Henna Katainen

TASAINEN JATKUVUUS

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2020

Tiivistelmä

Henna Katainen: Tasainen jatkuvuus

Kandidaattitutkielma

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma

Joulukuu 2020

Tasainen jatkuvuus on analyysin käsite, joka koskee jatkuvia funktioita. Funktion tasaista jatkuvuutta voidaan hyödyntää esimerkiksi integroituvuutta tutkittaessa. Tässä tutkielmassa tarkastellaan tasaisen jatkuvuuden käsitettä, ja verrataan sitä tavallisen jatkuvuuden käsitteeseen, jotta lukija huomaisi näiden eron. Tutkielman lukijalta oletetaan joidenkin analyysin perusasioiden tuntemista.

Jos funktio on tasaisesti jatkuva, sen kahden lähekkäin olevan pisteen arvot ovat lähellä toisiaan. Tasainen jatkuvuus on oleellisesti välin käsite, ja se todistetaan usein epsilon-delta-todistuksella. Todistettaessa löydettävä δ ei riipu tarkastelupisteistä, kuten tavallista jatkuvuutta todistettaessa. Tasaisesti jatkuva funktio on aina jatkuva, joten epäjatkuvia funktioita ei ole mielekästä tarkastella. Tutkielmassa todistetaan tulos, jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio on tällä välillä tasaisesti jatkuva. Toisaalta karkeasti sanottuna äärettömällä välillä tasaista jatkuvuutta tarkastellessa funktio ei saa kasvaa niin, että kasvu nopeutuu. Esimerkiksi funktio x^2 ei ole tasaisesti jatkuva määrittelyjoukossaan, mutta $\sqrt{x}$ on.

Tutkielmassa tarkastellaan myös Lipschitz-jatkuvuuden käsitettä, jolle on käyttöä esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden teoriassa. Lipschitz-jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva, joten jotkut funktiot voidaan osoittaa tasaisesti jatkuvaksi myös Lipschitz-jatkuvuuden määritelmään nojaten.

Tasaisesti jatkuvia funktioita laskettaessa yhteen ja kertoessa reaaliluvulla saadut funktiot ovat edelleen tasaisesti jatkuvia. Tasaisesti jatkuvien funktioiden tulo ja osamäärä eivät välttämättä ole tasaisesti jatkuvia, vaan ne pystytään osoittamaan sellaisiksi vain, kun funktiot ovat tietyllä tavalla rajoitettuja.

Tutkielman lopussa esitetään tapauksia, joissa tasaista jatkuvuutta voidaan käyttää apuna funktion tutkimisessa. Esimerkiksi äärellisellä välillä tasaisesti jatkuva funktio on tällä välillä rajoitettu, joten funktion arvoille voidaan löytää ylä- ja alaraja.

Avainsanat: tasainen jatkuvuus, Lipschitz-jatkuvuus, jatkuvuus, matemaattinen analyysi

Sisällys

1 Johdanto

Useimmille funktion jatkuvuuden käsite tulee tutuksi jo lukiossa. Tässä tutkielmassa esitetään tavallista jatkuvuutta rajoittavampi käsite *tasainen jatkuvuus*. Tutkielmassa paneudutaan erityisesti tasaisen jatkuvuuden määrittämiseen eri funktioille erilaisten apuneuvojen kautta, ja verrataan sitä jatkuvuuden käsitteeseen. Tuloksia havainnollistetaan esimerkkien avulla.

Tutkielman luvussa 2 esitetään muutamia määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan myöhemmin pääaiheen käsittelyssä. Tällaisia ovat muun muassa lukujonon suppenemista koskevat tulokset sekä funktion jatkuvuuden määritelmä.

Tasaisen jatkuvuuden käsite määritellään täsmällisesti luvussa 3 määritelmässä 3.1. Luvussa verrataan tasaisen jatkuvuuden määritelmää jatkuvuuden määritelmään, sekä selvennetään näiden määritelmien eroja. Luvussa esitetään myös esimerkki tietyllä välillä tasaisesti jatkuvasta funktiosta.

Lauseita, joiden avulla funktioita voi osoittaa tasaisesti jatkuviksi, esitetään ja todistetaan luvussa 4. Luvussa nousee esiin myös Lipschitz-jatkuvuuden käsite, jolla on sovelluskohteita differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaoloa todistettaessa.

Luvussa 5 tarkastellaan samoja perustuloksia, mitä jatkuvillekin funktioille pystytään osoittamaan, summaa, vakiolla kertomista ja yhdistetyn funktion tasaista jatkuvuutta. Eroja syntyy, kun tarkastellaan tasaisesti jatkuvien funktioiden tuloa ja osamäärää, jotka ovat tasaisesti jatkuvia vain tietyissä tapauksissa.

Viimeisessä luvussa 6 todistetaan tulos, jonka mukaan äärellisellä välillä tasaisesti jatkuva funktio on rajoitettu. Luvussa esitetään myös ominaisuuksia, joiden osoittamiseen tasainen jatkuvuus on hyvä apuväline.

Lukijalta edellytetään joidenkin analyysin perusasioiden, kuten surpemumin ja infimumin tuntemista. Päälähteinä tutkielmassa on käytetty Mark Bridgerin kirjaa Real analysis: a constructive approach through interval arithmetic sekä Pertti Koiviston luentomonistetta Analyysi A. Tutkielmassa on käytetty myös muita lähteitä pääaiheen käsittelyn tukena.

2 Valmistelevia määritelmiä ja lauseita

Luvussa 2 esitetään lyhyesti muutamia pääaiheen käsittelyssä tarvittavia apuneuvoja. Alaluvussa 2.1 esitetään tarvittavia määritelmiä ja alaluvussa 2.2 muutamia lauseita.

2.1 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Palautetaan ensin mieleen lukujonon raja-arvon määritelmä jatkuvuuden määritelmä pisteessä.

Määritelmä 2.1 ([4, Määritelmä 3.1, s. 36])**.** Lukujonolla (x_n) on *raja-arvo* $x \in \mathbb{R}$, jos jokaista positiivista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n > n_\varepsilon.$$

Määritelmä 2.2 ([4, Määritelmä 5.1, s. 105])**.** Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä ja myös pisteessä a. Tällöin f on *jatkuva pisteessä* a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad |x - a| < \delta,$$

eli jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Tarkastelussa rajoitetun lukujonon ja funktion määritelmät ovat tarpeellisia. Näiden lisäksi määritelmässä 2.5 esitetään *positiivisen alarajan* käsite, jonka avulla tasaisesti jatkuville funktioiden osamäärän voi osoittaa tasaisesti jatkuvaksi.

Määritelmä 2.3 ([4, Huomautus 3.7, s. 43])**.** Lukujono (x_n) on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|x_n| \leq M$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

Määritelmä 2.4 ([1, Definition 4.1.13, s. 142])**.** Funktio f on *rajoitettu* välillä I, jos on olemassa vakio $K \in \mathbb{R}$ siten, että $|f(x)| < K$ aina, kun $x \in I$.

Määritelmä 2.5 ([1, Definition 4.1.14, s. 142])**.** Funktiolla g on *positiivinen alaraja* välillä I, jos on olemassa vakio $L > 0$, $L \in \mathbb{R}$, siten, että $|g(x)| > L$ aina, kun $x \in I$.

2.2 Tarkastelussa tarvittavia lauseita

Suljetulla välillä jatkuvan funktion tasaista jatkuvuutta tarkastellessa tarvitaan Bolzano-Weierstrassin lausetta ja sen todistuksessa esiin tulevaa tulosta suppenevan osajonon raja-arvosta. Samaan todistukseen tarvitaan myös lausetta 2.2, joka yhdistää lukujonon raja-arvon ja funktion jatkuvuuden.

Lause 2.1 (Bolzano-Weierstrassin lause)**.** *Jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Ks. [4, s. 62]. □

Huomautus ([4, s. 62]). Rajoitetun lukujonon (x_n) suppeneva osajono (x_{n_k}) suppenee kohti raja-arvoa $x_0 \in I$, missä I on väli, joka sisältää kaikki lukujonon (x_n) pisteet.

Lause 2.2. *Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, niin*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Todistus. Ks. [4, s. 115]. □

3 Tasainen jatkuvuus

Luvussa 3 esitellään tasaisen jatkuvuuden määritelmä ja annetaan esimerkki tasaisesti jatkuvasta funktiosta.

Määritelmä 3.1 ([4, Määritelmä 5.6, s. 132])**.** Funktio f on *tasaisesti jatkuva* välillä I, jos jokaista positiivista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad x_1, x_2 \in I \quad \text{ja} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Kun verrataan määritelmää 2.2, jossa on määritelty jatkuvuus pisteessä, tasaisen jatkuvuuden määritelmään 3.1, huomataan tasaisen jatkuvuuden olevan erityisesti välin I käsite, kun taas tavallinen jatkuvuus on pisteen käsite. Kun osoitetaan funktio tavallisesti jatkuvaksi jollain välillä, osoitetaan se jatkuvaksi välin jokaisessa pisteessä.

Määritelmästä 3.1 huomataan myös, että luku δ riippuu funktiosta f, luvusta ε ja välistä I, mutta se ei riipu pisteistä x_1 ja x_2. Kun tarkastellaan jatkuvuutta pisteessä, määritelmän 2.2 mukaan, δ riippuu lisäksi tutkittavasta pisteestä a. [1, Remark 4.1.5, s. 140]

On helppo nähdä korvaamalla x_2 pisteellä a, että jos funktio on jollakin välillä tasaisesti jatkuva, se on tällä välillä myös jatkuva. Lisäksi, jos funktio on tasaisesti jatkuva välillä I, se on tasaisesti jatkuva myös välin jokaisella osavälillä. [4, s. 132]

Esimerkki 3.1 (vrt. [1, s. 145])**.** Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \sqrt{x}$$

on tasaisesti jatkuva välillä $I = [0, \infty[$.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta = \varepsilon^2$, ja oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$ ja $|x_1 - x_2| < \delta$. Nyt siis

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \\
&= \sqrt{|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|^2} = \sqrt{|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|\,|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|} \\
&\leq \sqrt{|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|\,(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \sqrt{|\sqrt{x_1}^2 - \sqrt{x_2}^2|} \\
&= \sqrt{|x_1 - x_2|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tulos seuraa suoraan tasaisen jatkuvuuden määritelmästä.

4 Lauseita tasaisen jatkuvuuden määrittämiseen

Luvussa 4 esitetään lauseita, joita voi käyttää tasaisen jatkuvuuden määrittämiseen eri funktioille. Luvun alaluvussa 4.1 tarkastellaan suljetulla välillä jatkuvien funktioiden tasaista jatkuvuutta. Alaluvussa 4.2 esitellään Lipschitz-jatkuvuuden määritelmä, ja lause, jonka mukaan jokainen Lipschitz-jatkuva funktio on myös tasaisesti jatkuva.

4.1 Suljetulla välillä jatkuvan funktion tasainen jatkuvuus

Seuraava lause on käyttökelpoinen tasaisen jatkuvuuden määrittämiseen funktioille, jotka pystytään helposti osoittamaan jatkuviksi. Tällaisia ovat esimerkiksi polynomifunktiot.

Lause 4.1. *Suljetulla välillä $I = [A, B]$ jatkuva funktio on tällä välillä tasaisesti jatkuva.*

Todistus (vrt. [4, Lauseen 5.37 todistus]. Todistetaan lause vastaoletuksella, jonka mukaan f ei ole tasaisesti jatkuva välillä I. Todistuksessa muodostetaan lukujonot x_n ja y_n, joiden erotus on pienempi kuin δ. Tämän jälkeen todistetaan näiden jonojen osajonojen suppenevan kohti samaa pistettä, mikä johtaa ristiriitaan vastaoletuksen kanssa.

Tehdään vastaoletus, että f ei ole tasaisesti jatkuva välillä $[A, B]$. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että aina, kun $\delta > 0$, löydetään $x, y \in [A, B]$ siten, että

$$|x - y| < \delta \quad \text{ja} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Valitaan $\delta = \frac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \dots)$. Nyt siis tehdyn vastaoletuksen perusteella löydetään lukuja δ vastaavat pisteet x_n, $y_n \in [A, B]$, joille pätee

$$|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{4.1}$$

Koska lukujonon (x_n) arvot kuuluvat välille $[A, B]$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, määritelmän 2.3 nojalla lukujono on rajoitettu. Tällöin lukujonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{n_k}) Bolzano-Weierstrassin lauseen 2.1 nojalla. Lisäksi lauseeseen liittyvän huomautuksen perusteella osajono (x_{n_k}) suppenee kohti pistettä $x_0 \in [A, B]$. Siis määritelmän

2.1 mukaan on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että

$$|x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun} \quad n_k > n_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Lukujono (y_n) on myös rajoitettu, ja sillä on suppeneva osajono (y_{n_k}) samoilla perusteilla kuin lukujonolla (x_n). Osoitetaan, että osajono (y_{n_k}) suppenee kohti samaa pistettä x_0. Oletetaan, että $n_k > \max\{n_\varepsilon, \frac{2}{\varepsilon}\}$. Kolmioepäyhtälöä apuna käyttäen pätee

$$|y_{n_k} - x_0| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0|.$$

Ehdon (4.1) ja oletuksen perusteella

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lisäksi ehdon (4.2) perusteella

$$|x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tällöin siis

$$|y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

joten (y_{n_k}) suppenee kohti pistettä x_0.

Koska f on jatkuva välillä $[A, B]$, lauseen 2.2 perusteella

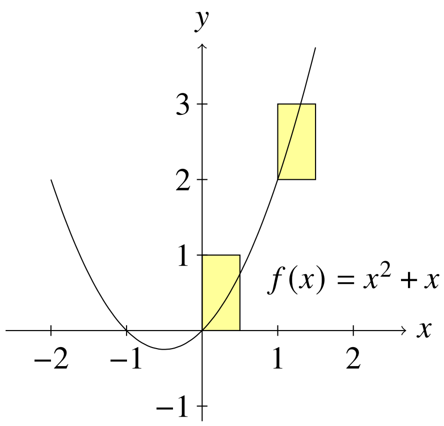
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Tämä on kuitenkin ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, sillä ehdon (4.1) nojalla

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{aina, kun} \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

Siis vastaoletus on epätosi ja väite on tosi. □

Esimerkki 4.1 (vrt.[1, s. 140])**.** Osoitetaan, että funktio $f(x) = x^2 + x$ on tasaisesti jatkuva millä tahansa suljetulla välillä $I = [A, B]$, $I \subset \mathbb{R}$, mutta ei koko reaalilukuvälillä $\mathbb{R}$. Todistuksessa osoitetaan, että käsitellessä suljettua väliä voidaan valita tarpeeksi pieni luku δ, jolla ehdot toteutuvat. Kuitenkaan funktiolle ei pystytä määrittämään sellaista lukua δ, joka pätisi koko reaalilukuvälille, sillä funktio kasvaa koko ajan nopeammin. Tätä havainnollistetaan kuvalla 4.1.



Kuva 4.1. Funktion $f(x)$ kuvaaja. Vrt. [1, Exercise 1, s. 145]

Kuvasta 4.1 huomataan, että kun valitaan $\varepsilon = 1$, niin välillä $[0, \frac{1}{2}]$ riittää valita $\delta = \frac{1}{2}$, mutta välillä $[0, 2]$ sama δ ei enää riitä.

Osoitetaan ensin, että funktio $f(x)$ on tasaisesti jatkuva millä tahansa suljetulla välillä $[A, B] \subset \mathbb{R}$.

Osoitetaan että $f(x)$ on jatkuva välillä $[A, B]$. Valitaan $\varepsilon > 0$ ja luku $a \in \mathbb{R}$. Merkitään $\delta = \varepsilon/(|2a| + |a + 1|)$ ja oletetaan, että $|x - a| < \delta$ ja $|x| < |2a|$. Nyt siis

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2 + x - a| = |(x - a)(x + a) + (x - a)| \\
&= |(x + a + 1)(x - a)| = |x + a + 1|\,|x - a| \\
&\leq (|x| + |a + 1|)|x - a| < (|2a| + |a + 1|)|x - a| < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

joten $f(x)$ on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}$. Se on tällöin jatkuva myös jokaisella suljetulla välillä $[A, B] \subset \mathbb{R}$. Lauseen 4.1 perusteella $f(x)$ on siis tasaisesti jatkuva millä tahansa suljetulla välillä $[A, B] \subset \mathbb{R}$.

Osoitetaan sitten, että $f(x)$ ei ole tasaisesti jatkuva koko reaalilukuvälillä $]-\infty, \infty[$. Valitaan $\varepsilon = 1$ ja oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}$ ja $|y - x| < \delta$. Funktion arvojen väliseksi erotukseksi näissä pisteissä saadaan

$$
\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= |(y^2 + y) - (x^2 + x)| = |y^2 - x^2 + y - x| \\
&= |(y + x)(y - x) + (y - x)| \\
&= |(y - x)(y + x + 1)| = |y - x|\,|y + x + 1|.
\end{aligned}
$$

Koska $|y - x| < \delta$, voidaan valita $y = x + \frac{\delta}{2}$ ja $x > \frac{1}{\delta} - \frac{3\delta}{4}$. Nyt pätee

$$
|f(y) - f(x)| = |y - x|\,|y + x + 1| = |x + \frac{\delta}{2} - x|\,|x + \frac{\delta}{2} + x + 1| = \frac{\delta}{2}(\frac{2}{\delta} + \frac{3\delta}{2}) = 1 + \frac{3\delta}{2} > 1 = \varepsilon,
$$

joten $f(x)$ ei ole tasaisesti jatkuva koko reaalilukuvälillä.

4.2 Lipschitz-jatkuvuus

Joskus funktion tasainen jatkuvuus voidaan määrittää Lipschitz-jatkuvuuden avulla. Määritellään seuraavaksi Lipschitz-jatkuvuus funktioille, ja osoitetaan sitten, että Lipschitz-jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Määritelmä 4.1 ([5, Määritelmä V.6.4, s. 354])**.** Olkoon f on määritelty välillä I. Funktio f on *Lipschitz-jatkuva* välillä I, jos jollakin $L > 0, L \in \mathbb{R}_+$ pätee

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{aina, kun} \quad x_1, x_2 \in I.$$

Lause 4.2. *Jos f on Lipschitz-jatkuva välillä I, niin f on tällä välillä myös tasaisesti jatkuva.*

Todistus (vrt. [1, s.140]). Olkoon f on Lipschitz-jatkuva välillä I. Valitaan $\varepsilon > 0$, ja merkitään $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Oletetaan, että x_1,$x_2 \in I$ ja $|x_1 - x_2| < \delta$.

Koska f on Lipschitz-jatkuva, se toteuttaa ehdon

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad L \in \mathbb{R}_+.$$

Koska oletuksen mukaan $|x_1 - x_2| < \delta$, saadaan

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Siis funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I. □

Esimerkki 4.2. Osoitetaan, että $f(x) = \frac{x}{x-2}$ on tasaisesti jatkuva välillä $I = [3, \infty[$. Osoitetaan ensin, että $f(x)$ on tällä välillä Lipschitz-jatkuva.

Valitaan $L = 2$, joten $L \in \mathbb{R}_+$. Oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left|\frac{x_1}{x_1 - 2} - \frac{x_2}{x_2 - 2}\right| = \left|\frac{x_1(x_2 - 2) - x_2(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}\right| \\ &= \left|\frac{-2(x_1 - x_2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}\right| = \left|\frac{-2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}\right||x_1 - x_2| \\ &\leq |-2|\,|x_1 - x_2| = L|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

joten $f(x)$ on Lipschitz-jatkuva välillä I. Siis lauseen 4.2 mukaan funktio $f(x)$ on tasaisesti jatkuva välillä I.

Funktion ei kuitenkaan tarvitse toteuttaa Lipschitz-ehtoja ollakseen tasaisesti jatkuva.

Esimerkki 4.3 (vrt. [1, s.141])**.** Osoitetaan, että funktio $f = \sqrt{x}$ on tasaisesti jatkuva välillä $I =]0, 1]$, mutta ei toteuta Lipshitz-ehtoja tällä välillä.

Esimerkin 3.1 perusteella $f(x) = \sqrt{x}$ on tasaisesti jatkuva välillä $[0, \infty[$. Se on tällöin tasaisesti jatkuva myös välillä $I =]0, 1]$.

On osoitettava, että $f(x)$ ei ole Lipschitz-jatkuva välillä $I =]0, 1]$. Tällöin on olemassa luvut $x_1, x_2 \in I$, joille pätee

$$|f(x_1) - f(x_2)| > L|x_1 - x_2|, \quad \text{aina, kun} \quad L \in \mathbb{R}_+ \tag{4.3}$$

Oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$. Tarkastellaan pisteiden x_1 ja x_2 funktion arvojen erotusta. Nyt siis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \left|\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| |x_1 - x_2|,$$

joten on osoitettava, että

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| \tag{4.4}$$

ei ole rajoitettu välillä I. Tehdään vastaoletus, että funktio (4.4) on rajoitettu välillä I. Tällöin on määritelmän 2.4 mukaan olemassa $M \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| < M, \quad \text{kun} \quad x_1, x_2 \in I.$$

Valitaan $0 < x_1, x_2 < \frac{1}{9M^2}$ ja $x_1, x_2 \in I$. Tällöin funktiota (4.4) voidaan arvioida alaspäin ja saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} > \frac{1}{\frac{1}{3M} + \frac{1}{3M}} = \frac{3M}{2} > M.$$

Nyt vastaoletus on epätosi ja väite on tosi, joten funktiota (4.4) ei ole rajoitettu välillä $I =]0, 1]$. Siis $f(x)$ on tasaisesti jatkuva mutta ei Lipschitz-jatkuva välillä I.

5 Tasaisesti jatkuvia funktioita koskevia perustuloksia

Luvussa 5 tarkastetaan, että tasaisesti jatkuvat funktiot käyttäytyvät melko hyvin, kun niihin käytetään aritmeettisia operaatioita [1]. Kohdassa 5.1 tarkastellaan tasaisesti jatkuvien funktioiden summaa ja vakiolla kertomista. Tämän jälkeen todistetaan, että tasaisesti jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on myös tasaisesti jatkuva. Lopuksi luvun alaluvussa 5.3 esitetään tapauksia, joissa tasaisesti jatkuvien funktioiden tulo ja osamäärää ovat myös tasaisesti jatkuva.

5.1 Tasaisesti jatkuvien funktioiden summa ja vakiolla kertominen

Alaluvussa 5.1 esitetään lause, jonka mukaan tasaisesti jatkuvien funktioiden summa ja tasaisesti jatkuva funktio kerrottuna vakiolla ovat tasaisesti jatkuvia funktioita.

Lause 5.1. *Olkoot f ja g ovat tasaisesti jatkuvia välillä I ja $k \in \mathbb{R}$. Tällöin*

1. *$f + g$ on tasaisesti jatkuva välillä I,*
2. *kf on tasaisesti jatkuva välillä I.*

Todistus (vrt. [1, s. 142]). Todistetaan ensin kohta 1. Valitaan $\varepsilon > 0$ ja merkitään $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$. Oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$. Koska f ja g ovat tasaisesti jatkuvia, niin määritelmän 3.1 mukaan

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta_f \tag{5.1}$$

ja

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta_g. \tag{5.2}$$

Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

$$|(f+g)(x_1)-(f+g)(x_2)| = |(f(x_1)-f(x_2))+(g(x_1)-g(x_2))| \leq |f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|.$$

Lisäksi ehtojen (5.1) ja (5.2) perusteella

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun $|x_1 - x_2| < \min\{\delta_f, \delta_g\} = \delta$. Siis $f + g$ on tasaisesti jatkuva välillä I.

Todistetaan sitten kohta 2. Valitaan $\varepsilon > 0$ ja oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$. Tarkastellaan ensin tapaus $k = 0$. Tällöin $kf = 0$, joka on tasaisesti jatkuva kaikilla reaalilukuväleillä. Tarkastellaan sitten tapaus, jossa $k \in \mathbb{R}$ ja $k \neq 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin määritelmän 3.1 mukaan on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{|k|}, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \tag{5.3}$$

Nyt saadaan ehdon (5.3) avulla

$$\begin{aligned} |kf(x_1) - kf(x_2)| &= |k(f(x_1) - f(x_2))| = |k||f(x_1) - f(x_2)| \\ &< |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \end{aligned}$$

Siis kf on tasaisesti jatkuva välillä I. □

5.2 Yhdistetyn funktion tasainen jatkuvuus

Alaluvussa 5.2 tarkastellaan yhdistetyn funktion tasaista jatkuvuutta.

Lause 5.2. *Olkoot f tasaisesti jatkuva välillä I ja g tasaisesti jatkuva välillä J, ja $g(x) \in I$ aina, kun $x \in J$. Tällöin yhdistetty funktio $f \circ g$ on tasaisesti jatkuva välillä I.*

Todistus (vrt. [1, s. 142]). Palautetaan mieleen yhdistetyn funktion sääntö, jonka mukaan

$$f \circ g = f(g(x)).$$

Valitaan $\varepsilon > 0$ ja oletetaan, että $x_1, x_2 \in J$. Koska f on tasaisesti jatkuva välillä I ja g on tasaisesti jatkuva välillä J, määritelmän 3.1 perusteella on olemassa sellaiset $\delta_f, \delta_g > 0$, että

$$|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon, \quad \text{kun} \quad y_1, y_2 \in I \quad \text{ja} \quad |y_1 - y_2| < \delta_f \tag{5.4}$$

ja

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \delta_f, \quad \text{kun} \quad x_1, x_2 \in J \quad \text{ja} \quad |x_1 - x_2| < \delta_g. \tag{5.5}$$

Nyt siis yhdistetylle funktiolle

$$|f(g(x_1)) - f(g(x_2))| < \varepsilon, \quad \text{kun} \quad |g(x_1) - g(x_2)| < \delta_f,$$

mikä pätee oletusten ja ehtojen (5.4) ja (5.5) perusteella, kun $|x_1 - x_2| < \delta = \delta_g$. Tulos seuraa nyt tasaisen jatkuvuuden määritelmästä. □

5.3 Tasasesti jatkuvien funktioiden tulo ja osamäärä

Alaluvussa 5.3 osoitetaan tasaisesti jatkuvien funktioiden tulo ja osamäärä tasaisesti jatkuviksi tietyissä erityistapauksissa.

Lause 5.3. *Olkoot f ja g tasaisesti jatkuvia välillä $I \subset \mathbb{R}$.*

1. *Jos f ja g ovat rajoitettuja välillä I, niin fg on tasaisesti jatkuva välillä I.*
2. *Jos funktiolla g on positiivinen alaraja $L > 0$ välillä I, niin $1/g$ on tasaisesti jatkuva välillä I.*

Todistus (vrt. [1, s. 143]). Todistetaan ensin kohta 1. Valitaan $\varepsilon > 0$ ja merkitään $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Oletetaan, että $x_1, x_2 \in I$. Koska f ja g ovat rajoitettuja välillä I, määritelmän 2.4 mukaan on olemassa reaaliluvut K_1 ja K_2 siten, että $|f(x)| < K_1$ ja $|g(x)| < K_2$, kun $x \in I$. Lisäksi, koska funktiot ovat tasaisesti jatkuvia, niille pätee

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2K_1}, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta_f, \tag{5.6}$$

ja

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2K_2}, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta_f. \tag{5.7}$$

Siis kolmioepäyhtälön ja ehtojen (5.6) ja (5.7) perusteella

$$\begin{aligned}
|fg(x_1) - fg(x_2)| &= |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \\
&= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \\
&\leq |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)| + |f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \\
&= |f(x_1)||g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)||f(x_1) - f(x_2)| \\
&\leq K_1|g(x_1) - g(x_2)| + K_2|f(x_1) - f(x_2)| \\
&< K_1\frac{\varepsilon}{2K_1} + K_2\frac{\varepsilon}{2K_2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $|x_1 - x_2| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, joten tulos seuraa tasaisen jatkuvuuden määritelmästä.

Todistetaan sitten kohta 2. Oletetaan, että funktiolla g on positiivinen alaraja $L > 0$ välillä I. Ehdoksi ei riitä, että $g \neq 0$, vaan funktion arvot eivät myöskään saa lähestyä nollaa. Tällöin funktion $1/g$ arvot voisivat lähestyä ääretöntä koko ajan nopeammin, jolloin tasaisen jatkuvuuden ehto ei toteutuisi yleisessä tapauksessa.

Määritelmän 2.5 perusteella on olemassa $L > 0$ siten, että $|g(x)| > L$ aina kun $x \in I$. Nyt siis

$$\left|\frac{1}{g(x_2)} - \frac{1}{g(x_1)}\right| = \left|\frac{g(x_1) - g(x_2)}{g(x_1)g(x_2)}\right| \leq \left|\frac{g(x_1) - g(x_2)}{L^2}\right|.$$

Valitaan sitten $\varepsilon > 0$. Nyt g on tasaisesti jatkuva, joten on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|g(x_1) - g(x_2)| < L^2\varepsilon$, kun $|x_1 - x_2| < \delta$. Tällöin

$$\left|\frac{1}{g(x_2)} - \frac{1}{g(x_1)}\right| \leq \left|\frac{g(x_1) - g(x_2)}{L^2}\right| < \frac{L^2\varepsilon}{L^2} = \varepsilon, \quad \text{kun} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Tulos seuraa nyt tasaisen jatkuvuuden määritelmästä. □

Lauseen 5.3 ehdot ovat riittäviä, mutta eivät välttämättömiä ehtoja tulon ja osamäärän tasaiselle jatkuvuudelle. Molempien funktioiden ei joissain tapauksissa tarvitse olla rajoitettuja, jotta niiden tulo voisi olla tasaisesti jatkuva. Esimerkiksi funktiot x ja $\frac{1}{x}$ ovat tasaisesti jatkuvia välillä $[1, \infty[$, ja funktiota x ei ole rajoitettu tällä välillä, mutta niiden tulo $x\frac{1}{x} = 1$, mikä on selvästi tasaisesti jatkuva millä tahansa reaalilukuvälillä.

Funktiolla g ei myöskään ole välttämätöntä olla positiivista alarajaa, jotta funktio $1/g$ olisi tasaisesti jatkuva. Esimerkiksi funktiolla $\frac{1}{x}$ ei ole välillä $[1, \infty[$ positiivista alarajaa $L > 0$, mutta $1/\frac{1}{x} = x$, mikä on tasaisesti jatkuva annetulla välillä. [1]

6 Tasaisen jatkuvuuden seurauksia

Luku 6 vastaa kysymykseen, mitä ominaisuuksia tasaisesti jatkuvilla voi olla ja mihin tasaista jatkuvuutta käytetään.

6.1 Tasaisesti jatkuva funktio äärellisellä välillä

Todistetaan lause, jonka mukaan äärellisellä välillä tasaisesti jatkuva funktio on rajoitettu tällä välillä.

Lause 6.1. *Jos funktio f on tasaisesti jatkuva äärellisellä välillä I, se on rajoitettu välillä I.*

Todistus (ks. [2, s. 219]). Olkoon väli I joko avoin, suljettu tai puoliavoin väli. Siis I on $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ tai $[a, b]$. Valitaan $0 < \varepsilon < 1$. Koska funktio f on tasaisesti jatkuva, voidaan valita luku δ siten, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 1 \quad \text{aina, kun} \quad x_1, x_2 \in I \quad \text{ja} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Muodostetaan äärellinen joukko, jossa $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ siten, että $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, kun $i = 1, \ldots, n$.

Koska $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, niin kun $x \in [x_i, x_{i-1}]$,

$$|f(x)| = |f(x) + f(x_i) - f(x_i)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| < 1 + |f(x_i)|.$$

Siis f on rajoitettu jokaisella välillä $[x_{i-1}, x_i] \cap I$. Tällöin voidaan valita jokaiselta väliltä funktion arvojen suurin alaraja $m_i = \inf\{f(x) \colon x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ x \in I\}$ ja pienin yläraja $M_i = \sup\{f(x) \colon x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ x \in I\}$. Valitaan näistä alarajoista pienin $m = \min\{m_1, \ldots, m_n\}$ ja ylärajoista suurin $M = \max\{M_1, \ldots, M_n\}$.

Tällöin siis aina, kun $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$, joten f on rajoitettu välillä I. □

Jatkuville funktioille voidaan todistaa tulos, jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio on tällä välillä rajoitettu [4, s. 120] . Tasaisesti jatkuville funktioille väli voi olla suljettu, puoliavoin tai avoin.

6.2 Tasaisen jatkuvuuden käyttökohteet

Tasaisen jatkuvuuden käsitettä voidaan käyttää funktion integraalia ja integroituvuutta tutkittaessa. Esimerkiksi määrätty integraali määritellään funktiolle, joka on jatkuva suljetulla välillä, siis lauseen 4.1 perusteella tasaisesti jatkuvalle funktiolle. [2, Definition 8.2]

Lipschitz-jatkuvat funktiot ovat lauseen 4.2 mukaan tasaisesti jatkuvia. Lipschitz-jatkuvuutta voidaan käyttää hyväksi, kun todistetaan differentiaaliyhtälöiden alkuarvo-ongelman ratkaisun olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä [3, Theorem 11.14].

Tasainen jatkuvuus ei ole siis vain irrallinen käsite, vaan täydentää jatkuvuuden tuomia ominaisuuksia. Näiden kahden käsitteen ero on hyvä ymmärtää. Historiassa on esimerkki tunnetusta matemaatikosta, Cauchysta, jonka aikana tasaisen jatkuvuuden käsitettä ei vielä tunnettu. Tämän vuoksi hän päätyi virheelliseen todistukseen, osoittaessaan välillä I jatkuvan funktion integroituvaksi, vaikka integroituvuus riippuu funktion tasaisesta jatkuvuudesta. [2, ss. 219-220]

Lähteet

[1] Bridger, M. *Real Analysis: A Constructive Approach Through Interval Arithmetic*. American Mathematical Society. 2019.

[2] Bruckner, J., Bruckner, A., Thomson, B. *Elementary Real Analysis*. Toinen painos. ClassicalRealAnalysis.com. Springer-Verlag Italia, Milano. 2008.

[3] Canuto, C., Tabacco, A. *Mathematical Analysis I*. Springer-Verlag Italia, Milano. 2008.

[4] Koivisto, P. *Analyysi A*. Opintomoniste. Tampereen yliopisto. 2020.

[5] Pitkäranta, J. *Calculus Fennicus TKK:n 1. lukuvuoden laaja matematiikka (2000-2013)*. Avoimet oppimateriaalit ry, Helsinki. 2015.