Tampereen yliopisto

Tinja Lindstedt

KVASIRYHMÄT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2020

Tiivistelmä

Tinja Lindstedt: Kvasiryhmät
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Joulukuu 2020

Tutkielmassa käsitellään kvasiryhmiä, jotka ovat algebrallisia struktuureja ja muodostuvat jostakin joukosta Q ja siinä määritellystä laskutoimituksesta $\cdot$.

Tutkielman toisessa luvussa käsitellään kvasiryhmiä yleisesti. Paria $(Q, \cdot)$ kutsutaan kvasiryhmäksi, jos joukon Q alkioille pätee yhtälö $x \cdot y = z$ siten, että kun kaksi alkioista tiedetään, niin kolmas voidaan päätellä niistä yksikäsitteisesti. Kvasiryhmille voidaan määritellä kaksi erilaista jakolaskua, joita kutsutaan vasemman- ja oikeanpuoleiseksi jakolaskuksi. Vasemmanpuoleiselle jakolaskulle pätee, että yhtälöstä $x \cdot y = z$ saadaan ratkaistua yksikäsitteinen y, joka on sama kuin $x \backslash z$. Oikeanpuoleiselle jakolaskulle pätee, että samasta yhtälöstä saadaan ratkaistua yksikäsitteinen x, joka on sama kuin z/y. Kvasiryhmien jakolaskujen avulla luvussa esitetään myös uusi määritelmä kvasiryhmille, mikä on useissa tilanteissa käytännöllisempi kuin aluksi annettu määritelmä. Uuden määritelmän avulla pystytään myös todistamaan, että jos pari $(Q, \cdot)$ on kvasiryhmä varustettuna vasemman- ja oikeanpuoleisella jakolaskulla, niin myös parit, jotka muodostuvat joukosta Q ja joko vasemman- tai oikeanpuoleisesta jakolaskusta, ovat kvasiryhmiä.

Kolmannessa luvussa esitellään aluksi alikvasiryhmän määritelmä. Jos pari $(Q, \cdot)$ on kvasiryhmä ja joukko S on joukon Q osajoukko, niin kvasiryhmä $(S, \cdot)$ on kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ alikvasiryhmä. Luvussa esitellään myös alikvasiryhmätesti, jonka avulla voidaan tutkia, muodostaako kvasiryhmän muodostavan joukon osajoukko alikvasiryhmän. Lisäksi määritellään kvasiryhmähomomorfismit ja -isomorfismit. Funktio f on kvasiryhmähomomorfismi, jos kahdelle kvasiryhmälle $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ pätee, että $f(x) \circ f(y) = f(x*y)$, kun x ja y kuuluvat joukkoon P. Lisäksi jos funktio f on bijektio, niin kvasiryhmät ovat isomorfiset.

Tutkielman neljännessä luvussa käsitellään kvasiryhmähomotopioita ja -isotopioita. Kun parit $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ ovat kvasiryhmiä ja f, g ja h funktioita joukosta P jouk-

koon Q, niin kolmikko $(f, g, h)\colon (P, *) \to (Q, \circ)$ on kvasiryhmähomotopia, jos pätee, että $f(x) \circ g(y) = h(x*y)$, kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon P. Jos lisäksi funktiot f, g ja h ovat bijektioita, niin kvasiryhmät ovat isotooppiset. Kaikki kvasiryhmähomomorfismit f muodostavat kvasiryhmähomotopian, jossa kaikki kolme funktiota ovat funktio f. Tutkielman lopuksi esitellään vielä pääisotopiat, jotka ovat kvasiryhmäisotopioita, joissa kolmas funktio h on identiteettikuvaus.

Avainsanat: kvasiryhmät, alikvasiryhmät, kvasiryhmähomomorfismit, kvasiryhmähomotopiat

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään kvasiryhmiä, jotka ovat algebrallisia struktuureja ja muodostuvat jostakin joukosta Q ja siinä määritellystä laskutoimituksesta $\cdot$.

Luvussa 2 käsitellään kvasiryhmiä yleisesti. Aliluvussa 2.1 esitetään kvasiryhmän määritelmä ja annetaan kvasiryhmistä esimerkkejä. Aliluvussa 2.2 esitellään kvasiryhmän kaksi erilaista jakolaskua sekä niiden ominaisuuksia. Kvasiryhmien jakolaskujen avulla esitetään myös uusi määritelmä kvasiryhmille, mikä on useissa tilanteissa käytännöllisempi kuin aluksi annettu määritelmä. Uuden määritelmän avulla todistetaan, että jakolaskut muodostavat myös uusia kvasiryhmiä.

Luvussa 3 käsitellään kvasiryhmien homomorfioita. Aliluvussa 3.1 esitellään alikvasiryhmän määritelmän lisäksi alikvasiryhmätesti, jonka avulla voidaan tutkia, muodostaako kvasiryhmän muodostavan joukon osajoukko alikvasiryhmän. Lisäksi aliluvussa 3.2 määritellään kvasiryhmähomomorfismit ja -isomorfismit sekä niiden ominaisuuksia. Aliluvussa esitellään myös kahden kvasiryhmän karteesinen tulo varustettuna kertolaskulla.

Luvussa 4 käsitellään kvasiryhmähomotopioita ja -isotopioita. Aliluvussa 4.1 määritellään kvasiryhmähomotopiat ja -isotopiat sekä esitellään homomorfismin ja homotopian yhteys. Lisäksi todetaan, että kvasiryhmien isotooppisuus on ekvivalenssirelaatio. Lisäksi aliluvussa 4.2 käsitellään kvasiryhmäpääisotopioita sekä niiden ominaisuuksia.

Lukijalta odotetaan ryhmäteorian alkeiden tuntemusta, sillä tutkielmassa ei erikseen anneta esimerkiksi ryhmän määritelmää. Lisäksi lukijan oletetaan tuntevan funktioiden ominaisuuksia kuten funktioiden bijektiivisyys, käänteisfunktiot ja identiteettifunktiot. Muut käsitteet pyritään määrittelemään tarkasti tutkielmassa ja niitä havainnollistetaan monilla esimerkeillä. Tutkielmassa käytetään päälähteenä J. D. Smithin kirjaa *Introduction to Abstract Algebra*.

2 Kvasiryhmien ominaisuudet

2.1 Kvasiryhmän määritelmä

Määritelmä 2.1 (Kvasiryhmä)**.** (Vrt. [3, s. 287].) Olkoon joukko Q suljettu joukko sen alkioiden x ja y laskutoimituksen $x \cdot y$ suhteen. Oletetaan, että yhtälö

$$x \cdot y = z$$

pätee, kun alkiot x, y ja z kuuluvat joukkoon Q. Kun kaksi näistä alkioista tunnetaan ja kolmas voidaan päätellä niistä yksikäsitteisesti, paria $(Q, \cdot)$ kutsutaan *kvasiryhmäksi*.

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan kokonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla, eli paria $(\mathbb{Z}, +)$. Oletetaan, että yhtälö

$$x + y = z$$

pätee, kun alkiot x, y ja z kuuluvat joukkoon $\mathbb{Z}$. Nyt jos alkiot x ja y tiedetään, niin z voidaan selvästi päätellä yksikäsitteisesti yhtälöstä $z = x + y$. Jos alkiot x ja z tiedetään, niin y voidaan päätellä yksikäsitteisesti yhtälöstä $y = z - x$. Jos taas alkiot y ja z tiedetään, x voidaan päätellä yksikäsitteisesti yhtälöstä $x = z - y$. Näin ollen pari $(\mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmä.

Esimerkki 2.2. (Vrt. [3, s. 288].) Tarkastellaan seuraavaksi reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$. Kahden reaaliluvun x ja y *aritmeettinen keskiarvo* on

$$x \circ y = \frac{x + y}{2}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälöä

$$x \circ y = z,$$

kun x, y ja z ovat reaalilukuja. Selkeästi aritmeettinen keskiarvo z on pääteltävissä yksikäsitteisesti, kun x ja y tiedetään. Tällöin $z = \frac{x+y}{2}$. Jos y ja z tiedetään, niin x on pääteltävissä yksikäsitteisesti yhtälöstä $x = 2z - y$. Samalla tavalla myös y on pääteltävissä yksikäsitteisesti yhtälöstä $y = 2z - x$. Siis pari $(\mathbb{R}, \circ)$ on kvasiryhmä. On kuitenkin huomioitava, että esimerkiksi

$$(2 \circ 6) \circ 8 = 4 \circ 8 = 6,$$

mutta

$$2 \circ (6 \circ 8) = 2 \circ 7 = 4,5.$$

Siis kvasiryhmä $(\mathbb{R}, \circ)$ ei ole liitännäinen eikä siis täten myöskään ryhmä. Kaikki kvasiryhmät eivät siis ole ryhmiä. Toisaalta kuitenkin ryhmän määritelmästä seuraa, että kaikki ryhmät ovat kvasiryhmiä.

2.2 Kvasiryhmän jakolaskut

Kvasiryhmät ovat määritelty niin, että jakolasku on aina mahdollista suorittaa. Kvasiryhmässä voidaan itse asiassa suorittaa kaksi erilaista jakolaskua, joita kutsutaan vasemman- ja oikeanpuoleisiksi jakolaskuiksi.

Määritelmä 2.2 (Kvasiryhmän jakolaskut)**.** (Vrt. [2, s. 6].) Olkoon $(Q, \cdot)$ kvasiryhmä ja olkoot x, y ja z joukon Q alkioita.

1. Yhtälö $x \cdot y = z$ pätee, jos ja vain jos $y = x \backslash z$. Siis

   $$x \cdot y = x \cdot (x \backslash z) = z.$$

   Joukon Q laskutoimitusta $\backslash$ kutsutaan kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ *vasemmanpuoleiseksi jakolaskuksi*.

2. Yhtälö $x \cdot y = z$ pätee, jos ja vain jos $x = z/y$. Siis

   $$x \cdot y = (z/y) \cdot y = z.$$

   Joukon Q laskutoimitusta $/$ kutsutaan kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ *oikeanpuoleiseksi jakolaskuksi*.

Huomautus. Oparaatiot $\backslash$ ja $/$ ovat laskutoimituksia, sillä kvasiryhmän määritelmän 2.1 nojalla $x \backslash z$ ja z/y ovat aina olemassa, ne ovat yksikäsitteisiä ja kuuluvat joukkoon Q.

Esimerkki 2.3. (Vrt. [3, s. 294].) Tarkastellaan kokonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$ varustettuna yhteenlaskulla. Olkoot x ja y joukon $\mathbb{Z}$ alkioita. Esimerkissä 2.1 pari $(\mathbb{Z}, +)$ osoitettiin kvasiryhmäksi. Nyt kvasiryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ alkio $(1 \backslash 2)$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{aligned} x \cdot (x \backslash y) &= y, \quad \text{kun } x = 1 \text{ ja } y = 2, \text{ eli siis} \\ 1 + (1 \backslash 2) &= 2 \\ (1 \backslash 2) &= 2 - 1 \\ (1 \backslash 2) &= 1. \end{aligned}$$

Siis kvasiryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ vasemmanpuoleinen jakolasku $(x \backslash y)$ on yksinkertaisesti $y - x$.

Vastaavasti kvasiryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ alkio $(1/2)$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$
\begin{aligned}
(x/y) \cdot y &= x, \quad \text{kun } x = 1 \text{ ja } y = 2, \text{ eli siis} \\
(1/2) + 2 &= 1 \\
(1/2) &= 1 - 2 \\
(1/2) &= -1.
\end{aligned}
$$

Siis kvasiryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ oikeanpuoleinen jakolasku (x/y) on yksinkertaisesti $x - y$.

Lause 2.1 (Kvasiryhmän jakolaskujen ominaisuudet)**.** *(Vrt. [3, s. 295].) Olkoon* $(Q, \cdot)$ *kvasiryhmä ja olkoot* x *ja* y *joukon* Q *alkioita. Tällöin*

1. $x \backslash (x \cdot y) = y$
2. $y/(x \backslash y) = x$
3. $(y \cdot x)/x = y$
4. $(y/x) \backslash y = x$

Todistus. (Vrt. [3, s. 295].) Oletetaan, että $x \cdot y = z$. Vasemmanpuoleisen jakolaskun määritelmän 2.2 nojalla yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $x \cdot (x \backslash z) = z$, joten siis $y = x \backslash z$. Siis

$$
\begin{aligned}
x \backslash (x \cdot y) &= x \backslash (x \cdot (x \backslash z)) \\
&= x \backslash z \\
&= y,
\end{aligned}
$$

joten väite 1 pätee.

Koska $x \cdot (x \backslash z) = z$, niin määritelmän 2.2 nojalla $x = z/(x \backslash z)$. Kun alkio z korvataan alkiolla y, saadaan $x = y/(x \backslash y)$. Joten väite 2 pätee.

Olkoon $y \cdot x = z$. Määritelmän 2.2 nojalla siis $y = z/x$. Nyt

$$
\begin{aligned}
z/x &= y \\
(y \cdot x)/x &= y,
\end{aligned}
$$

joten väite 3 pätee.

Olkoon $z \cdot x = y$. Määritelmän 2.2 oikeanpuoleisen jakolaskun nojalla $(y/x) \cdot x = y$ ja lisäksi kyseisen määritelmän vasemmanpuoleisen jakolaskun nojalla $x = (y/x) \backslash y$. Joten siis väite 4 pätee. $\square$

Lauseen 2.1 nojalla voidaan antaa uusi määritelmä kvasiryhmille, mikä on usein käytännöllisempi kuin määritelmä 2.1.

Lause 2.2. *(Vrt. [3, s. 295].) Joukko Q varustettuna laskutoimituksella $\cdot$ muodostaa kvasiryhmän $(Q, \cdot)$, jos ja vain jos siinä on määritelty sellaiset vasemmanpuoleinen jakolasku $\backslash$ ja oikeanpuoleinen jakolasku $/$, että*

1. $x \cdot (x \backslash y) = y$
2. $(x/y) \cdot y = x$
3. $x \backslash (x \cdot y) = y$
4. $(y \cdot x)/x = y$

kaikille joukon Q alkioille x ja y.

Todistus. (Vrt. [3, s. 295].) Olkoon $(Q, \cdot)$ kvasiryhmä. Nyt väite 1 ja 2 seuraavat määritelmästä 2.2. Väite 3 seuraa lauseen 2.1 väitteestä 1 ja vastaavasti väite 4 seuraa kyseisen lauseen väitteestä 4.

Oletetaan, että joukossa Q on määritelty operaatiot $\cdot$, $\backslash$ ja $/$ siten, että väitteet 1–4 pätevät. Tarkastellaan yhtälöä

$$x \cdot y = z,$$

kun alkiot x, y ja z kuuluvat joukkoon Q. Tutkitaan ensin yhtälön ratkaisua muuttujan x suhteen. Jos alkiot y ja z tiedetään, niin väiteen 2 nojalla $(z/y) \cdot y = z$, siten että $x = z/y$ on ratkaisu yhtälölle $x \cdot y = z$. Jos s ja t ovat yhtälön ratkaisuja, väitteen 4 nojalla $s = (s \cdot y)/y$ ja $t = (t \cdot y)/y$. Siis $z/y = (s \cdot y)/y = (t \cdot y)/y$, eli ratkaisu on yksikäsitteinen.

Samalla tavalla voidaan todistaa, että yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu y, kun alkiot x ja z tiedetään. Väitteen 1 nojalla $x \cdot (x \backslash z) = z$ siten, että $y = x \backslash z$ on ratkaisu yhtälölle $x \cdot y = z$. Jos s ja t ovat yhtälön ratkaisuja, väitteen 3 nojalla $s = x \backslash (x \cdot s)$ ja $t = x \backslash (x \cdot t)$. Siis $x \backslash z = x \backslash (x \cdot s) = x \backslash (x \cdot t)$, eli ratkaisu on yksikäsitteinen.

On siis todistettu, että $(Q, \cdot)$ on kvasiryhmä. □

Lauseen 2.1 yksi tärkeä seuraus on, että vasemmanpuoleinen jakolasku ja oikeanpuoleinen jakolasku muodostavat uusia kvasiryhmiä.

Lause 2.3. *(Ks. [3, s. 296].) Olkoon $(Q, \cdot)$ kvasiryhmä varustettuna vasemmanpuoleisella jakolaskulla $\backslash$ ja oikeanpuoleisella jakolaskulla $/$. Tällöin $(Q, \backslash)$ ja $(Q, /)$ ovat kvasiryhmiä.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 296].) Todistetaan ensin, että pari $(Q, \backslash)$ on kvasiryhmä. Tarkastellaan yhtälöä

$$x\backslash y = z,$$

kun x, y ja z ovat joukon Q alkioita. Jos x ja y tiedetään, z voidaan päätellä yksikäsitteisesti yhtälöstä $x\backslash y = z$.

Oletetaan sitten, että y ja z tiedetään. Määritelmän 2.2 nojalla

$$\begin{aligned} x\backslash y &= z \\ x \cdot z &= y \\ x &= y/z. \end{aligned}$$

Siis yhtälöllä $x\backslash y = z$ on ratkaisu $x = y/z$. Jos lisäksi on olemassa jokin joukon Q alkio t siten että $t\backslash y = z$, kuten $x\backslash y = z$, niin lauseen 2.1 väitteen 2 nojalla

$$x = y/z = y/(t\backslash y) = t,$$

joten ratkaisu on yksikäsitteinen.

Oletetaan seuraavaksi, että x ja z tiedetään. Määritelmän 2.2 nojalla yhtälöllä $x\backslash y = z$ on ratkaisu $y = x \cdot z$. Jos lisäksi on olemassa jokin joukon Q alkio s siten että $x\backslash s = z$, kuten $x\backslash y = z$, niin määritelmän 2.2 nojalla

$$y = x \cdot z = x \cdot (x\backslash s) = s,$$

joten ratkaisu on yksikäsitteinen. On siis osoitettu, että $(Q, \backslash)$ on kvasiryhmä.

Todistetaan sitten, että pari $(Q, /)$ on kvasiryhmä. Tarkastellaan yhtälöä

$$x/y = z,$$

kun x, y ja z ovat joukon Q alkioita. Jos x ja y tiedetään, z voidaan päätellä yksikäsitteisesti yhtälöstä $x/y = z$.

Oletetaan, että y ja z tiedetään. Määritelmän 2.2 nojalla yhtälöllä $x/y = z$ on ratkaisu $z \cdot y = x$. Jos lisäksi on olemassa jokin joukon Q alkio t siten, että $t/y = z$ kuten $x/y = z$, niin määritelmän 2.2 nojalla

$$x = z \cdot y = (t/y) \cdot y = t,$$

joten ratkaisu on yksikäsitteinen.

Oletetaan seuraavaksi, että x ja z tiedetään. Määritelmän 2.2 nojalla

$$\begin{aligned} x/y &= z \\ z \cdot y &= x \\ y &= z\backslash x, \end{aligned}$$

joten yhtälöllä $x/y = z$ on ratkaisu $y = z\backslash x$. Jos lisäksi on olemassa jokin joukon Q alkio s siten, että $x/s = z$, kuten $x/y = z$, niin lauseen 2.1 väitteen 4 nojalla

$$y = z\backslash x = (x/s)\backslash x = s,$$

joten ratkaisu on yksikäsitteinen. On siis osoitettu, että myös $(Q, /)$ on kvasiryhmä.

$\square$

3 Kvasiryhmien homomorfiat

Aivan kuten renkaat, ryhmät ja puoliryhmät, myös kvasiryhmät ovat abstrakteja struktuureita. Sellaisina niille voidaan määritellä alistruktuureita ja homomorfismeja.

3.1 Alikvasiryhmät

Määritelmä 3.1 (Alikvasiryhmä)**.** (Ks. [3, s. 297].) Olkoon $(Q, \cdot)$ kvasiryhmä ja olkoon joukko S joukon Q osajoukko. Jos $(S, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin se on kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ *alikvasiryhmä*.

Lause 3.1 (Alikvasiryhmätesti)**.** *(Ks. [3, s. 298].) Olkoon $(Q, \cdot)$ kvasiryhmä ja olkoon joukko S joukon Q osajoukko. Pari $(S, \cdot)$ on kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ alikvasiryhmä, jos ja vain jos*

$$x \cdot y, \quad x \backslash y, \quad ja \quad x/y$$

kuuluvat joukkoon S, kun alkiot x ja y ovat joukon S alkioita.

Todistus. (Vrt. [3, s. 298].) Oletetaan ensin, että joukko S on suljettu laskutoimituksen $\cdot$, vasemmanpuoleisen jakolaskun $\backslash$ ja oikeanpuoleisen jakolaskun $/$ suhteen. Nyt lauseen 2.2 mukaan $(S, \cdot)$ on kvasiryhmä. Lisäksi koska joukko S on oletuksen mukaan joukon Q osajoukko, niin alikvasiryhmän määritelmän 3.1 nojalla kvasiryhmä $(S, \cdot)$ on kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ alikvasiryhmä.

Oletetaan sitten käänteisesti, että $(S, \cdot)$ on kvasiryhmän $(Q, \cdot)$ alikvasiryhmä. Nyt siis $(S, \cdot)$ on kvasiryhmä. Kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon S, niin myös $x \cdot y$ kuuluu joukkoon S, eli joukko S on suljettu laskutoimituksen $\cdot$ suhteen. Lisäksi jos alkiot x, y ja z kuuluvat joukkoon S, niin määritelmän 2.2 nojalla yhtälöllä

$$x \cdot y = z$$

on alkiolle x yksikäsitteinen ratkaisu $x = z/y$. Joukko S on siis suljettu oikeanpuoleisen jakolaskun $/$ suhteen. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että määritelmän 2.2 nojalla yhtälöllä

$$x \cdot z = y$$

on alkiolle z yksikäsitteinen ratkaisu $z = x \backslash y$. Joukko S on siis suljettu myös vasemmanpuoleisen jakolaskun $\backslash$ suhteen. Nyt ekvivalenssin molemmat suunnat ovat osoitettu todeksi, joten siis väite pätee. □

Esimerkki 3.1. Esimerkissä 2.1 todistettiin, että $(\mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmä. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että myös reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $(\mathbb{R}, +)$ on kvasiryhmä. Koska kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko, niin kvasiryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmän $(\mathbb{R}, +)$ alikvasiryhmä.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan seuraavaksi luonnollisten lukujen joukkoa $\mathbb{N}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $(\mathbb{N}, +)$. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ osajoukko, mutta pari $(\mathbb{N}, +)$ ei kuitenkaan ole kvasiryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ alikvasiryhmä. Tarkastellaan oikeanpuoleista jakolaskua luonnollisilla luvuilla 1 ja 2. Esimerkin 2.3 nojalla oikeanpuoleinen jakolasku voidaan laskea yhtälöllä

$$\begin{aligned} 1/2 &= x \\ 1 &= x + 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Joten siis oikeanpuoleisen jakolaskun ratkaisu x ei kuulu luonnollisten lukujen joukkoon. Näin ollen pari $(\mathbb{N}, +)$ ei ole kvasiryhmä, eikä siten alikvasiryhmä.

3.2 Kvasiryhmän homomorfiat ja isomorfiat

Määritelmä 3.2 (Kvasiryhmähomomorfismi)**.** (Vrt. [3, s. 298].) Oletetaan, että $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ ovat kvasiryhmiä.

1. Funktio $f\colon P \to Q$ on *kvasiryhmähomomorfismi*, jos

   $$f(x) \circ f(y) = f(x{*}y),$$

   kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon P.

2. Jos kvasiryhmähomomorfismi $f\colon (P, *) \to (Q, \circ)$ on bijektio, sitä kutsutaan *kvasiryhmäisomorfismiksi*.

3. Kvasiryhmät $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ ovat *isomorfiset* eli $P \cong Q$, jos niiden välillä on isomorfismi.

Huomautus. (Vrt. [2, s. 26].) Kvasiryhmäisomorfismia $f\colon P \to P$ kvasiryhmältä $(P, *)$ itselleen kutsutaan *automorfismiksi*. Siis bijektio f on automorfismi, jos ja vain jos $f(x){*}f(y) = f(x{*}y)$, kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon P.

Esimerkki 3.3. Esimerkissä 2.1 osoitettiin, että kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $(\mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmä. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että myös parillisten kokonaislukujen joukko varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $(2\mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmä, sillä kahden parillisen luvun summa ja erotus ovat aina parillisia.

Olkoon funktio $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (2\mathbb{Z}, +)$ määritelty siten, että $f\colon x \mapsto 2x$. Nyt selvästi funktio f on bijektio. Olkoot alkiot a ja b kokonaislukuja. Nyt

$$f(a) + f(b) = 2a + 2b = 2(a + b) = f(a + b),$$

joten funktio f on kvasiryhmähomomorfismi. On siis osoitettu, että kvasiryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(2\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.

Lause 3.2. *(Vrt. [3, s. 299].) Olkoot $(P, \cdot)$ ja $(Q, \cdot)$ kvasiryhmiä, joille on määritelty vasemmanpuoleinen jakolasku $\backslash$ ja oikeanpuoleinen jakolasku $/$, ja olkoon $f\colon (P, \cdot) \to (Q, \cdot)$ kvasiryhmähomomorfismi. Tällöin*

$$f(x)\backslash f(y) = f(x\backslash y) \quad \textit{ja} \quad f(x)/f(y) = f(x/y),$$

kun x ja y kuuluvat joukkoon P.

Todistus. (Vrt. [3, s. 299].) Määritelmän 2.2 nojalla kvasiryhmässä $(P, \cdot)$ pätee, että $x \cdot (x\backslash y) = y$. Koska funktio f on kvasiryhmähomomorfismi, niin

$$f(x) \cdot f(x\backslash y) = f(x \cdot (x\backslash y)) = f(y)$$

pätee joukossa Q. Lisäksi yhtälön $f(x) \cdot z = f(y)$ yksikäsitteinen ratkaisu z joukossa Q on määritelmän 2.2 nojalla $z = f(x)\backslash f(y)$. Nyt siis $f(x\backslash y) = z = f(x)\backslash f(y)$, eli on todistettu, että $f(x)\backslash f(y) = f(x\backslash y)$.

Määritelmän 2.2 nojalla kvasiryhmässä $(P, \cdot)$ pätee, että $(x/y) \cdot y = x$. Koska funktio f on kvasiryhmähomomorfismi, niin

$$f(x/y) \cdot f(y) = f((x/y) \cdot y) = f(x)$$

pätee joukossa Q. Lisäksi yhtälön $z \cdot f(y) = f(x)$ yksikäsitteinen ratkaisu z joukossa Q on määritelmän 2.2 nojalla $z = f(x)/f(y)$. Nyt siis $f(x/y) = z = f(x)/f(y)$, eli on todistettu, että $f(x)/f(y) = f(x/y)$. □

Lause 3.3. *(Vrt. [3, s. 299].) Olkoot $(P, \cdot)$ ja $(Q, \cdot)$ kvasiryhmiä. Tällöin karteesinen tulo $P \times Q$ varustettuna kertolaskulla*

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2),$$

muodostaa kvasiryhmän $(P \times Q, \cdot)$*. Tässä kvasiryhmässä vasemmanpuoleinen jakolasku*

$$(x_1, x_2)\backslash(y_1, y_2) = (x_1\backslash y_1, x_2\backslash y_2)$$

ja oikeanpuoleinen jakolasku

$$(x_1, x_2)/(y_1, y_2) = (x_1/y_1, x_2/y_2)$$

toteutetaan alkioittain samoin, kuin kvasiryhmissä $(P, \cdot)$ *ja* $(Q, \cdot)$*.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 299].) Tarkastellaan yhtälöä

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (z_1, z_2),$$

kun alkiot (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) kuuluvat joukkoon $P \times Q$. Jos alkiot (x_1, x_2) ja (y_1, y_2) tiedetään, niin niiden kertolaskun määritelmän nojalla

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2).$$

Koska x_1, $y_1 \in P$ ja oletuksen nojalla $(P, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin myös $x_1 \cdot y_1 \in P$. Vastaavasti myös koska x_2, $y_2 \in Q$ ja oletuksen nojalla $(Q, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin myös $x_2 \cdot y_2 \in Q$. Siis $(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) \in P \times Q$.

Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa alkiot (y_1, y_2) ja (z_1, z_2) tiedetään. Nyt yhtälölle

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) = (z_1, z_2)$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $(x_1, x_2) = (z_1/y_1, z_2/y_2)$. Koska z_1, $y_1 \in P$ ja oletuksen nojalla $(P, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin myös $z_1/y_1 \in P$. Vastaavasti myös koska z_2, $y_2 \in Q$ ja oletuksen nojalla $(Q, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin myös $z_2/y_2 \in Q$. Siis koska $(z_1/y_1, z_2/y_2) \in P \times Q$, niin $(x_1, x_2) \in P \times Q$

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa alkiot (x_1, x_2) ja (z_1, z_2) tiedetään. Nyt yhtälölle

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) = (z_1, z_2)$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $(y_1, y_2) = (x_1\backslash z_1, x_2\backslash z_2)$. Koska x_1, $z_1 \in P$ ja oletuksen nojalla $(P, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin myös $x_1\backslash z_1 \in P$. Vastaavasti myös koska x_2, $z_2 \in Q$ ja oletuksen nojalla $(Q, \cdot)$ on kvasiryhmä, niin myös $x_2\backslash z_2 \in Q$. Siis koska $(x_1\backslash z_1, x_2\backslash z_2) \in P \times Q$, niin $(y_1, y_2) \in P \times Q$. On siis osoitettu, että $(P \times Q)$ on kvasiryhmä. □

Määritelmä 3.3. (Vrt. [3, s. 300].) Olkoot parit $(P, \cdot)$ ja $(Q, \cdot)$ kvasiryhmiä. Kvasiryhmää $(P \times Q, \cdot)$, jossa kertolasku on määritelty

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2),$$

kun x_1 ja y_1 kuuluvat joukkoon P ja x_2 ja y_2 kuuluvat joukkoon Q, kutsutaan kvasiryhmien $(P, \cdot)$ ja $(Q, \cdot)$ *tuloksi*.

Esimerkki 3.4. Esimerkissä 2.1 todistettiin, että pari $(\mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmä, joten siis määritelmän 3.3 nojalla myös $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ on kvasiryhmä, jossa laskutoimitus $+$ on määritelty

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

kun alkiot x_1, x_2, y_1 ja y_2 ovat kokonaislukuja.

4 Kvasiryhmien homotopiat ja isotopiat

4.1 Kvasiryhmän homotopiat ja isotopiat

Määritelmä 4.1. (Vrt. [3, s. 302].) Oletetaan, että $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ ovat kvasiryhmiä.

1. Kolmikkoa (f, g, h), missä $f\colon P \to Q$, $g\colon P \to Q$ ja $h\colon P \to Q$ ovat funktioita, kutsutaan *kvasiryhmähomotopiaksi*, jos
$$f(x) \circ g(y) = h(x*y),$$
kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon P. Tällöin merkitään $(f, g, h)\colon (P, *) \to (Q, \circ)$.

2. Edellisen kohdan funktioita f, g ja h kutsutaan homotopian *komponenteiksi*.

3. Jos kvasiryhmän homotopian komponentit f, g ja h ovat bijektioita, homotopiaa kutsutaan *isotopiaksi*.

4. Kvasiryhmiä P ja Q sanotaan *isotooppisiksi* (merkitään $P \sim Q$), jos niiden välillä on isotopia.

Esimerkki 4.1. Esimerkissä 3.1 todettiin, että pari $(\mathbb{R}, +)$ on kvasiryhmä ja vastaavasti esimerkissä 2.2 todettiin, että pari $(\mathbb{R}, \circ)$ on kvasiryhmä, kun laskutoimitus $\circ$ on reaalilukujen aritmeettinen keskiarvo. Olkoot nyt alkiot x ja y reaalilukuja ja kolmikko $(f, g, h)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty siten, että $f : x \mapsto \frac{x}{2}$, $g : x \mapsto \frac{x}{2}$ ja $h = id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$. Nyt

$$\begin{aligned} f(x) + g(y) &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ &= \frac{x+y}{2} \\ &= x \circ y \\ &= h(x \circ y), \end{aligned}$$

joten siis $(f, g, h)\colon (\mathbb{R}, \circ) \to (\mathbb{R}, +)$ on kvasiryhmähomotopia. Lisäksi koska funktiot f, g ja h ovat bijektioita, kvasiryhmät $(\mathbb{R}, \circ)$ ja $(\mathbb{R}, +)$ ovat isotooppisia.

Lause 4.1. *(Vrt. [3, s. 303].) Oletetaan, että $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ ovat kvasiryhmiä.*

1. *Jos kolmikko* $(f, f, f)\colon (P,*) \to (Q,\circ)$ *on kvasiryhmähomotopia, niin* $f\colon (P,*) \to (Q,\circ)$ *on kvasiryhmähomomorfismi.*

2. *Jokainen kvasiryhmähomomorfismi* $f\colon (P,*) \to (Q,\circ)$ *muodostaa kvasiryhmähomotopian* $(f, f, f)\colon (P,*) \to (Q,\circ)$.

Todistus. Lause seuraa suoraan määritelmistä 3.2 ja 4.1. □

Lause 4.2. *(Vrt. [3, s. 303].) Oletetaan, että* $(N,\cdot)$, $(P,*)$ *ja* $(Q,\bullet)$ *ovat kvasiryhmiä varustettuna homotopioilla* $(f, g, h)\colon (P,*) \to (Q,\bullet)$ *ja* $(f', g', h')\colon (N,\cdot) \to (P,*)$. *Nyt*

$$(f \circ f', g \circ g', h \circ h')\colon (N,\cdot) \to (Q,\bullet)$$

on kvasiryhmähomomorfismi.

Todistus. (Vrt. [3, s. 303].) Käyttämällä lauseen 4.1 ominaisuutta $f(x) \bullet g(y) = h(x{*}y)$ funktioille (f, g, h) ja (f', g', h'), saadaan

$$\begin{aligned}(f \circ f')(x) \bullet (g \circ g')(y) &= f(f'(x)) \bullet g(g'(y))\\ &= h(f'(x){*}g'(y))\\ &= h(h'(x \cdot y)) = (h \circ h')(x \cdot y),\end{aligned}$$

kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon N. □

Seuraus 4.1. *(Ks. [3, s. 303].) Kvasiryhmien isotooppisuus on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 303].) Jotta kyseessä olisi ekvivalenssirelaatio, tulee osoittaa, että relaatio on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen. Lauseen 4.1 2-kohdan nojalla identiteettikuvaus id_Q muodostaa kvasiryhmässä Q isotopian. Siis identiteettikuvaus id_Q on bijektio ja homomorfismi, sillä $id_Q(x) \cdot id_Q(x) = x \cdot x = id_Q(x \cdot x)$, kun x on joukon Q alkio. On siis osoitettu, että relaatio on refleksiivinen.

Seuraavaksi oletetaan, että $N \sim P$ ja $P \sim Q$ kvasiryhmille N, P ja Q. Lauseen 4.2 nojalla $N \sim Q$, joten relaatio on myös transitiivinen.

Lopuksi oletetaan, että $(f, g, h)\colon (P,*) \to (Q,\circ)$ on isotopia. Tarkastellaan joukon Q alkioita x ja y, joille pätee, että $f(x') = x$ ja $g(y') = y$, kun x' ja y' ovat joukon P yksikäsitteisiä alkoita. Lauseen 4.1 ominaisuuden $f(x) \circ g(y) = h(x{*}y)$ nojalla

$$h(x'{*}y') = f(x') \circ g(y') = x \circ y.$$

Siis

$$h^{-1}(x \circ y) = x'{*}y' = f^{-1}(x){*}g^{-1}(y).$$

Joten siis $(f^{-1}, g^{-1}, h^{-1})\colon (Q, \circ) \to (P, *)$ on isotopia, mikä osoittaa, että relaatio on myös symmetrinen. Nyt on osoitettu, että isotooppisuusrelaatio on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen, eli siis se on ekvivalenssirelaatio. □

4.2 Pääisotopiat

Määritelmä 4.2. (Vrt. [3, s. 304].) Kvasiryhmäisotopiaa

$$(f, g, h)\colon (P, *) \to (Q, \circ)$$

kvasiryhmien $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ välillä kutsutaan *pääisotopiaksi*, jos sen kolmas komponentti h on identiteettikuvaus $P \to P$ joukossa P (ja silloin siis joukot P ja Q ovat yhtenevät). Kvasiryhmien $(P, *)$ ja $(Q, \circ)$ sanotaan olevan tällöin *pääisotooppiset*.

Esimerkki 4.2. Esimerkissä 4.1 osoitettiin, että (f, g, h) on kvasiryhmän $(\mathbb{R}, \circ)$ isotopia kvasiryhmälle $(\mathbb{R}, +)$. Koska isotopian kolmas komponentti h on identiteettikuvaus $id_{\mathbb{R}}$, niin (f, g, h) on myös kvasiryhmien välinen pääisotopia.

Lause 4.3. *(Vrt. [3, s. 304]) Tarkastellaan kvasiryhmäisotopiaa $(f, g, h)\colon (P, *) \to (Q, \bullet)$. Käytetään bijektiota $h\colon P \to Q$ laskutoimituksen $\cdot$ muodostamiseen*

$$x \cdot y = h^{-1}(h(x) \bullet h(y)),$$

kun alkiot x ja y kuuluvat joukkoon P.

1. *Struktuuri $(P, \cdot)$ on kvasiryhmä.*

2. *On olemassa isomorfismi $h\colon (P, \cdot) \to (Q, \bullet)$.*

3. *Isotopia (f, g, h) voidaan jakaa tekijöihin*

   $$(f, g, h) = (h, h, h) \circ (h^{-1} \circ f, h^{-1} \circ g, id_P)$$

   eli siis isotopian (f, g, h) tekijät ovat pääisotopia $(h^{-1} \circ f, h^{-1} \circ g, id_P)\colon (P, *) \to (P, \cdot)$ yhdessä isomorfian $h\colon (P, \cdot) \to (Q, \bullet)$ kanssa.

Todistus. (Vrt. [1, s. 17].) Tarkastellaan ensin väitettä 1. Oletetaan, että alkiot x, $y \in P$ tiedetään. Tällöin $h(x)$ ja $h(y)$ ovat yksikäsitteisiä, sillä h on funktio. Lisäksi tiedetään, että pari $(Q, \bullet)$ on kvasiryhmä, joten siis laskutoimituksella $h(x) \bullet h(y)$ on yksikäsitteinen tulos, joka kuuluu joukkoon Q. Koska funtkio h on bijektio, niin käänteisfunktion määritelmän nojalla tiedetään, että myös käänteisfunktio h^{-1} on bijektio. Siis laskutoimituksella $h^{-1}(h(x) \bullet h(y))$ on yksikäsitteinen ratkaisu, joka kuuluu joukkoon P.

Oletetaan sitten, että alkiot x, y ja z kuuluvat joukkoon P. Kun alkiot x ja z tiedetään ja niille pätee, että

$$x \cdot y = h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) = z,$$

niin määritelmän 2.2 ja funktion h bijektiivisyyden nojalla

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) &= z \\ h(h^{-1}(h(x) \bullet h(y))) &= h(z) \\ h(x) \bullet h(y) &= h(z) \\ h(y) &= h(x) \backslash h(z) \\ h^{-1}(h(y)) &= h^{-1}(h(x) \backslash h(z)) \\ y &= h^{-1}(h(x) \backslash h(z)). \end{aligned}$$

Siis yhtälöllä $x \cdot y = z$ on ratkaisu muuttujan y suhteen. Osoitetaan seuraavaksi, että $y = h^{-1}(h(x) \backslash h(z)$ on yksikäsitteinen. Oletetaan, että on olemassa jokin alkio $t \in P$ siten, että $x \cdot y = x \cdot t$. Nyt siis

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) &= h^{-1}(h(x) \bullet h(t)) \\ h(x) \bullet h(y) &= h(x) \bullet h(t) \\ h(y) &= h(t), \end{aligned}$$

mutta koska tiedetään, että h on bijektio, niin täytyy olla, että $y = t$. Siis alkion y täytyy olla yksikäsitteinen.

Oletetaan sitten, että alkiot x, y ja z kuuluvat joukkoon P. Kun alkiot y ja z tiedetään ja niille pätee, että

$$x \cdot y = h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) = z,$$

niin määritelmän 2.2 ja funktion h bijektiivisyyden nojalla

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) &= z \\ h(h^{-1}(h(x) \bullet h(y))) &= h(z) \\ h(x) \bullet h(y) &= h(z) \\ h(x) &= h(z)/h(y) \\ h^{-1}(h(x)) &= h^{-1}(h(z)/h(y)) \\ x &= h^{-1}(h(z)/h(y)). \end{aligned}$$

Siis yhtälöllä $x \cdot y = z$ on ratkaisu muuttujan x suhteen. Osoitetaan seuraavaksi, että $x = h^{-1}(h(z)/h(y))$ on yksikäsitteinen. Oletetaan, että on olemassa jokin alkio $s \in P$ siten, että $x \cdot y = s \cdot y$. Nyt siis

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) &= h^{-1}(h(s) \bullet h(y)) \\ h(x) \bullet h(y) &= h(s) \bullet h(y) \\ h(x) &= h(s), \end{aligned}$$

mutta koska tiedetään, että h on bijektio, niin täytyy olla, että $x = s$. Siis alkion x täytyy olla yksikäsitteinen. Nyt on siis osoitettu, että $(P, \cdot)$ on kvasiryhmä, joten väite 1 pätee.

Tarkastellaan seuraavaksi väitettä 2. Oletetaan, että alkiot x, $y \in P$. Täytyy todistaa, että

$$h(x \cdot y) = h(x) \bullet h(y).$$

Tiedetään, että funktio $h\colon P \to Q$ on bijektio, joten sillä on käänteisfunktio $h^{-1}\colon Q \to P$. Käänteisfunktion määritelmän nojalla pätee, että $h(h^{-1}(x)) = x$, joten

$$\begin{aligned} x \cdot y &= h^{-1}(h(x) \bullet h(y)) \\ h(x \cdot y) &= h(h^{-1}(h(x) \bullet h(y))) \\ h(x \cdot y) &= h(x) \bullet h(y). \end{aligned}$$

On siis todistettu, että h on isomorfismi kvasiryhmältä $(P, \cdot)$ kvasiryhmälle $(Q, \bullet)$.

Tarkastellaan vielä väitettä 3. Käänteisfunktion määritelmän nojalla $h \circ h^{-1} = id_Q$ ja lisäksi identiteettifunktioille pätee, että $h \circ id_P = id_P \circ h = h$. Nyt yhdistettyjen funktioiden liitännäisyyden perusteella pätee, että

$$\begin{aligned} &f = id_Q \circ f = (h \circ h^{-1}) \circ f = h \circ (h^{-1} \circ f), \\ &g = id_Q \circ g = (h \circ h^{-1}) \circ g = h \circ (h^{-1} \circ g) \quad \text{ja} \\ &h = h \circ id_P. \end{aligned}$$

Funktiot f ja g ovat määritelty kvasiryhmästä $(P, *)$ kvasiryhmään $(Q, \bullet)$, käänteisfunktio h^{-1} on määritelty kvasiryhmältä $(Q, \bullet)$ kvasiryhmään $(P, \cdot)$ ja identiteettikuvaus id_P on määritelty joukolta P joukkoon P. Kvasiryhmähomotopian määritelmän 4.1 nojalla siis kolmikon $(h^{-1} \circ f,\ h^{-1} \circ g,\ id_P)$ lähtökvasiryhmä on kvasiryhmä $(P, *)$ ja maalikvasiryhmä on kvasiryhmä $(P, \cdot)$. Siis pääisotopia $(h^{-1} \circ f, h^{-1} \circ g, id_P)\colon (P, *) \to (P, \cdot)$ on isotopian (f, g, h) tekijä. Lisäksi väitteen 2 nojalla $h\colon (P, \cdot) \to (Q, \bullet)$ on kvasiryhmäisomorfismi ja siis isotopian (f, g, h) tekijä. On siis osoitettu, että väite 3 pätee. □

Lähteet

[1] Pasanen, S. Kvasiryhmistä ja niiden sovelluksista. Pro gradu. Tampereen yliopisto, Informaatiotieteiden yksikkö. Tampere. 2016.

[2] Pflugfelder, H. O. *Quasigroups and Loops Introduction*. Berlin: Heldermann Verlag, 1990.

[3] Smith, J. D. *Introduction to abstract algebra*. United States: Chapman & Hall/CRC, 2009.