilde{\theta} : \mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X) \to \mathfrak{A}$ on homomorfismi, jos kaikilla $f \in \mathcal{F}$ ja kaikilla $t_1, \dots, t_n \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$ pätee: $\tilde{\theta}(f_{\mathfrak{Ter}_{\mathcal{F}}(X)}(t_1, \dots, t_n)) = f_{\mathfrak{A}}(\tilde{\theta}(t_1), \dots, \tilde{\theta}(t_n))$ mikä on suoraan arvofunktion määritelmä. □

Määritellään vielä seuraavaksi algebran yhtälöiden totuusrelaatio. Algebran yhtälö on totta silloin, kun termit saavat saman arvon.

**Määritelmä 3.32.** [1, s. 502][3, s 71]. Määritellään algebran yhtälöiden totuusrelaatio $\models$ seuraavasti:

(i) Yhtälö $s \approx t$ on tosi algebrassa $\mathfrak{A}$, jos kaikilla tulkintafunktiolla $\theta$ pätee $\tilde{\theta}(s) = \tilde{\theta}(t)$. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \models s \approx t$.

(ii) Yhtälöiden joukko $E$ on tosi algebrassa $\mathfrak{A}$, jos jokainen $E$:n yhtälö on tosi algebrassa $\mathfrak{A}$. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \models E$.

(iii) Yhtälö $s \approx t$ on tosi algebrojen luokassa $K$, jos yhtälö $s \approx t$ on tosi jokaisessa luokan algebrassa. Tällöin merkitään $K \models s \approx t$.

Yhtälön totuus säilyy myös alialgebroissa ja kerrottaessa algebroja keskenään. Muotoillaan nämä vielä lauseiksi. Avuksi tarvitaan apulauseet, joissa todetaan alialgebran arvofunktion olevan sama kuin alkuperäisen algebran, sekä tuloalgebran arvofunktion muodostuminen komponenteittain tulon algebrojen arvofunktioista.

**Apulause 3.33.** Olkoon $\mathfrak{A}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebra. Olkoon $\mathfrak{B}$ algebran $\mathfrak{A}$ alialgebra ja $\theta = \theta_{\mathfrak{B}}$ alialgebran $\mathfrak{B}$ tulkintafunktio. Tällöin $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)$ jokaisella termillä $s \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$.

*Todistus.* Olkoon $s \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$ termi. Todistetaan väite induktiolla termin $s$ rakenteen suhteen.

1. Olkoon $s$ muuttuja $x \in X$. Tällöin $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(x) = \theta(x) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(x)$.

2. Olkoon $s$ vakio, eli $s = c$. Koska $\mathfrak{B}$ on suljettu kaikkien algebran $\mathfrak{A}$ laskutoimitusten suhteen, niin $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(s) = c_{\mathfrak{B}} = c_{\mathfrak{A}} = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)$.

3. Olkoon $s$ muotoa $f(t_1, ..., t_n)$, missä $t_1, ..., t_n$ ovat termejä siten, että $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t_k) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_k)$ kaikilla $k \in \{1, ..., n\}$. Koska $\mathfrak{B}$ on algebran $\mathfrak{A}$ alialgebra, niin induktio-oletusta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(s) &= f_{\mathfrak{B}}(\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t_1), ..., \tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t_n)) = f_{\mathfrak{A}}(\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t_1), ..., \tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t_n))\\ &= f_{\mathfrak{A}}(\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_1), ..., \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_n)) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s).\end{aligned}$$

□

**Lause 3.34.** *Olkoon $\mathfrak{A}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebra. Olkoon $\mathfrak{B}$ algebran $\mathfrak{A}$ alialgebra. Tällöin jos $\mathfrak{A} \models s \approx t$, niin $\mathfrak{B} \models s \approx t$.*

*Todistus.* Olkoon $\theta$ alialgebran $\mathfrak{B}$ tulkintafunktio. Oletaan, että $\mathfrak{A} \models s \approx t$, joten $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t)$. Apulauseen 3.33 nojalla $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)$ ja $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t)$. Nyt $\tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{B}}(t)$, siis kaikilla tulkintafunktiolla pätee $\mathfrak{B} \models s \approx t$. □

**Apulause 3.35.** Olkoon $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebrojen perhe ja $\mathfrak{A} = \prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j$ näiden tuloalgebra. Olkoon $\theta_{\mathfrak{A}} = \theta$ tuloalgebran $\mathfrak{A}$ tulkintafunktio. Tällöin kaikilla $j \in J$ ja kaikilla termeillä $s \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$, $\tilde{\theta}_j(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)(j)$, missä $\theta_j$ on algebran $\mathfrak{A}_j$ tulkintafunktio, jolla $\theta_j(x) = \theta_{\mathfrak{A}}(x)(j)$.

*Todistus.* Todistetaan väite induktiolla termin $s \in Ter_{\mathcal{F}}(X)$ rakenteen suhteen.

1. Olkoon $s$ muuttuja $x \in X$. Nyt kuten on määritelty kaikilla $j \in J$, $\theta_{\mathfrak{A}}(x)(j) = \theta_j(x)$, missä $\theta_j$ on algebran $\mathfrak{A}_j$ tulkintafunktio. Täten $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(x)(j) = \theta_{\mathfrak{A}}(x)(j) = \theta_j(x) = \tilde{\theta}_j(x)$.

2. Olkoon $s$ vakio, eli $s = c$. Koska tuloalgebran $\mathfrak{A}$ laskutoimitukset on määritelty koordinaattikohtaisesti, niin $c_{\mathfrak{A}}(j) = c_{\mathfrak{A}_j}$. Täten $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)(j) = c_{\mathfrak{A}}(j) = c_{\mathfrak{A}_j} = \tilde{\theta}_j(s)$.

3. Olkoon $s$ muotoa $f(t_1, ..., t_n)$, missä $t_1, ..., t_n$ ovat termejä siten, että $\tilde{\theta}_j(t_k) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_k)(j)$ kaikilla $k \in \{1, ..., n\}$. Koska tuloalgebran $\mathfrak{A}$ laskutoimitukset on määritelty koordinaattikohtaisesti, niin indunktio-oletusta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)(j) &= f_{\mathfrak{A}}(\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_1), ..., \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_n))(j) = f_{\mathfrak{A}_j}(\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_1)(j), ..., \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t_n)(j))\\ &= f_{\mathfrak{A}_j}(\tilde{\theta}_j(t_1), ..., \tilde{\theta}_j(t_n)) = \tilde{\theta}_j(s)\end{aligned}$$

□

**Lause 3.36.** *Olkoon* $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ *tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen perhe. Tällöin jos* $\mathfrak{A}_j \models s \approx t$ *kaikilla* $j \in J$*, niin* $\prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j \models s \approx t$*.*

*Todistus.* Olkoon $\mathfrak{A} = \prod_{j\in J} \mathfrak{A}_j$ perheen algebroista $\mathfrak{A}_j$ muodostettu tuloalgebra. Olkoon $\theta_{\mathfrak{A}}$ tuloalgebran $\mathfrak{A}$ tulkintafunktio ja $\theta_j$ kuten apulausessa 3.35. Oletetaan, että jokaisella $j \in J$, $\mathfrak{A}_j \models s \approx t$. Täten $\tilde{\theta}_j(s) = \tilde{\theta}_j(t)$ kaikilla $j \in J$. Nyt apulauseen 3.35 nojalla $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)(j) = \tilde{\theta}_j(s)$ ja $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t)(j) = \tilde{\theta}_j(t)$ kaikilla $j \in J$. Siis $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s)(j) = \tilde{\theta}_j(s) = \tilde{\theta}_j(t) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t)(j)$ kaikilla $j \in J$. Täten $\tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(s) = \tilde{\theta}_{\mathfrak{A}}(t)$.

□

# 4 Modaalilogiikan algebrallinen semantiikka

Tässä kappaleessa kehitetään algebrallinen semantiikka modaalilogiikalle. Perusajatus on laajentaa lauselogiikan algebra, Boolen algebra, modaalilogiikkaan. Modaalilogiikan algebraa kutsutaan Boolen algebraksi, johon on lisätty operaatio (BAO). Algebrallinen näkökulma tuo tehokkaita tekniikoita käytettäväksi modaalilogiikan ongelmiin. Algebrallinen semantiikka on myös osoittautunut joissain tapauksissa paremmin käyttäytyväksi, kuin kehyspohjainen semantiikka. Kaikista intuitiivisin tapa linkittää Boolen algebra ja modaalilogiikka on ajatella maailmojen joukkoa perusjoukkona jonka operaatioina ovat leikkaus, yhdiste ja komplementti. [2, s. 20].

## 4.1 Lauselogiikan algebra

Lauselogiikan kieli määriteltiin määritelmässä 2.1. Symboli $\vee$ on kaksipaikkainen operaatio ja $\neg$ on yksipaikkainen operaatio. Symboli $\perp$ on nollapaikkainen operaatio eli vakio. Algebran tyyppiä, jossa on yksi vakio, yksi yksipaikkainen funktiosymboli ja yksi kaksipaikkainen funktiosymboli, kutsuttiin nimellä Bool (määr. 3.15). Bool-tyypin algebra näyttäsi sopivan lauselogiikan algebralisoimiseen. Määritellään Bool-tyypin algebran termien joukko.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon $\Phi$ lausemuuttujien joukko. Kuten määritelmässä 3.26 voimme muodostaa näistä *Bool-termien* joukon $Form(\Phi)$. Bool-termien joukko $Form(\Phi)$ on identtinen lauselogiikan kaikkien kaavojen joukon kanssa.

On monia esimerkkejä Bool-tyypin algebroista. Tarvitaan kuitenkin algebra, joka kuvaisi juuri lauselogiikan propositioita. Tällainen voidaan tehdä valitsemalla algebran universumiksi joukko $\{0, 1\}$. Toisin sanoen joukossa on lauselogiikan epätosi, 0 ja tosi, 1. Olkoon $\theta : \Phi \to \{0, 1\}$ tulkintafunktio, joka yhdistää jokaiseen lausemuuttujaan sen totuusarvon joukosta $\{0, 1\}$. Nyt voimme laskea termeille (eli lauselogiikan kaavoille) arvot seuraavien sääntöjen mukaan:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(p) &= \theta(p), \text{ kaikilla } p \in \Phi, \\
\tilde{\theta}(\perp) &= 0, \\
\tilde{\theta}(\neg\phi) &= 1 - \tilde{\theta}(\phi), \\
\tilde{\theta}(\phi \vee \psi) &= \max(\tilde{\theta}(\phi), \tilde{\theta}(\psi)).
\end{aligned}$$

Funktio $\tilde{\theta} : Form(\Phi) \to \{0, 1\}$ toteuttaa siis lauselogiikan totuusmääritelmät (määr. 2.5) kaavoille. Muodostetaan tämä algebralliseksi rakenteeksi.

**Määritelmä 4.2.** *Totuusarvojen algebra* on $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, +, -, 0)$, missä $-a = 1 - a$ ja $a + b = max(a, b)$, kun $a, b \in \{0, 1\}$. Operaatiot $\cdot$ ja 1 ovat lyhennysmerkintöjä seuraavasti: $a \cdot b = -(-a + -b)$ ja $1 = -0$ kun $a, b \in \{0, 1\}$.

Totuusarvojen algebra on siis Bool-tyypin algebra. Lauselogiikan kaavat ovat siis Bool-termejä ja valuaatio samaistuu algebran **2** tulkintafunktioon. Muodostetaan seuraavaksi algebrallinen rakenne lauselogiikan kaavoille, jotta voimme muuttaa arvofunktion sopivan homomorfismin määrittelemiseen.

**Määritelmä 4.3.** Olkoon $\Phi$ joukko lausemuuttujia. *Lauselogiikan kaavojen algebra* on $\mathfrak{Form}(\Phi) = (Form(\Phi), +, -, \bot)$, missä $Form(\Phi)$ on lausemuuttujista muodostettujen termien joukko eli lauselogiikan kaavojen joukko. Laskutoimitukset on määritelty seuraavasti: $-\phi := \neg\phi$ ja $\phi + \theta := \phi \vee \theta$.

**Lause 4.4.** *Olkoon $\Phi$ joukko propositiosymboleja ja $\theta : \Phi \to \{0, 1\}$ tulkintafuntkio. Funktio $\tilde{\theta}$ : Form($\Phi$) $\to \{0, 1\}$ on homomorfismi algebralta $\mathfrak{Form}(\Phi)$ algebralle* **2**

*Todistus.* Funktio $\tilde{\theta} : Form(\Phi) \to \{0, 1\}$ on homomorfismi, jos kaikilla laskutoimituksilla $\bot$, $-$ ja $+$ pätee homomorfismin määritelmä $\tilde{\theta}(f_{\mathfrak{Form}(\Phi)}(\phi_1, ..., \phi_n) = f_{\mathbf{2}}(\tilde{\theta}(\phi_1), ..., \tilde{\theta}(\phi_n))$. Nyt kaikilla $\phi, \psi \in Form(\Phi)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(\bot) &= 0, \\
\tilde{\theta}(-\phi) = \tilde{\theta}(\neg\phi) &= 1 - \tilde{\theta}(\phi) = -\tilde{\theta}(\phi), \\
\tilde{\theta}(\phi + \psi) = \tilde{\theta}(\phi \vee \psi) &= \max(\tilde{\theta}(\phi), \tilde{\theta}(\psi)) = \tilde{\theta}(\phi) + \tilde{\theta}(\psi).
\end{aligned}$$

□

Näin ollen logiikan kaavat vastaavat algebran termejä ja kaavojen totuuden laskeminen vastaa algebran homomorfismia. Nämä muodostavat algebrallisen semantiikan perustan.

Seuraavaksi määritellään algebrallinen tapa tutkia milloin logiikan kaavat antavat saman totuusarvon, toisin sanoen milloin algebran termit saavat saman arvon. Yhtälö $s \approx t$ on tosi algebrassa $\mathfrak{A}$, jos $s$ ja $t$ saavat saman arvon, kuten määriteltiin kaavassa 3.32. Algebrallinen tapa sanoa, että kaava on tautologia (merkintä $\models_C \phi$) on, että yhtälö $\phi \approx \top$ on totta totuusarvojen algebrassa **2** (merkintä $\mathbf{2} \models \phi \approx \top$).

Voidan huomata, että lauselogiikan kaavat eivät vastaa vain termejä, vaan myös yhtälöt voidaan palauttaa lauselogiikan kaavoiksi. Seuraavassa annetaan määritelmä lauselogiikan ekvivalenssille $\leftrightarrow$, jolloin ekvivalenssi $\leftrightarrow$ voidaan nähdä kaksipaikkaisena algebrallisena operaationa.

$$\tilde{\theta}(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} 1 \text{ , jos } \tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\theta}(\psi), \\ 0 \text{ , muulloin.} \end{cases}$$

**Lause 4.5.** *Olkoot $\phi$ ja $\psi$ lauselogiikan kaavoja/termejä. Tällöin seuraavat väitteet ovat voimassa:*

$$\models_C \phi \textit{ jos ja vain jos } \mathbf{2} \models \phi \approx \top. \tag{4.1}$$

$$\mathbf{2} \models \phi \approx \psi \textit{ jos ja vain jos } \models_C \phi \leftrightarrow \psi. \tag{4.2}$$

$$\models_C \phi \leftrightarrow (\phi \leftrightarrow \top). \tag{4.3}$$

*Todistus.* Väite 4.1: Olkoon $\models_C \phi$. Tällöin kaava $\phi$ on totta missä tahansa lauselogiikan mallissa $M$ siis kaavan tulkinta on 1. Täten $\tilde{\theta}(\phi) = 1 = \tilde{\theta}(\top)$. Siis $\mathbf{2} \models \phi \approx \top$. Toinen suunta menee samoin.

Väite 4.2: Olkoon $\mathbf{2} \models \phi \approx \psi$. Tällöin $\tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\theta}(\psi)$. Kaavoilla on siis sama tulkinta joko molemmat ovat tosia tai molemmat epätosia. Siis millä tahansa lauselogiikan mallilla $M \models \phi \leftrightarrow \psi$, joten $\models_C \phi \leftrightarrow \psi$. Toinen suunta menee samoin.

Väite 4.3: Olkoon ensin $\models_C \phi$. Tällöin kaava $\phi$ on siis tautologia eli saa aina totuusarvon yksi. Koska myös $\top$ saa aina totuusarvon yksi, niin kaava $\phi \leftrightarrow \top$ on tosi. Olkoon sitten kaava $\phi \leftrightarrow \top$ tosi. Tällöin kaava $\phi$ saa aina saman totuusarvon kuin $\top$. Koska $\top$ saa aina totuusarvon yksi, niin myös $\phi$ saa aina totuusarvon yksi, joten $\models_C \phi$. □

Voidaan löytää myös muita Bool-tyypin algebroja, joita voidaan käyttää lauselogiikan semantiikassa. Tällainen on esimerkiksi joukkoalgebrojen luokka. Kun joukkoalgebroja laajennetaan sopivasti, niitä voidaan käyttää myös modaalilogiikalle.

**Määritelmä 4.6.** Olkoon $A$ joukko ja $\mathcal{P}(A)$ sen potenssijoukko. *Potenssijoukon algebra* on $\mathfrak{P}(A) = (\mathcal{P}(A), \cup, -, \emptyset)$, missä $\emptyset$ on tyhjä joukko, $-$ on operaatio komplementille ja $\cup$ on kahden joukon yhdiste. Perusoperaatioiden avulla voimme määritellä myös joukkojen leikkauksen $\cap$ ja suurimman alkion $A$. *Joukkoalgebra* on potenssijoukon algebran $\mathfrak{P}(A)$ alialgebra eli joukkoalgebran universumi on potenssijoukon $\mathcal{P}(A)$ osajoukko, joukkoalgebra on suljettu yhdisteen ja komplementin suhteen ja sisältää sekä tyhjän joukon $\emptyset$, että koko joukon $A$. Kaikkien joukkoalgebrojen luokkaa merkitään **Set**.

Esimerkin 3.17 mukainen algebra on siis potenssijoukon algebra ja näin voidaan nähdä, että potenssijoukon algebrat ovat siis Boolen algebroja. Potenssijoukon algebran alialgebra joukkoalgebra tarjoaa kuvan lausemuuttujista ja niiden yhdistämisestä. Ajatellaan, että joukko $A$ on mahdollisten maailmojen joukko. Ajatellaan, että lausemuuttujat ovat joukon $A$ osajoukkoja siten, että lausemuuttuja liitetään niiden maailmojen joukkoon, jossa se on tosi. Erityisesti $\emptyset$ kuvaa siis lausemuuttujaa, joka ei ole totta koskaan, eli sillä on sama merkitys kuin symbolilla $\perp$. Vastaavasti $A$ kuvaa lausemuuttujaa, joka on aina totta eli vastaava merkitys kuin symbolilla $\top$. Kun $B$ ja $C$ ovat joukon $A$ osajoukkoja, niin yhdiste $B \cup C$ taas kuvaa joukkoa, jossa kahdesta lausemuuttujasta jompi kumpi tai molemmat on totta, siis sillä on sama rooli kuin $\vee$ symbolilla. Myös komplementti toimii samoin kuin negaatio. Voidaan siis todeta, että joukkoalgebra ja totuusarvojen algebra tuottavat samat yhtälöt todeksi. Todistetaan tämä algebrallisesti.

**Lause 4.7.** *Jokainen potenssijoukon algebra on isomorfinen algebran* **2** *potenssialgebran kanssa.*

*Todistus.* Olkoon $A$ joukko ja $X \subseteq A$. Määritellään seuraavanlainen funktio.

$$\chi(X)(a) = \begin{cases} 1 \text{ , jos } a \in X, \\ 0 \text{ , muulloin.} \end{cases}$$

Funktio $\chi(X) : A \to \{0,1\}$ on joukon $X$ karakteristinen funktio, joka jakaa $A$:n alkiot niihin, jotka kuuluvat $X$:ään ja niihin, jotka eivät kuulu. Funktio $\chi$ siis liittää kuhunkin osajoukkoon oman karakteristisen funktion. Seuraavaksi tulisi todistaa, että funktio $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ on isomorfismi potenssijoukon algebran $\mathfrak{P}(A)$ ja potenssialgebran $\mathbf{2}^A$ välillä. Funktio $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ on homomorfismi, sillä:

$$
\begin{aligned}
\chi(B \cup C)(a) &= \begin{cases} 1 \text{ , jos } a \in B \cup C, \\ 0 \text{ , muulloin.} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ , jos } a \in B \text{ tai } a \in C, \\ 0 \text{ , muulloin.} \end{cases} \\
&= \max(\chi(B)(a), \chi(C)(a)) = \chi(B)(a) + \chi(C)(a) \\
\chi(-B)(a) &= \begin{cases} 1 \text{ , jos } a \in -B, \\ 0 \text{ , muulloin.} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ , jos } a \notin B, \\ 0 \text{ , jos } a \in B. \end{cases} = 1 - \chi(B) = -\chi(B) \\
\chi(\emptyset)(a) &= 0
\end{aligned}
$$

Funktio $\chi$ on surjektio, koska jos $g \in \{0,1\}^A$, niin $g = \chi(\{x \in A \mid g(x) = 1\})$. Funktio $\chi$ on myös injektio, sillä jos $B, C \in \mathcal{P}(A)$ ja $B \neq C$, niin on olemassa $x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$. Tällöin $\chi(B)(x) \neq \chi(C)(x)$, joten $\chi(B) \neq \chi(C)$. Siis $\chi$ on isomorfismi. □

**Lause 4.8.** *Jokainen algebran* **2** *potenssialgebra on isomorfinen potenssijoukon algebran kanssa.*

*Todistus.* Määritellään funktio $\alpha : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ seuraavasti:

$$\alpha(g) = \{x \in A \mid g(x) = 1\}$$

Nyt $\alpha$ on homomorfismi potenssialgebralta $\mathbf{2}^A$ potenssijoukon algebralle $\mathfrak{P}(A)$ sillä:

$$
\begin{aligned}
\alpha(f+g) &= \{a \in A \mid (f+g)(a) = 1\} = \{a \in A \mid f(a) = 1 \text{ tai } g(a) = 1\} \\
&= \{a \in A \mid f(a) = 1\} \cup \{a \in A \mid g(a) = 1\} = \alpha(f) \cup \alpha(g) \\
\alpha(-g) &= \{a \in A \mid g(a) \neq 1\} = -\alpha(g) \\
\alpha(0) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Funktio $\alpha$ on surjektio, sillä jos $B \in \mathcal{P}(A)$ niin $B = \alpha(\chi_B)$, missä $\chi_B$ on $B$:n karakteristinen funktio. Osoitetaan seuraavaksi, että $\alpha$ on injektio. Jos $f, g \in \{0,1\}^A$ siten, että $\alpha(f) = \alpha(g)$, niin $\{a \in A \mid f(a) = 1\} = \{a \in A \mid g(a) = 1\}$, siis $f = g$. Funktio $\alpha$ on siis isomorfismi. □

Lauseista 4.7 ja 4.8 seuraa, että jokainen potenssijoukon algebra on isomorfinen algebran **2** potenssialgebran kanssa ja päinvastoin. Koska potenssijoukon algebra on Boolen algebra, niin myös algebran **2** potenssialgebra on Boolen algebra. Todistetaan vielä, että kaikkien joukkoalgebrojen luokka **Set** algebralisoi lauselogiikan validisuuden käsitteen.

**Lause 4.9.** *Olkoon $\phi$ propositiokaava/termi. Tällöin*

$$\models_C \phi \textit{ jos ja vain jos } \textbf{\textit{Set}} \models \phi \approx \top.$$

*Todistus.* Olkoon $\models_C \phi$. Lauseen 4.5 nojalla $\mathbf{2} \models \phi \approx \top$, joten yhtälö $\phi \approx \top$ on totta totuusarvojen algebrassa $\mathbf{2}$. Olkoon $\mathfrak{A} \in \mathbf{Set}$. Tällöin löytyy potenssijoukon algebra $\mathfrak{P}(A)$, joka on isomorfinen algebran $\mathbf{2}^A$ kanssa (lause 4.8). Yhtälön totuus säilyy kerrottaessa algebraa itsensä kanssa (lause 3.36), joten $\mathbf{2}^A \models \phi \approx \top$. Täten $\mathfrak{P}(A) \models \phi \approx \top$. Yhtälön totuus säilyy myös aliagebroissa (lause 3.34), joten yhtälö $\phi \approx \top$ on totta myös kaikilla algebran $\mathfrak{P}(A)$ alialgebroilla $\mathfrak{A}$. Siis yhtälö $\phi \approx \top$ on tosi luokassa **Set**.

Oletetaan sitten, että $\mathbf{Set} \models \phi \approx \top$. Tällöin yhtälö $\phi \approx \top$ on tosi jokaisessa luokan **Set** algebrassa $\mathfrak{A}$, joka on potenssijoukon algebran $\mathfrak{P}(A)$ alialgebra. Täten triviaalitapauksessa yhden alkion potenssijoukon algebrassa on myös totta yhtälö $\phi \approx \top$. Yhden alkion potenssijoukon algebra on isomorfinen algebran **2** kanssa, joten $\mathbf{2} \models \phi \approx \top$. Näin ollen lauseen 4.5 nojalla $\models_C \phi$. □

Nyt meillä on kaksi näkökulmaa lauselogiikan semantiikkaan, totuusarvojen algebra **2** ja joukkoalgebra. Myös lauselogiikan aksioomat voitaisiin algebralisoida (Tarkempi selitys löytyy lähteestä [1, s. 268–274]).

## 4.2 Modaalilogiikan algebra

Siirretään nyt aiemmat tarkastelut modaalilogiikkaan. Perusperiaate on, että loogisen kielen kaavat voidaan nähdä algebran termeinä. Palautetaan mieleen perusmodaalilogiikan similariteettityyppi $\tau_0 = (\{\diamond\}, \{(\diamond, 1)\})$ (esimerkki 2.8). Määritellään seuraavaksi similariteettia vastaava algebran tyyppi.

**Määritelmä 4.10.** Similariteettityyppiä $\tau_0$ vastaavaa algebran tyyppiä merkitään $\mathcal{F}_{\tau_0}$; se sisältää Bool-tyypin funktiosymbolit $\vee$, $\neg$ ja $\bot$ sekä yksipaikkaisen modaalisymbolin $\diamond$. Kun $\Phi$ on joukko muuttujia, niin $Ter_{\mathcal{F}_{\tau_0}}(\Phi)$ on niistä muodostettujen termien joukko.

Tyypin $\mathcal{F}_{\tau_0}$ algebra on siis tavallaan Bool-tyypin algebran ja modaalisymbolin yhdiste. Usein samaistamme similariteettityypin $\tau_0$ ja algebran tyypin $\mathcal{F}_{\tau_0}$ puhumalla $\tau_0$-termeistä $\mathcal{F}_{\tau_0}$-termien sijaan. Voidaan siis käyttää termien joukosta merkintää $Ter_{\tau_0}(\Phi)$. Boolen algebra algebralisoi lauselogiikan, joten muodostettaessa modaalilogiikan algebrallista semantiikkaa on luonnollista lisätä tähän modaalioperaattori.

**Määritelmä 4.11.** [1, s. 275-276]. Tyypin $\mathcal{F}_{\tau_0}$ algebraa $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0, \diamond)$ kutsumme *Boolen algebraksi, johon on lisätty operaattori* (boolean algebra with operator eli BAO), mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

(O1) nelikko $(A, +, -, 0)$ on Boolen algebra,

(O2) $\diamond(0) = 0$ (normaali)

(O3) $\diamond(p + q) = \diamond(p) + \diamond(q)$ (additiivisuus)

Modaalioperaattorin normaaliusehto ja additiivisuusehto käännettynä modaalilogiikan kielellä tuottavat modaalikaavat $\diamond\bot \leftrightarrow \bot$ ja $\diamond(p \vee q) \leftrightarrow \diamond p \vee \diamond q$. Modaalilogiikkaa sanotaan normaaliksi, jos se sisältää nämä kaavat aksioomina (Tarkempi selitys löytyy lähteestä [1, s. 191–192]).

**Määritelmä 4.12.** Olkoon $F = (W, R)$ kehys. Määrittelemme joukkoalgebran laskutoimituksen

$$m_R(X) = \{w \in W \mid wRx, \text{jollain } x \in X\}.$$

**Määritelmä 4.13.** Olkoon $F = (W, R)$ kehys. *Täysi kompleksialgebra* (full complex algebra) on tyypin $\mathcal{F}_{\tau_0}$ algebra $\mathfrak{F}^+ = (\mathcal{P}(W), \cup, -, \emptyset, m_R)$, joka on saatu lisäämällä määritelmän 4.6 potenssijoukon algebraan operaatio $m_R$. *Kompleksialgebra* on täyden kompleksialgebran alialgebra. Kun $K$ on kehysten luokka, niin merkitään täysien kompleksiagebrojen luokkaa, joiden kehys kuuluu luokkaan $K$ merkinnällä $\mathbf{Cm}K$.

Kompleksialgebrat ovat siis joukkoalgebroja, joihin on lisätty laskutoimitus $m_R$. Kompleksialgebrat ovat modaalisia. Edellä kuvasimme joukkoalgebrojen universumia maailmojen joukkona. Tällöin lausemuuttuja on niiden maailmojen joukko, jossa kyseinen lausemuuttuja on tosi. Kun lisäsimme mukaan operaation $m_R$, lisäsimme jokaiselle maailmalle mahdollisuuden olla vuorovaikutuksessa toisten maailmojen kanssa. Tutkitaan seuraavaksi miten kompleksialgebrat linkittyvät yhteen edellä määritellyn BAO:n kanssa.

**Lause 4.14.** *Olkoon $F = (W, R)$ kehys. Edellä määritelty täysi kompleksialgebra $\mathfrak{F}^+ = (\mathcal{P}(A), \cup, -, \emptyset, m_R)$ on BAO.*

*Todistus.* Tulee siis todistaa, että operaatio $m_R$ on normaali ja additiivinen.

$$\begin{aligned}
m_R(\emptyset) &= \{w \in W \mid wRx, \text{jollain } x \in \emptyset\} = \emptyset \\
m_R(X_1 \cup X_2) &= \{w \in W \mid wRx, \text{jollain } x \in X_1 \cup X_2\} \\
&= \{w \in W \mid wRx, \text{jollain } x \in X_1\} \cup \{w \in W \mid wRx, \text{jollain } x \in X_2\} \\
&= m_R(X_1) \cup m_R(X_2)
\end{aligned}$$

□

Määritellään seuraavaksi tulkinnat $\tau_0$-termeille ja yhtälöille, kun käytetään mielivaltaista BAO:ta.

**Määritelmä 4.15.** Olkoon $\Phi$ joukko muuttujia. Olkoon $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0, \diamond)$ BAO. Olkoon $\theta : \Phi \to A$ tulkintafunktio. Nyt voimme laskea termeille arvot seuraavien sääntöjen mukaan:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(p) &= \theta(p), \text{ kaikilla } \ p \in \Phi, \\
\tilde{\theta}(\perp) &= 0, \\
\tilde{\theta}(\neg s) &= -\tilde{\theta}(s), \\
\tilde{\theta}(s \vee t) &= \tilde{\theta}(s) + \tilde{\theta}(t), \\
\tilde{\theta}(\diamond(s)) &= \diamond\tilde{\theta}(s).
\end{aligned}$$

Olkoon nyt $s \approx t$ $\tau_0$-yhtälö. Sanomme, että $s \approx t$ on tosi algebrassa $\mathfrak{A}$ (merkintä $\mathfrak{A} \models s \approx t$), jos kaikilla tulkintafunktiolla $\theta$ pätee $\tilde{\theta}(s) = \tilde{\theta}(t)$.

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun algebrana $\mathfrak{A}$ on kompleksialgebra $\mathfrak{F}^+$. Tulkintafunktio samaistuu modaalikaavojen valuaatioarvoihin.

**Lause 4.16.** *Olkoon $\phi$ $\tau_0$-kaava, $F$ $\tau_0$-kehys, $\theta$ tulkintafunktio (valuaatio) ja $w$ piste (mahdollinen maailma) $F$:ssä. Tällöin*

$$(F,\theta), w \models \phi \text{ jos ja vain jos } w \in \tilde{\theta}(\phi), \tag{4.4}$$

$$F \models \theta \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{F}^+ \models \phi \approx \top, \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{F}^+ \models \phi \approx \psi \text{ jos ja vain jos } F \models \phi \leftrightarrow \psi \tag{4.6}$$

*Todistus.* Olkoon $\phi$ $\tau_0$-kaava, $F$ $\tau_0$-kehys ja $\theta$ tulkintafunktio. Todistetaan ensin (4.4) induktiolla kaavan rakenteen suhteen.

1. Olkoon kaava $\phi = p$, missä $p$ on lausemuuttuja. Tällöin

$$(F,\theta), w \models p \iff w \in \theta(p) \iff w \in \tilde{\theta}(p)$$

2. Olkoon kaava muotoa $\neg\phi$. Tällöin

$$\begin{aligned}(F,\theta), w \models \neg\phi &\iff (F,\theta), w \not\models \phi \iff w \notin \tilde{\theta}(\phi)\\ &\iff w \in -\tilde{\theta}(\phi) \iff w \in \tilde{\theta}(\neg\phi)\end{aligned}$$

3. Olkoon kaava muotoa $\phi \vee \psi$. Tällöin

$$\begin{aligned}(F,\theta), w \models \phi \vee \psi &\iff (F,\theta), w \models \phi \text{ tai } (F,\theta), w \models \psi\\ &\iff w \in \tilde{\theta}(\phi) \text{ tai } w \in \tilde{\theta}(\psi)\\ &\iff w \in \tilde{\theta}(\phi) \cup \tilde{\theta}(\psi)\\ &\iff w \in \tilde{\theta}(\phi \vee \psi)\end{aligned}$$

4. Olkoon kaava muotoa $\Diamond\phi$. Tällöin

$$\begin{aligned}(F,\theta), w \models \Diamond\phi &\iff \exists v \in W \text{ siten, että } wRv \text{ ja } (F,\theta), v \models \phi\\ &\iff \exists v \in W \text{ siten, että } wRv \text{ ja } w \in \tilde{\theta}(v)\\ &\iff w \in m_R(\tilde{\theta}(\phi)), \text{ missä } m_R(\tilde{\theta}(\phi)) = \{w \in W \mid wRv, \text{ jollain } v \in \tilde{\theta}(\phi)\}\\ &\iff w \in \tilde{\theta}(\Diamond\phi)\end{aligned}$$

Todistetaan sitten (4.5) ekvivalenssiketjuna suoraan määritelmistä.

$$\begin{aligned}F \models \phi &\iff \text{kaikilla } w \in W,\ F, w \models \phi\\ &\iff \text{kaikilla } w \in W, \text{ kaikilla } \theta,\ (F,\theta), w \models \phi\\ &\iff \text{kaikilla } w \in W, \text{ kaikilla } \theta,\ w \in \tilde{\theta}(\phi)\\ &\iff \tilde{\theta}(\phi) = W = \tilde{\theta}(\top), \text{ kaikilla } \theta\\ &\iff \mathfrak{F}^+ \models \phi \approx \top\end{aligned}$$

Todistetaan vielä (4.6) ekvivalenssiketjuna.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^+ \models \phi \approx \psi &\iff \tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\theta}(\psi), \text{ kaikilla } \theta\\ &\iff \tilde{\theta}(\phi \leftrightarrow \psi) = \tilde{\theta}(\top), \text{ kaikilla } \theta\\ &\iff \mathfrak{F}^+ \models \phi \leftrightarrow \psi \approx \top\\ &\iff F \models \phi \leftrightarrow \psi\end{aligned}$$

□

Edellinen lause on helposti nostettavissa myös kompleksialgebrojen luokkaan. Tuloksena oleva lause on perustavanlaatuinen: se kertoo meille, että kompleksialgebrojen luokka algebralisoi modaalisemantiikan. Se on analoginen lauseen 4.9 kanssa.

**Lause 4.17.** *Olkoon $\tau_0$ similariteettityyppi, $\phi$ ja $\psi$ $\tau_0$-kaavoja ja $K$ luokka $\tau_0$-kehyksiä. Tällöin*

$$K \models \phi \textit{ jos ja vain jos } \mathbf{Cm}K \models \phi \approx \top,$$

$$\mathbf{Cm}K \models \phi \approx \psi \textit{ jos ja vain jos } K \models \phi \leftrightarrow \psi.$$

*Todistus.* Todistus seuraa lauseesta 4.16 □

Näin olemme löytäneet modaalilogiikalle algebrallisen semantiikan, kun similariteettityyppinä on $\tau_0$. Vastaava proseduuri voidaan yleistää myös muille similariteettityypeille. Yleinen tapaus käsitellään teoksessa Modal Logic, luku 5 [1].

# Lähteet


[1] Blackburn P, De Rijke M, Venema Y. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

[2] Blackburn P, De Rijke M, Venema Y. *Modal Logic and Their Algebras*. Helsinki Summer School in Logic, Language and Information, 2001. (Ote kirjasta [1]) helsinki.fi/esslli/courses/readers/K15.pdf (9.6.2020)

[3] Burris S, Sankappanavar H. P. *A Course in Universal Algebra*. Millenium Edition, 1981. http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/UALG/univ-algebra.pdf (5.6.2019)

[4] Goldblatt R. *Mathematical modal logic: A view of its evolution*. Journal of applied logic 1, 2003. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570868303000089 (4.4.2021)

[5] Häsä J, Rämö J. *Johdatus abstraktiin algebraan*. Helsinki: Gaudeamus Helsinki University Press, 2012.

[6] Lidl R, Gunter P. *Applied Abstract Algebra*. New York, 1984. Springer-Verlag.

[7] Miettinen S. *Logiikka - perusteet*. Gaudeamus Helsinki University Press, 2002.

[8] Rantala V, Virtanen A. *Logiikan peruskurssi*. Tampereen yliopisto: Kokeilumoniste, 2003. https://webpages.tuni.fi/utamatematiikka/modaalilogiikka/logpk2003.pdf (6.4.2021)

[9] Rantala V, Virtanen A. *Johdatus modaalilogiikkaan*. Oy yliopistokustannus University Press Finland ,Helsinki, 2004.

[10] Rantala V, Virtanen A. *Johdatus modaalilogiikkaan*. Tampereen yliopisto, kurssi moniste. https://coursepages.uta.fi/mttma9/wp-content/uploads/sites/87/2018/01/modaalilogiikka.pdf (5.8.2020)