Tampereen yliopisto

Oona Eerola

GRAAFIEN VÄRITTÄMISESTÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Maaliskuu 2021

Tiivistelmä

Oona Eerola: Graafien värittämisestä
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Maaliskuu 2021

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä graafien värittämistä, joka on yksi graafiteorian tunnetuimmista aihealueista. Tutkielman alussa esitellään graafiteorian peruskäsitteitä sekä tutkielman kannalta olennaisia määritelmiä ja lauseita. Tärkeää on ymmärtää tasograafin, solmun asteen, komponentin ja aligraafin käsitteet. Tarkastelut on rajattu käsittelemään vain yksinkertaisia graafeja, jotta tutkielma ei olisi liian laaja.

Eräs työn keskeisistä tuloksista on viisivärilause, jonka mukaan jokainen tasograafi voidaan värittää viidellä värillä. Tämän tuloksen todistuksen ymmärtämiseksi tutkielmassa esitetään Jordanin käyrälause sekä osoitetaan, että jokaisessa tasograafissa on solmu, jonka aste on korkeintaan viisi. Viisivärilauseen lisäksi esitetään myös heikompi kuusivärilause sekä nelivärilauseen historiaa.

Viisivärilauseen jälkeen tarkastellaan graafin solmujen värittämistä kahdella värillä ja osoitetaan, että graafi voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos siinä ei ole paritonta silmukkaa. Lisäksi esitetään graafin solmujen ja alueiden värittämisen välinen suhde ja osoitetaan, että tasograafin alueet voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos graafi on Eulerin graafi. Tämän tuloksen osoittamiseksi määritellään ensin Eulerin graafi.

Tutkielman lopussa toisena keskeisenä tuloksena todistetaan Brooksin lause, joka kertoo, että jos graafi ei ole täydellinen eikä pariton silmukka, niin graafin väriluku on aina pienempi tai yhtä suuri kuin graafin maksimiaste. Johdatteluna tähän lauseeseen esitetään ja todistetaan ensin muita lauseita koskien graafin väriluvun ylärajaa. Lisäksi tutustutaan ahneeseen algoritmiin, joka on yksinkertainen ja hyvin tunnettu tapa värittää graafi käyttämättä liikaa värejä. Ahnetta algoritmia havainnollistetaan esimerkin avulla.

Avainsanat: graafiteoria, graafi, tasograafi, graafin värittäminen

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan graafien värittämistä ja todistetaan siihen liittyviä tuloksia. Luvussa 2 esitetään graafiteorian peruskäsitteitä sekä tutkielman kannalta olennaisia määritelmiä ja lauseita. Määritellään muun muassa käsitteet yksinkertainen graafi, aligraafi ja solmun aste. Lisäksi tarkastellaan graafin yhtenäisyyttä ja tasograafin käsitettä. Luvussa 2 todistetaan myös tutkielman kannalta olennainen tulos, jonka mukaan jokaisessa tasograafissa on solmu, jonka aste on korkeintaan viisi.

Luvussa 3 tarkastellaan graafien värittämistä ja esitetään aluksi käsitteet solmuväritys ja graafin väriluku. Nelivärilauseen historiaa esitetään lyhyesti. Sen jälkeen todistetaan kuusivärilause, jonka mukaan jokainen tasograafi voidaan värittää kuudella värillä. Tämän lauseen myötä päästään viisivärilauseeseen, jonka todistus osoittaa, että jokainen tasograafi voidaan värittää viidellä värillä.

Aliluvussa 3.4 tarkastellaan graafien värittämistä kahdella värillä, ja osoitetaan, että graafi voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos siinä ei ole paritonta silmukkaa. Lisäksi annetaan esimerkit graafeista, jotka voidaan värittää kahdella värillä, sekä graafeista, joita ei voida värittää kahdella värillä. Graafin duaalin käsitteen avulla päästään tarkastelemaan graafin alueiden värittämistä kahdella värillä ja osoitetaaan, että tasograafin alueet voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos graafi on Eulerin graafi.

Luvun 3 lopussa tarkastellaan graafin solmujen värittämistä ja esitetään lauseita koskien väriluvun ylärajaa. Graafin värityksen löytämiseksi esitetään yksinkertainen ahne algoritmi ja annetaan siitä myös havainnollistava esimerkki. Viimeisenä lauseena esitetään ja todistetaan Brooksin lause, joka kertoo, että jos graafi ei ole täydellinen eikä pariton silmukka, niin graafin väriluku on aina pienempi tai yhtä suuri kuin graafin maksimiaste.

Lukijalta edellytetään joukko-opin perusteiden ja matemaattisen päättelyn tuntemusta. Graafiteorian aikaisempaa tuntemusta ei edellytetä lainkaan. Tutkielman päälähdeteoksena on Reinhard Diestelin *Graph Theory*.

2 Esitietoja

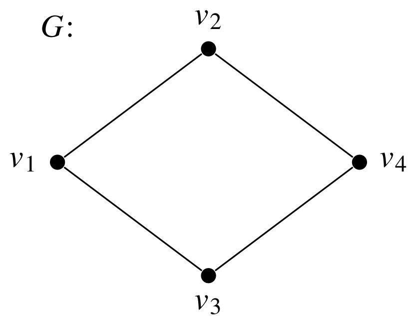
Tässä luvussa esitellään lyhyesti graafiteorian peruskäsitteitä sekä pääaiheen kannalta olennaisia määritelmiä ja apulauseita, jotka pohjautuvat Diestelin teokseen (vrt. [4, s. 2–11, 90–98]). Lisäksi esitetään myös havainnollistavia esimerkkejä.

2.1 Perusteita graafeista

Merkinnällä $[V]^2$ tarkoitetaan järjestämättömien parien $\{v_1, v_2\}$ joukkoa, missä $v_1, v_2 \in V$ ja $v_1 \neq v_2$.

Määritelmä 2.1. *Yksinkertainen graafi* G on pari (V, E), missä $V \neq \emptyset$ ja $E \subseteq [V]^2$. Joukon V alkioita kutsutaan *solmuiksi* ja joukon E alkioita *särmiksi*.

Järjestämättömälle parille $\{v_1, v_2\}$ voidaan käyttää lyhennysmerkintää v_1v_2. Merkinnällä $V(G)$ tarkoitetaan graafin G solmujen joukkoa ja merkinnällä $E(G)$ tarkoitetaan graafin G särmien joukkoa.



Kuva 2.1. Yksinkertainen graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ja $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$.

Tässä tutkielmassa keskitytään käsittelemään yksinkertaisia graafeja. Tästä eteenpäin sanalla graafi tarkoitetaan yksinkertaista graafia.

Määritelmä 2.2. Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Jos $v_1v_2 \in E$, niin solmut v_1 ja v_2 ovat *vierussolmuja* tai *naapureita*. Solmuja v_1 ja v_2 kutsutaan tällöin särmän v_1v_2 *päätesolmuiksi*.

Määritelmä 2.3. Graafi G on *täydellinen*, jos kaikki graafin G solmut ovat keskenään vierussolmuja. Täydelliselle n-solmuiselle graafille käytetään merkintää K^n.

Määritelmä 2.4. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ graafeja. Jos $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$, niin graafi H on graafin G *aligraafi*. Merkitään $H \subseteq G$.

Määritelmä 2.5. Olkoon $H \subseteq G$. Jos $x, y \in V(H)$ ja graafi H sisältää jokaisen särmän $xy \in E(G)$, niin H on graafin G *indusoitu aligraafi*. Sanotaan, että $V(H)$ *indusoi* tai *virittää* graafin H graafissa G ja merkitään $H =: G[V(H)]$.

Määritelmä 2.6 (solmun poisto)**.** Olkoon $G = (V, E)$. Jos $v \in V$, niin $G - v$ on solmujoukon $V \setminus \{v\}$ indusoima graafin G aligraafi.

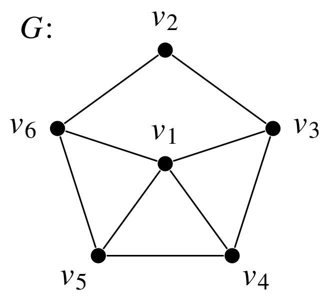
Määritelmä 2.7 (särmän poisto)**.** Olkoon $G = (V, E)$. Jos $v_1v_2 \in E$, niin $G - v_1v_2$ on graafin G aligraafi, jonka solmujoukko on V ja särmäjoukko on $E \setminus \{v_1v_2\}$.

Määritelmä 2.8. Solmun v *aste* kertoo kuinka monen särmän päätesolmuna solmu on, joka on sama kuin solmun v vierussolmujen lukumäärä. Merkitään $d_G(v)$ tai $d(v)$.

Määritelmä 2.9. Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Silloin graafin G solmujen *minimiaste* on $\delta(G) = \min\{\, d(v) \mid v \in V \,\}$ ja *maksimiaste* $\Delta(G) = \max\{\, d(v) \mid v \in V \,\}$.

Määritelmä 2.10. Graafi G on *k-säännöllinen*, jos sen jokaisen solmun aste on k.

Esimerkki 2.1. Kuvan 2.2 graafin G solmujen asteet ovat $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 3$ ja $d(v_6) = 3$. Nyt graafin G minimiaste $\delta(G) = 2$ ja maksimiaste $\Delta(G) = 4$.



Kuva 2.2. Graafi G.

2.2 Yhtenäisyys

Määritelmä 2.11. *Polku* on graafi $P = (V, E)$, missä $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$, missä $x_0, \ldots, x_k$ ovat eri solmuja ja $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$. Polku P *yhdistää* solmut

x_0 ja x_k, joka tarkoittaa sitä, että solmujen x_0 ja x_k välillä on polku P. Solmuja x_0 ja x_k kutsutaan polun P *päätesolmuiksi*. Solmut $x_1, \ldots, x_{k-1}$ ovat polun P *sisäsolmuja*. Polkua P merkitään $P = x_0 \ldots x_k$.

Olkoot $A, B \subseteq V$. Polku P yhdistää joukot A ja B, jos se yhdistää jotkin solmut $v_1 \in A$ ja $v_2 \in B$.

Polulle, joka yhdistää kaksi solmua v_1 ja v_2, käytetään myös merkintää v_1–v_2 ja polulle, joka yhdistää kaksi joukkoa A ja B merkintää A–B. Polkua, jonka pituus on nolla, kutsutaan tyhjäksi poluksi. Kyseinen polku on silloin vain solmu. Jokaisesta graafin solmusta on siis ainakin yksi polku solmuun itseensä.

Määritelmä 2.12. Polun *pituus* on polun särmien lukumäärä. Polkua, jonka pituus on k, merkitään P^k.

Määritelmä 2.13. Jos $P = x_0 \ldots x_{k-1}$ on polku ja $k \geqslant 3$, niin graafia $C = P + x_{k-1}x_0$ kutsutaan *silmukaksi*.

Määritelmä 2.14. Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Jos graafin G minkä tahansa kahden solmun välillä on polku, niin graafi G on *yhtenäinen*. Jos graafi G on yksisolmuinen, niin se on yhtenäinen, koska kyseinen solmu on silloin tyhjä polku.

Määritelmä 2.15. Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Graafin G maksimaalista yhtenäistä aligraafia kutsutaan graafin G *komponentiksi*.

Määritelmä 2.16. Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Jos $A, B \subseteq V$ ja $X \subseteq V \cup E$ ovat sellaisia joukkoja, että jokainen A–B polku graafissa G sisältää solmun tai särmän joukosta X, niin sanotaan, että X *separoi* joukot A ja B graafissa G.

Määritelmä 2.17. Särmää, joka separoi päätepisteensä, kutsutaan *sillaksi*.

Määritelmä 2.18. Polku on *piiri*, jos sen alku- ja loppusolmu ovat samat ja siinä on vähintään yksi särmä.

Määritellään seuraavaksi Eulerin graafi ja esitetään lause, jota tarvitaan myöhemmin esitettävässä todistuksessa.

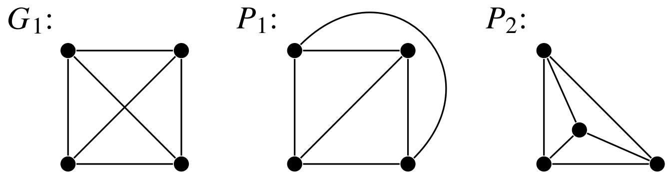
Määritelmä 2.19. Graafin G piiri on *Eulerin piiri*, jos se sisältää graafin jokaisen särmän täsmälleen kerran. Graafi G on *Eulerin graafi*, jos siinä on Eulerin piiri.

Lause 2.1. *Graafi G on Eulerin graafi, jos ja vain jos graafin G jokaisen solmun aste on parillinen.*

Todistus (ks. [4, s. 23]). □

2.3 Tasograafi

Määritelmä 2.20. Graafi G on *tasograafi*, jos se voidaan piirtää tasoon siten, että mitkään graafin särmät eivät leikkaa toisiaan. Tällä tavoin piirrettyä graafia kutsutaan graafin G *tasoesitykseksi*. Tasoesitys voidaan ajatella tason $\mathbb{R}^2$ osajoukkona, jolle käytetään samaa merkintää G. Osajoukko muodostuu solmuja esittävistä pisteistä ja niitä yhditävistä kaarista.



Kuva 2.3. Graafi G ja sen tasoesitykset P_1 ja P_2.

Määritelmä 2.21. Olkoon G tasograafi. Joukon $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tasoalueita kutsutaan graafin G *alueiksi*. Nämä ovat joukon $\mathbb{R}^2$ avoimia osajoukkoja ja näin ollen niiden rajat ovat graafissa G. Koska graafi G on rajoitettu (toisin sanoen graafi G sijaitsee riittävän suuren kiekon D sisällä), niin täsmälleen yksi sen alueista on rajoittamaton. Kyseessä oleva alue on se, joka sisältää joukon $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Tämä alue on graafin G *ulkoalue* ja muut alueet ovat graafin G *sisäalueita*. Graafin G alueiden joukolle käytetään merkintää $F(G)$.

Määritelmä 2.22. Tasograafi G on *tasokolmiointi*, jos sen jokainen alue on rajoitettu kolmiolla.

Lause 2.2 (Eulerin kaava)**.** *Olkoon G yhtenäinen tasograafi, jossa on n solmua, m särmää ja l aluetta. Tällöin*

$$n - m + l = 2.$$

Todistus (ks. [4, s. 97]). □

Lause 2.3. *Tasograafissa, jossa on $n \geqslant 3$ solmua, on korkeintaan $3n - 6$ särmää. Jokaisella n-solmuisella tasokolmioinnilla on $3n - 6$ särmää.*

Todistus (ks. [4, s. 97]). □

Lauseen 2.3 avulla voidaan todistaa seuraava tulos, jota tarvitaan myöhemmin esitettävissä todistuksissa.

Lause 2.4. *Jokaisessa tasograafissa on solmu, jonka aste on korkeitaan 5.*

Todistus (vrt. [3, s. 114]). Tulos on ilmeinen tasograafeille, joilla on $n \leqslant 6$ solmua. Tehdään vastaoletus: olkoon G graafi, jolla on n solmua ja m särmää, ja jonka kaikkien solmujen aste on 6 tai enemmän. Tällöin $n \geqslant 7$ ja

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant 6n$$

ja näin ollen $m \geqslant 3n$. Lauseen 2.3 nojalla graafi G ei ole tasograafi. Näin ollen on päädytty ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee. □

Eulerin kaava on hyödyllinen muun muassa silloin, kun halutaan osoittaa, että tietyt graafit eivät voi olla tasograafeja. Esimerkiksi graafilla K^5 on $10 > 3 \cdot 5 - 6$ särmää, joka on enemmän kuin sallitaan lauseen 2.3 perusteella.

Seuraavaksi esitetään lyhyesti muutamia topologisia määritelmiä ja apulause, jota tarvitaan viisivärilauseen 3.3 todistuksessa.

Määritelmä 2.23. *Jana* Euklidisessa tasossa on joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukko, joka on muotoa $\{\, p + \lambda(q - p) \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \,\}$, missä $p, q \in \mathbb{R}^2$ ja $p \neq q$.

Määritelmä 2.24. *Monikulmio* on joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukko, joka muodostuu äärellisen monesta janasta, jotka on piirretty tasoon siten, että jokaisen janan päätepiste on täsmälleen kahden janan päätepiste. Lisäksi vaaditaan, että janat eivät leikkaa toisiaan kuin päätepisteissä.

Määritelmä 2.25. *Murtoviiva* on joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukko, joka muodostuu äärellisen monesta janasta, jotka on piirretty tasoon siten, että alku- ja loppupisteet ovat täsmälleen yhden janan päätepisteitä ja jokaisen muun janan päätepiste on täsmälleen kahden janan päätepiste. Lisäksi vaaditaan, että janat eivät leikkaa toisiaan kuin päätepisteissä.

Määritelmä 2.26. Jos P on murtoviiva pisteiden x ja y välillä, niin joukkoa $P \setminus \{x, y\}$ kutsutaan murtoviivan P *sisäosaksi*, jota merkitään $\mathring{P}$.

Lause 2.5 (Jordanin käyrälause). *Jos $P \subseteq \mathbb{R}^2$ on monikulmio, niin joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus P$ on täsmälleen kaksi aluetta, joista täsmälleen yksi on rajoitettu. Koko monikulmio P on näiden kummankin alueen rajana.*

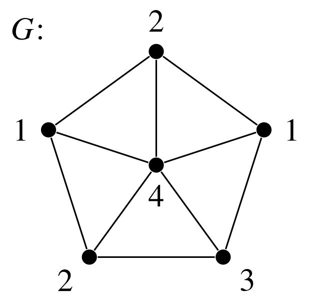
3 Graafien värittämisestä

Graafin väritysongelma on yksi tunnetuimmista ongelmista graafiteorian alalla ja sillä on pitkä historia. Tiivistettynä väritysongelmassa on kyse siitä, kuinka graafin solmuihin voidaan liittää värit siten, että samanväristen solmujen välissä ei ole särmää ja siten, että käytettyjen värien määrä on minimoitu.

3.1 Määritelmiä

Seuraavat määritelmät pohjautuvat Diestelin teokseen [4, s. 119].

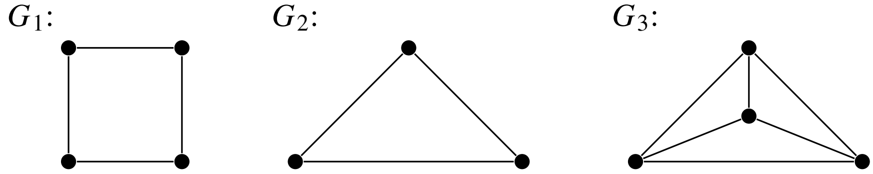
Määritelmä 3.1. Graafin $G = (V, E)$ *solmuväritys* on sellainen kuvaus $c : V \to S$, että $c(v) \neq c(w)$ aina, kun v ja w ovat vierussolmuja. Joukon S alkioita kutsutaan käytettävissä oleviksi *väreiksi*.



Kuva 3.1. Graafin G solmuväritys $c : V \to \{1, 2, 3, 4\}$.

Määritelmä 3.2. Graafin G *väriluku* $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, joka tarvitaan graafin värittämiseen. Graafi G, jonka väriluku $\chi(G) = k$, on k-värinen. Jos $\chi(G) \leqslant k$, niin graafi G on väritettävissä k värillä.

Esimerkki 3.1. Kuvan 3.2 graafien väriluvut ovat $\chi(G_1) = 2$, $\chi(G_2) = 3$ ja $\chi(G_3) = 4$.



Kuva 3.2. Graafit G_1, G_2 ja G_3.

3.2 Nelivärilause ja sen historia

Vuonna 1852 Francis Guthrie havaitsi, että Englannin maakunnat voitiin värittää neljällä värillä siten, että vierekkäiset maakunnat ovat eriväriset. Tämä johti hänet kysymykseen, voitaisiinko jokainen kartta värittää neljällä värillä. Ongelma tuotiin ensimmäistä kertaa esiin suuremmalle yleisölle vuonna 1878, jolloin Arthur Cayley esitti sen London Mathematics Societyn tapaamisessa. Vuosi myöhemmin Alfred Kempe julkaisi todistuksen, joka kuitenkin osottautui virheelliseksi yli kymmenen vuotta myöhemmin. Vuonna 1890 Heawood osoitti vastaesimerkillä Kempen todistuksen vääräksi. Heawood pystyi kuitenkin hyödyntämään Kempen todistusta ja osoittamaan, että jokainen kartta voidaan värittää viidellä värillä. Näin hän sai aikaan viisivärilauseen todistuksen. [3, s. 205–206]

Neliväriongelmasta tuli yksi diskreetin matematiikan kuuluisimmista ongelmista, kunnes vuonna 1977 Appel ja Haken julkasivat nelivärilauseen ensimmäisen yleisesti hyväksytyn todistuksen. Todistus tehtiin tietokoneavusteisesti ja sen suorittaminen vaati 1200 tuntia tietokoneaikaa. Lisätietoa aiheesta löytyy lähteestä [1, s. 711–712].

Lause 3.1 (Nelivärilause)**.** *Jokainen tasograafi voidaan värittää neljällä värillä.*

3.3 Viisivärilause

Tässä aliluvussa esitetään ja todistetaan viisivärilause. Johdatteluna esitetään ensin kuusivärilause ja sen todistus induktiolla. Todistuksen ideana on valita graafin G sellainen solmu v, jonka aste on korkeintaan viisi ja osoittaa, että solmu v voidaan värittää eri värillä kuin siihen yhteydessä olevat solmut.

Lause 3.2 (Kuusivärilause)**.** *Jokainen tasograafi voidaan värittää kuudella värillä.*

Todistus (vrt. [2, s. 279]). Todistetaan induktiollla graafin G solmujen lukumäärän n suhteen.

Perusaskel: Kun $n \leqslant 6$, niin tulos on triviaali, koska silloin jokainen solmu voidaan värittää eri värillä.

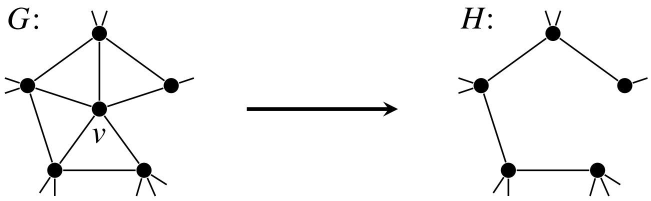
Induktio-oletus: Jokainen tasograafi, jolla on $n-1$ solmua voidaan värittää kuudella värillä.

Induktioväite: Jokainen tasograafi, jolla on n solmua voidaan värittää kuudella värillä.

Induktioväitteen todistus:

Olkoon G tasograafi, jolla on $n \geqslant 7$ solmua. Lauseen 2.4 nojalla graafissa G on solmu v, jonka aste on korkeintaan 5. Jos graafista G poistetaan solmu v ja siihen yhteydessä olevat särmät, saadaan graafi $H = G - v$, jossa on $n - 1$ solmua (ks. kuva 3.3). Induktio-oletuksen nojalla tämä graafi voidaan värittää kuudella värillä. Siis graafilla H on solmuväritys $c : V(H) \to \{1, \ldots, 6\}$. Koska solmulla v on korkeintaan viisi vierussolmua $v_1, \ldots, v_5$, joilla on solmuväritys $c' : \{v_1, \ldots, v_5\} \to \{1, \ldots, 5\}$, niin saadaan graafin G solmuväritys $c'' : V(G) \to \{1, \ldots, 6\}$ asettamalla $c''(i) = c(i)$, jos $i \in V(H)$ ja $c''(v) = j$, missä j ei kuulu värityksen c' väreihin. Näin ollen on löydetty graafin G 6-väritys. Siis, jos väite on tosi kaikille tasograafeille, joilla on $n - 1$ solmua, niin väite on tosi tasograafeille, joilla on n solmua.

Näin ollen matemaattisen induktioperiaatteen nojalla jokainen tasograafi, jolla on n solmua, voidaan värittää kuudella värillä. □



Kuva 3.3. Solmun v poisto.

Seuraavaksi todistetaan viisivärilause niin ikään induktiolla mutta yksityiskohdat ovat monimutkaisempia kuin kuusivärilauseen todistuksessa. Todistuksen ideana on ensin valita sellainen graafin G solmu v, jolla on täsmälleen viisi vierussolmua, ja jotka ovat kaikki väritetty eri väreillä. Sitten tarkoituksena on osoittaa, että solmu v voidaan värittää jollakin näistä viidestä väristä, jolloin saadaan aikaan graafin G 5-väritys.

Lause 3.3 (Viisivärilause)**.** *Jokainen tasograafi voidaan värittää viidellä värillä.*

Todistus (vrt. [4, s. 120]). Todistetaan induktiolla graafin G solmujen lukumäärän n suhteen.

Perusaskel: Kun $n \leqslant 5$, niin tulos on triviaali, koska silloin jokainen solmu voidaan värittää eri värillä.

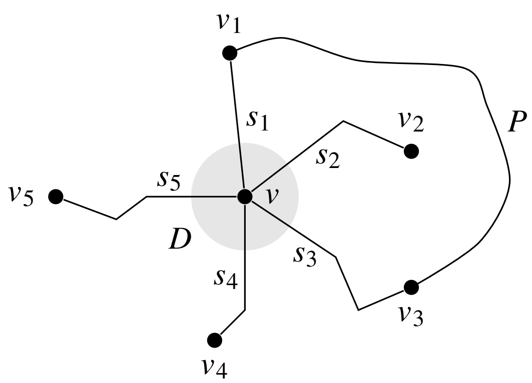
Induktio-oletus: Jokainen tasograafi, jolla on $n - 1$ solmua, voidaan värittää viidellä värillä.

Induktioväite: Jokainen tasograafi, jolla on n solmua, voidaan värittää viidellä värillä.

Induktioväitteen todistus:

Olkoon G tasograafi, jolla on $n \geqslant 6$ solmua ja m särmää. Lauseen 2.4 nojalla graafissa G on solmu v, jonka aste on korkeintaan 5. Koska graafisssa $H = G - v$ on $n - 1$ solmua, niin induktio-oletuksen nojalla graafi H voidaan värittää viidellä värillä. Siis graafilla H on solmuväritys $c : V(H) \to \{1, \dots, 5\}$. Jos väritys c käyttää solmun v vierussolmujen värittämiseen korkeintaan neljää väriä, niin se voidaan laajentaa graafin G 5-väritykseksi liittämällä solmuun v käyttämättä jäänyt väri. Voidaan siis olettaa, että solmulla v on täsmälleen viisi vierussolmua, ja että ne kaikki on väritetty eri väreillä.

Olkoon D niin pieni avoin kiekko solmun v ympärillä, että se kohtaa ainoastaan ne viisi graafin G särmäjanaa, jotka sisältävät solmun v. Numeroidaan nämä janat $s_1, \dots, s_5$ myötäpäivään kiekossa D ja olkoon vv_i särmä, joka sisältää janan s_i $(i = 1, \dots, 5)$. Voidaan olettaa, että $c(v_i) = i$ jokaisella i.



Kuva 3.4. Viisivärilauseen todistus.

Osoitetaan ensin, että jokainen v_1–v_3 polku $P \subseteq H - \{v_2, v_4\}$ erottaa solmun v_2 solmusta v_4 graafissa H. Selvästi näin tapahtuu, jos ja vain jos silmukka $C = vv_1Pv_3v$ erottaa solmun v_2 solmusta v_4 graafissa G. Todistetaan tämä osoittamalla, että solmut v_2 ja v_4 sijaitsevat silmukan C eri alueissa.

Valitaan janan s_2 sisäpiste x_2 kiekossa D ja janan s_4 sisäpiste x_4 kiekossa D. Tällöin alueen $D \setminus (s_1 \cup s_3) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus C$ jokainen piste voidaan liittää murtoviivalla pisteeseen x_2 tai x_4. Tämä tarkoittaa sitä, että x_2 ja x_4 (ja näin ollen myös v_2 ja v_4) sijaitsevat silmukan C eri alueissa: muuten kiekko D kohtaisi vain yhden silmukan C alueista, mikä olisi ristiriidassa sen kanssa, että v sijaitsee molempien alueiden rajalla (Lause 2.5).

Olkoon $H_{i,j}$, missä $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, graafin H indusoitu aligraafi, johon kuuluvat kaikki ne solmut, jotka on väritetty väreillä i ja j. Voidaan olettaa, että aligraafin

$H_{1,3}$ komponentti C_1, joka sisältää solmun v_1, sisältää myös solmun v_3. Nimittäin jos vaihdetaan värit 1 ja 3 keskenään kaikille komponentin C_1 solmuille, saadaan muodostettua toinen graafin H 5-väritys; jos $v_3 \notin C_1$, niin solmut v_1 ja v_3 molemmat väritetään tässä uudessa värityksessä värillä 3. Tällöin saadaan muodostettua graafin G 5-väritys asettamalla solmulle v väri 1. Siis aligraafi $H_{1,3}$ sisältää v_1–v_3 polun P. Kuten yläpuolella on osoitettu, polku P erottaa solmun v_2 solmusta v_4 graafissa H. Koska $P \cap H_{2,4} = \emptyset$, niin tämä tarkoittaa sitä, että solmut v_2 ja v_4 sijaitsevat aligraafin $H_{2,4}$ eri komponenteissa. Vaihdetaan sitten värien 2 ja 4 paikkaa komponentissa, joka sisältää solmun v_2. Tällöin solmu v_2 siis väritetään uudelleen värillä 4. Nyt solmulla v ei enää ole vierussolmua, joka olisi väritetty värillä 2, joten tämä väri voidaan antaa solmulle v. Näin ollen on saatu aikaan graafin G 5-väritys. Siis väite on tosi tasograafeille, joilla on n solmua.

Näin ollen matemaattisen induktioperiaatteen nojalla jokainen tasograafi, jolla on n solmua, voidaan värittää viidellä värillä.

□

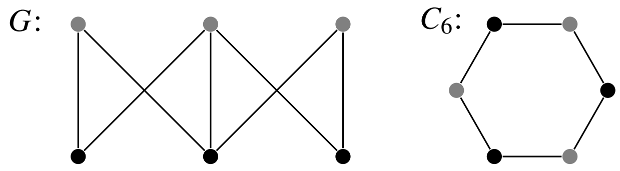
3.4 Graafien värittäminen kahdella värillä

Tässä luvussa tarkastellaan graafien värittämistä kahdella värillä. Ensin käsitellään graafin solmujen värittämistä ja sitten graafin alueiden värittämistä. Solmujen värittämistä koskevat tiedot pohjautuvat Bonan [2, s. 243–245] teokseen ja alueiden värittämistä koskevat tiedot Lewisin [5, s. 114–116] teokseen.

Lause 3.4. *Graafi G voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos se on kaksijakoinen.*

Määritelmä 3.3. Graafi $G = (V, E)$ on *kaksijakoinen*, jos solmujoukko V voidaan jakaa kahteen sellaiseen epätyhjään joukkoon V_1 ja V_2, että jokaisen särmän toinen päätesolmu kuuluu joukkoon V_1 ja toinen joukkoon V_2.

Esimerkki 3.2. Kuvassa 3.5 on esitetty kaksi kaksijakoisia graafia, jotka siis voidaan värittää kahdella värillä. Graafista G nähdään, että väriluokkien sisällä ei kulje särmiä ja silmukassa C_6 solmut voidaan värittää vuorotellen eri värisiksi.



Kuva 3.5. Kaksijakoiset graafit G ja C_6.

Yksinkertainen esimerkki graafista, joka ei ole väritettävissä kahdella värillä, on kolmio K^3. Selvästi, jos kolmiossa on musta solmu v_1 ja harmaa solmu v_2, niin kolmatta solmua v_3 ei voida värittää näillä väreillä, vaan tarvitaan kolmas väri. On siis selvää, että mitään graafia, joka sisältää kolmion, ei voida värittää kahdella värillä. Se, että graafissa ei ole kolmiota, ei kuitenkaan tarkoita sitä, että graafi voitaisiin värittää kahdella värillä. Hyvä esimerkki tästä on viisikulmio. Voidaan siis yleisesti päätellä, että mitään paritonta silmukkaa ei voida värittää kahdella värillä. Näin ollen siis mitään graafia, jossa on pariton silmukka, ei voida värittää kahdella värillä. Todistetaan tämä seuraavaksi täsmällisesti.

Lause 3.5. *Graafi voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos siinä ei ole paritonta silmukkaa.*

Todistus (vrt. [2, s. 244]). Olkoon G yhtenäinen graafi. Oletetaan ensin, että graafi G voidaan värittää kahdella värillä. Tehdään vastaoletus, että graafissa G on pariton silmukka $v_1v_2\dots v_{2m+1}$. Voidaan olettaa, että solmu v_1 on väritetty valkoisella. Tällöin solmun v_2 tulee olla musta, ja edelleen viimeisenä olevan solmun v_{2m+1} tulee olla valkoinen. Koska v_1v_{2m+1} on särmä graafissa G, päädytään ristiriitaan. Näin ollen graafi G ei sisällä paritonta silmukkaa.

Oletetaan sitten, että graafissa G ei ole paritonta silmukkaa. Valitaan graafin G mikä hyvänsä solmu v ja väritetään se valkoisella. Määritellään minkä hyvänsä muun solmun w väri seuraavasti: jos lyhin polku solmusta v solmuun w on pituudeltaan parillinen, niin asetetaan solmun w väriksi valkoinen, ja jos lyhin polku solmusta v solmuun w on pituudeltaan pariton, niin asetetaan solmun w väriksi musta. Osoitetaan sitten, että minkään kahden samanvärisen solmun välillä ei ole särmää.

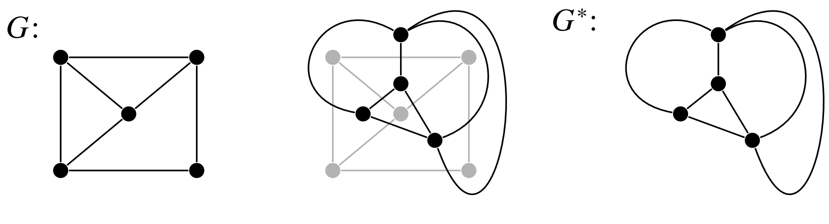
Tehdään vastaoletus, että p ja q ovat valkoisia solmuja, joiden välillä on särmä. Olkoon P lyhin polku solmusta v solmuun p, ja olkoon Q lyhin polku solmusta v solmuun q. Tällöin molemmilla poluilla P ja Q on parillinen määrä särmiä. Kun kuljetaan solmusta v polun P kautta solmuun p, ja sitten särmää pitkin solmusta p solmuun q ja edelleen takaisin solmuun v polun Q kautta, saadaan silmukka C, jossa on pariton määrä särmiä. Näin ollen on päädytty ristiriitaan.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa solmut p ja q ovat mustia. Tehdään vastaoletus, että p ja q ovat mustia solmuja, joiden välillä on särmä. Olkoon P lyhin polku solmusta v solmuun p, ja olkoon Q lyhin polku solmusta v solmuun q. Tällöin molemmilla poluilla P ja Q on pariton määrä särmiä. Kun kuljetaan solmusta v polun P kautta solmuun p, ja sitten särmää pitkin solmusta p solmuun Q ja edelleen takaisin solmuun v polun Q kautta, saadaan silmukka C, jossa on pariton määrä särmiä. Näin ollen on päädytty ristiriitaan.

Siis graafi G voidaan värittää kahdella värillä. □

Tarkastellaan seuraavaksi graafin alueiden värittämistä kahdella värillä. Solmujen värittämisen ja alueiden värittämisen yhteys tulee selvemmäksi, kun tarkastellaan graafin duaalia. Olkoon G tasograafi, ja muodostetaan uusi graafi G^* seuraavasti. Piirretään ensin solmu v_i^* jokaisen graafin G alueen F_i sisälle. Jokaista graafissa G olevaa särmää e kohti piirretään särmä e^*, joka leikkaa särmän e mutta ei leikkaa mitään muita särmiä graafissa G. Särmän e^* tulee yhdistää kaksi solmua graafissa G^*, jotka vastaavat graafin G kahta aluetta, jotka särmä e erottaa (ks. Kuva 3.6).

Määritelmä 3.4. Graafia G^*, joka määriteltiin yllä, kutsutaan tasograafin G *duaaliksi*.



Kuva 3.6. Esimerkki graafin G duaalin G^* muodostamisesta.

Seuraavasta lauseesta käy ilmi solmujen ja alueiden värittämisen välinen suhde.

Lause 3.6. *Olkoon G yhtenäinen tasograafi, jossa ei ole silmukoita, ja olkoon G^* sen duaali. Graafin G alueet ovat k-väritettäviä, jos ja vain jos graafin G^* solmut ovat k-väritettäviä.*

Todistus (ks. [5, s. 115]). □

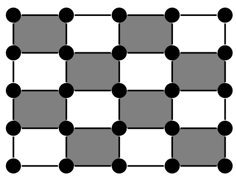
Lause 3.7. *Tasograafin G alueet, joissa ei ole siltoja, voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos graafi G^* on Eulerin graafi.*

Todistus (vrt. [5, s. 116]). Määritelmän 3.4 mukaan graafin solmut voidaan värittää kahdella värillä, jos ja vain jos graafi on kaksijakoinen. Näin ollen tulee osoittaa, että kaksijakoisen graafin G duaali G^* on Eulerin graafi ja päinvastoin.

Olkoon G^* yhtenäinen Eulerin tasograafi. Lauseen 2.1 mukaan duaalin G^* jokaisen solmun aste on parillinen. Koska solmun aste duaalissa G^* vastaa graafin G aluetta ympäröivien särmien lukumäärää, niin särmät, jotka ympäröivät graafin G jokaista aluetta, muodostavat parillisia silmukoita. Voidaan todistaa, että tällöin kaikki graafin G silmukat ovat parillisia ja näin ollen lauseen 3.5 nojalla, graafi G voidaan värittää kahdella värillä.

Oletetaan sitten, että graafi G voidaan värittää kahdella värillä. Tämä tarkoittaa sitä, että graafissa G ei ole yhtään paritonta silmukkaa, ja koska G^* on tasograafi, niin sen jokainen alue on ympäröity parillisella määrällä särmiä. Näin ollen graafin G^* jokaisen solmun aste on parillinen, joten G^* on Eulerin graafi. □

Käytännön esimerkki lauseesta 3.7 löytyy esimerkiksi laatoitusteollisuudesta, jossa ollaan usein kiinnostuneita käyttämään laattoihin kahta väriä siten, että vierekkäiset laatat ovat aina erivärisilt. Alla olevassa kuvassa 3.7 on esitetty eräs esimerkki. Tarkastelemalla kuvan graafia, havaitaan, että se on Eulerin graafi, koska graafin jokainen alue on ympäröity parillisella määrällä särmiä.



Kuva 3.7. Esimerkki laattojen värittämisestä kahdella värillä.

3.5 Ylärajoja graafin väriluvulle

Koska graafin väriluvun määrittäminen on yleensä vaikeaa, väriluvulle on pyritty löytämään ylä- ja alarajoja. Seuraavaksi esitetään *ahne algoritmi* ja muutamia lauseita koskien väriluvun ylärajaa.

Suoraan väriluvun määritelmän perusteella voidaan muodostaa seuraava yläraja:

Lause 3.8. *Jokaiselle graafille G, jossa on m särmää, pätee*

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Todistus (vrt. [4, s. 122]). Olkoon G graafi, jossa on m särmää, ja olkoon c graafin G väritys, jossa on käytetty $k = \chi(G)$ väriä. Silloin graafilla G on vähintään yksi särmä minkä tahansa kahden väriluokan välillä: jos näin ei olisi, niin samaa väriä oltaisiin voitu käyttää molemmissa luokissa. Siis $m \geqslant \frac{1}{2}k(k-1)$. Ratkaisemalla tämä epäyhtälö k:n suhteen saadaan $k \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. □

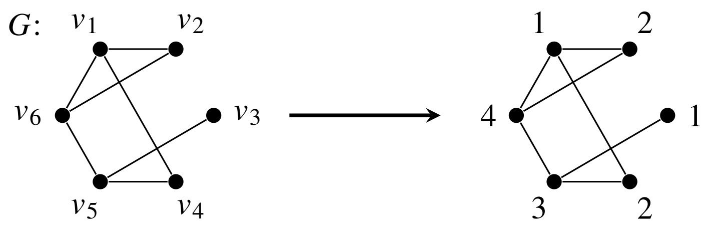
Eräs yksinkertainen ja hyvin tunnettu tapa värittää graafi G, käyttämättä liikaa värejä, on seuraava ahne algoritmi:

Ahne algoritmi. *Oletetaan, että graafin G solmut on listattu järjestyksessä* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

1. *Asetetaan solmulle* v_1 *väri 1.*

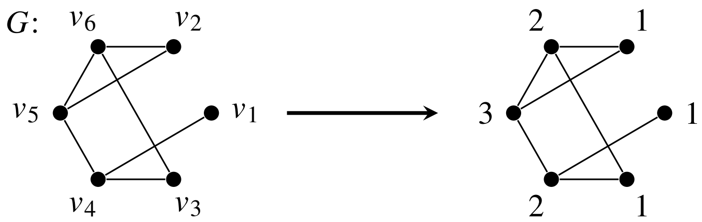
2. *Kun solmuille* $v_1, v_2, \ldots, v_j$ *on asetettu värit, missä* $1 \leqslant j < n$*, niin solmulle* v_{j+1} *asetaan pienin väri, jota ei ole asetettu solmun* v_{j+1} *vierussolmuille, jotka kuuluvat joukkoon* $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$.

Esimerkki 3.3. Kuvassa 3.8 on esitetty graafin G ahneen algoritmin mukainen solmuväritys. Solmulle v_1 asetetaan ensin väri 1. Sitten solmulle v_2 asetetaan väri 2, koska solmut v_1 ja v_2 ovat vierussolmuja. Solmulle v_3 voidaan asettaa väri 1, koska se ei ole solmun v_1 vierussolmu. Solmulle v_4 puolestaan ei voida asettaa väriä 1, joten asetetaan sille väri 2. Solmu v_5 on solmujen v_3 ja v_4 vierussolmu, joten asetetaan sille väri 3. Vastaavasti solmulle v_6 asetetaan väri 4. Näin ollen graafin G värittämiseen tarvitaan neljä väriä.



Kuva 3.8. Graafin G solmuväritys $V \to \{1, 2, 3, 4\}$.

Muuttamalla graafin G solmujen järjestystä saadaan aikaan kuvassa 3.9 esitetty solmuväritys, jonka mukaan graafin G värittämiseen tarvitaan kolme väriä.



Kuva 3.9. Graafin G solmuväritys $V \to \{1, 2, 3\}$.

Kuten esimerkissä 3.3 huomattiin, solmujen valitsemisjärjestyksellä on vaikutusta siihen, kuinka monella värillä graafi voidaan värittää. Ahneessa algoritmissa käytettyjen värien määrä on kuitenkin korkeintaan $1 + \Delta(G)$. Edellä olevassa esimerkissä $1 + \Delta(G) = 4$, joten väite on voimassa. Tämän myötä päästään seuraavaan lauseeseen:

Lause 3.9. *Jokaiselle graafille G pätee*

$$\chi(G) \leqslant 1 + \Delta(G).$$

Todistus (ks. [3, s. 182]). Oletetaan, että graafin G solmut on listattu järjestyksessä $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ja että graafiin G on käytetty ahnetta algoritmia. Silloin solmulle v_1 on asetettu väri 1. Solmulle v_i, missä $2 \leqslant i < n$, on asetettu joko väri 1 tai väri $k + 1$, missä k on suurin sellainen kokonaisluku, että kaikki värit $1, 2, \ldots, k$ on käytetty värittämään solmun v_i vierussolmut joukossa $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$. Koska enintään $d(v_i)$ solmun v_i vierussolmua kuuluvat joukkoon S, niin luvun k suurin arvo on $d(v_i)$. Näin ollen väri, joka asetetaan solmulle v_i, on korkeintaan $1 + d(v_i)$. Siis

$$\chi(G) \leqslant \max\{\, 1 + d(v_i) \,\} = 1 + \Delta(G).$$

□

Lauseen 3.9 yhtäsuurus on voimassa silloin, kun graafi G on täydellinen tai pariton silmukka. Kaikissa muissa tapauksissa tätä ylärajaa voidaan hieman tarkentaa Brooksin lauseella (Lause 3.10), jonka mukaan graafin väriluku on aina pienempi tai yhtä suuri kuin graafin maksimiaste. Tämä todistetaan induktiolla ja tuloksen osoittamiseksi käytetään neljää eri ominaisuutta.

Lause 3.10 (Brooks 1941)**.** *Olkoon G yhtenäinen graafi. Jos G ei ole täydellinen eikä pariton silmukka, niin*

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

Todistus (vrt. [4, s. 123]). Todistetaan induktiolla graafin G solmujen lukumäärän n suhteen.

Perusaskel: Kun $n = 1$, niin silloin graafi G on täydellinen, joten tulos on triviaali.

Induktio-oletus: Väite pätee graafeille, joilla on $n - 1$ solmua.

Induktioväite: Väite pätee graafeille, joilla on n solmua.

Induktioväitteen todistus:

Olkoon G yhtenäinen graafi, jolla on n solmua. Jos graafin G minkä hyvänsä solmun aste olisi vähemmän kuin $\Delta = \Delta(G)$, niin silloin poistamalla tämä solmu, ja käyttämällä induktio-oletusta, todistus voitaisiin päättää. Näin ollen voidaan olettaa, että graafi G on Δ-säännöllinen. Kun $\Delta \leqslant 2$, niin silloin graafi G on joko polku tai silmukka, joten nämä tapaukset ovat triviaaleja. Oletetaan siis, että $\Delta \geqslant 3$. Tehdään vastaoletus, että $\chi(G) > \Delta(G)$.

Olkoon $v \in G$ solmu ja $H = G - v$. Tällöin $\chi(H) \leqslant \Delta$. Jokaiselle graafin H komponentille H' pätee induktio-oletuksen nojalla $\chi(H') \leqslant \Delta(H') \leqslant \Delta$ silloin, kun komponentti H' ei ole täydellinen tai pariton silmukka. Jos H' on täydellinen tai pariton silmukka, niin $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leqslant \Delta$, koska jokaisella komponentin H' solmulla on maksimiaste komponentissa H' ja yksi tälläinen solmu on myös yhteydessä graafin G solmuun v.

Koska graafi H voi olla Δ-väritettävä mutta graafi G ei, niin saamme seuraavan:

(1) *Jokainen graafin H Δ-väritys käyttää kaikkia värejä $1, \ldots, \Delta$ solmun v vierussolmujen värittämiseen. Siis $d(v) = \Delta$.*

Merkitään v_i solmun v vierussolmua, joka on väritetty värillä i ($i = 1, \ldots, \Delta$) missä hyvänsä graafin H Δ-värityksessä. Olkoon $H_{i,j}$ (kaikilla $i \neq j$) graafin H aligraafi, johon kuuluvat kaikki ne solmut, jotka on väritetty väreillä i ja j. Silloin:

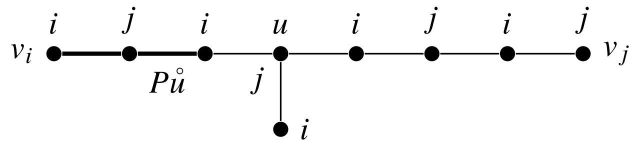
(2) *Kaikilla $i \neq j$, solmut v_i ja v_j sijaitsevat samassa aligraafin $H_{i,j}$ komponentissa $C_{i,j}$.*

Jos solmut v_i ja v_j kuuluisivat eri komponentteihin värit i ja j voitaisiin vaihtaa keskenään toisessa näistä komponenteista, jolloin solmut v_i ja v_j väritettäisiin samalla värillä. Tämä on kuitenkin ristiriidassa kohdan (1) kanssa.

(3) *$C_{i,j}$ on aina polku solmusta v_i solmuun v_j.*

Olkoon P polku solmusta v_i solmuun v_j komponentissa $C_{i,j}$. Koska $d_H(v_i) \leqslant \Delta - 1$, niin solmun v_i vierussolmuilla on pareittain eri värit: muuten solmu v_i voitaisiin värittää uudelleen, mikä on ristiriidassa kohdan (1) kanssa. Näin ollen solmun v_i vierussolmu polussa P on sen ainoa vierussolmu komponentissa $C_{i,j}$. Yhtäpitävästi myös solmun v_j vierussolmu polussa P on sen ainoa vierussolmu komponentissa $C_{i,j}$. Siis jos $C_{i,j} \neq P$, niin polussa P on solmu, jolla on kolme samalla värillä väritettyä vierussolmua graafissa H. Olkoon u ensimmäinen tällainen solmu polussa P. Koska enintään $\Delta - 2$ väriä on käytetty solmun u vierussolmuihin, niin solmu u voidaan värittää uudelleen. Mutta tämä saa sisäosan $P\mathring{u}$ kuulumaan aligraafin $H_{i,j}$ komponenttiin, mikä on ristiriidassa kohdan (2) kanssa (Kuva 3.10). Siis $C_{i,j}$ on polku solmusta v_i solmuun v_j.

$C_{i,j}$:



Kuva 3.10. Kohdan (3) todistus.

(4) *Polut $C_{i,j}$ ja $C_{i,k}$ kohtaavat vain solmussa v_i, missä i, j ja k ovat erilliset.*

Jos $v_i \neq u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$, niin solmulla u on kaksi vierussolmua, jotka on väritetty värillä j ja kaksi vierussolmua, jotka on väritetty värillä k. Koska $d(u) \leqslant \Delta$, niin on olemassa väri $l \neq i, j, k$, jolla solmu u voidaan värittää uudelleen. Tässä uudessa värityksessä solmut v_i ja v_j sijaitsevat aligraafin $H_{i,j}$ eri komponenteissa, mikä on ristiriidassa kohdan (2) kanssa.

Jos solmun v vierussolmut ovat pareittain vierekkäisiä, niin jokaisella on Δ vierussolmua joukossa $N(v) \cup \{v\}$, joten $G = G[\,N(v) \cup \{v\}\,] = K^{\Delta+1}$. Koska graafi G on täydellinen, ei ole mitään osoitettavaa. Voidaan siis olettaa, että solmut v_1 ja v_2 eivät ole vierussolmuja. Olkoon $u \neq v_2$ solmun v_1 vierussolmu polussa $C_{1,2}$: silloin $c(u) = 2$. Vaihtamalla keskenään värit 1 ja 3 polussa $C_{1,3}$, saadaan aikaan graafin H uusi väritys c': olkoot $v'_i, H'_{i,j}, C'_{i,j}$ jne. määritelty värityksen c' suhteen. Koska v'_3 on solmun v_1 vierussolmu, niin solmu u sijaitsee nyt polussa $C'_{2,3}$, sillä $c'(u) = c(u) = 2$. Kohdan (4) perusteella kuitenkin polku $\mathring{v}_1 C_{1,2}$ säilyttää alkuperäisen värityksensä, joten $u \in \mathring{v}_1 C_{1,2} \subseteq C'_{1,2}$. Näin ollen $u \in C'_{2,3} \cap C'_{1,2}$, mikä on ristiriidassa kohdan (4) kanssa väritykselle c'.

Matemaattisen induktioperiaatteen nojalla on siis osoitettu, että jos graafi G ei ole täydellinen eikä pariton silmukka, niin $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

□

Lähteet

[1] Appel K. ja Haken W. *Every Planar Map is Four-Colorable*, Bulletin of the American Mathematical Society, 82(5), 711–713, syyskuu 1976.

[2] Bona M. *A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory*, 2nd Edition, World Scientific, 2006.

[3] Chartrand G. ja Zhang P. *Chromatic Graph Theory*, 2nd Edition, London, CRC Press LLC, 2020.

[4] Diestel R. *Graph Theory*, 5th Edition, Springer-Verlag Heidelberg, 2017.

[5] Lewis R. *A Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*, London, Springer, 2015.