Tampereen yliopisto

Ronja Friman

ÄÄRETTÖMIEN JOUKKOJEN MAHTAVUUS

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Lokakuu 2020

TIIVISTELMÄ

Ronja Friman: Äärettömien joukkojen mahtavuus
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Lokakuu 2020

Tämän kandidaatintyön tarkoituksena on selvittää, mitä tarkoitetaan äärettömien joukkojen mahtavuudella. Työssä tutkitaan äärettömistä joukoista esimerkiksi luonnollisia lukuja, rationaalilukuja sekä reaalilukuja. Lisäksi työn tarkoituksena on tutkia, miten saadaan muodostettua yhä mahtavampia joukkoja potenssijoukkojen avulla sekä mitä tarkoitetaan kontinuumihypoteesilla. Työssä tehty tutkimus toteutettiin kirjallisuuskatsauksena.

Äärellisen joukon mahtavuus tarkoittaa käytännössä joukon kokoa eli alkioiden määrää joukossa. Äärettömillä joukoilla mahtavuus voidaan ajatella vastaavasti, vaikkei joukon alkioita voi laskea yksitellen. Luonnollisten lukujen joukon mahtavuus on pienin äärettömistä joukoista ja sen mahtavuutta merkitään $\aleph_0$. Joukkojen mahtavuuksia pystytään vertailemaan funktioiden avulla. Jos kahden joukon välille löydetään bijektio, ovat joukot tällöin yhtä mahtavia. Joukkoja, jotka ovat yhtä mahtavia luonnollisten lukujen kanssa, kutsutaan numeroituvasti äärettömiksi, joista esimerkkinä rationaalilukujen joukko.

Joukkoa, joka on ääretön mutta ei numeroituva, kutsutaan ylinumeroituvaksi. Reaalilukujen joukon voidaan osoittaa olevan ylinumeroituva eli joukon mahtavuus on suurempi kuin luonnollisten lukujen joukon. Reaalilukujen mahtavuutta merkitään $2^{\aleph_0}$, sillä joukon mahtavuus on sama luonnollisten lukujen potenssijoukon kanssa. Muodostamalla reaalilukujen potenssijoukko saadaan entistä mahtavampi joukko, ja potenssijoukkojen muodostamista jatkaessa saadaan yhä mahtavampia ylinumeroituvia joukkoja.

Kontinuumihypoteesilla tarkoitetaan väitettä, jonka mukaan toiseksi pienin ääretön mahtavuus, $\aleph_1$, on sama kuin reaalilukujen joukon mahtavuus. Väitettä ei kuitenkaan voida todistaa todeksi eikä epätodeksi yleisesti käytetystä joukko-opin Zermelo-Fraenkelin aksioomajärjestelmästä, vaikka siihen liitettäisiin valinta-aksioomat mukaan. Kontinuumihypoteesi voidaan yleistää koskemaan muitakin mahtavuuksia, mutta myös yleistetty kontinuumihypoteesi on riippumaton tästä aksioomajärjestelmästä.

Avainsanat: ääretön joukko, mahtavuus, numeroituva, ylinumeroituva, kontinuumihypoteesi

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$\mathbb{I}$	irrationaaliluvut
$\mathbb{Z}$	kokonaisluvut
$\mathbb{N}$	luonnolliset luvut
$\mathbb{E}$	parilliset luvut
$\mathbb{Q}$	rationaaliluvut
$\mathbb{Q}^-$	negatiiviset rationaaliluvut
$\mathbb{Q}^+$	positiiviset rationaaliluvut
$\mathbb{R}$	reaaliluvut

(a, b)	avoin väli
CH	kontinuumihypoteesi (engl. continuum hypothesis)
$f : A \to B$	funktio f, jonka määrittelyjoukko on A ja maalijoukko B
GCH	yleistetty kontinuumihypoteesi (engl. generalized continuum hypothesis)
$\Rightarrow$	implikaatio
$[n]$	joukko {1, 2, ..., n} jollekin $n \in \mathbb{N}$
$A \times B$	joukkojen A ja B karteesinen tulo
$\mathrm{Im}(f)$	funktion f kuvajoukko
$\mathrm{card}(A)$	joukon A mahtavuus
$\neg$	negaatio
$A \subset B$	joukko A on joukon B aito osajoukko
$A \subseteq B$	joukko A on joukon B osajoukko
$\mathcal{P}(A)$	joukon A potenssijoukko
$\mathrm{Con}(T)$	teoria T on ristiriidaton
$[a, b]$	suljettu väli
$\emptyset$	tyhjä joukko
$x \notin A$	x ei ole joukon A alkio
$x \in A$	x on joukon A alkio
$A \approx \mathrm{B}$	joukot A ja B ovat yhtä mahtavia
$\aleph$	ääretön kardinaaliluku, pienin ääretön kardinaaliluku $\aleph_0$

ZFC	Zermelo-Fraenkelin aksioomat ja valinta-aksiooma

1 JOHDANTO

Matemaattisesti äärettömyyden käsitteen tutkiminen lähti liikkeelle Georg Cantorin (1845 - 1918) ansiosta 1800-luvun lopussa. Hänen ajatuksensa muuttivat huomattavasti matematiikan silloista käsitystä äärettömyydestä, minkä takia hänen ajatukset saivat paljon vastustusta. Nykyään Cantoria kuitenkin pidetään yhtenä merkittävimmistä matemaatikoista, joka on vaikuttanut joukko-opin luomiseen ja kehittymiseen. [12, 14] Hän päätyi esimerkiksi tulokseen, jossa äärettömyyksiä voi olla erikokoisia, ja toisaalta myös todisti, intuition vastaisesti, että ääretön joukko voi olla samankokoinen osajoukkonsa kanssa [14]. Yhä edelleen äärettömyyden käsite ihmetyttää ja siitä on kirjoitettu paljon kansantajuistavassa matematiikan kirjallisuudessa [12].

Tässä työssä tarkastellaan matemaattisesti äärettömien joukkojen kokoja eli mahtavuuksia. Työn tarkoituksena on selvittää, mitä tarkoitetaan äärettömien joukkojen mahtavuudella, sekä tutkia luonnollisten lukujen, rationaalilukujen sekä reaalilukujen mahtavuutta. Lisäksi työssä käsitellään aiheeseen liittyvää väitettä, kontinuumihypoteesia. Sen mukaan ei ole mahtavuudeltaan joukkoa, joka olisi luonnollisten lukujen ja reaalilukujen joukon välissä. Väite on siitä mielenkiintoinen, ettei sitä ole pystytty todistamaan todeksi eikä epätodeksi. [12]

Työn luvussa 2 perehdytään oleellisiin käsitteisiin, jotka ovat tärkeitä käsiteltävän aiheen kannalta. Luvussa 3 käsitellään ensin äärellisten joukkojen mahtavuutta, minkä jälkeen laajennetaan käsitteen merkitystä äärettömille joukoille. Lisäksi luvussa tutkitaan luonnollisten lukujen joukkoa ja käsitellään muita yhtä mahtavia joukkoja. Luvussa 4 tarkastellaan joukkoja, jotka ovat luonnollisten lukujen joukkoa mahtavampia. Luvussa 5 tutustutaan tarkemmin kontinuumihypoteesiin, ja luvussa 6 kootaan yhteen työssä käsitellyt aiheet.

2 JOUKKOJEN MAHTAVUUTEEN LIITTYVIÄ KÄSITTEITÄ

Tässä luvussa perehdytään lyhyesti työn osalta oleellisten käsitteiden määritelmiin. Käsitellään ensin potenssijoukot, joiden avulla voidaan muodostaa yhä suurempia joukkoja. Joukkojen kokojen vertailemisen kannalta oleellinen käsite on myös bijektio, jonka määritelmä esitetään vielä lyhyesti luvun lopussa.

2.1 Potenssijoukot

Jokaiselle joukolle voidaan aina muodostaa potenssijoukko [6, s. 3].

Määritelmä 2.1. [5, s. 50] Olkoon A joukko. Tällöin joukon A *potenssijoukko* on joukon A jokaisen osajoukon sisältävä joukko. Potenssijoukkoa merkitään

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Potenssijoukot ovat hyödyllisiä joukkojen mahtavuutta käsiteltäessä, sillä niiden avulla pystytään muodostamaan yhä suurempia joukkoja. Äärellisen joukon A, jossa on n kappaletta alkioita, potenssijoukossa $\mathcal{P}(A)$ on 2^n kappaletta alkioita. [5, s. 51]

2.2 Bijektio

Määritelmä 2.2. [8, s. 124] Kuvaus $f : A \longrightarrow B$ on *injektio*, jos kaikilla joukon A alkioilla a, b, joille $f(a) = f(b)$, tulee olla $a = b$. Kuvaus $f : A \longrightarrow B$ on *surjektio*, jos jokaiselle joukon B alkiolle b löytyy sellainen alkio a joukosta A, että $b = f(a)$. Kuvaus f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

Kahden joukon välille saadaan yksi yhteen -vastaavuus, jos niiden välille löydetään jokin bijektiivinen funktio. Faticoni [5, s. 97] havainnollistaa tätä äärellisillä joukoilla seuraavasti. Funktio $f : \{a, b, c\} \longrightarrow \{x, y, z\}$, jolle on määritelty

$$f(a) = x, \quad f(b) = y, \quad f(c) = z,$$

on bijektio, sillä jokainen määrittelyjoukon alkio kuvautuu eri arvojoukon alkiolle ja jokaiselle arvojoukon alkiolle kuvautuu jokin määrittelyjoukon alkio.

3 NUMEROITUVAT JOUKOT

Numeroituvilla joukoilla tarkoitetaan sellaisia joukkoja, joiden alkiot voidaan luetella jossakin järjestyksessä. Tässä luvussa tutkitaan ensin luonnollisten lukujen mahtavuutta, jota käytetään numeroituvuuden määritelmässä. Lisäksi tutkitaan, mitä muita numeroituvasti äärettömiä joukkoja on.

3.1 Luonnollisten lukujen joukon mahtavuus

Ennen kuin käsitellään äärettömien joukkojen mahtavuutta, tulee ymmärtää, mitä tarkoitetaan äärettömällä joukolla. Tämän takia perehdytään ensin käsitteisiin äärellinen ja äärellisten joukkojen mahtavuus.

Määritelmä 3.1. [8, s. 131] Joukko A on *yhtä mahtava* joukon B kanssa, jos joukkojen välille löytyy bijektio $f : A \to B$. Tällöin merkitään $A \approx B$.

Määritelmä 3.2. [8, s. 131] Joukko A on *äärellinen*, jos se on yhtä mahtava joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ kanssa, kun n on jokin luonnollinen luku.

Merkitään joukkoa $\{1, 2, \ldots, n\}$ jollekin luonnolliselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ tästä eteenpäin $[n]$.

Määritelmä 3.3. [8, ss. 134-135] Olkoon A äärellinen joukko. Tällöin joukon A ja joukon $[n]$ välillä on olemassa bijektio $f : A \to [n]$ ja tällöin joukon A *mahtavuus* eli *kardinaliteetti* on n. Merkitään joukon mahtavuutta $\text{card}(A) = n$.

Äärellisillä joukoilla mahtavuudella tarkoitetaan käytännössä joukon kokoa eli alkioiden määrää joukossa. Merkintää $\text{card}(A)$ voidaan käyttää edustamaan kaikkia sellaisia joukkoja X, joissa on yhtä monta alkiota kuin joukossa A. On kuitenkin tärkeää huomata, että merkintä $\text{card}(A)$ ei itsessään kuvaa joukkoa. [5, s. 52]

Tyhjän joukon $\emptyset$ kardinaliteetti edustaa kaikkia niitä joukkoja, joissa ei ole yhtään alkiota. Tyhjän joukon mahtavuutta kuvaamaan on päätetty käyttää merkkiä 0. [5, s. 53] Tällöin

$$0 = \text{card}(\emptyset).$$

Lause 3.4. [11, s. 150] *(Kyyhkyslakkaperiaate) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Jos yli n kappaletta esineitä jaetaan n määrään laatikoita, ainakin yhdessä laatikossa on enemmän kuin yksi esine.*

Todistus. [11, s. 151] Jos jokainen laatikko sisältäisi yhden esineen, esineitä olisi n kappaletta, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että esineitä on yli n kappaletta. □

Toisin sanoen joukossa $[n]$ on enemmän alkioita kuin missään sen aidossa osajoukossa. Tämän takia ei ole olemassa injektiota $f : [n] \to A$, missä A on joukon $[n]$ aito osajoukko, sillä ainakin jotkin määrittelyjoukon alkiot kuvautuvat samalle arvojoukon alkiolle. Lause 3.4 voidaan siksi muotoilla myös hyödyntäen joukkojen yhtä mahtavuutta.

Lause 3.5. [8, s. 133] *Ei ole olemassa joukkoa $[n]$, joka on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa.*

Todistus löytyy lähteestä [8, s. 133].

Määritelmän 3.2 mukaan joukko A on äärellinen, jos se on yhtä mahtava jonkin joukon $[n]$ kanssa. Toisaalta joukon A aito osajoukko A' on vastaavasti yhtä mahtava joukon $[n]$ aidon osajoukon $[n]'$ kanssa. Mikäli olisi olemassa äärellinen joukko A, joka on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa A' kanssa, voitaisiin muodostaa bijektiot joukosta $[n]$ joukkoon A, joukosta A joukkoon A' sekä joukosta A' joukkoon $[n]'$. Tämä tarkoittaa, että olisi olemassa bijektio $f : [n] \to [n]'$, mikä on ristiriidassa Lauseen 3.5 kanssa. [8, s. 134] Lauseesta 3.5 seuraa siten seuraava tulos.

Seuraus 3.6. [8, s. 134] *Ei ole olemassa äärellistä joukkoa, joka on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa.*

Todistus löytyy lähteestä [8, s. 134].

Edellisten lauseiden perusteella voidaan osoittaa, että luonnollisten lukujen muodostama joukko ei voi olla äärellinen. Parilliset luvut $\mathbb{E}$ muodostavat luonnollisten lukujen aidon osajoukon. Joukkojen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ ja} \\ \mathbb{E} &= \{2, 4, 6, \ldots\} \end{aligned}$$

välille voidaan muodostaa bijektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$, joka määritellään

$$f(x) = 2x.$$

Koska luonnollisten lukujen joukko on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa, $\mathbb{N}$ ei ole äärellinen joukko Seurauksen 3.6 perusteella. Toisaalta huomataan myös hyvin intuition vastainen ajatus siitä, että matemaattisesti joukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{E}$ ovat kooltaan samat, vaikka joukosta $\mathbb{E}$ puuttuukin puolet joukon $\mathbb{N}$ alkioista.

Määritelmä 3.7. [5, s. 117] Joukko A on *ääretön*, jos se ei ole äärellinen.

Määritelmästä 3.7 seuraa, että luonnollisten lukujen joukko on ääretön. Lisäksi voidaan päätellä, että rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on ääretön, sillä $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Tällöin myös reaaliluvut $\mathbb{R}$ on ääretön joukko, sillä $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. [5, s. 117]

Äärettömän joukon mahtavuutta ei voida ilmaista millään luvulla $n \in \mathbb{N}$. Georg Cantor [2, ss. 103-104] aloitti käyttämään äärettömien kardinaalilukujen merkinnässä heprealaista kirjainta *alef*, $\aleph$, jolloin pienin ääretön kardinaaliluku on

$$\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N}).$$

Määritelmästä 3.7 ja Seurauksesta 3.6 saadaan seuraava tulos.

Lause 3.8. [5, s. 131] *Joukko A on ääretön, jos ja vain jos se on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa.*

Todistus. [8, s. 138]. Todistetaan ensin, että joukko A on ääretön, jos A on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa. Seurauksen 3.6 perusteella, jos joukko A on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa, A ei ole äärellinen. Tällöin Määritelmän 3.7 perusteella joukko A on ääretön.

Todistetaan lause vielä toiseen suuntaan eli oletuksena on, että joukko A on ääretön ja osoitetaan sen silloin olevan yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa. Jos joukko A on ääretön, on olemassa injektio $f : \mathbb{N} \to A$, sillä luonnollisten lukujen joukko on mahtavuudeltaan pienin ääretön joukko, jolloin jokaista luonnollista lukua vastaa jokin joukon A alkio. Sillä joukot eivät välttämättä ole yhtä mahtavat, voi joukossa A olla myös sellaisia alkioita, jotka eivät ole funktion f kuvajoukossa $\mathrm{Im}(f)$.

Määritellään funktio $g : A \to A$ seuraavasti

$$\begin{aligned} g(f(n)) &= f(n+1), && \text{kun } n \in \mathbb{N}, \\ g(a) &= a, && \text{kun } a \notin \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

Alkio $f(1)$ kuuluu funktion f kuvajoukkoon. Funktio g ei kuitenkaan millään luvulla n saa arvoa $f(1)$, sillä n ei voi olla pienempi kuin 1. Tällöin $f(1)$ ei kuulu kuvajoukkoon $\mathrm{Im}(g)$. Kuvaus $g : A \to A - \{f(1)\}$ on tällöin bijektio, sillä joukon A alkiot, jotka eivät ole funktion f kuvajoukossa kuvautuvat bijektiivisesti itsellään, ja kun $n \in \mathbb{N}$, kuvautuu jokainen alkio $f(n)$ alkiolle $f(n+1)$, sillä luonnollisia lukuja on ääretön määrä ja jokaiselle joukon A alkiolle saadaan yksi yhteen - vastaavuus joukon $A - \{f(1)\}$ alkioiden kanssa. Lisäksi joukko $A - \{f(1)\}$ on joukon A aito osajoukko ja joukko A on yhtä mahtava aidon osajoukkonsa kanssa. $\square$

Luonnollisten lukujen mahtavuuden perusteella voidaan vertailla äärettömien joukkojen mahtavuuksia.

Määritelmä 3.9. [1, s. 66] Joukko A on *numeroituva*, jos A on äärellinen tai

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Joukko A on *numeroituvasti ääretön*, jos $A \approx \mathbb{N}$.

Numeroituva joukko on tällöin sellainen, jonka alkiot voidaan listata ja saadaan yksi yhteen - vastaavuus luonnollisten lukujen kanssa [5, s. 138].

3.2 Rationaalilukujen mahtavuus

Esimerkki äärettömästä numeroituvasta joukosta on rationaaliluvut $\mathbb{Q}$, vaikka helposti voisi ajatella, että rationaalilukujen mahtavuus olisi luonnollisia lukuja suurempi. Kahden satunnaisen luonnollisen luvun välissä on kuitenkin äärellinen määrä luonnollisia lukuja, kun taas kahden satunnaisen rationaaliluvun välissä on ääretön määrä rationaalilukuja. [14, s. 14]

Jotta rationaalilukujen numeroituvuus voidaan todistaa, tutkitaan ensin pelkästään positiivisia rationaalilukuja $\mathbb{Q}^+$.

Lause 3.10. [5, s.139] *Joukko $\mathbb{Q}^+$ on numeroituva.*

Todistus. [5, ss.139-143] Joukko $\mathbb{Q}^+$ on numeroituva, jos löytyy bijektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$. Listataan joukon $\mathbb{Q}^+$ alkiot seuraavalla tavalla

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Jokaisella rivillä osoittaja kasvaa yhdellä ja sarakkeella nimittäjä kasvaa yhdellä. Tällöin rivillä n, sarakkeessa m on luku $\frac{n}{m}$, jossa $n, m \in \mathbb{N}$, ja näin ollen jokainen positiivinen rationaaliluku kuuluu tähän taulukkoon. Seuraavaksi poistetaan taulukosta ne alkiot, jotka eivät ole sievennetyssä muodossa, jolloin jokainen luku esiintyy taulukossa vain kerran

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{3} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Yrittämällä muodostaa bijektiota $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, joka kulkisi vaaka- tai pystysuunnassa taulukkoa pitkin, ei pystyttäisi käymään läpi jokaista taulukon alkiota, sillä äärettömyys tulisi vastaan ennen kuin siirryttäisiin edes seuraavalle riville tai sarakkeelle. Kuljetaan siis jokaisen alkion läpi vinottain niin, että ensimmäisenä vasemman yläkulman alkio, seuraavana alkiosta $\frac{2}{1}$ alkioon $\frac{1}{2}$ ja sitten alkiosta $\frac{3}{1}$ alkioon $\frac{1}{3}$. Jatketaan tätä ja poimitaan jokainen alkio. Selkeytetään järjestystä vielä seuraavilla nuolilla

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{3} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Tämän kuvion avulla voidaan muodostaa funktio $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, joka määritellään seuraavasti

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{1} \\
f(2) &= \frac{2}{1},\ f(3) = \frac{1}{2}, \\
f(4) &= \frac{3}{1},\ f(5) = \frac{1}{3}, \\
f(6) &= \frac{4}{1},\ f(7) = \frac{3}{2},\ f(8) = \frac{2}{3},\ f(9) = \frac{1}{4}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Määritelty funktio on injektio, sillä jokainen luonnollinen luku x ja x' vastaavat eri rationaalilukua $f(x)$ ja $f(x')$, koska taulukosta oli poistettu kaikki ne rationaaliluvut, jotka olisivat sievennettynä samat. Funktio on lisäksi surjektio, sillä taulukossa on jokainen rationaaliluku $\frac{n}{m}$ ja jokaista rationaalilukua vastaa jokin luonnollinen luku. Funktio f on tällöin bijektio ja joukko $\mathbb{Q}^+$ yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}$ kanssa. $\square$

Seuraavan lauseen mukaan numeroituvien joukkojen unioni on myös numeroituva.

Lause 3.11. [5, s. 144] *Olkoon joukot $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ numeroituvia ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin joukkojen unioni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ on numeroituva.*

Todistus. Lause voidaan todistaa samantyylisesti kuin Lause 3.10 järjestämällä joukoista taulukko, jossa ensimmäisellä rivillä on joukon A_1 alkiot, toisella rivillä joukon A_2 ja niin edelleen. Muodostamalla samalla tavalla bijektio $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ huomataan, että unioni on yhtä mahtava luonnollisten lukujen kanssa. Todistus löytyy kokonaisuudessaan esimerkiksi lähteestä [5, ss. 144-146]. $\square$

Näiden lauseiden perusteella voidaan todistaa, että rationaaliluvut sisältävä joukko on niin ikään numeroituva.

Lause 3.12. [5, s. 146] *Joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva.*

Todistus. [5, ss. 146-147] Rationaalilukujen joukko voidaan muodostaa sen osajoukoista $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, missä $\mathbb{Q}^-$ tarkoittaa negatiivisten rationaalilukujen joukkoa. Joukkojen $\mathbb{Q}^+$ ja $\mathbb{Q}^-$ välille voidaan muodostaa bijektio $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$, joka määritellään

$$f(x) = -x.$$

Lauseen 3.10 mukaan joukko $\mathbb{Q}^+$ on numeroituva, mikä tarkoittaa, että joukko $\mathbb{Q}^-$ on myös numeroituva. Joukko $\{0\}$ on äärellinen ja siten numeroituva. Lauseen 3.11 mukaan näistä joukoista muodostuva unioni on numeroituva, mikä todistaa, että $\mathbb{Q}$ on numeroituva. □

Rationaalilukujen mahtavuus on tällöin sama kuin luonnollisten lukujen mahtavuus

$$\operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{N}).$$

3.3 Muita numeroituvasti äärettömiä joukkoja

Numeroituvasti äärettömiä joukkoja luonnollisten lukujen ja rationaalilukujen lisäksi on esimerkiksi kokonaisluvut $\mathbb{Z}$, mikä voidaan todistaa muodostamalla bijektio $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, joka määritellään

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{kun } z \geq 0, \\ -1 - 2z, & \text{kun } z < 0. \end{cases}$$

Tällöin jokainen positiivinen kokonaisluku kuvautuu jollekin parilliselle luvulle ja jokainen negatiivinen luku parittomalle luonnolliselle luvulle. Lauseen 3.11 perusteella voidaan sanoa, että joukko $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ on numeroituva, minkä perusteella myös joukko $\mathbb{Z}$ on numeroituva. [5, s. 132]

Käsiteltyjen joukkojen lisäksi myös kaikki niiden osajoukot ovat numeroituvia.

Lause 3.13. [15, s. 113] *Jokainen numeroituvan joukon osajoukko on numeroituva.*

Todistus. [15, s. 113] Olkoon A numeroituva joukko ja olkoon B sen osajoukko. Koska joukko A on numeroituva, sen alkiot voidaan listata

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Osajoukon B alkioilla on tällöin jokin paikka joukon A alkioiden listassa, ja näin jokaista joukon B alkioita saadaan vastaamaan jokin luonnollinen luku. Muodostetaan näistä luonnollisista luvuista joukko

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B\}.$$

Joukkojen S ja B alkioiden välille saadaan yksi yhteen -vastaavuus, jolloin $S \approx B$.

Joukko S voi olla äärellinen tai ääretön. Jos S on äärellinen joukko, on tällöin B myös äärellinen, mistä seuraa, että B on numeroituva. Jos S on ääretön, sen alkiot voidaan järjestää suuruusjärjestykseen aloittaen pienimmästä

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

Saadaan siis joukkojen S ja $\mathbb{N}$ välille yksi yhteen -vastaavuus ja tällöin $S \approx \mathbb{N}$. Koska $S \approx B$, niin $B \approx \mathbb{N}$, jolloin B on numeroituva. □

Toisaalta nyt kokonaislukujen numeroituvuus voitaisiin myös osoittaa Lauseen 3.13 avulla, sillä kokonaisluvut ovat rationaalilukujen osajoukko.

Lauseen 3.11 mukaan voitiin todeta, että numeroituvien joukkojen yhdiste on myös numeroituva. Samoin kahden numeroituvan joukon karteesinen tulo on numeroituva [8, s. 139].

Lause 3.14. [8, s. 139] *Olkoon A ääretön joukko. Tällöin karteesinen tulo $A \times A$ on yhtä mahtava joukon A kanssa.*

Todistus löytyy lähteestä [4, ss. 162-164].

Tämä tarkoittaa esimerkiksi, että joukko pareja $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, on numeroituva.

Lause 3.15. [5, s. 149] *Olkoon joukot A ja B numeroituvia joukkoja. Tällöin $A \times B$ on numeroituva joukko.*

Todistus löytyy lähteestä [5, ss. 149 - 150].

Joukon dimensiota voidaan siis kasvattaa, mutta se säilyttää silti saman mahtavuuden [5, s. 149].

Lause 3.16. [5, s. 151] *Joukko $\mathbb{N}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}\}$ on numeroituva jokaiselle luvulle $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Lauseen 3.14 mukaan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituva. Lauseen 3.15 perusteella tästä seuraa, että $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituva. Lausetta 3.15 voidaan edelleen käyttää $n - 3$ kertaa, mikä todistaa väitteen. □

4 YLINUMEROITUVAT JOUKOT

Jos joukko ei ole numeroituva, sen sanotaan olevan ylinumeroituva. Ylinumeroituvien joukkojen olemassa olo tarkoittaisi sitä, että on olemassa erikokoisia äärettömyyksiä. Tässä luvussa todistetaan, että ylinumeroituvia joukkoja on olemassa ja tutkitaan, miten yhä mahtavampia joukkoja voidaan muodostaa.

4.1 Reaalilukujen ylinumeroituvuus

Merkitään reaalilukujen joukossa avointa väliä joukkona

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Lause 4.1. [5, s. 155] *Jokaiselle reaaliluvulle a ja b, kun $a < b$,*

$$\mathrm{card}(0, 1) = \mathrm{card}(a, b).$$

Todistus. [9, s. 144] Lause voidaan todistaa löytämällä bijektio joukkojen $(0, 1)$ ja (a, b) välille. Määritellään funktio $f : (a, b) \to (0, 1)$ seuraavasti

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Olkoon $f(x_1) = f(x_2)$. Saadaan

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a}.$$

Tällöin $x_1 = x_2$, joten funktio f on injektio.

Olkoon $y \in (0, 1)$ ja määritellään, että $x = a + y(b - a)$. Tällöin $a < x < b$, jolloin $x \in (a, b)$. Lisäksi $f(x) = y$, joten funktio f on myös surjektio. Täten $(0, 1) \approx (a, b)$. □

Edellinen tulos tarkoittaa, että esimerkiksi välit $(0, 1)$ ja $(0, 2)$ ovat yhtä mahtavia. Tämäkin tulos on hyvin intuition vastainen, kun ajatellaan äärettömyyttä. Väli $(0, 2)$ on kuitenkin kaksi kertaa välin $(0, 1)$ pituinen reaaliakselilla. Lauseen 4.1 mukaan joukon mahtavuus ei siten riipu välin pituudesta reaaliakselilla.

Lause 4.2. [5, s. 155] *Reaalilukujen joukko on yhtä mahtava välin* $(0,1)$ *kanssa eli*

$$\mathrm{card}(0,1) = \mathrm{card}(\mathbb{R}).$$

Todistus. [5, ss. 155-157] Lauseen 4.1 mukaan $(0,1) \approx (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, joten todistettava lause pitää paikkansa, jos $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \approx \mathbb{R}$. Olkoon funktio $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ määritelty seuraavasti

$$f(x) = \tan(x).$$

Määritellyllä välillä tangenttifunktio on bijektio, mikä todistaa lauseen. □

Lausetta 4.2 hyödyntäen voidaan osoittaa, että reaalilukujen joukon mahtavuus on suurempi kuin luonnollisten lukujen joukon.

Lause 4.3. [8, s. 131] *(Cantorin lause I) Reaalilukujen joukko* $\mathbb{R}$ *ei ole numeroituva.*

Todistus. (vrt. [5, ss. 162-163] sekä [9, ss. 171-172]) Lauseen 4.2 mukaan riittää todistaa, että joukko $(0,1)$ ei ole numeroituva. Osoitetaan, että joukkojen $\mathbb{N}$ ja $(0,1)$ välille ei voida muodostaa surjektiota, mikä johtaa siihen, ettei joukkojen välillä voi olla bijektiotakaan. Todistetaan tämä epäsuorasti.

Olkoon $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ jokin funktio. Oletetaan, että funktio on surjektio ja listataan sen arvot seuraavasti

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0,\boxed{d_{11}}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots \\
f(2) &= 0,d_{21}\boxed{d_{22}}d_{23}d_{24}\ldots \\
f(3) &= 0,d_{31}d_{32}\boxed{d_{33}}d_{34}\ldots \\
f(4) &= 0,d_{41}d_{42}d_{43}\boxed{d_{44}}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Listassa d_{ij} on funktion f luvulla i saaman arvon j:nnes desimaali. Nyt tarkoituksena on muodostaa joukon $(0,1)$ alkio, joka ei ole tässä listassa, sillä jos sellainen luku löytyy, saadaan ristiriita sen kanssa, että funktio f on surjektio.

Määritellään desimaaliluku $x = 0,d_1d_2d_3d_4\ldots$ seuraavasti

$$d_i = \begin{cases} d_{ii}+1, & \text{kun } d_{ii} \neq 9, \\ 0, & \text{kun } d_{ii} = 9. \end{cases}$$

Tällöin luku x on välillä $(0,1)$, mutta se eroaa jokaisesta listan alkiosta ainakin yhdellä desimaalilla. Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ funktion arvo $f(i) \neq x$, sillä lukujen $f(i)$ ja x i:nnes desimaali eroaa toisistaan. Esimerkiksi $x \neq f(1)$, koska $d_1 \neq d_{11}$ ja $x \neq f(2)$, koska $d_2 \neq d_{22}$. Tällöin luku x ei kuulu joukkoon $f(\mathbb{N})$ ja funktio f ei ole surjektio. □

Todistus on alkuperäisesti Cantorin esittämä ja sen metodia kutsutaan Cantorin diagonaaliargumentiksi [14, s. 17]. Koska reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on ääretön, mutta se ei ole numeroituva, on joukon oltava mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$.

Määritelmä 4.4. [15, s. 114] Jos joukko A ei ole numeroituva, A on *ylinumeroituva*.

Reaalilukujen joukko on tällöin ylinumeroituva, mikä tarkoittaa sitä, että on olemassa erityyppisiä äärettömyyksiä, esimerkiksi niitä, jotka ovat yhtä mahtavia joukon $\mathbb{N}$ kanssa ja niitä, jotka ovat yhtä mahtavia joukon $\mathbb{R}$ kanssa [5, s. 164]. Tulos johtaa myös siihen, että joukko $(0, 1)$ on ylinumeroituva ja siten mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukko.

Määritelmä 4.5. [5, s. 151] Olkoon A ja B joukkoja. Jos on olemassa injektio $f : A \to B$, niin $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$.

Määritelmä 4.6. [9, s. 159] Olkoon A ja B joukkoja. Jos on olemassa injektio $f : A \to B$ mutta ei bijektiota, niin $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$.

Määritelmä 4.5 ja Määritelmä 4.6 määrittelevät nyt epäyhtälön myös äärettömille kardinaaliluvuille, jolloin Lauseen 4.3 perusteella saadaan

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) < \operatorname{card}(\mathbb{R}).$$

Lause 4.7. [5, s. 164] *Rationaalilukujen mahtavuus on pienempi kuin reaalilukujen mahtavuus* $\operatorname{card}(\mathbb{Q}) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Todistus. [5, s. 164] Lauseen 3.12 perusteella $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{Q})$ ja Lauseen 4.3 perusteella $\operatorname{card}(\mathbb{N}) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$, joten $\operatorname{card}(\mathbb{Q}) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$. □

Rationaalilukuja on tiheästi reaalilukujen joukossa, sillä voidaan osoittaa, että kahden reaaliluvun a ja b välissä on aina rationaaliluku [17, s. 6]. Tästä seuraa, että joukon mahtavuuteen ei vaikuta joukon tiheys reaaliakselilla [5, s. 164].

Reaalilukujen ylinumeroituvuuden perusteella saadaan myös seuraava tulos.

Lause 4.8. [9, s. 172] *Irrationaalilukujen joukko $\mathbb{I}$ on ylinumeroituva.*

Todistus. [9, s. 172] Reaaliluvut muodostuvat rationaaliluvuista sekä irrationaaliluvuista $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Lauseen 3.11 mukaan, jos joukko $\mathbb{I}$ on numeroituva, on joukko $\mathbb{R}$ tällöin myös numeroituva, mikä on ristiriidassa Lauseen 4.3 kanssa. □

4.2 Potenssijoukot

Reaalilukujen ylinumeroituvuuden perusteella voidaan todeta, että on olemassa erikokoisia äärettömyyksiä. Tässä aliluvussa perustellaan ensin, miten luonnollisten lukujen joukon potenssijoukko on ylinumeroituva ja todetaan, että joukon potenssijoukon mahtavuus on aina joukon mahtavuutta suurempi.

Lause 4.9. [8, s. 131] *(Schröder-Bernstein lause) Olkoon A ja B joukkoja. Jos $f : A \longrightarrow B$ ja $g : B \longrightarrow A$ ovat injektioita, niin on olemassa bijektio joukkojen A ja B välillä. Yhtäläisesti, jos*

$$\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B) \text{ ja } \mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A), \text{ niin } A \approx B.$$

Todistus löytyy lähteestä [16].

Schröder-Bernsteinin lausetta voidaan hyödyntää esimerkiksi todistamaan seuraava lause.

Lause 4.10. [4, s. 149] *Reaalilukujen joukko ja luonnollisten lukujen potenssijoukko ovat yhtä mahtavia eli*

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})).$$

Todistus. [5, ss. 169-175]

Lauseen 4.9 mukaan $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, jos on olemassa injektio joukosta $\mathbb{R}$ joukkoon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sekä injektio joukosta $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ joukkoon $\mathbb{R}$. Koska $\mathbb{R} \approx (0, 1)$, ovat joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ yhtä mahtavat, jos injektiot löytyvät myös joukkojen $(0, 1)$ ja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ välille molempiin suuntiin.

Tässä todistetaan, että on olemassa injektio joukosta $(0, 1)$ joukkoon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ muodostamalla binäärimuoto joukon $(0, 1)$ alkiolle ja sitä hyödyntäen kuvata se jollekin potenssijoukon alkiolle. Lopuksi vielä osoitetaan muodostettu funktio injektioksi. Todistus, että on olemassa injektio $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow (0, 1)$ löytyy lähteestä [5, ss. 172 - 175].

Olkoon funktio $f : (0, 1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jokainen reaaliluku voidaan kirjoittaa binäärijärjestelmässä. Tällöin binäärijärjestelmässä luku $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, on kymmenjärjestelmässä luku $x = b_1 \frac{1}{2} + b_2 \frac{1}{2^2} + b_3 \frac{1}{2^3} + \ldots$ Olkoon $x \in (0, 1)$, jolloin binäärimuodossa $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ Määritetään, että jokaista numeroa b_n vastaa luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$. Muodostetaan nyt sellainen luonnollisten lukujen osajoukko $f(x) = U_x \subset \mathbb{N}$, että

$$\begin{cases} n \in U_x, & \text{kun } b_n = 1, \\ n \notin U_x, & \text{kun } b_n = 0. \end{cases}$$

Esimerkiksi, kun $x = 0, 101$, osajoukoksi U_x saadaan $f(0, 101) = \{1, 3\}$. Koska b_n voi olla desimaaliluvun x binäärimuodossa vain 0 tai 1 ja $x \in (0, 1)$, on joukko U_x joukon $\mathbb{N}$ aito osajoukko eli joukon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ alkio.

Jotkut desimaaliluvut voidaan kirjoittaa useammalla tavalla binäärimuodossa. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 1\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2^2} + 0\frac{1}{2^3} + \dots \text{ ja}\\ \frac{1}{2} &= 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2^2} + 1\frac{1}{2^3} + \dots\end{aligned}$$

Valitaan funktion määritelmään $f(x)$ aina se muoto, jossa numeroita 1 esiintyy vähemmän. Tällöin $f(\frac{1}{2}) = \{1\}$. Osoitetaan vielä, että funktio f on injektio eli osoitetaan, että jos $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$. Olkoon $x = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ ja $y = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$ Koska luvut x ja y eivät ole samat, täytyy ainakin jokin lukujen desimaali olla eri eli $b_n \neq c_n$. Voidaan olettaa, että $b_n = 1$ ja $c_n = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} n \in f(x) &= U \text{ ja}\\ n \notin f(y) &= V\end{aligned}$$

ja saadaan, että $f(x) = U \neq V = f(y)$. Funktio f on tällöin injektio ja

$$\operatorname{card}(0,1) \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})).$$

□

Tämän yhtä mahtavuuden perusteella reaalilukujen mahtavuus voidaan kirjoittaa [4, s. 149]

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}.$$

Kuten aliluvussa 2.1 todettiin äärellisillä joukoilla alkioiden määrä joukon potenssijoukossa on suurempi kuin joukossa itsessään. Tällöin äärellisen joukon potenssijoukon mahtavuus on myös suurempi kuin joukon itse. Jokaisella joukolla on potenssijoukkonsa, joten myös äärettömälle ja ylinumeroituvalle joukolle voidaan muodostaa joukon potenssijoukko, joka sisältää kaikki joukon osajoukot. Myös äärettömille joukoille pätee, että potenssijoukon mahtavuus on joukon mahtavuutta suurempi, mistä edellinen lause on esimerkki.

Lause 4.11. [8, s. 131] *(Cantorin lause II) Yksikään joukko A ei ole yhtä mahtava potenssijoukkonsa $\mathcal{P}(A)$ kanssa.*

Todistus. [8, s. 132] Jos joukko A on yhtä mahtava joukon $\mathcal{P}(A)$ kanssa, löytyisi joukkojen välille bijektio. Näytetään, ettei joukkojen välille voida muodostaa surjektiota, minkä takia joukkojen välillä ei voi olla bijektiotakaan.

Oletetaan, että on olemassa surjektio $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Jos joukosta $\mathcal{P}(A)$ löytyy alkio, joka ei ole funktion f kuvajoukossa, funktio ei ole surjektio. Muodostetaan joukon A osajoukko

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Joukon B määritelmän mukaan $B \subseteq A$. Jokaiselle alkiolle $a \in A$, $a \in B$ jos ja vain jos $a \notin f(a)$. Tällöin jokaiselle alkiolle a, $B \neq f(a)$. Joukko B ei tällöin ole funktion f kuvajoukossa ja funktio f ei voi olla surjektio. □

Lause 4.12. [5, s. 176] *Jokaiselle joukolle A*

$$\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A)).$$

Todistus. [5, s. 176] Lauseen 4.11 mukaan joukko A ja joukon potenssijoukko eivät ole yhtä mahtavat. Riittää siis todistaa, että $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$. Määritelmän 4.5 mukaan $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$, jos on olemassa injektio $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Määritellään, että funktio

$$f(x) = \{x\}.$$

Olkoon $f(x_1) = f(x_2)$. Tällöin $\{x_1\} = \{x_2\}$, mikä pitää paikkansa vain jos $x_1 = x_2$. Täten funktio f on injektio ja $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$. □

Lauseen 4.12 perusteella voidaan sanoa, että myös reaalilukujen potenssijoukon mahtavuus on suurempi kuin reaalilukujen joukon. Tästä johtuen saadaankin, että

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 < \ \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \ \mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} < \ \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Voidaan muodostaa myös reaalilukujen potenssijoukon potenssijoukko, jolloin sen mahtavuus on taas mahtavampi kuin minkään edellisen joukon. Näin potenssijoukkojen muodostamista jatkamalla saadaan yhä mahtavampia joukkoja. Tästä seuraa, että

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots$$

eli äärettömiä kardinaalilukuja saadaan ääretön määrä.

5 KONTINUUMIHYPOTEESI

Edellisen luvun perusteella voitiin todeta, että $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Cantorilta lähtöisin olevan merkinnän $\aleph$ avulla voidaan lisäksi listata äärettömien joukkojen mahtavuuksia suuruusjärjestykesssä alaindeksien avulla [7, s. 4]

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$$

Cantor esitti väitteen, että pienin ylinumeroituvan joukon mahtavuus on yhtä suuri kuin reaalilukujen joukon mahtavuus [3, s. 270]. Tätä hänen väitettään kutsutaan *kontinuumihypoteesiksi* (CH), joka voidaan määritellä [7, s. 4]

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Väite tarkoittaa tällöin sitä, että reaalilukujen joukon jokainen osajoukko on joko numeroituva tai sen mahtavuus on $2^{\aleph_0}$ [10, s. 76]. Cantor ei yrityksistään huolimatta pystynyt todistamaan väitettään todeksi eikä epätodeksi. Kontinuumihypoteesi säilyi ratkaisemattomana koko 1800-luvun ajan, ja David Hilbert esittelikin tämän ensimmäisenä ratkaisemattomista ongelmista vuonna 1900 Pariisin matematiikkakonferenssissa, mikä sai aikaan kasvun yrityksissä löytää ratkaisu kontinuumihypoteesiin. [3, s. 270]

Jonkin lauseen todistamiseksi tarvitaan ennalta määritellysti lauseita, jotka ovat totta, jotta todistus voidaan johtaa näistä. Joukko-opissa 1930-luvulta lähtien on yleisesti hyväksytty Ernst Zermelon ja Abraham Fraenkelin aksioomajärjestelmä (ZFC), joka muodostuu Zermelo-Fraenkelin aksioomista yhdessä valinta-aksiooman kanssa [3, s. 270]. Merkitään teorian T ristiriidattomuutta $\mathrm{Con}(T)$. Vuonna 1940 Kurt Gödel todisti, että [3, s. 271]

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}).$$

Gödelin tulos osoittaa, ettei kontinuumihypoteesin negaatiota $\neg$CH voi todistaa ZFC-aksioomista [13, s. 107]. Toisena tärkeänä tuloksena kontinuumihypoteesin kannalta Paul Cohen todisti pakottamismenetelmällä vuonna 1963, että [7, s. 27]

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}).$$

Tämä taas osoittaa sen, ettei kontinuumihypoteesiakaan voi todistaa ZFC-aksioomista [13, s. 107]. Kontinuumihypoteesi on siis riippumaton ZFC-aksioomista.

Tässä tilanteessa riippumattomuus johtaa siihen, että ZFC:tä pitäisi laajentaa esimerkiksi lisäämällä CH, $\neg$CH tai kokonaan uusi aksiooma, joka johtaisi CH:n ratkaisemiseen, ja luoda näin uusi, ZFC:tä täydentävä, aksiomaattinen järjestelmä, jos kontinuumihypoteesille halutaan määrittää totuusarvo [5, ss. 230-231]. Uusien aksioomien lisääminen on kuitenkin hankalaa, sillä se tulisi ensin ymmärtää sekä hyväksyä matematiikan alalla maailmanlaajuisesti [3, s. 271]. Toisaalta, jos sekä CH että $\neg$CH voidaan lisätä, täytyisi jollain tavalla päättää, kumpi lisättäisiin. Lisäksi Gödelin epätaydellisyyslauseen mukaan kaikkia lauseita ei kuitenkaan pystytä todistamaan joukko-opissa, vaikka uusia aksioomia lisättäisiinkin [3, s. 271].

Kontinuumihypoteesi voidaan yleistää koskemaan muitakin äärettömiä kardinaalilukuja. Yleistetty kontinuumihypoteesi (GCH) määritellään [7, s. 7]

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

jokaisella luvulla α. Yleistetylle kontinuumihypoteesille, kuten CH:lle, pätee Gödelin ja Cohenin tulokset, jolloin myös GCH on riippumaton ZFC-aksioomista. [13, s. 107].

Kontinuumihypoteesin riippumattomuuden todistaminen toi uusia tekniikoita matematiikkaan, minkä takia joukko-oppi on kehittynyt sittemmin huomattavasti. Tähän on vaikuttanut esimerkiksi Cohenin pakottamismenetelmä, jolla pystytään todistamaan myös muita samantyylisiä riippumattomuuksia. [3, s. 271] Vaikka kontinuumihypoteesi onkin todistettu riippumattomaksi ZFC-aksioomista, ZFC:n laajentaminen ja kontinuumihypoteesin todistaminen on yhä ajankohtainen aihe matematiikan tutkimuksessa [14, s. 21].

6 YHTEENVETO

Tässä työssä tutustuttiin joukko-opin käsitteeseen mahtavuus liittyen ensin äärellisiin joukkoihin, mistä päästiin laajentamaan mahtavuuden käsite koskemaan äärettömiä joukkoja. Äärettömistä joukoista työssä käsiteltiin ensin luonnollisia lukuja ja todettiin joukko yhtä mahtavaksi aidon osajoukkonsa kanssa, mistä voitiin päätellä luonnollisten lukujen joukko äärettömäksi. Lisäksi todettiin, että sekä rationaalilukujen että reaalilukujen joukot ovat äärettömiä. Luonnollisten lukujen mahtavuuden määriteltiin olevan $\aleph_0$, mikä tällöin vastaan pienintä ääretöntä kardinaalilukua. Työssä käsiteltiin myös numeroituvuuden määritelmä, jonka mukaan joukko on numeroituva, jos sen mahtavuus on $\aleph_0$ tai se on äärellinen.

Työssä tutustuttiin myös rationaalilukujen joukkoon. Muodostamalla bijektio luonnollisten lukujen sekä positiivisten rationaalilukujen joukkojen välille sekä toteamalla numeroituvien joukkojen unioni numeroituvaksi, voitiin osoittaa rationaalilukujen joukko myös numeroituvaksi joukoksi ja mahtavuudeltaan yhtä mahtavaksi luonnollisten lukujen kanssa. Tutkimalla numeroituvia joukkoja todettiin lisäksi, ettei mahtavuus riipu joukon dimensiosta, vaan esimerkiksi joukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ovat yhtä mahtavia.

Työssä todistettiin Cantorin diagonaaliargumentin avulla, että reaalilukujen joukko ei ole numeroituva. Reaalilukujen mahtavuus on siis suurempi kuin numeroituvasti äärettömien joukkojen ja voitiin todeta, että äärettömyyksiä on tällöin eri kokoisia. Tällaisia joukkoja, kuten reaaliluvut, kutsutaan ylinumeroituviksi. Lisäksi voitiin päätellä, että mahtavuus ei riipu joukon pituudesta reaaliakselilla, sillä esimerkiksi joukot $(0, 1)$ ja $(0, 2)$ todettiin yhtä mahtaviksi. Reaalilukujen joukon osoitettiin olevan yhtä mahtava myös luonnollisten lukujen potenssijoukon kanssa. Tulos yleistettiin niin, että minkä tahansa joukon potenssijoukko on mahtavampi kuin joukko itsessään. Tämän avulla voitiin todeta, että äärettömiä kardinaalilukuja saadaan ääretön määrä, sillä mille tahansa äärettömälle joukolle voidaan aina muodostaa sen potenssijoukko.

Työssä käsiteltiin myös kontinuumihypoteesia, jonka mukaan toiseksi pienin ääretön mahtavuus, $\aleph_1$, on sama kuin reaalilukujen joukon mahtavuus $2^{\aleph_0}$. Väitteen on todistettu olevan riippumaton ZFC-aksioomista, joten määritelläkseen, onko väite totta, pitäisi aksioomajärjestelmään lisätä uusi aksiooma. Lisäksi todettiin, että kontinuumihypoteesi voidaan yleistää, jolloin jokaisella luvulla α pätee $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Yleistetty muoto on kuitenkin yhä riippumaton ZFC-aksioomista. Kuten työssä todettiin, kontinuumihypoteesin tutkimukset ovat johtaneet uudenlaisten menetelmien kehittymiseen matematiikassa, mikä taas on johtanut monien uusien tulosten syntymiseen. Myöskään kontinuumihypoteesia ei ole kokonaan jätetty sinälleen, vaan yhä yritetään todistaa sen olevan totta tai epätotta laajentamalla ZFC:tä.

LÄHTEET

[1] R. K. Bisht ja H. S. Dhami. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press, (2015).

[2] G. Cantor. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Dover Publications, Inc., (1955).

[3] U. Daepp ja P. Gorkin. *Reading, Writing, and Proving A Closer Look at Mathematics*. 2nd ed. Springer New York, (2011).

[4] H. B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, (1977).

[5] T. G. Faticoni. *The Mathematics of Infinity: A Guide to Great Ideas*. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., (2012).

[6] S. Foldes. *Fundamental Structures of Algebra and Discrete Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc., (1994).

[7] M. Foreman ja A. Kanamori. *Handbook of Set Theory*. Springer, Dordrecht, 2010.

[8] J. Gallier. *Discrete Mathematics*. Springer New York, (2011).

[9] L. J. Gerstein. *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*. 2nd ed. Springer, (2012).

[10] L. J. Halbeisen. *Combinatorial Set Theory: With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer London, 2012.

[11] J. Harris, J. L. Hirst ja M. J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*. 2nd ed. Springer New York, (2008).

[12] A. Koistinen. Joukkojen mahtavuudesta. *Matematiikkalehti Solmu* 3 (2005), 15–18.

[13] Y. I. Manin. *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians*. 2nd ed. Springer New York, 2010.

[14] M. Meyries. *Infinity - A simple, but not too simple introduction*. (2015). arXiv: `1506.06319 [math.HO]`.

[15] R. W. Oberste-Vorth, A. Mouzakitis ja B. Lawrence. *Bridge to Abstract Mathematics*. Mathematical Association of America, (2012).

[16] D. Tonien. A simple visual proof of the Schröder-Bernstein theorem. *Elemente der Mathematik* 62 (2007), 118–120. DOI: `10.5169/seals-98917`.

[17] W. Trench. *Introduction to Real Analysis*. Faculty Authored ja Edited Books & CDs. 7., (2013). URL: `https://digitalcommons.trinity.edu/mono/7`.