Tampereen yliopisto

Mathias Koch

ÄÄRIARVOISTA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2020

Tiivistelmä

Mathias Koch: Ääriarvoista
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Joulukuu 2020

Tämän tutkielman luvussa 2 käymme läpi aluksi määritelmät globaalille ääriarvolle ja paikalliselle ääriarvolle yhden muuttujan funktioille sekä niihin liittyvät lauseet, todistukset ja esimerkit. Alaluvussa 2.2 esittelemme tarkemmin paikallisen ääriarvoon liittyviä olennaisia lauseita, kuten ensimmäisen kertaluvun derivaatan testin sekä toisen kertaluvun derivaatan testin, joiden avulla muun muassa paikallisten ääriarvojen määrittäminen onnistuu. Esittelemme myös näihin esimerkkeihin liittyvät merkkikaaviot, jotka havainnollistavat eri tilanteet ääriarvoille minimi- ja maksimipisteissä sekä kriittisissä pisteissä ja päätepisteissä, kun tarkastellaan funktioita $f(x)$ ja $f'(x)$ sekä niiden käyttäytymistä.

Luvussa 3 käymme läpi ääriarvojen olemassaoloa yhden muuttujan funktioille. Luvussa käytämme hyödyksi raja-arvon käsitettä sekä aiemmin käytyä globaalin raja-arvon määritelmää. Esittelemme ääriarvojen olemassaoloa koskevan lauseen ja todistamme ääriarvoille maksimi- ja minimiarvon kahdessa osassa, jonka jälkeen esittelemme näihin omat esimerkit perustuen kyseessä olevaan lauseeseen. Esittelemme myös näihin esimerkkeihin liittyvät kuvaajat, jotka havainnollistavat eri tilanteet ääriarvojen olemassaolon tarkastelussa.

Luvussa 4 käymme läpi määritelmät globaalille ääriarvolle ja paikalliselle ääriarvolle kahden muuttujan funktioille sekä niihin liittyvät lauseet ja esimerkit. Luvussa tarkastelemme erityisesti osittaisderivaattoja, jotka ovat olennainen osa tätä lukua. Luvussa esittelemme jälleen toisen kertaluvun derivaatan testin, jota voidaan soveltaa kahden muuttujan funktioissa. Tämän avulla voimme määrittää ja tunnistaa mahdolliset paikalliset ääriarvot sekä satulapiste. Alaluvussa 4.2 esittelemme lopuksi lauseen Hessen matriisille sekä siihen liittyviä esimerkkejä, joissa sovelletaan aiemmin esiteltyä toisen kertaluvun derivaatan testiä sekä matriisilaskennasta tuttua determinantin määritelmää 2×2 -matriisissa. Lopussa esittelemme myös näihin esimerkkeihin liittyvät kuvaajat, jotka havainnollistavat eri tilanteet, kun tarkastellaan mahdollisia ääriarvopisteitä sekä niiden luonnetta.

Avainsanat: ääriarvo, globaali ääriarvo, paikallinen ääriarvo, kriittinen piste, osittaisderivaatta, Hessen matriisi

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastelemme erityyppisiä ääriarvoja, niiden ominaisuuksia sekä merkintätapoja. Ääriarvojen avulla voidaan ratkaista monenlaisia matemaattisia ongelmia, kun tarkastellaan esimerkiksi funktion jatkuvuutta ja derivaattaa. Tässä tutkielmassa keskitymme pääasiassa ääriarvoihin näiden käsitteiden kautta ja esittelemme ääriarvojen kannalta olennaisia perustuloksia ja sovelluksia, jotka antavat kattavan käsityksen ääriarvojen perusteista.

Tutkielman luvussa 2 esittelemme perusmääritelmiä ääriarvoille, joita tulemme tarvitsemaan myös tässä tutkielmassa myöhemmin. Luvun alussa käymme läpi globaalin ja paikallisen ääriarvon määritelmät sekä niihin liittyviä lauseita yhden muuttujan funktioille, jonka jälkeen havainnollistamme ääriarvojen ominaisuuksia esimerkkejä hyödyntäen. Tämän jälkeen lukijalla on käsitys siitä, mikä on ääriarvo ja mitä sen avulla voidaan ratkaista.

Tutkielman luvussa 3 esittelemme ääriarvojen olemassaoloa yhden muuttujan funktioille. Tässä luvussa tulevat myös tunnetuiksi jatkuvuuden ja raja-arvon käsitteet sekä aiemmin käyty globaalin ääriarvon määritelmä. Luvun alussa esittelemme ääriarvojen olemassaoloa koskevan lauseen, jonka jälkeen todistamme sen. Todistuksessa todistamme ääriarvoille maksimi- ja minimiarvon kahdessa osassa. Tämän jälkeen esittelemme esimerkkejä, jotka havainnollistavat ääriarvojen olemassaoloa koskevaa lausetta. Tämän jälkeen lukijalla on käsitys siitä, miten ääriarvot ovat olemassa ja mikä teoria niiden taustalla on.

Tutkielman luvussa 4 esittelemme ääriarvojen ominaisuuksia usean muuttujan funktioille hyödyntäen osittaisderivaattoja. Tarkastelemme usean muuttujan funktion ääriarvoja vain kahdessa muuttujassa, jotta aiheen käsittely pysyy yksinkertaisena ja mielekkäänä. Luvun alussa esittelemme toisen kertaluvun derivaatan testin lauseen, josta annamme myös käytännön esimerkkejä. Tämän jälkeen esittelemme sovelluksena Hessen matriisin, jossa hyödynnämme toisen kertaluvun derivaatan testiä. Tämän jälkeen lukijalla on käsitys siitä, mitä usean muuttujan funktion ääriarvot ovat ja mitä niiden avulla voidaan ratkaista.

Tutkielman lukijalta oletamme lukiomatematiikan tai analyysin perusteiden tietämystä, sillä joidenkin käsitteiden, kuten jatkuvuuden ja derivaatan määritelmät oletetaan lukijalta jo entuudestaan tutuiksi. Päälähteenä tässä tutkielmassa käytämme Robert A. Adamsin ja Christopher Essexin kirjaa *Calculus: a complete course*.

2 Ääriarvot

Luvussa 2 esitetään joitakin perusmääritelmiä, jotka ovat olennaisia ääriarvojen tarkastelussa. Tässä osiossa esitetään kaksi määritelmää: globaalin ja paikallisen ääriarvon määritelmät sekä esimerkkejä. (Vrt. [1, s. 234–237] ja [3, s. 190])

Luvussa 2 keskitytään tarkastelemaan yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita, joissa $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ ja $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Tässä merkintä $\mathcal{D}(f)$ tarkoittaa funktion f määrittelyjoukkoa, joka on siis joukon $\mathbb{R}$ osajoukko.

2.1 Globaali ääriarvo

Määritelmä 2.1. Funktiolla $f(x)$ on *globaali maksimiarvo* $f(x_0)$ pisteessä x_0 määrittelyjoukossaan, jos

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{aina, kun } x \in \mathcal{D}(f).$$

Määritelmä 2.2. Funktiolla $f(x)$ on *globaali minimiarvo* $f(x_0)$ pisteessä x_0 määrittelyjoukossaan, jos

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{aina, kun } x \in \mathcal{D}(f).$$

Lause 2.1. *Jos funktion $f(x)$ määrittelyjoukko on suljettu, äärellinen väli tai monien tällaisten äärellinen yhdiste ja jos $f(x)$ on jatkuva kyseisessä määrittelyjoukossa, funktiolla $f(x)$ on globaali maksimiarvo ja globaali minimiarvo.*

Lause 2.2. *Funktiolla $f(x)$ voi olla ääriarvoja vain kolmen erityistyypin pisteissä:*

(i) *Jos $f'(x) = 0$, missä $x \in \mathcal{D}(f)$, kyseessä on funktion $f(x)$* kriittinen piste.

(ii) *Jos $f'(x)$ ei ole määritelty pisteessä $x \in \mathcal{D}(f)$, kyseessä on funktion $f(x)$* singulariteettipiste.

(iii) *Jos piste x ei kuulu mihinkään määrittelyjoukon $x \in \mathcal{D}(f)$ sisältämään avoimeen väliin, kyseessä on määrittelyjoukon* päätepiste.

Esimerkki 2.1. Funktiolla

$$f(x) = x^2$$

on yksikäsitteinen globaali minimiarvo pisteessä $x = 0$.

Esimerkki 2.2. Funktiolla

$$f(x) = x^3$$

ei ole globaalia maksimi- tai minimiarvoa.

Esimerkki 2.3. Etsi funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$$

maksimi- ja minimiarvo, kun $-3 \leq x \leq 3$.

Ratkaisu. Koska funktio $f(x)$ on polynomi, se on määritelty kaikkialla. Kriittisille pisteille lasketaan

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 &= 3(x^2 - 4x - 5) \\ &= 3(x+1)(x-5) \\ &= 0, \qquad \text{jos} \quad x = -1 \ \lor \ x = 5. \end{aligned}$$

Koska $x = 5$ ei ole funktion $f(x)$ määrittelyjoukossa, se voidaan jättää huomiotta tarkastelussa. Riittää, kun tarkastellaan vain funktion $f(x)$ arvoja kriittisessä pisteessä $x = -1$ ja päätepisteissä $x = -3$ ja $x = 3$. Siis

$$f(-3) = -32, \qquad f(-1) = 12 \qquad \text{ja} \qquad f(3) = -68.$$

Näin ollen funktion $f(x)$ maksimiarvo välillä $-3 \leq x \leq 3$ on 12 kriittisessä pisteessä $x = -1$ ja minimiarvo on -68 päätepisteessä $x = 3$.

Esimerkki 2.4. Etsi funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

maksimi- ja minimiarvo, kun $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Ratkaisu. Koska funktio $f(x)$ ei ole polynomi, se ei ole määritelty kaikkialla. Kriittisille pisteille lasketaan

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} &= -\frac{2x}{(x-1)^2(x+1)^2} \\ &= 2x\left(-\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}\right) \\ &= 0, \qquad \text{jos} \quad x = 0. \end{aligned}$$

Huomataan, että funktio $f'(x)$ on määritelty kaikkialla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Funktio $f'(x)$ ei ole siis määritelty, kun $x = -1$ ja $x = 1$. Nämä pisteet ovat funktion $f(x)$ singulariteettipisteitä. Riittää, kun tarkastellaan funktion $f(x)$ arvoja kriittisessä pisteessä $x = 0$ ja päätepisteissä $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{1}{2}$. Siis

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}, \qquad f(0) = -1 \qquad \text{ja} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}.$$

Näin ollen funktion $f(x)$ maksimiarvo välillä $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ on -1 kriittisessä pisteessä $x = 0$ ja minimiarvo on $-\frac{4}{3}$ päätepisteissä $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{1}{2}$.

2.2 Paikallinen ääriarvo

Määritelmä 2.3. Funktiolla $f(x)$ on *paikallinen maksimiarvo* pisteessä x_0, jos on olemassa avoin väli (a, b), joka sisältää pisteen x_0 siten, että

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{aina, kun } x \in (a, b).$$

Määritelmä 2.4. Funktiolla $f(x)$ on *paikallinen minimiarvo* pisteessä x_0, jos on olemassa avoin väli (a, b), joka sisältää pisteen x_0 siten, että

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{aina, kun } x \in (a, b).$$

Lause 2.3. *(Vrt. [3, s. 196]) Jos funktiolla $f(x)$ on paikallinen maksimi- tai minimiarvo pisteessä x_0, tällöin joko*

$$f'(x_0) = 0 \quad \textit{tai} \quad f'(x_0) \textit{ ei ole olemassa.}$$

Todistus. Jos $f'(x_0) > 0$ tai $f'(x_0) < 0$, on oltava luvut x_1 ja x_2, jotka ovat mielivaltaisen lähellä pistettä x_0 ja edelleen täyttävät ehdon

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2).$$

Näin ollen paikallisen maksimi- tai minimiarvon esiintyminen on mahdotonta pisteessä x_0. □

Lause 2.4 (Ensimmäisen kertaluvun derivaatan testi)**.** *OSA I. Oletetaan, että $f(x)$ on jatkuva pisteessä x_0, ja x_0 ei ole funktion $f(x)$ määrittelyjoukon päätepiste.*

(a) *Jos on olemassa avoin väli (a, b) sisältäen pisteen x_0 siten, että $f'(x) > 0$ välillä (a, x_0) ja $f'(x) < 0$ välillä (x_0, b), funktiolla $f(x)$ on* paikallinen maksimiarvo *pisteessä x_0.*

(b) *Jos on olemassa avoin väli* (a, b) *sisältäen pisteen* x_0 *siten, että* $f'(x) < 0$ *välillä* (a, x_0) *ja* $f'(x) > 0$ *välillä* (x_0, b)*, funktiolla* $f(x)$ *on* paikallinen minimiarvo *pisteessä* x_0.

OSA II. Oletetaan, että a *on funktion* $f(x)$ *määrittelyjoukon vasen päätepiste ja* $f(x)$ *on oikealta jatkuva pisteessä* a.

(c) *Jos* $f'(x) > 0$ *jollakin välillä* (a, b)*, funktiolla* $f(x)$ *on* paikallinen minimiarvo *pisteessä* a.

(d) *Jos* $f'(x) < 0$ *jollakin välillä* (a, b)*, funktiolla* $f(x)$ *on* paikallinen maksimiarvo *pisteessä* a.

Oletetaan, että b *on funktion* $f(x)$ *määrittelyjoukon oikea päätepiste ja* $f(x)$ *on vasemmalta jatkuva pisteessä* b.

(e) *Jos* $f'(x) > 0$ *jollakin välillä* (a, b)*, funktiolla* $f(x)$ *on* paikallinen maksimiarvo *pisteessä* b.

(f) *Jos* $f'(x) < 0$ *jollakin välillä* (a, b)*, funktiolla* $f(x)$ *on* paikallinen minimiarvo *pisteessä* b.

Apulause 2.1. Kun pariton määrä funktion $f'(x)$ tekijöistä on negatiivisia, $f'(x)$ on itse negatiivinen. Kun taas parillinen määrä funktion $f'(x)$ tekijöistä on negatiivisia, $f'(x)$ on positiivinen.

Huomautus. Jos $f'(x)$ on positiivinen tai negatiivinen kriittisen tai singulariteettipisteen molemmilla puolilla, funktiolla $f(x)$ ei ole maksimi- tai minimiarvoa tässä pisteessä.

Esimerkki 2.5. Etsi funktion

$$f(x) = 6x^4 - 4x^2 - 8$$

paikallinen ja globaali ääriarvo välillä $[-3, 3]$.

Ratkaisu. Aloitetaan laskemalla derivaatta $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 24x^3 - 8x = 8x(3x^2 - 1) \\ &= 0, \qquad \text{jos} \quad x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ \vee \ x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Kriittiset pisteet ovat siis $x = 0$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vastaavat arvot funktiolle $f(x)$ ovat $f(0) = -8$ ja $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{26}{3}$. Singulariteettipisteitä ei ole, koska funktio $f(x)$ on polynomifunktio. Funktion $f(x)$ arvot päätepisteissä $x = -3$ ja $x = 3$ ovat $f(-3) = f(3) = 442$. Ohessa esitetään positiivisen ja negatiivisen funktion $f'(x)$ ominaisuudet sekä kasvavan ja laskevan funktion $f(x)$ käyttäytymistä päätepisteissä (PP), kriittisissä pisteissä (KP) sekä näiden välissä merkkikaavion muodossa:

	PP		KP		KP		KP		PP
x	-3		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

Merkkikaaviosta huomataan siis, että pisteet $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ovat paikallisia minimipisteitä ja piste $x = 0$ on paikallinen maksimipiste sekä pisteet $x = -3$ ja $x = 3$ ovat globaaleja maksimipisteitä.

Siis funktion $f(x)$ globaali minimiarvo on $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{26}{3}$ ja globaali maksimiarvo $f(-3) = f(3) = 442$ välillä $[-3, 3]$.

Esimerkki 2.6. Etsi funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 16x}{x - 2}$$

paikallinen ja globaali ääriarvo välillä $[5, 10]$.

Ratkaisu. Aloitetaan laskemalla derivaatta $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{(x-2)(2x+16) - (x^2+16x)}{(x-2)^2} &= \frac{x^2 - 4x - 32}{(x-2)^2} \\ &= 0, \qquad \text{jos} \quad x = -4 \ \lor \ x = 8. \end{aligned}$$

Kriittiset pisteet ovat siis $x = -4$ ja $x = 8$. Vastaavat arvot funktiolle $f(x)$ ovat $f(-4) = 8$ ja $f(8) = 32$. Huomataan myös, että funktio $f'(x)$ on määritelty kaikkialla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Funktio $f'(x)$ ei ole siis määritelty, kun $x = 2$. Tämä piste on funktion $f(x)$ singulariteettipiste. Funktion $f(x)$ arvot päätepisteissä $x = 5$ ja $x = 10$ ovat $f(5) = 35$ ja $f(10) = \frac{65}{2}$. Koska $x = -4$ ei ole funktion $f(x)$ määrittelyjoukossa, se voidaan jättää huomiotta tarkastelussa. Riittää, kun tarkastellaan vain funktion $f(x)$ arvoja kriittisessä pisteessä $x = 8$ ja päätepisteissä $x = 5$ ja

$x = 10$. Ohessa esitetään positiivisen ja negatiivisen funktion $f'(x)$ ominaisuudet sekä kasvavan ja laskevan funktion $f(x)$ käyttäytymistä päätepisteissä (PP), kriittisissä pisteissä (KP) sekä näiden välissä merkkikaavion muodossa:

	PP		KP		PP
x	5		8		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

Merkkikaaviosta huomataan siis, että piste $x = 8$ on minimipiste ja pisteet $x = 5$ ja $x = 10$ ovat maksimipisteitä.

Siis funktion $f(x)$ paikallinen maksimiarvo on $f(10) = \frac{65}{2}$, globaali maksimiarvo on $f(5) = 35$ ja globaali minimiarvo on $f(8) = 0$ välillä $[5, 10]$.

Lause 2.5 (Toisen kertaluvun derivaatan testi)**.** *(Vrt. [5]) Oletetaan, että $f'(x_0) = 0$.*

(a) *Jos $f''(x_0) > 0$, funktiolla $f(x)$ on* paikallinen minimiarvo *pisteessä x_0.*

(b) *Jos $f''(x_0) < 0$, funktiolla $f(x)$ on* paikallinen maksimiarvo *pisteessä x_0.*

(c) *Jos $f''(x_0) = 0$, funktiosta $f(x)$ ei voida sanoa mitään.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 200]) Todistetaan osa (a). Koska $f''(x)$ on funktion $f'(x)$ derivaatta, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos

$$x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta,$$

niin

$$f'(x_1) < f'(x_0) < f'(x_2).$$

Koska $f'(x_0) = 0$, saadaan

$$f'(x) < 0, \quad \text{kun } x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{ja} \quad f'(x) > 0, \quad \text{kun } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Lauseen 2.4 nojalla funktiolla $f(x_0)$ on siis paikallinen minimiarvo pisteessä x_0. □

Todistus. Todistetaan osa (b). Koska $f''(x)$ on funktion $f'(x)$ derivaatta, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos

$$x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta,$$

niin

$$f'(x_1) > f'(x_0) > f'(x_2).$$

Koska $f'(x_0) = 0$, saadaan

$$f'(x) > 0, \quad \text{kun } x \in (x_0 - \delta, x_0) \qquad \text{ja} \qquad f'(x) < 0, \quad \text{kun } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Lauseen 2.4 nojalla funktiolla $f(x_0)$ on siis paikallinen maksimiarvo pisteessä x_0. □

Esimerkki 2.7. Etsi funktion

$$f(x) = 3x^3 - 6x$$

paikalliset ääriarvot.

Ratkaisu. Aloitetaan laskemalla derivaatta $f'(x)$ ja $f''(x)$:

$$f'(x) = 9x^2 - 6 \qquad \text{ja} \qquad f''(x) = 18x.$$

Kriittiset pisteet ovat $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ja $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Kummassakin näistä pisteistä derivaatta on 0. Singulariteettipisteitä ei ole, koska funktio $f(x)$ on polynomifunktio. Koska $f''\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) < 0$ ja $f''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) > 0$, lauseesta 2.5 seuraa, että $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{3}$ on funktion $f(x)$ paikallinen maksimiarvo ja $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ on paikallinen minimiarvo.

Esimerkki 2.8. Etsi funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

paikalliset ääriarvot.

Ratkaisu. Aloitetaan laskemalla derivaatta $f'(x)$ ja $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{x^6 - 2x^4 + x^2} \qquad \text{ja} \qquad f''(x) = \frac{12x^4 - 6x^2 + 2}{x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3}.$$

Kriittiset pisteet ovat $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ja $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Kummassakin näistä pisteistä derivaatta on 0. Huomataan myös, että funktiot $f(x)$, $f'(x)$ ja $f''(x)$ ovat määritelty kaikkialla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Funktiot $f(x)$, $f'(x)$ ja $f''(x)$ eivät ole siis määritelty, kun $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$. Nämä pisteet ovat funktioiden $f(x)$ ja $f'(x)$ singulariteettipisteitä. Koska $f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$ ja $f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, lauseesta 2.5 seuraa, että $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ on funktion $f(x)$ paikallinen minimiarvo ja $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ on paikallinen maksimiarvo.

3 Ääriarvojen olemassaolo

Luvussa 3 esitetään ääriarvojen olemassaoloa koskeva lause, joka perustuu globaaleihin ääriarvoihin ja raja-arvoon. Tässä osiossa todistetaan ääriarvojen olemassaolo sekä havainnollistetaan se esimerkeillä. (Vrt. [1, s. 238–239])

Lause 3.1. *Jos funktio $f(x)$ on jatkuva avoimella välillä (a, b) ja jos*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \qquad \textit{ja} \qquad \lim_{x \to b-} f(x) = M,$$

seuraavat päätelmät pätevät:

(i) *Jos $f(u) > L$ ja $f(u) > M$ jollekin pisteelle u välillä (a, b), funktiolla $f(x)$ on* globaali maksimiarvo *välillä (a, b).*

(ii) *Jos $f(v) < L$ ja $f(v) < M$ jollekin pisteelle v välillä (a, b), funktiolla $f(x)$ on* globaali minimiarvo *välillä (a, b).*

Todistus. Todistetaan osa (i). Oletetaan, että on olemassa luku u välillä (a, b) siten, että $f(u) > L$ ja $f(u) > M$. Tässä L ja M voivat olla äärellisiä lukuja tai $-\infty$. Koska $\lim_{x \to a+} f(x) = L$, on oltava luku x_1 välillä (a, u) siten, että

$$f(x) < f(u), \qquad \text{kun} \quad a < x < x_1.$$

Vastaavasti on oltava olemassa luku x_2 välillä (u, b) siten, että

$$f(x) < f(u), \qquad \text{kun} \quad x_2 < x < b.$$

Täten $f(x) < f(u)$ kaikissa välin (a, b) pisteissä, jotka eivät ole suljettuja, äärellinen osaväli on $[x_1, x_2]$. Lauseen 3.1 nojalla funktiolla $f(x)$ ollessaan jatkuva välillä $[x_1, x_2]$ on oltava globaali maksimiarvo tällä välillä pisteessä w. Koska $u \in [x_1, x_2]$, niin $f(w) \geq f(u)$, joten $f(w)$ on funktion $f(x)$ maksimiarvo kaikille välin (a, b) pisteille. □

Todistus. Todistetaan osa (ii). Oletetaan, että on olemassa luku v välillä (a, b) siten, että $f(v) < L$ ja $f(v) < M$. Tässä L ja M voivat olla äärellisiä lukuja tai ∞. Koska $\lim_{x \to a+} f(x) = L$, on oltava luku x_1 välillä (a, v) siten, että

$$f(x) > f(v), \qquad \text{kun} \quad a < x < x_1.$$

Vastaavasti on oltava olemassa luku x_2 välillä (v, b) siten, että

$$f(x) > f(v), \qquad \text{kun} \quad x_2 < x < b.$$

Täten $f(x) > f(v)$ kaikissa välin (a, b) pisteissä, jotka eivät ole suljettuja, äärellinen osaväli on $[x_1, x_2]$. Lauseen 3.1 nojalla funktiolla $f(x)$ ollessaan jatkuva välillä $[x_1, x_2]$ on oltava globaali minimiarvo tällä välillä pisteessä w. Koska $v \in [x_1, x_2]$, niin $f(w) \leq f(v)$, joten $f(w)$ on funktion $f(x)$ minimiarvo kaikille välin (a, b) pisteille. $\square$

Esimerkki 3.1. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = x + \frac{9}{x}$$

on globaali minimiarvo välillä $(0, \infty)$ ja etsi tämä minimiarvo.

Ratkaisu. Selvästi

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Koska $f(1) = 10 < \infty$, lause 3.1 takaa, että funktiolla $f(x)$ on oltava globaali minimiarvo jossakin pisteessä välillä $(0, \infty)$. Löytääksemme minimiarvon meidän täytyy tarkistaa funktion $f(x)$ arvot kaikissa kriittisissä pisteissä tai singulariteettipisteissä kyseisellä välillä. Siis

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} &= \frac{(x-3)(x+3)}{x^2} \\ &= 0, \qquad \text{jos} \quad x = -3 \ \vee \ x = 3. \end{aligned}$$

Koska funktiolla $f(x)$ on määrittelyjoukko välillä $(0, \infty)$, sillä ei ole singulariteettipisteitä vaan yksi kriittinen piste $x = 3$, missä funktiolla $f(x)$ on arvo $f(3) = 6$. Tämän on oltava tällöin funktion $f(x)$ minimiarvo välillä $(0, \infty)$. (Ks. kuva 3.1)

Esimerkki 3.2. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = x + \frac{16}{x - 1}$$

on globaali maksimiarvo välillä $(-\infty, 0)$ ja etsi tämä maksimiarvo.

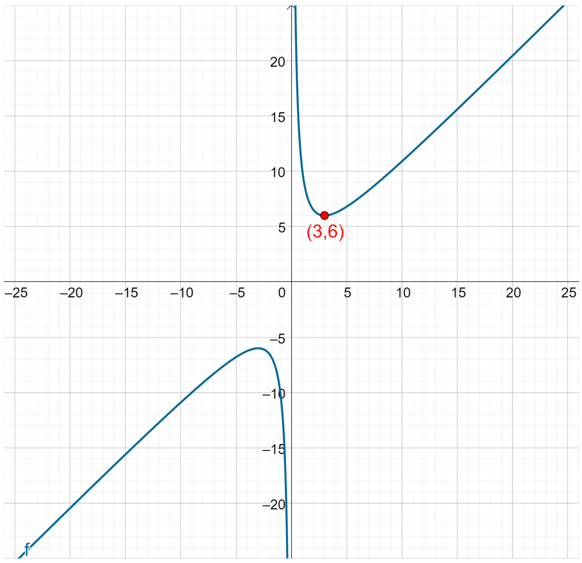
Ratkaisu. Olkoon

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = -16.$$

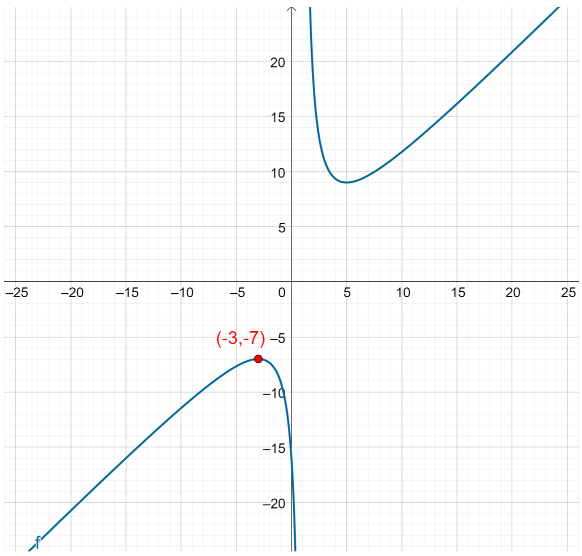
Koska $f(-1) = -9 > -\infty$, lause 3.1 takaa, että funktiolla $f(x)$ on oltava globaali maksimiarvo jossakin pisteessä välillä $(-\infty, 0)$. Löytääksemme maksimiarvon meidän täytyy tarkistaa funktion $f(x)$ arvot missä tahansa kriittisissä pisteissä tai singulariteettipisteissä kyseisellä välillä. Siis

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 16}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 15}{(x-1)^2}$$
$$= 0, \qquad \text{jos} \quad x = -3 \ \lor \ x = 5.$$

Koska funktiolla $f(x)$ on määrittelyjoukko välillä $(-\infty, 0)$, sillä ei ole singulariteettipisteitä vaan yksi kriittinen piste $x = -3$, missä funktiolla $f(x)$ on arvo $f(-3) = -7$. Tämän on oltava tällöin funktion $f(x)$ maksimiarvo välillä $(-\infty, 0)$. (Ks. kuva 3.2)



Kuva 3.1. Esimerkin 3.1 funktion $f(x) = x + \frac{9}{x}$ kuvaaja.



Kuva 3.2. Esimerkin 3.2 funktion $f(x) = x + \frac{16}{x-1}$ kuvaaja.

4 Usean muuttujan funktion ääriarvot

Luvussa 4 esitetään usean muuttujan funktion ääriarvojen ominaisuuksia kahdessa muuttujassa, jotka perustuvat osittaisderivaattoihin. Tässä osiossa esitetään toisen kertaluvun derivaatan testi ja sovelluksena Hessen matriisi sekä näihin liittyviä esimerkkejä. (Vrt. [1, s. 746], [2], [4, s. 908] ja [6])

Luvussa 4 keskitytään tarkastelemaan kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita, joissa $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ ja $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Tässä määrittelyjoukko $\mathcal{D}(f)$ on siis joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukko.

4.1 Kahden muuttujan funktion ääriarvot

Määritelmä 4.1. Funktiolla $f(x, y)$ on *globaali minimiarvo* pisteessä (x_0, y_0), jos

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \quad \text{aina, kun } (x,y) \in \mathcal{D}(f).$$

Määritelmä 4.2. Funktiolla $f(x, y)$ on *globaali maksimiarvo* pisteessä (x_0, y_0), jos

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{aina, kun } (x,y) \in \mathcal{D}(f).$$

Esimerkki 4.1. Funktiolla

$$f(x,y) = -2x^2 - 2y^2 + 2$$

on globaali maksimi pisteessä $(0, 0)$. Globaali maksimiarvo on $f(0, 0) = 2$.

Esimerkki 4.2. Funktiolla

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2$$

on globaali minimi pisteessä $(0, 0)$. Globaali minimiarvo on $f(0, 0) = -2$.

Määritelmä 4.3. Funktiolla $f(x, y)$ on *paikallinen maksimiarvo* pisteessä (x_0, y_0) määrittelyjoukossaan, jos

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{aina, kun } (x,y) \text{ on pisteen } (x_0, y_0) \text{ lähellä.}$$

Määritelmä 4.4. Funktiolla $f(x, y)$ on *paikallinen minimiarvo* pisteessä (x_0, y_0) määrittelyjoukossaan, jos

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \quad \text{aina, kun } (x,y) \text{ on pisteen } (x_0, y_0) \text{ lähellä.}$$

Lause 4.1. *Jos funktiolla $f(x, y)$ on paikallinen ääriarvo pisteessä (x_0, y_0), niin*

(a) *osittaisderivaatat ovat nollia* (kriittinen piste) *tai*

(b) *ainakin toinen ensimmäisistä osittaisderivaatoista ei ole olemassa.*

Huomautus. Jokainen ääriarvopiste on kriittinen piste, mutta kriittinen piste ei välttämättä ole ääriarvopiste.

Lause 4.2 (Toisen kertaluvun derivaatan testi)**.** *Oletetaan, että funktiolla $f(x, y)$ on jatkuvia toisen kertaluvun osittaisderivaattoja pisteen (x_0, y_0) ympäristössä ja että ensimmäiset osittaisderivaatat ovat nollia. Olkoon*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

ja muodostetaan diskriminantti $D = B^2 - AC$.

1. *Jos $D > 0$, piste (x_0, y_0) on* satulapiste

2. *Jos $D < 0$, funktiolla $f(x, y)$ on*

$$\begin{aligned} &\text{paikallinen minimiarvo } \textit{pisteessä } (x_0, y_0), \quad \textit{jos} \quad A > 0, \\ &\text{paikallinen maksimiarvo } \textit{pisteessä } (x_0, y_0), \quad \textit{jos} \quad A < 0. \end{aligned}$$

Huomautus. Satulapiste ei ole ääriarvopiste.

Esimerkki 4.3. Laske funktion

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - xy - 6y$$

osittaisderivaatat ja etsi mahdollinen paikallinen ääriarvo.

Ratkaisu. Funktiolle $f(x, y)$ voidaan laskea osittaisderivaatoiksi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - x - 6.$$

Asettamalla molemmat osittaisderivaatat nollaksi, saadaan

$$8x - y = 0 \qquad \text{ja} \qquad 4y - x - 6 = 0.$$

Ainoa samanaikainen ratkaisu näihin yhtälöihin on $x = \frac{6}{31}$ ja $y = \frac{48}{31}$. Piste $\left(\frac{6}{31}, \frac{48}{31}\right)$ on siten ainoa kriittinen piste. Toiset osittaisderivaatat ovat vakioita, joten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4.$$

Täten $A = 8, B = -1, C = 4$ ja

$$D = B^2 - AC = -31 < 0.$$

Koska $A > 0$, lauseesta 4.2 seuraa, että

$$f\left(\frac{6}{31}, \frac{48}{31}\right) = \frac{144}{961} + \frac{4608}{961} - \frac{288}{961} - \frac{288}{31} = -\frac{144}{31}$$

on paikallinen minimiarvo.

Huomautus. Jos on tiedossa funktion $f(x, y)$ yksi tai useampi kriittinen piste, funktion $f(x, y)$ minimi-, maksimi- tai satulapiste voidaan määrittää helposti myös lauseen 4.2 mukaan käyttäen suoraan determinanttia $D = B^2 - AC$ heti toisen kertaluvun derivaatan testin jälkeen. Tällöin voidaan olettaa, että piste (x_0, y_0) on funktion $f(x, y)$ kriittinen piste, joka on funktion $f(x, y)$ määrittelyjoukon sisällä. Oletetaan myös, että funktion $f(x, y)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteen (x_0, y_0) ympäristössä siten, että

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \qquad B = f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \qquad \text{ja} \qquad C = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Esimerkki 4.4. Olkoon $f(x, y) = -6x^3 + 2xy + 4y^2$. Tutki kahden kriittisen pisteen $(0, 0)$ ja $(1, 1)$ luonnetta.

Ratkaisu. Funktiolle $f(x, y)$ voidaan laskea toisen kertaluvun derivaatan testillä

$$f_{xx}(x, y) = -36x, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2 \qquad \text{ja} \qquad f_{yy}(x, y) = 8.$$

Pisteessä $(0, 0)$ saadaan

$$A = 0, \qquad B = 2, \qquad C = 8 \qquad \text{ja} \qquad B^2 - AC = 4 > 0,$$

joten funktiolla $f(x, y)$ on lauseen 4.2 mukaan satulapiste pisteessä $(0, 0)$. Vastaavasti pisteessä $(1, 1)$ saadaan

$$A = -36 < 0, \qquad B = 2, \qquad C = 8 \quad \text{ja} \quad B^2 - AC = -284 < 0,$$

joten funktiolla $f(x, y)$ on lauseen 4.2 mukaan paikallinen minimi pisteessä $(1, 1)$.

4.2 Hessen matriisi

Lause 4.3. *Oletetaan, että funktio $f(x, y)$ on kahden muuttujan differentioituva reaalifunktio, jonka osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Funktion $f(x, y)$ Hessen matriisi H on 2×2 -matriisi funktion $f(x, y)$ osittaisderivaatoista:*

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Määritellään $D(x,y)$ olemaan matriisin H determinantti

$$D(x,y) = det(H(x,y)) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

Lopuksi oletetaan, että piste (x_0, y_0) on funktion $f(x,y)$ kriittinen piste *eli ensimmäiset osittaisderivaatat ovat nollia. Tällöin toisen kertaluvun derivaatan testistä seuraa:*

1. *Jos $D(x_0,y_0) > 0$ ja $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, niin piste (x_0,y_0) on funktion $f(x,y)$* paikallinen minimi.

2. *Jos $D(x_0,y_0) > 0$ ja $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, niin piste (x_0,y_0) on funktion $f(x,y)$* paikallinen maksimi.

3. *Jos $D(x_0,y_0) < 0$, niin piste (x_0,y_0) on funktion $f(x,y)$* satulapiste.

4. *Jos $D(x_0,y_0) = 0$, niin funktiosta $f(x,y)$ ei voida sanoa mitään.*

Esimerkki 4.5. Etsi funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ mahdolliset ääriarvopisteet ja tutki niiden luonne.

Ratkaisu. Funktiolle $f(x,y)$ voidaan laskea osittaisderivaatoiksi

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad \text{ja} \qquad f_y = 4y^3 - 4x.$$

Nyt lauseen 4.3 nojalla voidaan olettaa, että ensimmäiset osittaisderivaatat ovat nollia, joten

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0 \qquad \text{ja} \qquad f_y = 4y^3 - 4x = 0.$$

Edelleen toisen kertaluvun derivaatan testillä saadaan

$$f_{xx} = 12x^2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -4 \qquad \text{ja} \qquad f_{yy} = 12y^2.$$

Muodostamalla Hessen matriisin H saadaan

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan määrittää determinantti $D(x,y)$ siten, että

$$\begin{aligned} D(x,y) = \det(H(x,y)) &= 12x^2 \cdot 12y^2 - ((-4)\cdot(-4)) \\ &= 144x^2y^2 - 16. \end{aligned}$$

Asettamalla funktion $f(x,y)$ molemmat osittaisderivaatat nollaksi saadaan kriittisiksi pisteiksi $(0,0)$, $(1,1)$ ja $(-1,-1)$. Nyt koska

$$D(0,0) = 144 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0,$$

piste $(0,0)$ on funktion $f(x,y)$ satulapiste. Vastaavasti koska

$$D(1,1) = 144 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - 16 = 128 > 0$$

ja $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, piste $(1,1)$ on funktion $f(x,y)$ paikallinen minimi. Lisäksi koska

$$D(-1,-1) = 144 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^2 - 16 = 128 > 0$$

ja $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, piste $(-1,-1)$ on myös funktion $f(x,y)$ paikallinen minimi.

Siis lauseen 4.3 mukaan funktiolla $f(x,y)$ on satulapiste pisteessä $(0,0)$ ja kaksi paikallista minimipistettä pisteissä $(1,1)$ ja $(-1,-1)$. (Ks. kuva 4.1)

Esimerkki 4.6. Etsi funktion $f(x,y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ mahdolliset ääriarvopisteet ja tutki niiden luonne.

Ratkaisu. Funktiolle $f(x,y)$ voidaan laskea osittaisderivaatoiksi

$$f_x = \frac{1}{x^2} + y \qquad \text{ja} \qquad f_y = x - \frac{8}{y^2}.$$

Nyt lauseen 4.3 nojalla voidaan olettaa, että ensimmäiset osittaisderivaatat ovat nollia, joten

$$f_x = \frac{1}{x^2} + y = 0 \qquad \text{ja} \qquad f_y = x - \frac{8}{y^2} = 0.$$

Edelleen toisen kertaluvun derivaatan testillä saadaan

$$f_{xx} = -\frac{2}{x^3}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 1 \qquad \text{ja} \qquad f_{yy} = \frac{16}{y^3}.$$

Muodostamalla Hessen matriisin H saadaan

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan määrittää determinantti $D(x,y)$ siten, että

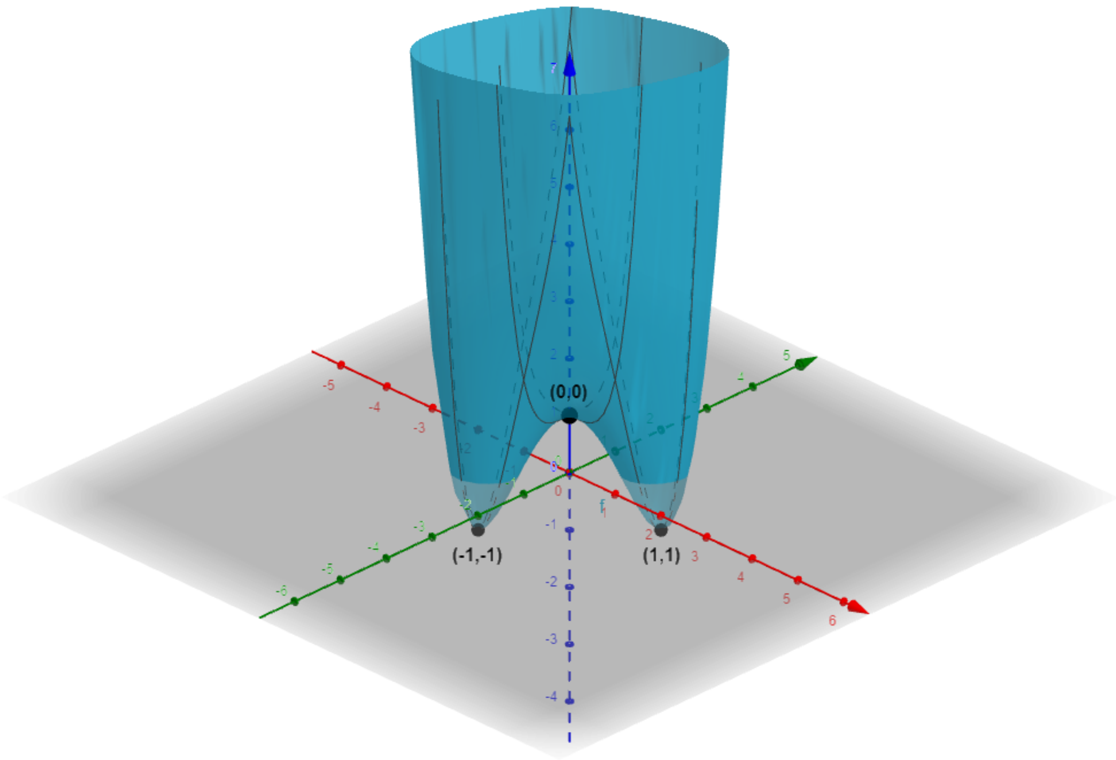
$$\begin{aligned} D(x,y) = \det(H(x,y)) &= -\frac{2}{x^3} \cdot \frac{16}{y^3} - (1 \cdot 1) \\ &= -\frac{32}{x^3 y^3} - 1. \end{aligned}$$

Asettamalla funktion $f(x, y)$ molemmat osittaisderivaatat nollaksi saadaan kriittiseksi pisteeksi $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$. Nyt koska

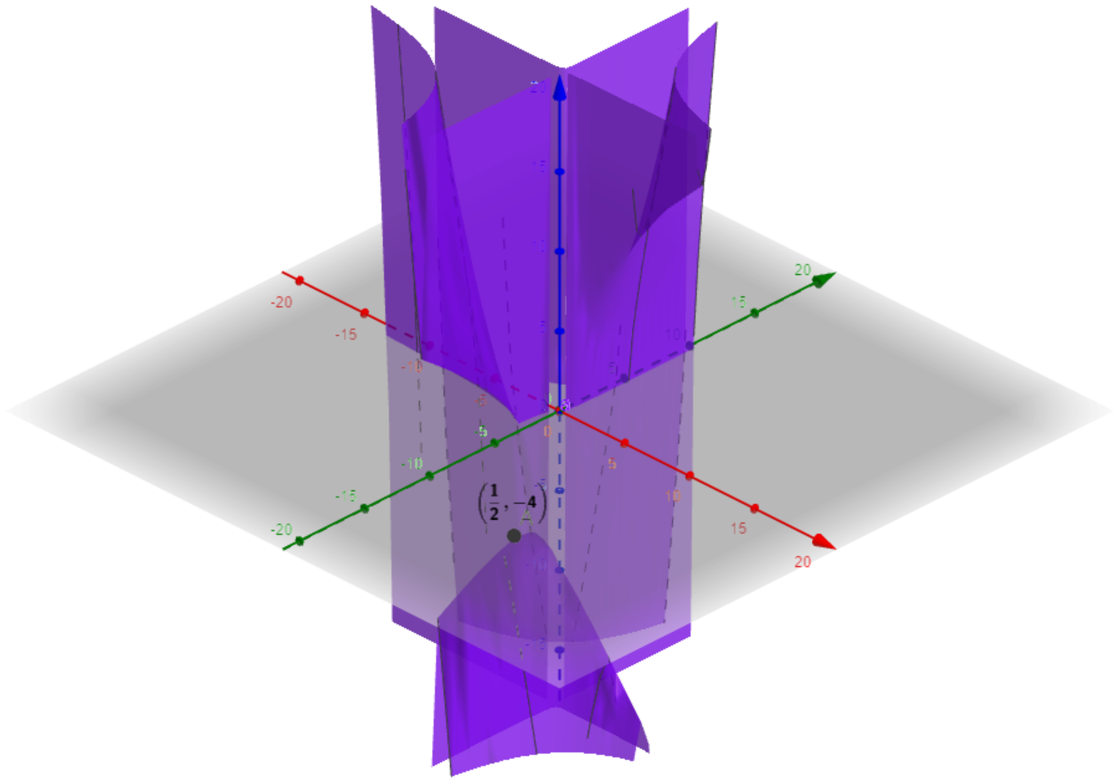
$$D\left(\frac{1}{2}, -4\right) = -\frac{32}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-4)^3} - 1 = 3 > 0,$$

ja $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -4\right) = -16 < 0$, piste $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ on funktion $f(x, y)$ maksimipiste.

Siis lauseen 4.3 mukaan funktiolla $f(x, y)$ on maksimipiste pisteessä $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$. (Ks. kuva 4.2)



Kuva 4.1. Esimerkin 4.5 funktion $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ kuvaaja havainnollistaa ja mallintaa funktion $f(x, y)$ satulapisteen $(0, 0)$ sekä minimipisteiden $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$ sijainnin.



Kuva 4.2. Esimerkin 4.6 funktion $f(x, y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ kuvaaja havainnollistaa ja mallintaa funktion $f(x, y)$ maksimipisteen $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ sijainnin.

Lähteet

[1] Adams, R. A. & Essex C. *Calculus: a complete course 8th ed.* Pearson. University of British Columbia, 2013.

[2] Cobbold, C. *Extreme Values*. University of Glasgow. 22.11.2020. http://www.maths.gla.ac.uk/~cc/2x/2005_2xnotes/2x_chap2.pdf.

[3] Grossman, S. I. *Calculus 5th ed.* Fort Worth Tex. : Saunders College. University of Montana and University College London, 1992.

[4] Salas, S. L. & Hille E. *Calculus: one and several variables 6th ed.* Wiley. New York, 1990.

[5] Wikipedia. *Second derivative*. 26.11.2020. https://en.wikipedia.org/wiki/Second_derivative

[6] Wikipedia. *Second partial derivative test*. 22.11.2020. https://en.wikipedia.org/wiki/Second_partial_derivative_test