Tampereen yliopisto

Krista Moisio

# METRISEN AVARUUDEN TÄYDELLISTÄMINEN

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Marraskuu 2020

# Tiivistelmä

Krista Moisio: Metrisen avaruuden täydellistäminen
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2020

---

Tässä tutkielmassa tarkastellaan metrisiä avaruuksia, ja tarkemmin niiden täydellistämistä. Tutkielman pääaiheena luvussa 3 esitetään ja todistetaan lause, jonka mukaan jokaisella metrisellä avarudella on täydellistymä, ja mitkä tahansa kaksi täydellistymää ovat isometriset keskenään.

Pääaiheen tarkastelua varten luvussa 2 esitetään valmisteluna määritelmiä, lauseita ja esimerkkejä liittyen metriseen avaruuteen, lukujonoihin ja metrisen avaruuden täydellisyyteen. Valmisteluilla johdatellaan lukija tutusta reaalianalyysistä metrisiin avaruuksiin.

Tutkielma perustuu pääosin S. Shiralin ja H.L. Vasudevan teokseen Metric Spaces.

Avainsanat: metrinen avaruus, metriikka, Cauchyn jono, suppeneminen, täydellisyys, isometria

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# Sisällys

# 1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan metrisiä avaruuksia, ja tarkemmin niiden täydellistämistä. Tutkielman pääaiheena luvussa 3 todistetaan, että jokaisella metrisellä avarudella on täydellistymä, ja mitkä tahansa kaksi täydellistymää ovat isometriset keskenään.

Pääaiheen ja todistuksen valmisteluja esitetään luvussa 2. Luvussa esitetään määritelmiä, lauseita ja esimerkkejä metrisiin avaruuksiin, lukujonoihin ja täydellisyyteen liittyen.

Lukijalta oletetaan analyysin perusteiden tuntemusta. Erityisesti lukijan oletetaan tuntevan reaalianalyysin vastaavat käsitteet ja määritelmät pykälästä 2.2, kuten lukujonon suppeneminen ja Cauchyn jono. Lisäksi oletetaan tiedettävän, että reaalilukujen joukko on täydellinen.

Päälähteenä tutkielmassa on käytetty Shiralin ja Vasudevan teosta Metric Spaces, tarkemmin sen lukua 1.

# 2 Valmistelevia tarkasteluja

Luvussa 2 esitetään metriseen avaruuteen, lukujonoihin sekä täydellistämiseen liittyviä määritelmiä, lauseita ja esimerkkejä, joita tullaan tarvitsemaan myöhemmin luvussa 3. Määritelmät ja esimerkit ovat lähteistä [1] ja [2], lauseet todistuksineen ovat lähteestä [1]. Luvuilla $n$ ja $m$ tarkoitetaan positiivisia kokonaislukuja, ellei toisin mainita.

## 2.1 Metrinen avaruus

**Määritelmä 2.1.** Olkoon $X$ epätyhjä joukko. Funktiota

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

kutsutaan *metriikaksi*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad$ aina, kun $x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0 \quad$ jos ja vain jos $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad$ aina, kun $x, y \in X$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad$ aina, kun $x, y, z \in X$.

Neljättä ehtoa kutsutaan *kolmioepäyhtälöksi*.

Metriikalla $d(x, y)$ tarkoitetaan pisteiden $x$ ja $y$ välistä etäisyyttä. Metriikkaa kutsutaan myös etäisyysfunktioksi.

**Määritelmä 2.2.** *Metrinen avaruus* on järjestetty pari $(X, d)$, missä $X$ on epätyhjä joukko ja $d$ on metriikka joukossa $X$.

**Määritelmä 2.3.** Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus ja $Y \subset X$. Tällöin metristä avaruutta $(Y, d)$ kutsutaan metrisen avaruuden $(X, d)$ *aliavaruudeksi*.

**Esimerkki 2.1.** Funktio $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ määriteltynä siten, että

$$d(x, y) = |x - y|,$$

on metriikka joukosssa $\mathbb{R}$. Todistetaan tämä metriikan määritelmän nojalla. Millä tahansa luvuilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ pätee

1. $d(x, y) = |x - y| \geq 0$,

2. $d(x, x) = |x - x| = 0$,

3. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$,

4. $d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Funktio $d$ tunnetaan *standardina metriikkana* joukossa $\mathbb{R}$.

**Esimerkki 2.2.** Olkoon $X$ mielivaltainen epätyhjä joukko ja olkoon

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jos} \quad x = y \\ 1 & \text{jos} \quad x \neq y, \end{cases}$$

missä $x,\ y \in X$. Metriikan määritelmän perusteella voidaan helposti havaita, että $d$ on metriikka joukossa $X$. Metriikkaa $d$ kutsutaan *diskreetiksi metriikaksi* joukossa $X$.

**Esimerkki 2.3** (Euklidinen $n$-ulotteinen avaruus)**.** Olkoon

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n \,\}.$$

Alkioille $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ määritellään

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Tällöin $d$ on metriikka joukossa $\mathbb{R}^n$. Todistetaan tämä osoittamalla, että kolmioepäyhtälö pätee. Määritelmän muut kohdat ovat triviaaleja. Olkoon $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, ja asetetaan

$$a_k = x_k - z_k \quad \text{ja} \quad b_k = z_k - y_k,$$

missä $k = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin

$$d(x, z) = \left( \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \right)^{1/2} \quad \text{ja} \quad d(z, y) = \left( \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 \right)^{1/2}$$

sekä

$$d(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2}.$$

Nyt tulee osoittaa, että

$$\left( \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 \right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Neliöimällä yhtälön 2.1 molemmat puolet, ja käyttämällä yhtälöä

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

havaitaan, että yhtälöstä 2.1 saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2},$$

mikä on Cauchy-Schwarzin epäyhtälö. Näin ollen kolmioepäyhtälö pätee.

## 2.2 Lukujonoista

**Määritelmä 2.4.** Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus. *Lukujono* joukossa $X$ on funktio $f$ joukolta $\mathbb{Z}^+$ joukkoon $X$.

Toisin sanoen, lukujono määrää jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle $n$ yksikäsitteisesti määritellyn alkion joukosta $X$. Jos $f(n) = x_n$, lukujonoa merkitään $\{x_n\}$.

**Määritelmä 2.5.** Olkoon $d$ metriikka joukossa $X$ ja $\{x_n\}$ lukujono joukossa $X$. Lukua $x \in X$ kutsutaan lukujonon $\{x_n\}$ *raja-arvoksi*, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0$, että

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_0.$$

**Määritelmä 2.6.** Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus. Olkoon $\{x_n\}$ lukujono joukossa $X$ ja $x \in X$. Jos $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, sanotaan, että lukujono $\{x_n\}$ *suppenee* kohti lukua $x$ ja merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

*Huomautus.* Jos $x \in X$ ja $x' \in X$ ovat sellaiset luvut, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$, niin $x = x'$. Siis raja-arvo on yksikäsitteinen. Tosiaan, jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut $n_1$ ja $n_2$, että $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ aina, kun $n \geq n_1$ ja $d(x_n, x') < \varepsilon/2$ aina, kun $n \geq n_2$. Näin ollen, $d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, mikäli $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} d(x, x') \leq \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x') = 0$. Metriikan määritelmän nojalla $d(x, x') = 0$ jos ja vain jos $x = x'$.

**Määritelmä 2.7.** Olkoon $d$ metriikka joukossa $X$. Joukon $X$ lukujonon $\{x_n\}$ sanotaan olevan *Cauchyn jono*, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0$, että

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_0 \quad \text{ja} \quad m \geq n_0.$$

*Huomautus.* Lukujono $\{x_n\}$ joukossa $\mathbb{R}$ on Cauchyn jono reaalianalyysin yleisessä mielessä jos ja vain jos se on Cauchyn jono määritelmän 2.7 nojalla standardin metriikan mielessä joukossa $\mathbb{R}$.

**Lause 2.1.** *Metrisessä avaruudessa suppeneva lukujono on Cauchyn jono.*

*Todistus* (vertaa [1, s. 46]). Olkoon $\{x_n\}$ lukujono joukossa $X$ ja $d$ joukon $X$ metriikka. Olkoon $x$ sellainen joukon $X$ alkio, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Siis lukujono suppenee. Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0$, että

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_0.$$

Olkoot $n$ ja $m$ sellaiset positiiviset kokonaisluvut, että $n \geq n_0$ ja $m \geq n_0$. Tällöin $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Siispä metriikan määritelmän nojalla

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Täten väite pätee. □

**Määritelmä 2.8.** Olkoon $\{x_n\}$ lukujono metrisessä avaruudessa $(X, d)$ ja olkoon $\{n_k\}$ sellainen jono positiivisia kokonaislukuja, että $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$. Tällöin lukujonoa $\{x_{n_k}\}$ kutsutaan lukujonon $\{x_n\}$ *osajonoksi.*

On selvää, että lukujono $\{x_n\}$ joukossa $X$ suppenee kohti lukua $x$ jos ja vain jos sen jokainen osajono suppenee kohti lukua $x$.

**Lause 2.2.** *Jos metrisen avaruuden $(X, d)$ Cauchyn jonolla on suppeneva osajono, kyseinen Cauchyn jono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin sen osajono.*

*Todistus* (vertaa [1, s. 48]). Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa $(X, d)$. Tällöin jokaista positiivista lukua $\varepsilon$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0(\varepsilon)$, että

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{aina, kun} \quad m, n \geq n_0(\varepsilon).$$

Käytetään lukujonon $\{x_n\}$ suppenevasta osajonosta merkintää $\{x_{n_k}\}$ ja sen raja-arvosta merkintää $x$. Tällöin raja-arvon määritelmän nojalla jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0(\varepsilon)$, että

$$d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{aina, kun} \quad n_k \geq n_0(\varepsilon).$$

Koska $\{n_k\}$ on aidosti kasvava jono positiivisia kokonaislukuja, niin Cauchyn jonon määritelmän nojalla

$$d(x_{n_k}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{aina, kun} \quad n_k, n \geq n_0(\varepsilon).$$

Nyt

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n_k, n \geq n_0(\varepsilon).$$

Täten lukujono $\{x_n\}$ suppenee kohti lukua $x$. □

**Esimerkki 2.4.** Merkitään $X = \mathbb{R}$ ja olkoon $d(x, y) = |x - y|$ sen metriikka, missä $x, y \in \mathbb{R}$. Olkoon $\{x_n\}$ lukujono joukossa $X$. Lukujono suppenee kohti lukua $x \in X$ metrisen avaruuden $(X, d)$ mielessä jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Siispä suppeneminen joukossa $\mathbb{R}$ standardilla metriikalla on sama kuin reaalilukujonon suppeneminen yleisessä mielessä.

**Esimerkki 2.5.** Olkoon $X$ kaikkien rationaalilukujen joukko ja $d(x, y) = |x - y|$ sen metriikka, missä $x, y \in X$. Tunnetusti on olemassa lukujono

$$1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \ldots,$$

joka suppenee kohti lukua $\sqrt{2}$. Siipä lukujono on Cauchyn jono. Se ei kuitenkaan suppene kohti joukon $X$ alkiota. Voidaan siis todeta, että Cauhcyn jonon ei tarvitse supeta kohti avaruuden pistettä, jossa se on määritelty.

## 2.3 Täydellisyys

**Määritelmä 2.9.** Metrinen avaruus $(X, d)$ on *täydellinen*, jos jokainen Cauchyn jono joukossa $X$ suppenee kohti joukon $X$ alkiota.

Reaalianalyysistä tutusta Cauchyn suppenemisehdosta seuraa, että joukot $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^n$ varustettuina omilla etäisyyksien (metriikoiden) määritelmillään, ovat täydellisiä metrisiä avaruuksia. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ puolestaan ei ole täydellinen metrinen avaruus. Tämän voi todeta esimerkiksi esimerkin 2.5 perusteella.

**Määritelmä 2.10.** Olkoon $(X, d)$ mielivaltainen metrinen avaruus. Täydellistä metristä avruutta $(X', d')$ kutsutaan metrisen avaruuden $(X, d)$ *täydellistymäksi*, jos

1. metrinen avaruus $(X, d)$ on metrisen avaruuden $(X', d')$ aliavaruus,

2. jokainen piste joukossa $X'$ on jonkin joukon $X$ lukujonon raja-arvo.

Esimerkiksi reaalilukujen muodostama avaruus on täydellistymä rationaalilukujen muodostamasta avaruudesta. Suljettu väli $[0,1]$ on joukkojen $(0,1)$, $[0,1)$ ja $(0,1]$, sekä itsensä, täydellistymä.

**Määritelmä 2.11.** Olkoot $(X, d)$ ja $(X^*, d^*)$ kaksi metristä avaruutta. Kuvaus $f$ joukolta $X$ joukkoon $X^*$ on *isometria*, jos

$$d^*(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \text{aina, kun} \quad x, y \in X.$$

Kuvausta $f$ kutsutaan myös *isometriseksi upotukseksi* joukolta $X$ joukkoon $X^*$. Jos kuvaus on surjektio joukolta $X$ joukkoon $X^*$, avaruudet $(X, d)$ ja $(X^*, d^*)$, joiden välillä on olemassa isometrinen kuvaus, ovat *isometriset*. Havaitaan, että isometria on aina injektio. Jos näin ei olisi, kaksi erillistä pistettä $x$ ja $y$ voitaisiin kuvata samalle pisteelle, eikä metriikan määritelmän kohta $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$ enää pätisi.

**Esimerkki 2.6.** Olkoon $X$ epätyhjä joukko. Määritellään metriikka $d$ seuraavasti:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jos} \quad x = y, \\ 1 & \text{jos} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Tällöin $(X, d)$ on täydellinen metrinen avaruus.

Tosiaan, jos $\{x_n\}$ on Cauchyn jono, niin mielivaltaista lukua $0 < \varepsilon < 1$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0(\varepsilon)$, että

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad m, n \geq n_0(\varepsilon).$$

Siispä luvulle $n \geq n_0(\varepsilon)$ pätee $x_n = x_{n_0}$. Täten, mikä tahansa Cauhcyn jono avaruudessa $(X, d)$ on muotoa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots),$$

mikä selvästi suppenee kohti raja-arvoa $x_{n_0}$.

**Esimerkki 2.7.** Avaruuden $\mathbb{R}$ kaksi aliavaruutta $\mathbb{Z}^+$ ja $\mathbb{N}$ $(0 \in \mathbb{N})$ ovat isometriset keskenään. Tämän voi todeta käyttämällä funktiota $f(x) = x - 1$ $(f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N})$ ja metriikoita $d(x, y) = |x - y| = d^*(x, y)$. Nyt saadaan

$$d^*(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - 1 - y + 1| = |x - y| = d(x, y).$$

Siispä kuvaus $f$ on isometria. Lisäksi voidaan helposti havaita, että $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ on surjektio, joten isometrian määritelmän nojalla joukot $\mathbb{Z}^+$ ja $\mathbb{N}$ ovat isometriset keskenään.

# 3 Metrisen avaruuden täydellistäminen

Luvussa 3 esitetään tutkielman pääaihe, eli lause 3.1 ja sen todistus. Lause ja todistus ovat lähteestä [1]. Luvuilla $n$ ja $m$ tarkoitetaan edelleen positiivisia kokonaislukuja, ellei toisin mainita.

**Lause 3.1.** *Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä, ja mitkä tahansa kaksi täydellistymää ovat isometriset keskenään.*

*Todistus* (vertaa [1, s. 55-57]). Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus, ja merkitään kirjaimella $\hat{X}$ kaikkien joukon $X$ Cauchyn jonojen joukkoa. Aloitetaan määrittelemällä kahden Cauchyn jonon $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ joukossa $X$ olevan *ekvivalentit*, jos

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

ja merkitään tätä $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. Osoitetaan nyt, että tämä on ekvivalenssirelaatio joukossa $\hat{X}$. Toisin sanoen, osoitetaan, että relaatio $\sim$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

1. Refleksiivisyys: Osoitetaan, että $\{x_n\} \sim \{x_n\}$. Koska $d(x_n, x_n) = 0$ jokaista lukua $n$ kohti, niin $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$.

2. Symmetrisyys: Jos $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, niin $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, mutta koska $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ kaikilla luvun $n$ arvoilla, niin $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0$, joten $\{y_n\} \sim \{x_n\}$.

3. Transitiivisuus: Jos $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ ja $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, niin $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ ja $\lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$. Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$. Kolmioepäyhtälön nojalla

   $$0 \le d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

   kaikilla luvun $n$ arvoilla, mistä seuraa

   $$0 \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0.$$

   Siispä $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$.

Näin ollen, $\sim$ on ekvivalenssirelaatio ja joukko $\hat{X}$ jakautuu ekvivalenssiluokkiin. Mitkä tahansa kaksi saman ekvivalenssiluokan alkiota ovat ekvivalentteja keskenään, eikä yksikään alkio ole ekvivalentti minkään toisen ekvivalenssiluokan alkion kanssa. Merkitään kirjaimella $\tilde{X}$ kaikkien ekvivalenssiluokkien joukkoa; joukon $\tilde{X}$ alkioita merkitään kirjaimilla $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ ja niin edelleen.

Seuraavaksi tarkastellaan, millaisia ominaisuuksia on ekvivalenttien jonojen raja-arvoila. Jos Cauchyn jonolla $\{x_n\}$ on raja-arvo $x \in X$, ja jos jono $\{y_n\}$ on ekvivalentti jonon $\{x_n\}$ kanssa, niin

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Tosiaan, kolmioepäyhtälön nojalla

$$0 \leq d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x),$$

mistä seuraa, että

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(y_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

ekvivalenssin ja raja-arvon määritelmien nojalla. Näin ollen suppenemisen määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ pätee. Lisäksi, jos jonot $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ eivät ole ekvivalentteja keskenään, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} y_n$, niin epäyhtälö

$$0 \leq d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n)$$

johtaa siihen, että $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Tällöin siis jonot $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ ovat ekvivalentit keskenään. Vakiojono $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ on selvästi Cauchyn jono, ja sillä on raja-arvo $x$.

Määritellään seuraavaksi kuvaus $f$ ja metriikka $p$. Määritellään kuvaus $f\colon X \to \tilde{X}$ seuraavasti:

$$f(x) = \tilde{x},$$

missä $\tilde{x}$ merkitsee ekvivalenssiluokkaa, jonka jokainen alkio suppenee kohti lukua $x$. Näin ollen vakiojono $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ on ekvivalenssiluokan $\tilde{x}$ edustaja. Yllä tehtyjen havaintojen perusteella kuvaus $f$ on injektio. Määritellään seuraavaksi metriikka $p$ joukossa $\tilde{X}$. Aina, kun $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, olkoon

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \quad \text{missä} \quad \{x_n\} \in \tilde{x} \quad \text{ja} \quad \{y_n\} \in \tilde{y}.$$

Havaitaan, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_0$, että

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

aina kun $n$, $m \geq n_0$. Täten $\{d(x_n, y_n)\}$ on Cauchyn jono reaalilukujen joukossa. Näin ollen raja-arvo $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ on olemassa, sillä $\mathbb{R}$ on täydellinen metrinen avaruus.

Osoitetaan ensin, että $p$ on hyvin määritelty. Tosiaan, jos $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$ ja $\{y'_n\} \sim \{y_n\}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

Yhtälöistä

$$d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$$

ja

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$$

seuraa, että

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) &\leq \lim_{n\to\infty} d(x'_n, x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) + \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) + \lim_{n\to\infty} d(y'_n, y_n) \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) + 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $p$ on metriikka joukossa $\tilde{X}$. Koska $d(x_n, y_n) \geq 0$ jokaista lukua $n$ kohti, niin $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \geq 0$. Siispä

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0.$$

Jos $\tilde{x} = \tilde{y}$, niin $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, missä $\{x_n\} \in \tilde{x}$, $\{y_n\} \in \tilde{y}$ ja $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. Tämä tarkoittaa ekvivalenssirelaation määritelmän nojalla, että $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Täten

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$

Kääntäen, jos $p(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, niin metriikan $p$ määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, joten $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ siten, että $\tilde{x} = \tilde{y}$. Koska $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ jokaista lukua $n$ kohti, saadaan

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{y}, \tilde{x}).$$

Lopuksi saadaan

$$p(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = p(\tilde{x}, \tilde{y}) + p(\tilde{y}, \tilde{z}),$$

missä $\{x_n\} \in \tilde{x}, \{y_n\} \in \tilde{y}$ ja $\{z_n\} \in \tilde{z}$. Täten metriikan määritelmän nojalla $p$ on metriikka joukossa $\tilde{X}$.

Metriikalla $p$ määriteltynä joukossa $\tilde{X}$ on ominaisuus, että

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(f(x), f(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

aina, kun $x, y \in X$. Yhtälön vasen puoli seuraa metriikan $p$ ja kuvauksen $f$ määritelmistä. Yhtälön oikea puoli seuraa epäyhtälöistä

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n),$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) &\le \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) + \lim_{n\to\infty} d(x, y) + \lim_{n\to\infty} d(y, y_n)\\ &= d(x, y)\end{aligned}$$

ja

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y),$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned}d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) &\le \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, y)\\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),\end{aligned}$$

ja näin ollen $d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Toisin sanoen, kuvaus $f$ on isometrinen upotus joukolta $X$ joukkoon $\tilde{X}$. Seuraavaksi osoitetaan, että jokainen alkio $\tilde{x} \in \tilde{X}$ on raja-arvo lukujonolle joukossa $f(X)$. Tätä varten oletetaan, että $\{x_n\}$ on Cauchyn jono ekvivalenssiluokassa $\tilde{x}$. Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_k$, että $d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_k$. Olkoon $\tilde{y_k}$ ekvivalenssiluokka sisältäen kaikki kohti lukua $x_{n_k}$ suppenevat Cauchyn jonot, toisin sanoen $\tilde{y_k} = f(x_{n_k})$. Tällöin

$$p(\tilde{x}, f(x_{n_k})) = p(\tilde{x}, \tilde{y_k}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon.$$

Siispä $\tilde{x} = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k})$.

Viimeiseksi osoitetaan, että $\tilde{X}$ on täydellinen.

Olkoon $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ Cauchyn jono joukossa $\tilde{X}$. Koska jokainen alkio $\tilde{x}^{(n)}$ on raja-arvo jollekin lukujonolle joukossa $\tilde{X}$, on olemassa sellainen alkio $\tilde{y}^{(n)} \in f(X)$, että $p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{y}^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tällöin lukujonon $\{\tilde{y}^{(n)}\}$ joukossa $\tilde{X}$ voidaan osoittaa olevan Cauchyn jono seuraavasti:

$$\begin{aligned} p(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{y}^{(m)}) &\leq p(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{x}^{(n)}) + p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}^{(m)}) + p(\tilde{x}^{(m)}, \tilde{y}^{(m)}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Yhtälön oikea puoli voidaan saada niin pieneksi kuin halutaan. Koska $\tilde{y}^{(n)}$ kuuluu joukkoon $f(X)$, on olemassa jokin sellainen $y_n \in X$, että $f(y_n) = \tilde{x}^{(n)}$. Lukujonon $\{y_n\}$ joukossa $X$ täytyy olla Cauchyn jono, sillä $\{\tilde{y}^{(n)}\}$ on Cauchyn jono joukossa $\tilde{X}$ ja kuvaus $f$ on isometria. Näin ollen jono $\{y_n\}$ kuuluu johonkin ekvivalenssiluokkaan $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Osoitetaan nyt, että $\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}) = 0$. Valitaan mielivaltainen luku $\varepsilon > 0$ ja havaitaan, että

$$p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}) \leq p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{y}^{(n)}) + p(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + p(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{x})$$

ja

$$p(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{x}) = p(f(y_n), \tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y_p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sillä $\{y_n\}$ on Cauchyn jono joukossa $X$. Tästä seuraa, että

$$p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}) < \varepsilon$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} p(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}) = 0$$

näin täydentäen todistuksen siitä, että $\tilde{X}$ on täydellinen.

Yksikäsitteisyys: olkoot $(X', d')$ ja $(X'', d'')$ kaksi metrisen avaruuden $(X, d)$ täydellistymää. Osoitetaan, että $(X', d')$ ja $(X'', d'')$ ovat isometriset keskenään.

Olkoon $x'$ joukon $X'$ mielivaltainen alkio. Täydellistymän määritelmän nojalla on olemassa sellainen lukujono $\{x_n\}$, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$. Jonon $\{x_n\}$ voidaan olettaa kuuluvan joukkoon $X''$. Koska $X''$ on täydellinen, lukujono $\{x_n\}$ suppenee joukossa $X''$ kohti lukua $x''$, toisin sanoen $\lim_{n\to\infty} x_n = x''$. Määritellään kuvaus $g\colon X' \to X''$ asettamalla

$$g(x') = x''.$$

Selvästi kuvaus $g$ on injektio, eikä riipu kohti lukua $x'$ suppenevasta lukujonosta $\{x_n\}$. Voidaan havaita, että kuvaus $g$ on myös surjektio. Lisäksi, konstruktion nojalla $g(x) = x$ aina silloin, kun $x \in X$ ja

$$d''(g(x'), g(y')) = d'(x', y')$$

aina, kun $x', y' \in X'$. Näin ollen avaruuksien $(X', d')$ ja $(X'', d'')$ välillä on isometria, joka on surjektio, ja täten avaruudet ovat isometriset keskenään.

Tämä täydentää todistuksen. $\square$

*Huomautus.* Huomioita todistuksesta.

1. Todistuksessa oletetaan, että $\mathbb{R}$ on täydellinen, joten kyseistä todistusta ei voida käyttää rationaalilukujen joukon täydellistämiseen reaalilukujoukoksi.

2. On olemassa muitakin tapoja täydellistää epätäydellinen avaruus.

# Lähteet


[1] S. Shirali, H.L. Vasudeva *Metric Spaces*, London, Springer London, 2006.

[2] B.S. Thomson, J.B. Bruckner, A.M. Bruckner *Elementary Real Analysis*, 2nd ed., Upper Saddle River (N.J.): Prentice-Hall, 2008.