

Mika Mähönen

KIINTEÄSSÄ AINEESSA ETENEVÄN SÄRÖN DEPINNING-FAASITRANSITION MALLINNUS

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastajat: Prof. Lasse Laurson
Huhtikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Mika Mähönen: Kiinteässä aineessa etenevän särön depinning-faasitransition mallinnus
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Kandidaatintyössäni tutkin särön depinning- faasitransitiota heterogeenisessä aineessa. Depinning-faasitransitio tarkoittaa transitiota liikkumattoman ja liikkuvan faasin välillä. Transition kontrolliparametrina toimii ulkoinen voima, ja järjestysparametrina särön keskimääräinen etenemisnopeus. Faasitransitio saadaan aikaan kohdistamalla materiaaliin ulkoinen ajava voima, jolloin tapahtuu faasitransitio jähmettyneen ja liikkuvan faasin välillä. Materiaalin murtumis- ja halkeamisprosessit ovat teollisuuden kannalta tärkeitä ja myös statistisen fysiikan kannalta kiinnostavia. Tutkimalla murtumisprosesseja voidaan mahdollisesti tulevaisuudessa ymmärtää materiaalien ominaisuuksia paremmin ja hyödyntää tutkimuksissa saatuja tietoja uusien materiaalien suunnittelussa.

Depinning-faasitransitiossa säröön vaikuttavat ulkoisen voiman lisäksi särön pitkän kantaman elastinen voima sekä materiaalin heterogeenisuuksista syntyvä satunnaisvoima. Satunnaisvoiman ja elastisen voiman yhteisvuorovaikutuksen seurauksena särön pisteisiin vaikuttava voima vaihtelee, minkä seurauksena särön etenemisessä havaitaan kompleksista käyttäytymistä. Kompleksisuus näkyy muun muassa särön hyppäyksittäisessä etenemisessä ja etenemislinjan karheudessa.

Särön etenemisnopeudella on potenssilakiyhteys ajavaan voimaan f . Simulaatiolla pyritään selvittämään, kuinka särön etenemisnopeus muuttuu ajavan voiman muuttuessa. Simulaatiot suoritettiin valitsemalla ajavan voiman arvoja siten, että särö saavuttaisi steady-state-tilan simulaation loppuun mennessä.

Depinning-faasitransitiota voidaan kuvata monella eri kriittisellä eksponentilla. Tässä työssä tutkittiin eksponentteja β ja θ . Kriittinen eksponentti β kuvaa keskimääräisen nopeuden riippuvuutta kriittisestä voimasta lasketusta etäisyydestä. Toinen käsitelty kriittinen eksponentti θ kuvaa keskimääräisen nopeuden aikariippuvuutta kriittisellä voiman arvolla. Simulaatioissa saatuun dataan tehdyn sovituksen avulla selvitettiin systeemin kriittinen eksponentti β ja kriittinen voima f_c . Tulokseksi saatiin $f_c = 0.9976$ ja $\beta = 1.0379$. Aiemmassa tutkimuksessa diskreettiaikaiselle systeemille on saatu tulokseksi $\beta = 0.625$. Tästä tutkimuksesta olisi voinut odottaa arvoa, joka olisi lähempänä aikaisemmin saatua tulosta. Mittauksessa käytetyssä mallissa on muutamia eroja aikaisempaan tutkimukseen, joista suurin eroavuus on käytetyn mallin jatkuva-aikaisuus.

Toista systeemin dynamiikka kuvaavaa eksponenttia θ tutkittiin tekemällä sovite ja vertaamalla sen sopivuutta dataan silmämääräisesti. Tuloksista voitiin päätellä, että diskreetin särön mittauksista saatu eksponentti $\theta = 0.505$ sopii myös jatkuvasta mallista saatuihin tuloksiin. On ristiriitaista, että kriittinen eksponentti β eroaisi suuresti diskreetillä mallilla saaduista arvoista, kun taas eksponentti θ olisi likimain sama.

Eksponentin β eroa voidaan osittain selittää satunnaisuuksien vaikutuksella mittaukseen. Toinen merkittävä syy oli mittausajan lyhyys. Pienillä ajavan voiman arvoilla systeemi ei välttämättä saavuttanut steady-state-tilaa, minkä takia tulos ei vastaa oletettua potenssilakikäytöstä.

Avainsanat: depinning-faasitransitio, murtumarajapinta, heterogeeninen materiaali, kriittinen eksponentti, numeerinen simulaatio

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Mika Mähönen: Modelling the depinning transition of a crack propagating in a disordered solid
Bachelor Thesis
Tampere University
Science and Engineering
April 2020

In this thesis I am analyzing statistics of a crack front propagating in a heterogeneous material. Crack propagation exhibits a dynamic phase transition between rigid and freely moving phases which can occur in various materials. For example this phase transition can be seen in crack propagation in solids and in magnetic domain walls in an external magnetic field. In the phase transition the control parameter is the driving force and order parameter is the creep velocity. In this case I am studying elastic crack front under constant driving force. Different driving forces lead to a wide range of creep velocities. The materials response to loading conditions can give rise to a complex behavior. This can be seen in bursts in advancement and in the roughness of the crack front.

The aim of the numerical simulations of the depinning phase transition of a long-range string is to analyze critical exponents, which describes the crack propagation in different loading conditions. The crack front propagation speed is related to the driving force f with a power-law. Every system has a critical force f_c and when the driving force is smaller than critical force the systems propagation speed approaches zero. In this thesis I am focusing on two critical exponents describing the crack propagation velocity, i.e., β and θ . The used model is time-continuous and during this thesis I am many times comparing the results to another study where similar discrete model was used.

The values of critical exponents were obtained with a curve fitting method. Fitting curves to collected data gave very different results than in the study of the discrete model. The results that were obtained in the case of steady state crack propagation were $f_c = 0.9976$ and $\beta = 1.0379$. This is very different from the result for the discrete model $\beta = 0.625$. The exponent θ was only investigated by comparing how well a curve corresponding to the value of $\theta = 0.505$ fitted to collected data. The result was that the exponent θ was quite precise also for this case and there wasn't a lot of deviation which was surprising.

The measurement of the exponent β was most likely poorly implemented and it caused the exponent to have a wrong value. There were couple of reasons that affected the results a lot. Firstly the numerical simulation was short and only done once for every value of the external driving force. Secondly the system didn't always reach properly the steady-state propagation regime and therefore the measurement gave wrong values. The reasons are correlated and one way to improve the numerical simulation is making it longer so every system can reach steady-state and the result can be averaged over a longer distance.

Keywords: crack front, depinning phase transition, heterogeneous medium, critical exponents, numerical simulation

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Tämä kandidaatintyö on tehty yhteistyössä Tampereen Yliopiston laskennallisen fysiikan laboratorion kanssa. Työssä käytetty numeerinen mallinnusohjelma on muun muassa saatu suoraan laboratorion henkilökunnalta.

Lähdin tämän kandidaatintyön tekemiseen tuntematta aihetta ollenkaan etukäteen ja olenkin kevään aikana oppinut paljon tästä kiinnostavasta statistisen fysiikan osasta.

Haluan kiittää ohjaajaani Lasse Laursonia neuvoista ja ohjauksesta. Haluan kiittää myös läheisiäni, jotka ovat tukeneet ja motivoineet minua pitkien opiskelujakojen aikana.

Tampereella, 30. huhtikuuta 2020

Mika Mähönen

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
2.	Kokeellinen tausta	3
2.1	Tyypilliset koejärjestelyt	4
2.2	Kokeissa havaittavat ilmiöt	6
3.	Särön dynamiikan teoreettinen kuvaus	10
3.1	Pitkän kantaman elastinen voima	10
3.2	Epäjärjestyksen mallintaminen satunnaisvoimalla	12
4.	Numeerinen mallinnus	14
4.1	Koodin toiminnan kuvaus	15
4.2	Datan esittely	16
4.3	Tulokset	20
5.	Yhteenveto	22
	Lähteet	24

1. JOHDANTO

Tässä työssä perehdytään yhteen tapaan tutkia materiaalin vastetta ulkoiseen rasitukseen. Kun materiaaliin kohdistetaan riittävä voima, sen rakenne murtuu ja tapahtuu faasitransitio tai toisin sanoen halkeaminen. Tutkittavassa tapauksessa faasitransitio tapahtuu liikkumattoman ja liikkuvan faasin välillä. Tätä faasitransitiota on yksinkertaista ajatella muutoksena, jossa paikallaan olevan särön piste pääsee liikkeelle. Klassisesti halkeamat ovat kuvanneet materiaalin vastetta mekaaniseen rasitukseen, mutta viime vuosina tutkimus on keskittynyt myös muunlaisiin systeemeihin, esimerkiksi magneettisiin systeemeihin. Halkeamat syntyvät materiaaleihin erilaisten rasituksien ja voimien seurauksena. Särön eteneminen on hyvin laaja käsite, joka ymmärretään eri ammattikunnissa hyvin erilaisin tavoin. Esimerkiksi metallien ja rakenteiden halkeamiset rasituksen alaisuudessa ovat merkittävä tutkimuskohde teollisuuden näkökulmasta. Materiaalin vaste käyttäytyy monesti kompleksisesti, josta seuraa laajaskaalaista energian vapautumista. Tätä dynamiikkaa voidaan verrata muun muassa maanjäristyksissä havaittaviin ilmiöihin. [1] Samoja dynaamisia piirteitä voidaan löytää lähes kaikista materiaaleista muun muassa kiviaineksesta [2] ja pleksilasista [3]. Tarkasteltava faasitransitio kuvaa mekaanisten rakenteiden käyttäytymistä, mutta samankaltaisia ominaisuuksia voidaan löytää myös muunlaisista systeemeissä. Näistä esimerkkeinä, magneettinen vaste epäjärjestyneessä ferromagneetissa, joka tunnetaan myös nimellä ”Barkhausen kohina” [4] ja suprajohteen magneettikentän pyörteisyys [5].

Särön eteneminen on faasitransition muoto, jossa aineen rakenteessa tapahtuu epäelastinen muutos. Monilla aineilla tapahtuu elastista ja plastista muodonmuutosta ennen kuin kriittinen voima on ylitetty. Tässä työssä keskitytään ainoastaan kriittisen voiman ympäristössä tapahtuvaan särön dynamiikkaan, mikä tarkoittaa käytännössä särön etenemisen tutkimista. Ajavan voiman vaikutusta etenemiseen voidaan kuvata monilla eri kriittisillä eksponenteilla. Tässä työssä valittiin tutkittavaksi eksponentit β ja θ . Kriittinen eksponentti β kuvaa keskimääräisen nopeuden riippuvuutta kriittisestä voimasta laske-
tun etäisyyden funktiona. Toinen käsitelty kriittinen eksponentti θ kuvaa keskimääräisen nopeuden aikariippuvuutta kriittisellä voiman arvolla.

Tässä työssä tutkittava faasitransitio on hyvin teoreettinen ja perustavanlaatuinen tapaus. Vastaavaa tutkimusta on tehty monilla eri malleilla ja hieman erilaisilla mittauksilla. Erona viitattuihin papereihin on systeemin mallintaminen aikajatkuvalle mallilla ja keskittyminen

kriittisiin eksponentteihin kriittisen voiman ympäristössä. [6][1][7] Etuna tutkittavassa tapauksessani muihin verrattuna on mallin yksinkertaisuus ja vastaavuus suhteellisen yksinkertaiseen kokeelliseen järjestelmään. Laskennallisessa tutkimuksessa ongelmana on aina laskentatehon riittävyys ja käytettävissä oleva aika. Jotta tuloksia saataisiin käytännöllisissä ajoissa, pitää laskettavan tilanteen olla suhteellisen yksinkertainen. Kuvassa 2.1 on ylempänä piirros kokeellisesta tilanteesta, jossa voidaan mitata särön etenemistä. Piirroksen alapuolella on havainnollistettu miltä särön eteneminen voisi näyttää. [8]

Seuraavassa luvussa käydään lävitse yleisesti särön kuvauksessa käytettävää termistöä ja taustaa. Kappaleessa 2 käydään lävitse myös kokeellisia järjestelyjä, jolla on voitu mitata teoreettisen mallin toimivuutta. Kappale 3 keskittyy särön kuvauksen teorian lävitse käymiseen. Kappale 4 käsittelee numeerista mallinnusta ja siitä saatuja tuloksia. Viimeiseksi kappale 5 tekee yhteenvedon kandidaatintyössä saaduista tuloksista.

2. KOKEELLINEN TAUSTA

Käydään seuraavaksi läpi faasitransition peruskäsitteitä ja sitä, miten ilmiötä on aiemmin pyritty mittaamaan. Halkeaman eteneminen materiaalissa on kolmiulotteista, mutta käytännön kokeissa on monesti pyritty rajoittamaan särön etenemisen tutkiminen kaksiulotteiseen tapaukseen. Depinning-faasitransitiolle tyypilliset ilmiöt ovat havaittavissa jo kaksiulotteisessa tapauksessa, eikä monimutkaisempaa mittausta tarvita. On myös käytännöllisempää ja helpompaa tarkastella kaksiulotteista tapausta kolmiulotteisen sijasta.

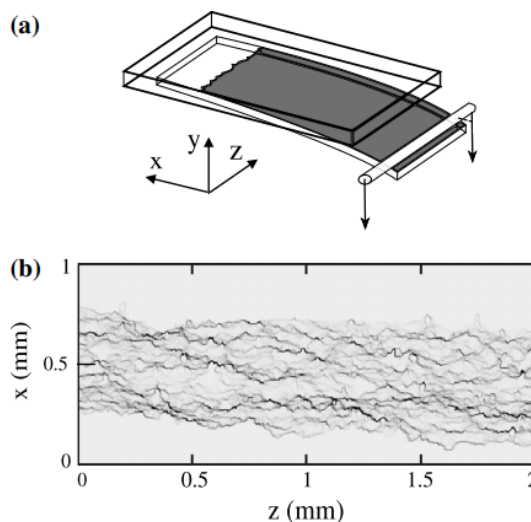
Halkeaman liikkeeseen vaikuttavat ajavan voiman lisäksi pinnan heterogeeniset ja elastiset ominaisuudet. Särön sijaintia kuvataan funktiolla $h(x, t)$, jossa x on ketjun alkion sijainti särön suunnassa ja t on aika. Halkeamaa ajetaan voimalla F , jolloin etenemisnopeus on kohdistetun voiman funktio $v(F)$. Särön sijainnin etenemiseen vaikuttavaa myös ketjun elastinen stabiloiva voima, joka pyrkii pitämään ketjun alkiot rinnakkain. Tästä seuraa kriittinen voima, joka pitää ylittää ennen kuin eteneminen on jatkuvaa. Jos ajava voima on pienempi kuin kriittinen voima, keskinopeus lähestyy nollaa. Etenemisnopeuden ja ajavan voiman välillä vallitsee potenssilaki $v \sim (f - f_c)^\beta$, missä β on kriittinen eksponentti. Kun ajava voima on lähellä kriittistä voimaa, halkeaman geometriasta tulee itsesimilaarinen fraktaali, jolle voidaan määrittää sen rakennetta kuvaava karkeuseksponentti ζ . Särön etenemisen kompleksisuus syntyy elastisen voiman ja väliaineen heterogeenisten ominaisuuksien hetkittäisistä voimakkuuksien vaihteluista. Halkeaman dynamiikkaan liittyvä kompleksinen käyttäytyminen näkyy muun muassa halkeaman hyppäyksittäisestä etenemisestä ja odotusajoista, jolloin särö ei liiku. Kyseistä ilmiötä on tutkittu muuan muassa paperin halkeamisessa. [1]

Viime vuosina on kehitetty uusia laskennallisia ja kokeellisia menetelmiä halkeamien dynamiikan tutkimiseen. Teoria halkeaman matemaattiseen mallintamiseen ja voimien kuvaamiseen on ollut tiedossa kauan. Yksi varhaisimmista on Ricen tutkimus vedon aiheuttamasta tasohalkeamasta [9]. Rice paperissaan johtaa Navierin elastisuuden yhtälöistä ratkaisun tasohalkeamalle. Vuosia myöhemmin Tanguy esitti paljon helpommin käytettävän mallin, joka pohjautuu pitkäkantoiisiin elastisiin voimiin. [7] Tanguyn tutkimuksessa esitetty kaava (3) on perusta tässäkin työssä tutkittavalle elastiselle voimalle. Laskennallisessa osassa tutkitaan halkeaman etenemisen potenssilain kaltaista yhteyttä ajavaan voimaan. Vastaavanlainen tutkimus on tehty Duemmerin toimesta. [6] Isoin ero Dummerin tutkimuksessa käytetyn mallin ja tässä kandidaatin työssä käytetyn mallin välillä on se,

että Duemmerin malli on diskreettiaikainen. Tässä työssä on sen sijaan käytössä jatkuva-aikainen malli. Kokeellisen osan tarkoituksena on siis verrata aikajatkuvalla mallilla saattavia tuloksia Duemmerin ja kollegojen saamaan arvoon kriittiselle eksponentille.

2.1 Tyypilliset koejärjestelyt

Halkeamien mallit kuvaavat tietyissä rajoissa todellista dynamiikkaa. Halkeamia voidaan luoda oikeanlaisilla koejärjestelyillä, jolloin voidaan tutkia mallien vastaavuutta oikean halkeamisen etenemiseen. Halkeaman dynamiikan tutkimista on tehty muun muassa paperilla ja plexilasilla. [3],[1] Molemmissa kokeissa halkeama aiheutetaan vetämällä kappaleita irti toisistaan vakiovoimalla. Halkeaman etenemistä voidaan mitata herkillä antureilla ja tarkoilla kameroilla. Kohdistamalla nopea ja tarkka kamera pieneen alueeseen halkeaman keskellä voidaan varmistaa, että laidoissa tapahtuvat ilmiöt eivät vaikuta mittaukseen. Alla oleva kuva 2.1 b) havainnollistaa dataa, jota voitaisiin saada kuvan 2.1 a) kaltaisesta kokeesta.

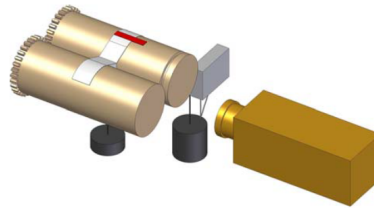


Kuva 2.1. a) Kokeellinen järjestelmä särön etenemisen mittaamiseksi b) Särön etenemisen x -suuntaan. Viivan tummuus vastaa aikaa, jonka särö on odottanut paikallaan ennen uutta etenemistä. [8]

Kuvassa 2.1 a) havainnollistettua koejärjestelyä on käytetty muun muassa Laursonin paperissa, jossa on tutkittu hyppäyksittäin etenevän halkeaman hyppyjen keskimääräistä muotoa ja kokoa [10]. Koe suoritettiin siten, että kaksi plexilasia hiekkapuhallettiin karheaksi ja sulatettiin toisiinsa kiinni. Tällöin levyt muodostavat yhtenäisen kappaleen, johon voidaan kohdistaa voima ajamalla levyjä kauemmas toisistaan. Kappaleiden hiominen varmistaa sen, että sulattamisvaiheessa kappaleet kiinnittyvät toisiinsa. Toisaalta hiominen varmistaa myös sen, että yhdistymisen jälkeen materiaalissa on mikroskooppista epäjärjestystä. Kokeiden toistettavuuden kannalta on tärkeää, että materiaalin ominaisuudet ovat hallittavissa. Hiekkapuhaltamisella voidaan taata samanlaiset heterogeeniset

ominaisuudet jokaiselle koekappaleelle. Säröä kuvataan tarkalla kameralla, jolloin paikalliset odotusajat saadaan mitattua. Hiekkapuhaltaminen on myös tärkeä prosessi datan selkeyden kannalta, sillä se varmistaa, että kameralla otetussa kuvassa näkyy selvä kontrasti kiinteän ja haljenneen pinnan välillä. Datasta muodostuu kuvan 2.1 b) kaltainen, jossa kohdan tummuus on suoraan verrannollinen särön odotusaikaan.

Toinen hieman erilainen tutkimus ovat suorittaneet Rosti ja kollegat paperille [1]. Kokeessa halkaistaan sylintereihin kiinnitettyä paperia, mitkä pyöriessään saavat aikaan repeämisen. Kokeessa on muutamia keskeisiä eroja plexi-lasilla tehtävään kokeeseen verrattuna. Paperissa on itsessään heterogeenin rakenne sen tekotavasta johtuen, joten sitä ei tarvitse mekaanisesti muokata ennen mittausta. Mittauksessa tavoitteena on siis saada tallennettua akustinen emissio materiaalista ja tunnistaa erilaisten ääniaaltojen alkuperä. Rakenteiden sidoksista ja kuiduista syntyvät ääniaallot ovat tutkijoiden mukaan erotettavissa toisistaan.[1]



Kuva 2.2. Koejärjestely paperin halkeamisen mittaamiselle. Isompi punnus luo ajavan voiman ja pienempi punnus varmistaa repeämisen tapahtuman sopivassa kulmassa. Säröä mitataan kuvassa näkyvällä punaisella anturilla ja keltaisella kameralla. Punainen anturi mittaa materiaalissa eteneviä ääniaaltoja ja kamera särön sijaintia. [1]

Särön mallinnus voidaan toteuttaa useammalla tavalla, jotka voivat antaa hieman eri tuloksia. Tässä työssä käytössä olevassa mallissa ajava voima on vakio ja halkeaman nopeus vaihtelee elastisten ja satunnaisten voimien mukaan. Toinen vaihtoehto olisi mallin rakentamien siten, että ajavaa voimaa muutettaisiin joka hetki nopeuden vakioimiseksi. Näiden kahden eri lähestymistavan mallinnettavan systeemin oletetaan olevan tarpeeksi iso, jotta voidaan olettaa sen olevan termodynaamisella rajalla. Tämä johtaa siihen, että systeemissä tapahtuvat vaihtelut voidaan olettaa pieniksi, jolloin voiman ja nopeuden vakioimisen pitäisi tuottaa samoja tuloksia.

Alan tutkimuksissa on huomattavaa eroa siinä, miten säröä kuvataan. Monissa papereissa särön mallinnus perustuu diskreettiin 2D-ketjuun, joka kuvastaa särön etenemisrintamaa. Myös nopeuden kuvaukset eroavat toisistaan. Onkin hyvä kysymys, minkälaisia eroja diskreettiaikaisen ja jatkuva-aikaisen mallin välillä on. Diskreettissä mallissa särön eteneminen tapahtuu vain säädetyllä nopeudella sillä ehdolla, että yksittäiseen pisteeseen vaikuttavien voimien summa on positiivinen. Sen sijaan myöhemmin tarkemmin läpikäytävässä mallissa nopeuden arvot riippuvat vain vaikuttavien voimien summasta. Yhtälöiden peruseriaatteet on johdettu jo aiemmissa tutkimuksissa [7][9] ja niitä on käytetty

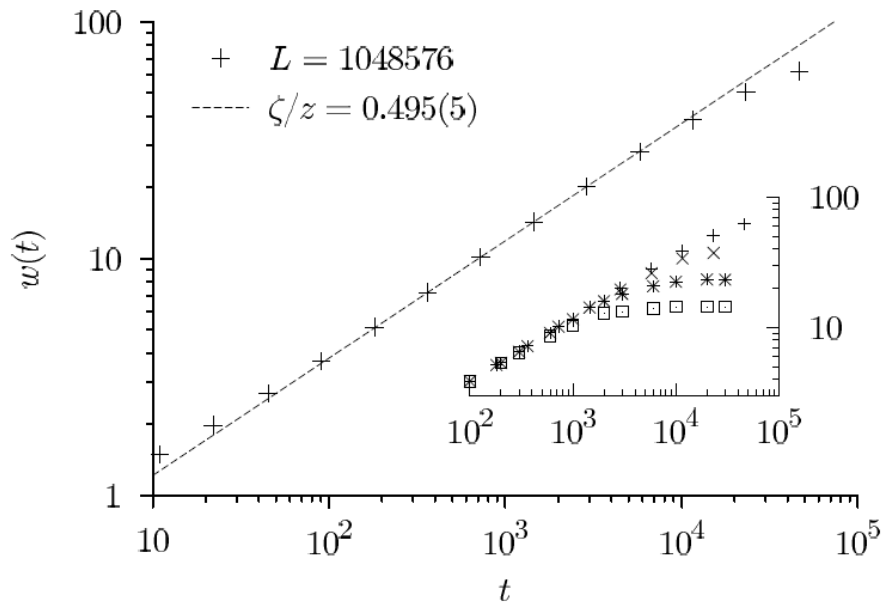
useissa eri numeerisissa ja käytännön koejärjestelyissä.

2.2 Kokeissa havaittavat ilmiöt

Edellä esitellyissä kokeissa tutkitaan särön potenssilain alaista käyttäytymistä. Kokeista saadun mittausdatan perusteella voidaan esimerkiksi tutkia särön hyppäyksien kokoluokkajakaumaa, särön etenemisnopeuden jakaumaa ja särön karkeusjakaumaa. Duemmerin paperissa käsiteltiin kriittisen eksponentin lisäksi muun muassa särön leveyttä ja karkeutta eri olosuhteissa. Kuvassa 2.3 on esillä tulos Duemmerin paperista karkeuseksponentille.[6] Juuri potenssilain alainen käyttäytyminen ja särön ja sen dynamiikan tilastolliset ominaisuudet ovat tutkimuksen kannalta kiinnostavia.

Lähellä kriittistä voimaa ($f \approx f_c$) särö on fraktaalinen, jolloin sille voidaan määrittää karkeutta kuvaava eksponentti. Tämä särön karkeuseksponentti ζ kuvastaa siis särössä havaittavaa itsesimilaarista rakennetta. Sama karkeuseksponentti esiintyy särön keskimääräisen leveyden skaalauksessa. Kuvassa 2.3 on Duemmerin ja kollegoiden saama tulos särön leveyden riippuvuudelle ajasta. Mittauksessa on lähdetty suorasta paikallaan olevasta säröstä ja mitattu leveyden kasvua ajan kuluessa. Särön leveyden riippuvuus ajasta määritetään kaavalla: $w(t) \sim t^{\zeta/z}$. Dynaaminen eksponentti z määrittää särön vyörymien kokojakaumien kasvua ajan suhteen [7]. Särön ominaisuuksia määritteleviä eksponentteja on useita, eikä tässä kandidaatintyössä käsitellä niistä kuin muutamaa tarkemmin. Neljä hieman eri asiaa kuvaavaa eksponenttia voidaan kuitenkin liittää toisiinsa skaalausrelaatiolla $\beta = \nu(z - \zeta)$. [6] Tämän takia mittauksissa voidaan kerätä dataa siten, että kaikkien eksponenttien arvoja ei käytännössä tarvitse saada selville.

Toinen tapa määrittää karkeuseksponentti on selvittää se särön korrelaatiofunktion avulla. Särön rakenteesta voidaan määrittää sen itsesimilaarisuus, jolloin on olemassa yhteys korrelaatiofunktion ja sijainnin välillä $C(x) \approx x^{2\zeta}$. Korrelaatiofunktio määritellään kahden pisteen välille $C(x) \equiv |h(0) - h(x)|^2$, kun särö on jäänyt kiinni materiaalin epäpuhtauksiin voiman arvolla ($f = f_c$). [6]

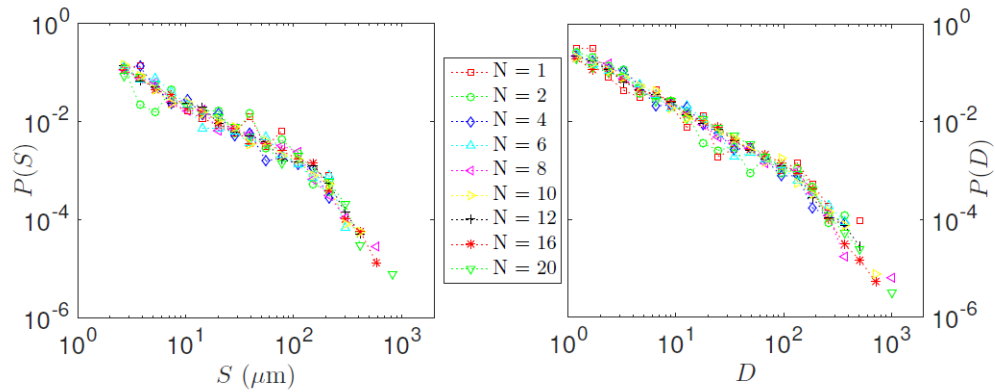


Kuva 2.3. Särön leveyden keskiarvon kasvu ajan funktiona lähellä kriittistä voimaa ($f \approx f_c$). Sisemmässä kuvassa on tulokset särön pituuksille $L = \{2^{14}, \dots, 2^{20}\}$. Särön koon pienentyessä tulokset eroavat, koska äärettömän ketjun approksimaatio ei enää päde. [6]

Särölle on ominaista hyppäyksittäinen eteneminen depinning-faasitransitiosta johtuen. On huomattu, että näiden etenemisaskelten kokojakauma ja erikokoisten askelten esiintymistodennäköisyys noudattavat potenssilakia. Monesti on käytännöllistä puhua yksittäisten särön pisteiden sijasta lokaaleista vyörymistä. Käytännön kokeissa on havaittu, että särö etenee aina vyöryminä [1]. Vyörymällä tarkoitetaan pientä hetkellistä aluetta, jossa särön pisteiden voidaan havaita liikkuvan tietyn jännityksen laukeamisen seurauksena. Monissa käytännön kokeissa keskitytäänkin tutkimaan vyörymien dynamiikka ja tilastollisia ominaisuuksia. Keskeisiä tunnuslukuja vyörymälle ovat koko S , kesto D ja nopeus V . Santuccin paperissa tutkitaan eri skaaloilla esiintyviä vyörymän koko- ja aikajakaumia $P(S), P(D)$. [3] Kuvassa 2.4 on esillä kokeellisella menetelmällä saadut tulokset. Ideaalissa tapauksessa myöhemmin suoritettavassa numeerisessa mallinnuksessa voitaisiin saada samanlainen potenssilakiriippuvuus todennäköisyysjakaumille, joita kuvassa 2.4 on esillä. Vaikka tämän työn laskennallisessa osassa ei tutkita vyörymien ominaisuuksia, on hyvä muistaa, että käytännössä eteneminen tapahtuu aina vyöryminä.

Kuvasta huomataan, että systeemin skaalaus ei vaikuta havaittaviin todennäköisyysjakaumiin. Vyörymän pituuksien todennäköisyysjakauma ei siis muutu alueittain ja on koko särön alueella likimain sama. Systeemin lokaalien ominaisuuksien on todettu olevankin riippumattomia koosta, etenemisnopeudesta ja ajavasta voimasta [3].

Tämän työn laskennalliseen osuuteen verrattava tulos on saatu Duemmerin paperissa [6]. Monessa muussa paperissa tehdyt vastaavanlaiset numeeriset mallinnukset käyttä-

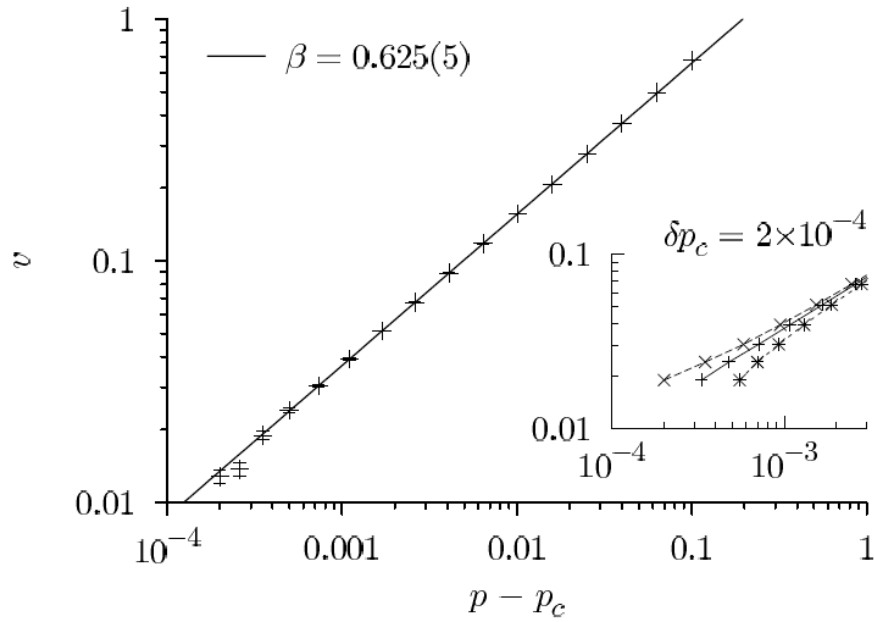


Kuva 2.4. Vyörymän koon S ja keston D todennäköisyysjakaumat eri skaaloilla $l = L/N$, missä $N = [1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20]$. [3]

vät hieman erilaisia ajavan voiman asetuksia ja siksi tulokset eivät ole välttämättä suoraan verrattavia. Esimerkiksi Santuccin tutkimuksessa ulkoinen voima vakioidaan avaruudellisesti $F_{ext} = K(\langle V \rangle t - \langle h \rangle)$. Etuna tässä vakiovoimalla tehtyyn mittaukseen on, että alussa voidaan päättää särön etenemisnopeus ja voidaan varmistaa esimerkiksi sen pieni arvo. Vakiovoimalla ja nopeudella ajettujen systeemien pitäisi tuottaa samanlaisia tuloksia termodynaamisella rajalla. Jo aiemmin mainitussa Duemmerin paperissa tutkittiin siis ajavan voiman vaikutusta särön etenemisnopeuteen. Duemmerin käyttämässä systeemissä on muutama ero tässä kandidaatintyössä käytössä olevaan verrattuna. Eroista tärkein on särön diskreetti eteneminen. Särön piste etenee siis aina yhden yksikön verran eteenpäin, jos särön pisteeseen vaikuttavien voimien summa on positiivinen. Jatkuva-aikaisessa mallissa etenemisnopeus saa huomattavasti pienempiä arvoja samoilla ajavan voiman arvoilla, minkä voi huomata myöhemmin esitellyistä tuloksista. Todennäköisesti tämä johtuu juuri diskreetin mallin toimintaperiaatteesta, mutta varman syyn löytämiseksi pitäisi tehdä tarkempaa tutkimusta. Eikä erilaisista etenemisnopeuksista voi tehdä johtopäätöksiä esimerkiksi systeemin kriittisten eksponenttien arvoista ilman sovitetun tekemistä. On kuitenkin mielenkiintoista miten eri malleja voidaan rakentaa numeerista mallinnusta varten ja miten ne käyttäytyvät hieman eri tavoilla.

Duemmerin tutkimuksessa on hyödynnetty nopeaa fourier-muunnosta (engl. FFT), mikä on mahdollistanut isompien systeemien tutkimisen tehokkaammin ja nopeammin, kuin tässä työssä käytetyllä ohjelmalla. Duemmerin tutkimuksessa diskreetin mallin käytön takia, simulaatio ei ole myöskään vaadi niin paljoa laskentatehoa kuin tässä työssä käytetty simulaatio. Kuvassa 2.5 on esillä Duemmerin tutkimuksessa saadut tulokset särön keskimääräisen nopeuden käyttäytymiselle kriittisestä voimasta lasketun etäisyyden funktiona.

Depinning-faasitransition numeerisessa mallinnuksessa monesti pyritään juuri siihen, että särö pysyy vain niukasti liikkeellä. Tällöin voidaan tutkia juuri kiinnostavia statistisia ominaisuuksia ja tässäkin työssä käsiteltäviä kriittisiä eksponentteja. Nopeuden pienentyessä systeemin korrelaatiopituus kasvaa teoriassa äärettömäksi, minkä vuoksi systeemin



Kuva 2.5. Keskimääräinen etenemisnopeus ajavan voiman etäisyyden kriittisestä voimasta funktiona $v \approx (f - f_c)^\beta$. Kuvassa voiman symbolina on käytetty p ja kriittisenä voimana p_c . Pienemmässä kuvassa on esitetty, että hieman virheellinen kriittisen voiman arvo johtaa pyöristymiseen kuvajassa. [6]

pitäisi olla äärettömän kokoinen tarkan tuloksen saamiseksi. Voi siis olla, että mittauksia suoritettaessa on järkevää pitää ajavan voiman ero kriittiseen voimaan sen verran suurena, että systeemin äärellinen koko ei vaikuta tuloksiin.

3. SÄRÖN DYNAMIIKAN TEOREETTINEN KUVAUS

Keskityn tässä luvussa käsittelemään särön dynamiikkaa kuvaavia lainalaisuuksia. Mallinnettaessa särön dynamiikkaa huomioidaan yleensä kolmen erilaisen voiman vaikutus. Ensimmäinen ja ainoa muunneltavissa oleva tekijä on ajava voima F_{ext} . Voima syntyy käytännössä kappaleeseen kohdistuvasta ulkoisesta rasitteesta esimerkiksi vedosta. Toinen vaikuttava voima, joka on tutkimuksen kannalta kriittinen, on pitkän kantaman elastinen voima $F_{elastic}$. Se aiheuttaa rakenteeseen koossapitävän voiman, joka pyrkii pitämään järjestelmän paikallaan. Kolmas vaikuttava voima on epälineaarinen ”pinning force” F_{η} , joka johtuu aineessa olevista epäpuhtauksista materiaalin pinnan ja särön välillä. Näistä kolmesta voimasta muodostuu siis summa, joka määrittelee särön etenemisen. Särö muodostuu ketjusta $h\{1, 2, 3, \dots, L\}$, jonka jokaiseen jäseneseen $h\{i\}$ vaikuttava voima on siis summa,

$$F_i = F_{ext} + F_{\eta} + F_{elastic}. \quad (3.1)$$

Voimat $F_{elastic}$ ja F_{η} määräytyvät systeemin ominaisuuksista. Vaikuttavia tekijöitä ovat esimerkiksi aineen puhtaus ja aineen rakenneosasten vuorovaikutuksien vahvuus.

3.1 Pitkän kantaman elastinen voima

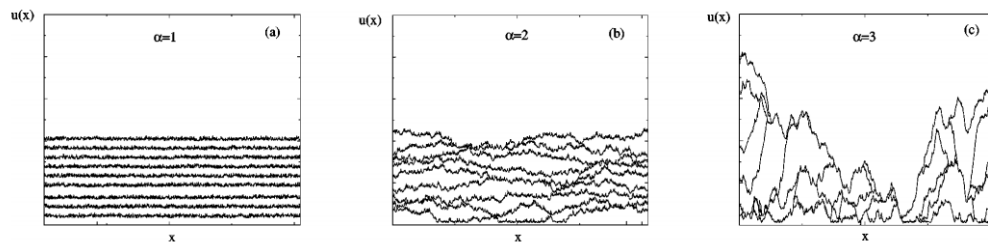
Särön rajapinnassa vaikuttaa useiden voimien summa, mistä syntyy tarkastelussa oleva monimutkainen systeemi. Vaikuttavien voimien yhteisvaikutus saa aikaan faasitransition, joissa esiintyy mielenkiintoisia ilmiöitä. Särön etenemisrintamassa vaikuttaa pitkän kantaman elastinen voima, joka pyrkii pitämään särön etenemisrintaman suorana. [7] Yleisen elastista palauttavaa voimaa kuvaavan kaavan on johtanut Tanguy [7]. Elastinen voima voidaan siis määritellä:

$$F_{elastic}(i) = -k \int_L \frac{h(i) - h(j)}{|i - j|^{\alpha}} dj. \quad (3.2)$$

Yhtälö kuvaa siis kaikkien samalla särön rajapinnalla olevien pisteiden kollektiivista vuorovaikutusta. Yhtälössä 3.2 potenssi α riippuu tutkittavasta tapauksesta ja yleisesti sitä käytetään kuvastamaan voiman vaikutusmatkan pituutta. Kaavassa 3.2 esitellyn inte-

graalin hienous onkin sen yleispätevyydessä. Muuttamalla termiä α , samaa integraalia voidaan käyttää kuvamaan voimia mekaanisista ominaisuuksista ferromagneettien rajapintoihin. Tangyan paperissa särölle on määritetty $\alpha = 2$, jolloin yhtälö pätee tässä kandidaatintyössä tutkittavalle särölle ja myös esimerkiksi monelle tutulle kapillaari-ilmioille. [7] Yhtälön muodosta voidaan huomata, että elastinen vuorovaikutus pyrkii pitämään särön etenemisrintamaa suorana. Jos joku piste säröstä on edennyt muita pidemmälle kuin suurin osa särön pituudesta, integraalista muodostuu negatiivinen. Sama pätee myös toiseen suuntaan. Särön osan jäädessä jälkeen, elastinen voima on positiivinen ja edistää särön kohdan etenemistä samaan rintamaan muiden kanssa.

Potenssi α karakterisoi elastisen muotoa palauttavan voiman vaikutuspituutta. Potenssi α määrää kuinka nopeasti voima heikkenee siirryttäessä kauemmaksi laskennassa olevasta pisteestä. Kuvasta 3.1 nähdään, että α potenssin arvo vaikuttaa faasitransition etenemisrintaman muotoon. Särön etenemisrintaman muoto vaihtelee todella paljon eri tilanteissa ja tätä voidaan käyttää hyödyksi esimerkiksi tutkittaessa systeemiä, jonka elastisen voiman vuorovaikutuksen pituutta ei tunneta. [7]



Kuva 3.1. Erilaisille systeemeille voidaan määrittää niille ominaiset α eksponentin arvot. Erilaisissa systeemeissä etenevien faasitransitioiden muoto riippuu paljon elastisen voiman vuorovaikutuspituuden arvosta. [7]

Elastista voimaa kuvaava yhtälö 3.2 ei ota kuitenkaan huomioon periodisia reunaehtoja, joten yhtälöön tehdään kyseiseen tutkittavaan tapaukseen liittyviä muutoksia. Tanguy paperissaan käsittelee tilannetta, jossa yhteen soluun lisätään ulkoista jännitystä, kunnes sen rajakynnys on ylitetty ja se liikaa askeleen $h(i) = h(i) + \delta h$. Tässä tapauksessa etenemisnopeus on suoraan verrannollinen vaikuttavaan voimaan mistä saadaan yhteys

$$h(i) = f(i)dt. \quad (3.3)$$

Kaavassa dt tarkoittaa mallinnusohjelman aika-askeleen pituutta. Solun etenemisen seurauksena elastinen voima muuttuu koko särön pinnan pituudelta ja uudeksi voimaksi saadaan

$$f(i) = f(i) + \delta h G(i, j). \quad (3.4)$$

Tässä funktio $G(i, j)$ edustaa diskreettiä vuorovaikutusta särön eri pisteiden välillä. Tanguy perustelee funktion valinnan yksinkertaisuudella. Valitaan siis yksinkertaisin funktio, joka toteuttaa vaaditut reunaehdot

$$G(i, j) = \left[\sin \left(\pi \frac{|i-j|}{L} \right) \right]^{-\alpha}. \quad (3.5)$$

Yhdistämällä kaavat 3.5 ja 3.2 saadaan tutkittavaan tapaukseen sopiva elastisen voiman kuvaus. 2D-särön rajapinnassa vaikuttavan elastisen voiman yhtälö on siis

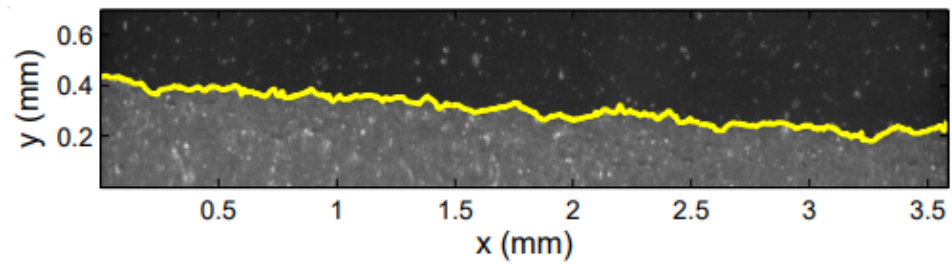
$$F(i)_{elastic} = -k_0 \left(\frac{\pi}{L} \right) \int_L \frac{h(i) - h(j)}{\left[\sin \left(\pi \frac{|i-j|}{L} \right) \right]^2} dj. \quad (3.6)$$

Saatus yhtälöä käytetään laskennallisessa osassa yhtenä säröön vaikuttavista voimista. Systemin koko pyritään aina valitsemaan käytössä olevan laitteiston sallimissa rajoissa mahdollisimman suureksi. Tässä tapauksessa systemin koko on $L = 2^{11} = 2048$ ja jousivakio $k_0 = 0.1$.

3.2 Epäjärjestyksen mallintaminen satunnaisvoimalla

Yksi mielenkiintoinen rajapinnan ominaisuus on materiaalin heterogeenisuuksien aiheuttama satunnaisvoima heterogeenisen pinnan ja särön välillä. Monesti voimaa kuvataan epäjatkovana, jokaiselle pisteelle satunnaisena, ja se määritellään statististen ominaisuuksien kautta. Voima siis kuvaa useista eri lähteistä koostuvien voimien summaa. Sen lähteenä voi toimia monet eri materiaalin virheet ja heterogeenisuudet, joita ovat esimerkiksi pintaan hiekkapuhalluksessa syntyvät epätasaisuudet. Heterogeenisuuksia esiintyy jokaisessa kokoluokassa, mutta jokaisen kokoluokan vaikutukset eivät näy särön liikkumisessa. Esimerkiksi plexi-lasin tapauksessa satunnaisvoima syntyy mikrometrien kokoluokassa. Kuvassa 3.2 on havainnollistava esimerkki materiaalissa olevista virheistä. Kuvassa nähdään vaaleita pisteitä, jotka ovat syntyneet, kun materiaali on valmistettu hiekkapuhaltamalla koetta varten.

Satunnaisvoiman merkitys on ymmärrettävissä esimerkiksi materiaalin pisteinä, joissa sidosvoimat ovat keskiarvoa vahvempia tai heikompia. Materiaali hajoaa loogisesti heikommasta kohdastaan. Vastaavasti piste, jossa voimat ovat vahvempia, pysyy ehjänä pidempään.

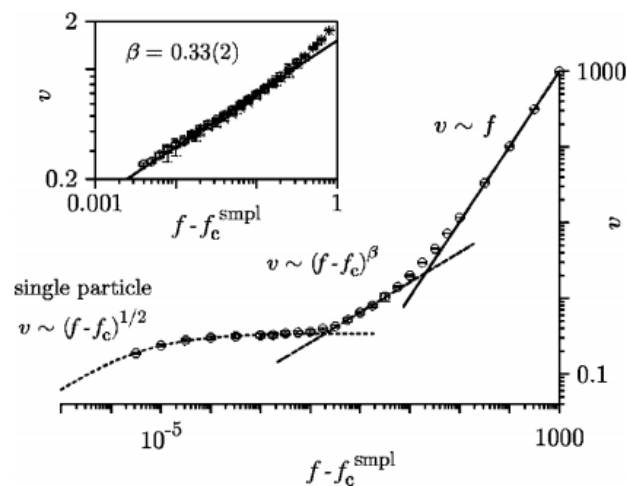


Kuva 3.2. Kuvassa on esimerkki käytännön mittauksesta, jossa keltaisella on korostettu särön sijainti. Musta alue on vielä yhtenäistä aluetta ja vaaleampi puoli on jo haljennut osa. Koko materiaalin alueella näkyy eri värisiä pisteitä, jotka ovat hiekkapuhalluksessa muodostuneita heterogeenisuuksia. [11]

Yhteistä kaikille voimille on niiden epälineaarisuus ja satunnaisuus. Voimien suuresta määrästä ja niiden moninaisista mekanismeista johtuen, systeemiin syntyy monia stabiileja tiloja. Isossa systeemissä eri lähteistä tulevien voimien summa vaikuttaa hyvin satunnaiselta ja sitä voidaankin kuvata statistisella jakaumalla. Kyseisestä ilmiöstä käytetään nimeä keskeinen raja-arvolause ja sen perusteella summaaminen yli suuren määrän satunnaislukuja saa aikaan gaussin käyrää muistuttavan jakauman. [12] Tässä työssä mallinnettavassa systeemissä käytetään gaussin jakaumaa keskiarvolla 0 ja keskihajonnalla 1.

4. NUMEERINEN MALLINNUS

Kokeellisen osan tarkoituksena on tutkia särön etenemisen dynamiikkaa kuvaavia kriittisiä eksponentteja β ja θ , tarkastelemalla kuinka ajava voima vaikuttaa keskimääräiseen etenemisnopeuteen. Kyseessä on numeerinen simulaatio, joka mallintaa epätasapaino-
 systeemin faasitransitiota kriittisen voiman lähellä. Numeerisen simulaation tarkoituksena on saada arvo kriittiselle eksponentille ja verrata sitä diskreetillä mallilla saatuun vastaavaan tulokseen. Mittaus suoritettiin valitsemalla voiman arvoja väliltä $f \in [f_c, 1.1 * f_c]$. Ajava voima täytyy asettaa käytännössä hieman kriittistä voimaa isommaksi, jotta särö ei jäisi välittömästi kiinni materiaalin epäpuhtauksiin. Tällöin itseasiassa systeemin korrelaatiopituus saavuttaisi nopeasti systeemin koon, jonka takia systeemiin vaikuttavat voimat eivät enää vastaisi teorian mallintamaa ääretöntä tapausta. Voiman suuruutta rajoittaa potenssilain muuttuminen suoraan verrannollisuudeksi voiman ja etenemisnopeuden välillä. Kuvassa 4.1 on piirretty kolme sovitetta mittaustuloksiin 1D-tapauksessa. Huomataan, että tutkittava tapaus kattaa vain pienen ja molemmilta puolin rajatun osan mahdollisista nopeuden arvoista.



Kuva 4.1. Etenemisvoiman yhteys ajavan voiman ja kriittisen voiman erotukseen. Särön etenemisnopeuden etenemisen suhde ajavaan voimaan riippuu ajavan voiman ja kriittisen voiman erotuksesta. Tässä työssä tutkittava potenssilaki pätee vain silloin, kun $(f - f_c) \in [10^{-3}, \dots, 1]$. [13]

Edellisessä kappaleessa käytiin lävitse materiaaliin vaikuttavat voimat, jotka muodostavat

pohjan simulaatiolle. Numeerisessa simulaatiossa lähdemme liikkeelle paikallaan olevasta säröstä, johon alun relaksaatioajan jälkeen kohdistetaan ulkoinen voima.

Numeerinen simulaatio etenee kunnes se saavuttaa jonkun reunaehdoista. Tässä tapauksessa rajaksi asetettiin 10 000 aika-askelta. Simulaatio pysähtyy myös siinä tapauksessa, jos särö etenee matkan 1.5 kertaa systeemin leveyttä vastaavan matkan $1.5L$, mutta tätä ei tapahtunut kertaakaan. Varsinkin mitattaessa arvoja kriittisen voiman ympärillä simulaation olisi hyvä edetä pidemmälle, jolloin satunnaiset fluktuaatiot eivät vaikuttaisi tulokseen niin voimakkaasti ja tuloksia voitaisiin keskiarvoistaa pidemmällä välillä. Toisaalta ajavan voiman ollessa kauempana kriittisestä voimasta simulaation aikaa olisi voinut lyhentää.

4.1 Koodin toiminnan kuvaus

Käytettyyn ohjelmaan voidaan syöttää muuttujina (L , satunnaislukugeneraattorin siemenluku, f , k). Näistä muuttujista tässä työssä pidettiin vakioina L ja jousivakio k . Jokaisessa ajossa muutettiin satunnaislukugeneraattorin siemenluvun arvoa, jotta mittaus olisi satunnainen eikä mittausten välillä olisi korrelaatiota. Käytetty ohjelmisto tuottaa matriisin, jossa on tiedot systeemin hetkellisestä tilasta. Käytetyssä numeerisessa simulaatiossa on kaksi merkittävää eroa aiempiin vastaaviin tutkimuksiin. Mallissa käytetään spline-ohjelmaa, joka interpoloi arvoja jonon pisteiden välillä. Itse särö on diskreetti jono, mutta splini-interpolaatiolla saadaan tarkennettua elastisen voiman vaikutusta. Oletetaan, että etenemisnopeus on suoraan verrannollinen vaikuttavien voimien summaan. Tämä oletus voidaan tehdä, koska mallissa tutkitaan juuri depinning-faasitransitiota. Vastaavassa tutkimuksessa nopeuden määrittämisessä käytetään askelfunktiota, mikä sallii nopeudelle vain kaksi arvoa.[6]

Nopeuden arvo saadaan yksinkertaisimmasta integraalimenetelmästä eli eulerin menetelmästä. Mallissa asetetaan särön etenemisen nopeudeksi vaikuttavien voimien summa kyseisellä hetkellä.

Epäjärjestyksen aiheuttaman satunnaisvoiman mallintaminen vaatii satunnaislukujen generointia gaussin jakauman mukaan keskiarvolla 0 ja keskihajonnalla 1. Monissa ohjelmointikielissä on valmiina satunnaislukugeneraattoreita ja tässäkin ohjelmassa on käytetty hyödyksi math.h kirjastosta saatavaa rand funktiota. Kyseisissä funktioissa ongelmana on satunnaislukujen toistuvuus tietyn jakson jälkeen, mikä isoissa järjestelmissä ja pitkissä simulaatioissa aiheuttaa toistuvia lukujaksoja. Käytetyssä ohjelmassa satunnaislukujen generointia on parannettu box-muller -menetelmällä. Box-muller- menetelmä muuttaa jakauman gaussiseksi, mikä oli keskeisen raja-arvolauseen tulos satunnaisvoimien kuvaamiselle.

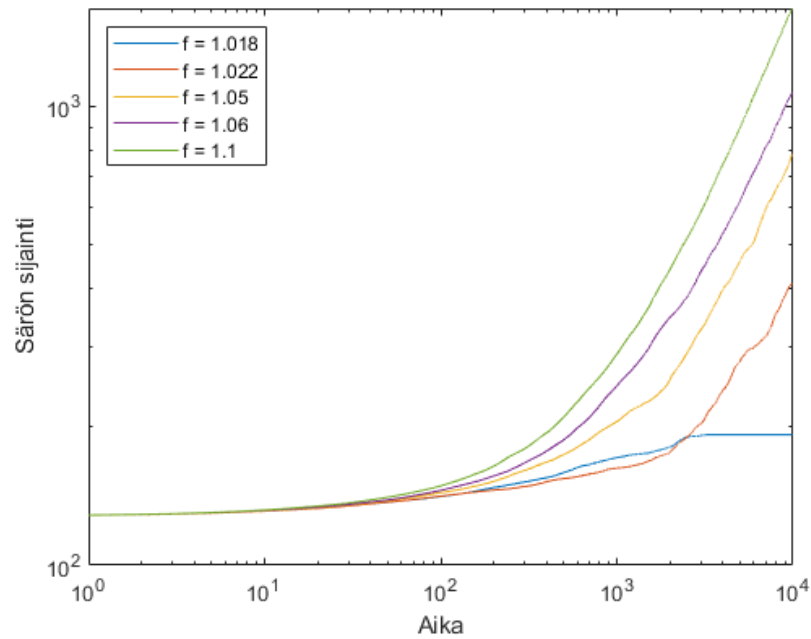
Työssä käytössä oleva ohjelma käyttää laskennassa CPU:ta. Tämä työ on suoritettu koti-

käyttöön tarkoitettulla tietokoneella, joten tietokoneen suoritin ei vastaa teholtaan pelkäs-
tään laskennalliseen käyttöön tarkoitettuja suorittimia. Laskennassa käytetty suoritin oli
AMD Ryzen 5 3600 6-core ja RAM -muistia oli käytössä 16 Gt. Tietokoneen tehtävienhal-
linta osoitti laskennan aikana, että tietokoneen resurssit eivät ylittyneet mallinuksessa ja
käytännössä ainoa keino tehostaa laskentaa olisi suorittimen taajuuden kohottaminen.

4.2 Datan esittely

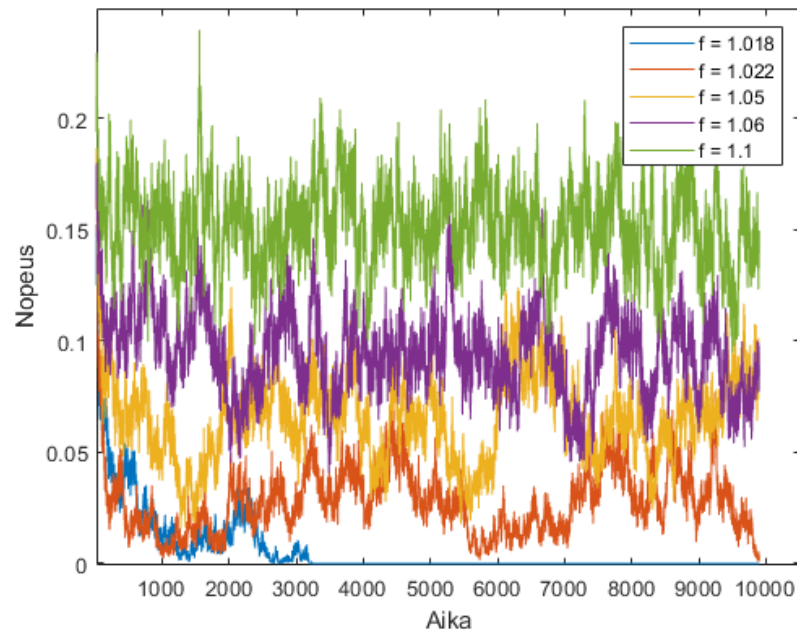
Särön etenemistä mallinnettiin kolmellakymmenellä eri voiman arvolla väliltä $f \in [f_c, 1.1 \times f_c]$. Kuvassa 4.2 on esillä viiden eri ajavan voiman aikaansaaman särön sijainnin keskiar-
von muutos mittauksen aikana. Kuvaan on valittu mittauksia siten, että eri ilmiöt ovat
mahdollisimman selkeästi näkyvissä. Kuvan suurin ja pienin ajavan voiman arvo vastaa-
vat samalla koko mallinnuksen reuna-arvoja. Ajavan voiman $f = 1.018$ kohdalla kuvasta
huomataan, että se on lopettanut etenemisen ajassa 1500. Särön hidasta etenemistä de-
monstroi myös se, että ennen varsinaista särön etenemisen pysähtymistä särö on ollut
lähellä pysähtyä ajassa 1000.

Särön etenemisnopeus fluktuoi jatkuvasti ja sen voi huomata varsinkin pienillä ajavan voi-
man arvoilla. Kuvasta 4.2 nähdään, että kolmen pienimmän voiman kohdalla etenemiseen
vaikuttaa selvästi materiaalissa esiintyvät heterogeeniset rakenteet, joiden vaikutus näkyy
etenemisen satunnaisena liikkeenä. Kuvasta 4.3 nähdään potenssilain alainen särön ete-
neminen. Isoimmalla ajavan voiman arvolla sijainnin eteneminen vaikuttaa lineaariselta
logaritmisella asteikolla. Isommalla ajavan voiman arvolla myös siirtymävaihe alkutilasta
tasaiseen etenemiseen vie vähemmän aikaa. Voimalla $f = 1.1$ voidaan todeta kuvas-
ta nopeuden tasaantuneen ennen aika-askelta 1000. Seuraavaksi suurimmalla voimalla
 $f = 1.06$ etenemisen tasaantuminen vie 2000 aika-askelta.



Kuva 4.2. Särön eteneminen ajan funktiona heterogeenisessä aineessa viidellä eri ajavan voiman arvolla. Särön etenemiseen vaikuttavat ajava voima f ja systeemin kriittinen eksponentti β kaavan 2.5 mukaisesti. Pienellä ajavan voiman arvolla särön etenemisessä on havaittavissa enemmän satunnaisuutta, kuin suurella ajavan voiman arvolla.

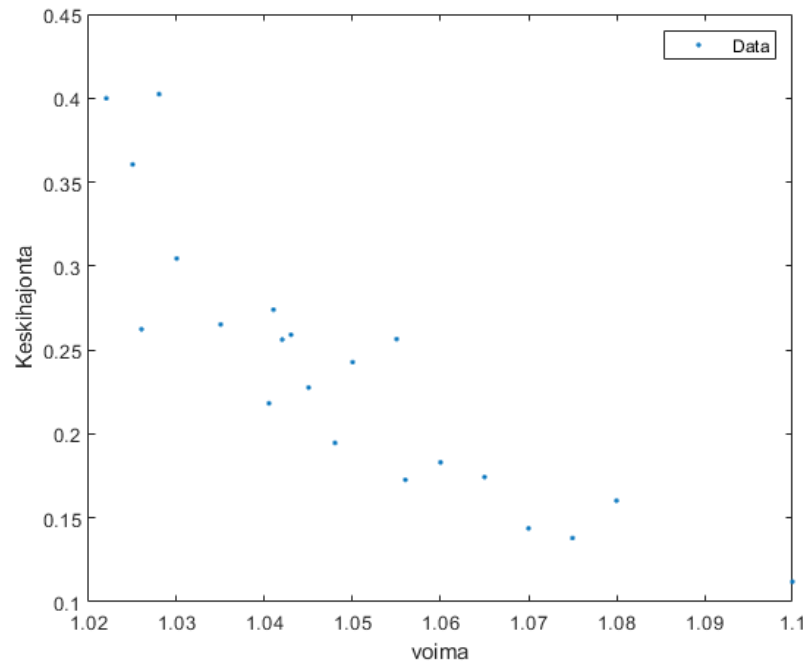
Kuvat 4.2, 4.3 ja kuva 4.5 kuvaavat särön etenemistä samoilla ajavan voiman arvoilla. Kuvista 4.3 ja 4.4 voi nähdä kuinka särön nopeusjakauman keskihajonta pienenee ajavan voiman kasvaessa. Suurimmalla ajavan voiman arvolla $f = 1.1$ särön etenemisen keskinopeus vaihtelee huomattavasti vähemmän, kuin pienemmillä voimilla.



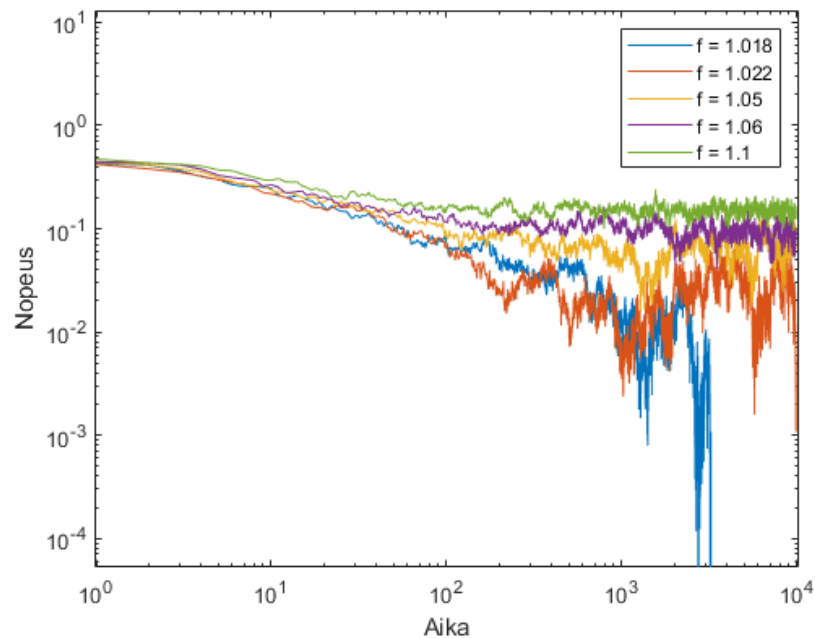
Kuva 4.3. Etenemisnopeus ajan funktiona viidellä eri ajavan voiman arvolla. Etenemisnopeuden ja ajavan voiman välillä on yhteys, mikä näkyy etenemisnopeuden kasvussa, kun ajava voima kasvaa. Kun ajavan voiman ja kriittisen voiman erotus pienenee, särö saattaa jumiutua kuten arvolla $f = 1.018$ on kuvassa käynyt.

Särön nopeuden keskimääräinen hajonta riippuu käänteisesti ajavan voiman suuruudesta. Kuvassa 4.4 on esillä nopeuden keskihajonnan absoluuttisen arvo jaettuna särön keskimääräisellä etenemisnopeudella. Laskennassa on käytetty Matlabissa olevaa mad (median absolute deviation) funktiota. Jakamalla mittaustuloksen keskihajonta keskiarvolla saadaan laskettua suhteellinen hajonta. Mittaustulosten analysoinnissa pitää ottaa huomioon, että alhaisilla ajavan voiman arvoilla keskihajonnan suuruus aiheuttaa epävarmuutta tuloksiin, jos sen vaikutusta ei pystytä poistamaan.

Kuvassa 4.5 voidaan havaita, että vain suurilla ajavan voiman arvoilla saatujen säröjen etenemisnopeus vakiintuu mittauksen aikana. Pienillä ajavan voiman arvoilla havaitaan suurta vaihtelua mittauksen aikana, eikä nopeus saavuta mitään tiettyä arvoa.



Kuva 4.4. Etenemisnopeuden keskihajonta riippuu voimakkaasti ajavan voiman suuruudesta. Valittaessa ajava voima läheltä kriittistä voimaa, suhteellinen keskihajonta kasvaa merkittävästi.



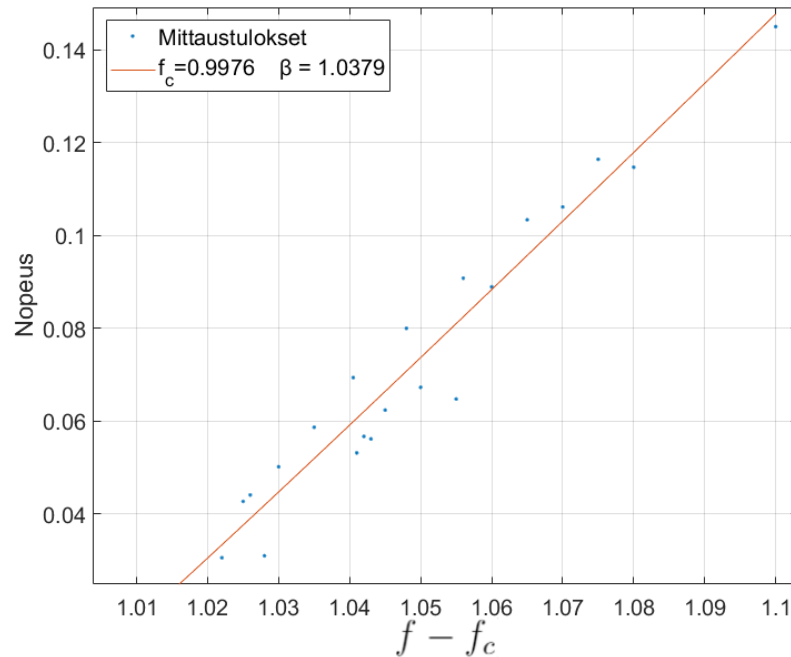
Kuva 4.5. Etenemisnopeus ajan funktiona logaritmisilla akseleilla. Alussa jokainen systeemi etenee hyvin samanlaisella nopeudella, kunnes systeemi alkaa asettumaan niin sanottuun steady-state tilaan. Kuvasta 4.4 todettu keskihajonnan kasvu pienillä ajavan voiman arvoilla on myös tässä kuvassa selkeästi havaittavissa.

4.3 Tulokset

Esittelen tässä kappaleessa laskennallisessa osuudessa saadut tulokset ja soviteen tekkoon käytetyt menetelmät. Simulaatioita suoritettiin kolmellekymmenelle eri tilanteelle ja joiden tuottamaan datajoukkoon sovite tehtiin. Käytetty etenemisnopeus on keskiarvo särön viimeisen 2000 askeleen ajalta. Soviteen valinta tehtiin systeemin käyttäytymisen tuntemuksen perusteella. Valittiin siis soviteeksi potenssilaki-funktio, mikä tuottaa tarkimman arvion systeemin käyttäytymiselle. Sovitettu funktio on muotoa

$$v_{average} = C * (f - f_c)^\beta. \quad (4.1)$$

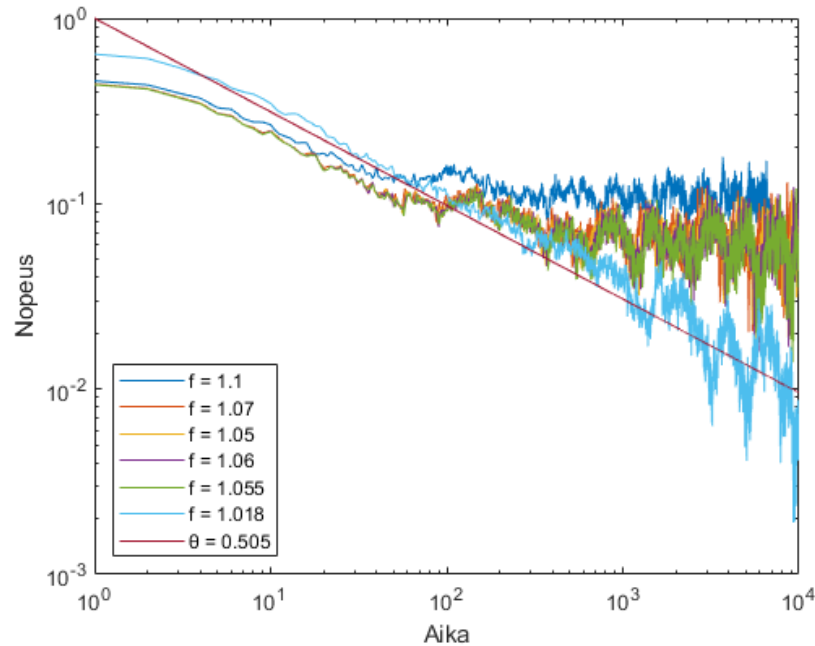
Sovitteella haettiin arvoja kaavan termeille f_c ja β . Kaavassa etutekijä C on tutkittavasta systeemistä riippuva vakio-termi. Kuvassa 4.6 on piirretty sovite logaritmisella asteikolla.



Kuva 4.6. Kuvajaan on piirretty mittaustulokset sinisinä pisteinä ja sovite oranssina viivana. Kuvajasta nähdään etenemisnopeuden yhteys ajavan voiman ja kriittisen voiman erotukseen. Hajonta mittaustuloksissa on suurta varsinkin, kun voimien erotus pienenee.

Sovitteella saatiin siis kriittisen voiman arvoksi $f_c = 0.9976$. Tämä tulos on on yhteneväinen mittauksista saatujen havaintojen kanssa. Kuvasta 4.3 voidaan päätellä, että kriittisen voiman täytyy olla lähellä ykköstä, sillä särö jäi nopeasti jumiin ajavan voiman arvolla $f = 1.018$. Toinen sovitteesta saatu arvo on eksponentti $\beta = 1.0379$. Tämä tulos eroaa paljon muista särön depinning-faasitransition kriittistä eksponenttia tutkineista papereista. Samankaltaisessa tutkimuksessa diskreetille särölle on saatu kriittiselle eksponentille

arvo $\beta = 0.625$ [6]. Kun ajavan ja kriittisen voiman arvot ovat samat, etenemisnopeus lähestyy nollaa simulaation ajan, eikä varsinaista tasaista nopeutta saavuteta missään vaiheessa. Nopeuden aikariippuvuudelle on määritetty oma eksponentti θ , mikä kuvaa nopeuden potenssilain alaista käyttäytymistä. Kuvassa 4.7 on piirretty käyrä funktiolla $v = t^{-\theta}$, missä θ -eksponentin paikalle on kuvassa sijoitettu Duemmerin mittauksessa saatu arvo $\theta = 0.505$. [6]



Kuva 4.7. Eksponentti θ kuvaa potenssilakia, kun ajava voima on lähellä kriittistä voimaa $f \approx f_c$. Voiman arvon $f=1.018$ kuvaaja on keskiarvoistettu viiden simulaation yli, satunnaisuusien eliminoimiseksi.

Kuvassa 4.7 nähdään, että diskreettiaikaisen särön simulaatiosta saatu tulos eksponentille θ sopii myös aika-jatkuvasta simulaatiosta saaduille tuloksille. Ajavan voiman arvolla $f = 1.018$ saatu tulos on keskiarvoistettu viiden eri mittauksen yli, jotta äärellisen särön aiheuttamat virheet jäisivät mahdollisimman pieniksi. Kuvassa 4.3 on yhden mittauksen $f = 1.018$ voimalla saadun tuloksen nopeus piirrettynä ajan funktiona, joka on jäänyt jumiin ennen simulaation päättymistä. Yllä olevassa kuvassa 4.7 piirretyn keskiarvoistetun käyrän hajonnan kasvaminen selittyy osittain sillä, että osa käyristä on jäänyt kiinni ja sen takia käyrä perustuu vain muutaman kiinnijäämättömän käyrän dataan. Sovite noudattaa todella hyvin mittausdataa, ja siitä voidaankin tehdä johtopäätös, että simulaatioissa käytettävät mallit toimivat eroistaan huolimatta samalla tavalla ainakin kriittisen voiman läheisyydessä.

5. YHTEENVETO

Tässä työssä tutkittiin särön depinning-faasitransitiota kaksiulotteisessa heterogeenisessä materiaalissa. Särön eteneminen materiaalissa on kompleksinen prosessi ja siihen vaikuttavat pinnan heterogeenisuuksista syntyvä satunnaisvoima, särössä vaikuttava pitkän kantaman elastinen voima ja materiaaliin kohdistettu ajava voima. Simulaatiossa tutkittiin särön etenemisnopeutta eri ajavan voiman arvoilla 10000 aika-askeleen aikana. Särö muodostuu ketjusta, jonka etenemistä mallinnettiin jatkuva-aikaisella mallilla. Simulaatioajan rajallisuuden takia särön pituus oli $L = 2048$.

Simulaatiosta saatu data oli johdonmukaista alkuperäisten oletusten kanssa. Nopeus pieni odotetusti siirryttäessä kriittisen voiman ympäristöön ja sen keskihajonta kasvoi huomattavasti. Isoimmilla käytetyillä ajavan voiman arvoilla systeemi saavutti steady-state tilan ja eteneminen stabiloitui. Pienemmillä ajavilla voimilla tätä stabiloitumista ei keretty havaita, vaan etenemisnopeus vaihteli paljon koko mittausajan. Tämä johtui osaltaan myös siitä, että mittauksen pituus oli rajoitettu ja stabiloituminen oltaisiin voitu havaita pidemmällä mittauksilla.

Ajavat voimat valittiin väliltä $f \in [1.018, 1.1]$. Pienintä ajavan voiman arvoa rajaa systeemin korrelaatiopituus. Simulaatioita ajaessa huomasin, että särön eteneminen hidastui jo huomattavasti, kun ajava voima oli $f < 1.04$. Tällöin myös särön etenemisnopeuden heilahtelut kasvoivat ja särö oli useasti lähellä pysähtymistä. Ideaalin systeemin pitäisi jatkaa etenemistä kriittiseen voimaan asti, mutta korrelaatiopituuden kasvu tekee tämän käytännössä mahdottomaksi. Tämä on seurausta simuloitavan systeemiin pienestä koosta ja mittauksen parantamiseksi simulaation kokoa pitäisi kasvattaa ja simulaatio aikaa pidentää. Myös tulosten keskiarvoistaminen useamman mittauksen yli olisi tarpeellista tarkemmissa tutkimuksissa satunnaisuuden eliminoimiseksi.

Simulaatiosta saatuun dataan tehdystä sovitteesta saatiin tulokseksi $\beta = 1.0379$ ja $f_c = 0.9976$. Tulos oli yllättävä, eikä vastannut kirjallisuuden pohjalta tehtyä arviota. Kriittisen eksponentin arvoksi diskreetissä tapauksessa on saatu paljon pienempi arvo $\beta = 0.625$ [6]. Kuitenkin kuvan 4.7 perusteella jatkuva-aikainen malli käyttäytyy samalla tavalla kuin diskreetti-aikainen kriittisen voiman ympäristössä. Tämä viittaisi siihen, että simulaatioissa saadut tulokset stedy-state tilanteessa ovat epätarkkoja. Siksi tulosten perusteella ei voida tehdä selvää johtopäätöstä, että aikajatkuvassa mallissa kriittinen eksponentti olisi

varmasti suurempi kuin diskreetissä tapauksessa. Tarkemman arvon saaminen kriittiselle eksponentille edellyttää kattavampaa datajoukkoa ja pidempiä mittauksia. Mittauksia voisi myös keskiarvoistaa jokaisella eri voimalla, jotta satunnaisuuksien vaikutus tulokseen saataisiin vähenemään.

Jatkotutkimuksissa voisi myös tarkastella monimutkaisemman mallin toimintaa ja verrata sitä tässä työssä käytettyyn malliin. Tätä kandidaatintyötä varten tehdyn taustatutkimuksen perusteella on vaikea sanoa kuinka esimerkiksi materiaalin rakenteen huomioiminen muuttaisi simulaatioita. Periaatteessa tätä voisi tutkia elastisen voiman ja satunnaisvoiman voimakkuuksien suhdetta muuttamalla. Pitkän kantaman elastinen voima ja satunnaisvoima ovat toimivia monissa eri tapauksissa ja niiden tarkoitus on kuvata voimien vaikutuksia isossa skaalassa. Kuitenkin ne ovat approksimaatioita, jotka eivät välttämättä toimi kaikissa eri tilanteissa. Jatkotutkimuksissa voisikin olla tarkoituksena etsiä tilannetta, jossa satunnaisvoiman approksimoiminen gaussisella jakaumalla ei päde ja täytyisi huomioida tarkemmin materiaalin ominaisuudet.

LÄHTEET

- [1] Rosti, J., Koivisto, J., Traversa, P., Illa, X., Grasso, J.-R. and Alava, M. J. Line creep in paper peeling. *International journal of fracture* 151.2 (2008), pp. 281–297.
- [2] Davidsen, J., Stanchits, S. and Dresen, G. Scaling and universality in rock fracture. *Physical review letters* 98.12 (2007), pp. 125502–125502.
- [3] Santucci, S., Tallakstad, K., Angheluta, L., Laurson, L., Toussaint, R. and Måløy, K. Avalanches and extreme value statistics in interfacial crackling dynamics. *Philosophical transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical, physical, and engineering sciences* 377.2136 (2018), p. 20170394.
- [4] Durin, G., Bohn, F., Corrêa, M., Sommer, R., Le Doussal, P. and Wiese, K. Quantitative Scaling of Magnetic Avalanches. *Physical review letters* 117.8 (2016), pp. 087201–087201.
- [5] Blatter, G., Feigel'Man, M., Geshkenbein, V., Larkin, A. and Vinokur, V. Vortices in high-temperature superconductors. *Reviews of modern physics* 66.4 (1994), pp. 1125–1388.
- [6] Duemmer, O. and Krauth, W. Depinning exponents of the driven long-range elastic string. *Journal of statistical mechanics* 2007.1 (2007), P01019–P01019.
- [7] Tanguy, A., Tanguy, A., Gounelle, M., Gounelle, M., Roux, S. and Roux, S. From individual to collective pinning: Effect of long-range elastic interactions. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics* 58.2 (1998), pp. 1577–1590.
- [8] Laurent, P. Statistical aspects in crack growth phenomena: how the fluctuations reveal the failure mechanisms. *International journal of fracture* 201.1 (2016), pp. 11–27.
- [9] James, R. First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *Journal of applied mechanics* 52.3 (1985), pp. 571–579.
- [10] Laurson, L., Illa, X., Santucci, S., Tore Tallakstad, K., Måløy, K. J. and Alava, M. J. Evolution of the average avalanche shape with the universality class. *Nature communications* 4.2 (2013), pp. 2927–2927.
- [11] Maløy Knut, J. ja Santucci, S. Local waiting time fluctuations along a randomly pinned crack front. Englanti. *Physical review letters* 96.4 (2006), s. 045501–045501.
- [12] Fisher, H. *A History of the Central Limit Theorem From Classical to Modern Probability Theory*. New York, NY : Springer New York : Imprint: Springer, 2011.

- [13] Duemmer, O. and Krauth, W. Critical exponents of the driven elastic string in a disordered medium. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 71.6 (2005), pp. 061601–061601.