Salla Virtanen

ALKULUKUJEN MÄÄRÄN ÄÄRETTÖMYYDEN TODISTUKSIA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Tammikuu 2021

Tiivistelmä

Salla Virtanen: Alkulukujen määrän äärettömyyden todistuksia
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Tammikuu 2021

Tutkielman tarkoituksena on esitellä erilaisia tapoja todistaa, että alkulukuja on ääretön määrä. Tutkielmassa myös esitellään matemaatikkoja todistusten takana. Tutkielma pohjautuu vahvasti kirjallisuuteen. Päälähteenä käytetään Romeo Meštrovićin tieteellistä artikkelia *Euclid´s theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proof (300 B.C.-2017) and another proof*, tämän rinnalla käytetään myös Kenneth H. Rosenin kirjaa *Elementary Number Theory and Its Applications* sekä Finen ja Rosenbergin teosta *Number Theory: An Introduction via the Distribution of Primes*.

Erilaisista todistuksista esitetään tunnetuin ja vanhin eli Eukleideen todistus, joka löytyy Eukleideen 13 osaisesta teoksesta Alkeet (latinaksi Elementa). Eukleideen ja hänen todistuksensa lisäksi tutkielmassa esitellään Christian Goldbach sekä hänen todistuksensa alkulukujen määrän äärettömyydestä. Goldbachin todistus esitellään alkuperäisen todistuksen mukaisesti Fermat'n lukuja käyttäen, mutta myös Fibonaccin lukujen avulla. Viimeisessä luvussa esitellään Gaussin jalanjälkiä seurannut Gustav Lejeune Dirichlet sekä hänen todistuksensa idea. Varsinainen todistus on monimutkainen, joten siitä esitellään vain yksinkertaisemmin todistettavissa oleva erikoistapaus eli muotoa $4n + 3$ olevien alkulukujen määrän äärettömyys.

Tutkielmassa on haluttu tuoda esille, että alkulukujen määrän äärettömyys voidaan todistaa usealla eri tavalla ja esitellyissä todistuksissa käytetään hyödyksi tutkielman alussa esiteltyjä käsitteitä, lauseita ja lukujonoja. Tällaisia ovat esimerkiksi jaollisuus, suhteellinen alkuluku, aritmetiikan peruslause, Fibonaccin luvut sekä Fermat'n luvut. Vaikka pohjatietoja on esitetty tutkielman alussa, oletetaan lukijalta kuitenkin lukuteorian ja algebran alkeiden osaamista.

Avainsanat: alkuluku, äärettömyys, Eukleides, Goldbach, Fermat'n luvut,
Fibonaccin luvut, Dirichlet.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa esittelemme erilaisia tapoja todistaa alkulukujen määrän äärettömyys, lisäksi esittelemme kuuluisia matemaatikkoja todistusten takana. Tutkielman luvussa 2 käsittelemme tutkielman aiheen ymmärtämiseksi tarvittavia pohjatietoja, kuten alaluvussa 2.2 esiteltävät Fermat'n luvut. Vaikka esitämmekin pohjatiedot, edellytämme lukijalta kuitenkin lukuteorian ja algebran perustietojen tuntemusta esimerkiksi jaollisuuden osalta.

Alaluvussa 3.1 esittelemme vanhimman ja kuuluisimman todistuksen esittänyttä antiikin kreikkalaista matemaatikkoa Eukleidesta. Tämän jälkeen, alaluvussa 3.2, käsittelemme Eukleideen todistusta alkulukujen määrän äärettömyydestä.

Luvussa 4 esittelemme Venäjän keisarin opettajanakin toiminutta matemaatikkoa Christian Goldbachia. Hänen todistuksensa alkulukujen määrän äärettömyydestä on tiettävästi ensimmäinen, joka poikkesi merkittävästi Eukleideen todistuksesta. Goldbachin todistus pohjautuu äärettömiin lukujonoihin ja näiden termien ominaisuuksiin. Tässä tutkielmassa todistamme alkulukujen määrän äärettömyyden Fermat'n lukujen sekä Fibonaccin lukujen avulla.

Viimeisessä luvussa kerromme Gaussin jalanjälkiä seuranneen Gustav Lejeune Dirichlet'n elämästä ja esitämme Dirichlet'n lauseen (lause 5.1). Dirichlet'n todistusta alkulukujen määrän äärettömyydestä emme esitä sen monimutkaisuuden vuoksi, mutta alaluvussa 5.2 esitämme sen erään erikoistapauksen todistuksen.

Päälähteenä tässä tutkielmassa käytämme Romeo Meštrovićin artikkelia Euclid´s theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proof (300 B.C.-2017) and another proof. Muita käyttämiämme lähdeteoksia ovat muun muuassa Finen ja Rosenbergin kirja Number theory: An Introduction via the Distribution of Primes sekä Rosenin kirja Elementary Number Theory and Its Applications.

2 Esitietoja

Luvussa 2 esittelemme luettelomaisesti pääaiheemme käsittelyssä tarvitsemiamme käsitteitä ja lauseita. Ensimmäisessä alaluvussa määrittelemme käsitteen jaollisuus ja sen erään tämän tutkielman kannalta olennaisen ominaisuuden. Lisäksi määrittelemme jaollisuuden avulla seuraavat käsitteet: suurin yhteinen tekijä, alkuluku ja suhteellinen alkuluku, sekä alkulukuihin liittyvän aritmetiikan peruslauseen. Toisessa alaluvussa esittelemme Fermat'n ja Fibonaccin luvut, joita tarvitsemme luvussa 4.

2.1 Tarvittavia tietoja jaollisuudesta

Määritelmä 2.1. (Vrt. [5, s. 36].) Olkoot a, b kokonaislukuja ja olkoon $a \neq 0$. Sanotaan, että b on *jaollinen* luvulla a, jos on olemassa sellainen kokonaisluku c, että $b = ac$. Luku a on siis luvun b *tekijä* eli a *jakaa* luvun b.

Jos a jakaa luvun b, merkitään $a \mid b$. Muuten merkitään $a \nmid b$.

Esimerkki 2.1. Luku 4 on luvun 8 tekijä, sillä $8 = 4 \cdot 2$, merkitään siis $4 \mid 8$. Luku 3 ei ole luvun 8 tekijä, sillä ei ole olemassa kokonaislukua c siten, että $8 = 3 \cdot c$, merkitään $3 \nmid 8$. Luvun 8 tekijöitä ovat ± 1, ± 2 sekä ± 4.

Lause 2.1. *Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Jos $a \mid b$ ja $b \mid c$ niin $a \mid c$.*

Todistus (Vrt. [5, s. 37]). Koska $a \mid b$ ja $b \mid c$, on määritelmän 2.1 nojalla olemassa sellaiset kokonaisluvut e, f, että $b = ae$ ja $c = bf$. Näin ollen

$$c = bf = (ae)f = a(ef), \qquad ef \in \mathbb{Z}.$$

Siis määritelmän mukaan $a \mid c$. □

Esimerkki 2.2. Aiemmin todettiin, että luku 4 jakaa luvun 8. Lisäksi $16 = 8 \cdot 2$, eli luku 8 jakaa luvun 16. Näin ollen $4 \mid 16$.

Määritelmä 2.2. (Vrt. [4, s. 3].) Olkoon $a > 1$. Lukua a sanotaan *alkuluvuksi*, jos se on jaollinen vain itsellään sekä luvulla 1 ja niiden vastaluvuilla.

Esimerkki 2.3. Luvun 13 tekijät ovat ± 1 ja ± 13. Määritelmän 2.2 mukaan 13 on alkuluku.

Esimerkki 2.4. Alkulukuja ovat esimerkiksi 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Määritelmä 2.3. (Vrt. [1, s. 12].) Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja olkoot $a, b \neq 0$. Lukua $d \in \mathbb{Z}$ sanotaan lukujen a ja b *suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi*, jos $d \mid a$ ja $d \mid b$ ja jos lukujen a ja b mielivaltaisesti valittu tekijä $d_1 \in \mathbb{Z}$ jakaa luvun d. Tekijä on siis kaikista yhteisistä tekijöistä suurin.

Lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä merkitään $\text{syt}(a, b)$.

Esimerkki 2.5. Luvun 102 tekijät ovat ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 17, ± 34, ± 51 ja ± 102.

Luvun 85 tekijät ovat ± 1, ± 5, ± 17 sekä ± 85. Näin ollen $\text{syt}(102, 85) = 17$.

Määritelmä 2.4. (Vrt. [1, s. 12].) Olkoot a ja b kokonaislukuja siten, että $a, b \neq 0$. Jos $\text{syt}(a, b) = 1$ sanotaan, että luvut a ja b ovat *suhteellisia alkulukuja*.

Esimerkki 2.6. Luvun 12 tekijät ovat ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 ja ± 12. Luvun 25 tekijät ovat ± 1, ± 5 ja ± 25. Siis $\text{syt}(12, 25) = 1$, eli luvut ovat suhteellisia alkulukuja.

Lause 2.2 (Aritmetiikan peruslause)**.** *Jokainen positiivinen kokonaisluku $n > 1$ voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukujen tulona, kun alkulukutekijät kirjoitetaan kasvavaan järjestykseen.* Ks. [5, s. 112].

Esimerkki 2.7. Luvut 465 ja 2020 voidaan esittää lauseen 2.2 mukaisesti alkutulojen tulona seuraavasti:

$$465 = 3 \cdot 5 \cdot 31, \quad 2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101.$$

2.2 Fermat'n ja Fibonaccin luvut

Määritelmä 2.5. (Ks. [5, s. 131].) *Fermat'n luvut* ovat

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Jos F_n on alkuluku, sitä sanotaan *Fermat'n alkuluvuksi*.

Esimerkki 2.8. Ensimmäiset Fermat'n luvut ovat

$$\begin{aligned} F_0 &= 2^{2^0} + 1 = 3, \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5, \\ F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 17, \\ F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 257, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Määritelmä 2.6. (Ks. [5, s. 30].) *Fibonaccin luvut* on rekursiivisesti määritelty niin, että $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ ja

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{kaikille } n \geq 3.$$

Esimerkki 2.9. Ensimmäiset Fibonaccin luvut ovat

$$\begin{aligned} &f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \\ &f_3 = f_2 + f_1 = 2, \\ &f_4 = f_3 + f_2 = 3, \\ &f_5 = f_4 + f_3 = 5, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

3 Eukleideen todistus alkulukujen määrän äärettomyydestä

3.1 Eukleides

Eukleides oli antiikin kreikkalainen matemaatikko, joka eli noin 300 eaa. aikaan. Hänen elämästään ei ole säilynyt kovin paljon tietoa, mutta hänen tiedetään toimineen opettajana Ptolemaios I:n perustamassa yliopistossa Museoinissa Aleksandriassa [3, s. 24]. Tunnetuin teos Eukleideen tuotannosta on 13-osainen *Alkeet*, alkuperäiseltä nimeltään *Stoikheia*, latinaksi *Elementa*, josta löytyy myös todistus alkulukujen määrän äärettömyydestä [5, s. 102]. Teosta käytettiin geometrian oppikirjana yli kahden tuhannen vuoden ajan ja siitä on otettu yli tuhat painosta käsin kirjoitettujen kopioiden lisäksi. Alkeet oli merkittävä oppikirja, sillä siitä opittiin täsmällisen todistamisen tarve. Eukleides johti määritelmien, oletusten ja aksioomien pohjalta geometrian lauseita. [3, s. 23–24]. Tämä rakenne on matematiikassa käytössä edelleen.

3.2 Eukleideen todistus

Eukleideen todistusta alkulukujen määrän äärettömyydestä pidetään ensimmäisenä todistuksena ja se on myös todistuksista tunnetuin.

Lause 3.1 (Eukleideen lause)**.** *On olemassa ääretön määrä alkulukuja.*

Eukleideen todistus. Oletetaan, että $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots < p_k$ ovat ainoat alkuluvut. Kaikki alkuluvut ovat positiivisia kokonaislukuja, joten niistä voidaan muodostaa positiivinen kokonaisluku

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k + 1.$$

Olkoon p alkuluku niin, että $p \mid n$. Siis

$$p \mid p_1 p_2 \cdots p_k + 1.$$

Alkuluvun p on siis oltava erisuuri kuin alkuluvut $p_1, p_2, \ldots, p_k$, sillä muuten p jakaisi erotuksen $n - p_1 p_2 \cdots p_k = 1$. Eli $p = 1$, mikä ei ole mahdollista, sillä pienin alkuluku on 2.

Kyseeessä on ristiriita, eli on siis todistettu, että alkulukuja on ääretön määrä. Ks. [4, s. 4]. $\square$

4 Goldbachin todistus alkulukujen määrän äärettömyydestä

4.1 Christian Goldbach

Christian Goldbach syntyi vuonna 1690 Preussin silloisessa pääkaupungissa Königsbergissä. Kuollessaan hän oli 74-vuotias. Goldbach työskenteli Pietarin Tiedeakatemiassa (nykyisin Venäjän tiedeakatemia) matematiikan professorina vuodesta 1725 alkaen. Muutaman vuoden kuluttua hän muutti Moskovaan toimiakseen keisari Pietari II opettajana, keisarin ollessa 13-vuotias. Matemaatikkona Goldbach on jäänyt historiaan erityisesti otaksumansa vuoksi, joka on edelleen säilynyt ratkaisematta. [5, s. 88].

Otaksuma (Goldbachin otaksuma)**.** (Ks. [1, s. 1].) Jokainen parillinen kokonaisluku $n > 2$ voidaan esittää kahden alkuluvun summana.

Tietokoneiden avulla on pystytty todistamaan otaksuman pitävän paikkansa kaikilla parillisilla kokonaisluvuilla, jotka ovat pienempiä kuin 10^{18} [5, s. 88].

Esimerkki 4.1. Luvut 12, 64 ja 98 voidaan esittää kahden alkuluvun summana seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&12 = 5 + 7,\\
&64 = 3 + 61 = 5 + 59 = 11 + 53 = 17 + 47 = 23 + 41,\\
&98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61.
\end{aligned}
$$

4.2 Goldbachin todistus

Goldbachin tapa todistaa alkulukujen määrän äärettömyys perustuu siihen, että Eukleideen lauseen (lause 3.1) todistamiseen voidaan käyttää mitä tahansa ääretöntä lukujonoa, jonka termit ovat pareittain suhteellisia alkulukuja [4, s. 11]. Goldbach käytti todistuksessaan, luvussa 2.2 esiteltyjä Fermat'n lukuja.

Todistetaan ensin seuraava apulause.

Apulause 4.1. Kaikille Fermat'n luvuille F_n pätee

$$F_0F_1F_2\cdots F_{n-1} = F_n - 2, \quad \text{kun } n \geq 1.$$

Todistus. (Vrt. [5, s. 133–134].) Todistetaan apulause induktion avulla luvun n suhteen.

Perusaskeleessa $n = 1$ voidaan todeta, että

$$F_0 = F_1 - 2$$

on totta, sillä Fermat'n lukujen määritelmän (määritelmä 2.5) mukaan $F_0 = 3$ ja $F_1 = 5$.

Tehdään induktio-oletus, että lause pätee positiivisilla kokonaisluvuilla n, siten että

$$F_0 F_1 F_2 \cdots F_{n-1} = F_n - 2.$$

Induktioväite, että lause pätee kokonaisluvuille $n + 1$. Induktio-oletuksen avulla induktioväite voidaan todistaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}
F_0 F_1 F_2 \cdots F_{n-1} F_n &= (F_0 F_1 F_2 \cdots F_{n-1}) F_n \\
&= (F_n - 2) F_n \\
&= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) \\
&= (2^{2^n})^2 - 1 \\
&= 2^{2^{n+1}} - 1 \\
&= F_{n+1} - 2.
\end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla väite pitää paikkansa. □

Lause 4.1. *Olkoot m ja n erisuuria niin, että $m \geq 0$ ja $n \geq 0$. Tällöin Fermat'n luvut F_m ja F_n ovat suhteellisia alkulukuja.*

Todistus. (Vrt. [5, s. 134].) Oletetaan, että $m < n$. Apulauseen 4.1 perusteella tiedetään, että

$$F_0 F_1 F_2 \cdots F_m \cdots F_{n-1} = F_n - 2.$$

Oletetaan, että $\mathrm{syt}(F_m, F_n) = d$. Lauseen 2.1 perusteella tiedetään, että

$$d \mid (F_n - F_0 F_1 F_2 \cdots F_m \cdots F_{n-1}) = 2.$$

Näin ollen on oltava joko $d = 1$ tai $d = 2$. Tiedetään kuitenkin, että F_m ja F_n ovat parittomia, joten $d \neq 2$.

On siis todistettu, että $\mathrm{syt}(F_m, F_n) = d = 1$. Eli Fermat'n luvut ovat pareittain suhteellisia alkulukuja. □

Alkulukujen määrän äärettömyys saadaan todistettua Fermat'n lukujen avulla seuraavasti:

Todistus. (Ks. [5, s. 134] sekä [4, s. 11–12].) Aritmetiikan peruslauseen (lause 2.2) nojalla tiedetään, että Fermat'n luvuilla F_m ja F_n on alkulukutekijät p_m ja p_n. Lauseen 4.1 perusteella tiedetään, että $\mathrm{syt}(F_m, F_n) = 1$, kun $m \neq n$. Näin ollen $p_m \neq p_n$, kun $m \neq n$.

Koska Fermat'n lukuja on ääretön määrä on siis todistettu, että alkulukuja on ääretön määrä. □

Kuten jo aiemmin todettiin, alkulukujen määrän äärettömyyden todistamiseen voidaan käyttää mitä vain ääretöntä lukujonoa, jonka termit ovat parettain suhteellisia alkulukuja. Seuraavaksi käytetään todistamisessa Fibonaccin lukuja (määritelmä 2.6). Ensin kuitenkin esittelemme todistuksessa tarvittavan apulauseen.

Apulause 4.2 (Cassinin lause)**.** Olkoot f_{n-1}, f_n sekä f_{n+1} Fibonaccin lukuja. Tällöin

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Todistus. Ks. [2, s. 42]. □

Lause 4.2. *Fibonaccin lukujonon peräkkäiset termit ovat suhteellisia alkulukuja.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 43]). Olkoon p alkuluku ja f_n, f_{n+1} peräkkäiset Fibonaccin luvut. Tehdään vastaoletus, että p on lukujen f_n ja f_{n+1} alkulukutekijä. Lauseen 4.2 mukaan $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$. Koska $p \mid f_n$ ja $p \mid f_{n+1}$, niin $p \mid f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2$ eli $p \mid \pm 1$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletuksen mukaan p on alkuluku, jolloin $p > 1$.

On siis todistettu, että peräkkäisten Fibonaccin lukujen suurin yhteinen tekijä $\mathrm{syt}(f_n, f_{n+1}) = 1$, eli ne ovat suhteellisia alkulukuja. □

Koska Fibonaccin lukuja on äärettömästi, lauseesta 4.2 seuraa, että alkulukuja on ääretön määrä.

5 Dirichlet'n todistus alkulukujen määrän äärettömyydestä

5.1 Gustav Lejeune Dirichlet

Gustav Lejeune Dirichlet syntyi 1805 ja kuoli 54-vuotiaana. Hän opiskeli Pariisin yliopistossa, joka oli tuolloin tärkeä matematiikan keskus. Vuonna 1855 Dirichlet valittiin Gaussin seuraajaksi Göttingeniin Georg-Augustin yliopistoon. Sanotaan, että Dirichlet piti aina mukanaan kopiota Gaussin teoksesta Disquisitiones Arithmeticae. Vuonna 1837 Dirichlet todisti, että alkulukuja on ääretön määrä. [5, s. 73].

Lause 5.1 (Dirichlet'n lause)**.** (Ks. [5, s. 73].) Oletetaan, että positiiviset kokonaisluvut a ja b ovat suhteellisia alkulukuja. Täten aritmeettinen lukujono

$$an + b, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sisältää äärettömän määrän alkulukuja.

Dirichlet'n lauseelle ei tunneta yksinkertaisia todistuksia. Alkuperäisessä todistuksessa käytetään kompleksimuuttujia. Aritmeettisen sarjan joidenkin erikoistapausten todistukset ovat kuitenkin yksinkertaisempia. [5, s. 73].

5.2 Muotoa $4n + 3$ olevien alkulukujen määrän äärettömyyden todistus

Tässä alaluvussa todistetaan, että on olemassa ääretön määrä muotoa $4n + 3$ olevia alkulukuja. Todistuksessa käytetään seuraavaa apulausetta (apulause 5.1).

Apulause 5.1. Jos a ja b ovat kokonaislukuja muotoa $4n + 1$, niin myös tulo ab on tätä muotoa.

Todistus. (Vrt. [5, s. 118].) Koska a ja b ovat muotoa $4n + 1$, on olemassa sellaiset kokonaisluvut r ja s, että $a = 4r + 1$ ja $b = 4s + 1$. Näin ollen

$$ab = (4r + 1)(4s + 1) = 16rs + 4r + 4s + 1 = 4(4rs + r + s) + 1,$$

joka on myös muotoa $4n + 1$. $\square$

Lause 5.2. *On olemassa ääretön määrä alkulukuja, jotka ovat muotoa* $4n + 3$, *missä* n *on positiivinen kokonaisluku.*

Todistus. (Vrt. [5, s. 118].) Tehdään vastaoletus, että on olemassa vain äärellinen määrä alkulukuja, jotka ovat muodoltaan $p_n = 4n + 3$, olkoot ne $p_0 = 3, p_1, \ldots, p_r$. Olkoon

$$Q = 4p_1p_2 \cdots p_r + 3.$$

Ainakin yksi luvun Q alkutekijöistä on muotoa $4n+3$. Muuten kaikki nämä alkutekijät ja edelleen luku Q olisivat apulauseen 5.1 mukaisesti muotoa $4n + 1$.

Kuitenkaan yksikään alkuluvuista $p_0, p_1, \ldots p_r$ ei jaa alkulukua Q. Jos $p_0 = 3 \mid Q$, niin $3 \mid (Q - 3) = 4p_1p_2 \cdots p_r$, joka on ristiriita. Ja $p_j \mid Q$ tarkoittaisi, että $p_j \mid (Q - 4p_1p_2 \cdots p_r) = 3$, joka ei myöskään ole mahdollista.

On siis todistettu, että on olemassa ääretön määrä alkulukuja, jotka ovat muotoa $4n + 3$. □

Lähteet

[1] Fine, B., Rosenberger, G. *Number theory: An Introduction via the Distribution of Primes*. Boston: Birkhäuser, 2007.

[2] Iivari, A. *Kokonaislukujen erilaisia esitysmuotoja*. Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto. 2014.

[3] Korhonen, H. *Matematiikan historian henkilöhahmoja*. MFKA-Kustannus, 1995.

[4] Meštrović, R. *Euclid's theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proof (300 B.C.–2017) and another new proof*. Arxiv. 2012.

[5] Rosen, K. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Pearson, 2011.