Tampereen yliopisto

Kati Sainio

GEOGEBRA-OPPIMISAIHION KEHITTÄMINEN LUKION MAA10 3D-GEOMETRIAN KURSSILLE

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Syyskuu 2020

Tiivistelmä

Kati Sainio: GeoGebra oppimisaihion kehittäminen lukion MAA10 3D-geometrian kurssille
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Syyskuu 2020

Tässä pro gradu -tutkielmassa kehitettiin oppimateriaalia uudistuvan opetussuunnitelman (2019) MAA10 3D-geometrian kurssille, oppimateriaali on julkaistu osoitteessa: https://www.geogebra.org/m/zqrhvd7m. Lukion opetussuunnitelman perusteet uudistuvat vuonna 2021, jolloin kurssien järjestys ja sisällöt muuttuvat. Tähän tarpeeseen oppimateriaali on kehitetty. Oppimateriaali on toteutettu lukio-opetuksen sähköistyminen huomioon ottaen kokonaan GeoGebraa apuna käyttäen.

Tutkimus toteutettiin kehittämistutkimuksena, joka koostui yhdestä kehittämissyklistä. Kehittämistutkimus eteni tutkimustyypille tavanomaisten vaiheiden mukaisesti. Kehittämissykli koostui ongelma-analyysistä, kehittämisprosessista, kehittämistuotoksesta, testauksesta ja arvioinnista. Kehittämistuotosta esitestattiin ensiksi Tampereen yliopiston aineenopettajaopiskelijoilla ja sen jälkeen testaus suoritettiin todellisessa ympäristössä Tampereen teknillisessä lukiossa MAA4-kurssilla.

Tutkimuksessa kehitetty GeoGebra-kirja onnistui kokonaisuutena melko hyvin. Työkirjoja kehitettiin opiskelijoilta ja kurssin opettajalta saatujen kommenttien perusteella. Kaikkia työkirjoja ei päästy kokeilemaan, mutta saatujen kommenttien perusteella joitakin muutoksia voitiin tehdä kaikkiin työkirjoihin. Tutkimukseen osallistuvien opiskelijoiden määrä oli pieni (N=30), mutta kyselyiden nojalla saatiin tärkeää tietoa oppimateriaalin todelliselta kohderyhmältä. Oppimateriaali on tällaisenaan toimiva kokonaisuus, mutta toki jatkokehityskohteitakin materiaalista löytyy.

Avainsanat: GeoGebra, vektorit, kolmiulotteinen koordinaatisto, 3D-geometria, kehittämistutkimus, matematiikan opetus, matematiikka, lukion oppimateriaali.

Sisältö

1 Johdanto **5**

2 Kehittämistutkimus **7**

2.1 Yleistä 7

2.2 Luotettavuus 10

2.3 Toteutusmalli 11

3 Teoreettinen viitekehys **12**

3.1 Matemaattinen osuus 12

3.1.1 Vektoreiden pistetulo 12

3.1.2 Vektoreiden ristitulo 21

3.2 Matematiikan oppiminen 31

3.2.1 Vektoreiden oppiminen ja opetussuunnitelma 31

3.2.2 Sähköiset oppimisympäristöt matematiikan oppimisessa . . . 32

3.2.3 Oppimateriaalin ja muiden asioiden vaikutus oppimiseen . . 34

3.2.4 Wilsonin taksonomia 36

3.3 Verkko-oppimisympäristön rakentaminen 39

3.3.1 Oppimisympäristön rakentaminen 39

3.3.2 Millainen on hyvä oppimisaihio? 41

3.3.3 Verkko-oppimateriaalin laatukriteerit 42

3.4 GeoGebra 45

3.4.1 GeoGebra opetuskäytössä 45

3.4.2 GeoGebran käyttäminen ja oppimateriaalin luominen 46

4 Kehittämisprosessi **49**

4.1 Ongelma, lähtökohdat ja tavoitteet 49

4.2 Pedagogiset ratkaisut 50

4.3 Käytettävyyden, esteettömyyden ja tuotannon laadun kannalta tehdyt keskeisimmät ratkaisut 54

5 Kehittämistuotos **56**

5.1 Yhteistä kirjan luvuissa 56

5.2 Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa 57

5.3 Pistetulo 59
5.4 Ristitulo 60
5.5 Piste, suora ja taso avaruudessa 62
5.6 Kulma avaruudessa 64

6 Tutkimus **66**
6.1 Esitarkastus 66
6.2 Tutkimusasetelma ja tutkimustehtävät 68
6.3 Tulosten analysointi, luotettavuus ja eettinen näkökulma 70
6.4 Tutkimustulokset ja jatkokehittäminen 73
6.5 Jatkotutkimusmahdollisuudet 75

7 Johtopäätökset ja pohdinta **77**

Lähteet **79**

LIITE 1: GeoGebra-työkirjat **83**
Johdanto 83
Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa 83
Pistetulo 83
Ristitulo 83
Piste, suora ja taso avaruudessa 84
Kulma avaruudessa 84

LIITE 2: Kysymyspatteristo **85**
Kysymykset liittyen Teoria-osuuteen 85
Kysymykset liittyen GeoGebra-appletteihin 85
Kysymykset liittyen Tehtäviä-osuuteen 86
Kysymykset liittyen kokonaisuuteen, esim. yksi työkirja 86

1 Johdanto

Lukion opetussuunnitelman perusteet uudistuvat vuonna 2021 lukiokoulutuksen uudistuksen myötä. Uudistuksen tavoitteena on edistää oppiaineiden tavoitteiden ja keskeisten sisältöjen hallintaa sekä kehittää opiskelijoiden laaja-alaista osaamista. Yhtenä olennaisimpana muutoksena voidaan pitää sitä, että opintojaksojen suorittamisesta saa jatkossa opintopisteitä. Lukiokoulutuksen tavoitteena jatkossa on opiskella kursseja vähintään 150 opintopisteen edestä, nykyisen 75 kurssin sijaan. [20] Matematiikan opintojen osalta kurssien nimet ja sisällöt ovat osittain muuttuneet. Näin ollen vanhat oppimateriaalit eivät enää täysin vastaa uudistuneiden kurssien tavoitteita.

Kehittämistutkimus on kasvatusalalla suhteellisen nuori ja tuntematon tutkimusmenetelmä, jonka juuret ovat 1990-luvun alkupuolella. Aikoinaan kehittämistutkimus on saanut alkunsa halusta kehittää opetusta tutkimuslähtöisesti, opetustilanteissa ilmenevien tarpeiden mukaisesti. Kehittämistutkimukselle ei voida esittää yksiselitteistä määritelmää sen monitahoisuuden vuoksi. [24] Nimensä mukaisesti kehittämistutkimus yhdistää sykleinä kehittämisen ja tutkimuksen [15].

Tämän pro gradu -tutkielman tavoitteena on kehittää oppimateriaalia uudistuvan opetussuunnitelman MAA10 3D-geometrian kurssille. Vastaavaa kurssia ei aikaisemmin ole ollut, joten oppimateriaalin tarve uudelle kurssille lienee suuri. Lukion opetussuunnitelman perusteiden luonnoksessa korostetaan digitaalisten apuvälineiden käyttöä, joka osaltaan vaikutti siihen, että tämä oppimateriaali on luotu kokonaan GeoGebralla. Opetusmateriaalin kehitys suoritetaan kehittämistutkimuksena, joka sisältää yhden kehittämissyklin. Ongelma-analyysissä kartoitetaan kehittämisen tarpeet ja mahdollisuudet, jonka jälkeen tapahtuu oppimateriaalin kehittämisprosessi. Kehittämistuotosta kokeillaan todellisessa ympäristössä, joka tässä tapauksessa on Tampereen teknillisen lukion MAA4 -kurssin opiskelijat. Opiskelijoiden kommenttien perusteella oppimateriaalia kehitetään paremmaksi.

Tämän tutkielman luvussa 2 kerrotaan kehittämistutkimuksesta tutkimusmenetelmänä. Luvussa käsitellään kehittämistutkimuksen yleisiä piirteitä, kehittämistutkimuksen luotettavuutta sekä tämän tutkielman kehittämistutkimuksen toteutusmallia. Luvussa 3 esitellään teoreettinen viitekehys, johon perustuen oppimateriaali on kehitetty. Teoreettinen viitekehys sisältää matemaattisen osuuden, matematiikan oppimiseen liittyvän osuuden, verkkoympäristön rakentamiseen liittyvän osuuden sekä tietoa GeoGebrasta oppimisalustana. Luku 4 käsittelee kehittämisprosessia, lähtien liikkeelle ongelmasta, lähtökohdista ja tavoitteista. Tämän jälkeen käydään läpi kehittämisprosessin aikana tehtyjä ratkaisuja eri näkökulmista. Luvussa 5 käydään tarkemmin läpi luotua GeoGebra-kirjaa, kirjan luku kerrallaan. Luku 6 käsittelee tutkimuksen kulkua esitestauksesta tutkimusasetelman ja tulosten analysoinnin kautta jatkokehittämismahdollisuuksiin. Luvussa 7 esitetään johtopäätökset ja pohdinta.

2 Kehittämistutkimus

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkimusmenetelmänä käytetään kehittämistutkimusta, joka on yleistynyt kasvatusalalla viime vuosikymmenten aikana [17]. Luvussa 2.1 kerrotaan kehittämistutkimuksesta yleisesti tutkimusmenetelmänä. Luvussa 2.2 käsitellään tutkimusmenetelmän luotettavuutta. Luku 2.3 kertoo kehittämistutkimuksen toteutusmallista tässä tutkimuksessa.

2.1 Yleistä

Tässä pro gradu -tutkielmassa käytetään siis tutkimusmenetelmää, josta näkee suomenkielisessä kirjallisuudessa monia eri nimityksiä, esimerkiksi design-tutkimus, suunnittelututkimus ja kehittämistutkimus. Samaan tapaan englanninkielisessä kirjallisuudessa käytetään useita lähes samaa tarkoittavia termejä, esimerkiksi design research, development research ja formative research. [17] Mikään käsitteen suomennoksista ei vastaa tarkasti ja yksiselitteisesti englanninkielistä termiä. Tästä johtuen suomennoksia on useita erilaisia, joka vaikeuttaa käsitteen määrittelyä. [15, 24] Jatkossa tässä pro gradu -tutkielmassa käytetään ainoastaan käsitettä kehittämistutkimus.

Kehittämistutkimus on opetusalalla suhteellisen nuori ja tuntematon tutkimusmenetelmä. Kehittämistutkimuksen juuret löytyvät 1990-luvulta. Se syntyi halusta kehittää opetusta tutkimuslähtöisesti, etenkin opetustilanteissa esiin nousevien tarpeiden mukaisesti. Ensimmäisellä vuosikymmenellään tämä menetelmä ei tullut vielä kovin suuresti yleiseen tietoisuuteen ja silloin alan artikkeleita julkaistiin vain muutamia kymmeniä. Vuosituhannen vaihteen jälkeen kiinnostus kehittämistutkimusta kohtaan alkoi kasvaa, ja samalla tästä menetelmästä tuli tunnetumpi myös opetuksen tutkimuksessa. [24] Kehittämistutkimusta ei oikeastaan pidetä omana, erillisenä tutkimusmenetelmänään, vaan se koostuu joukosta erilaisia tutkimusmenetelmiä, joita käytetään tilanteen ja kehittämiskohteen mukaan [15].

Kehittämistutkimuksessa kvantitatiiviset ja kvalitatiiviset tutkimusmenetelmät yhdistyvät ja kyseessä on näin ollen monimenetelmäinen tutkimusote. [15] Kehittämistutkimukselle ei voida esittää yksiselitteistä määritelmää juuri sen monitahoisuuden vuoksi [24]. Kehittämistutkimusta voidaan kuvailla seuraavien kolmen ominaispiirteen avulla:

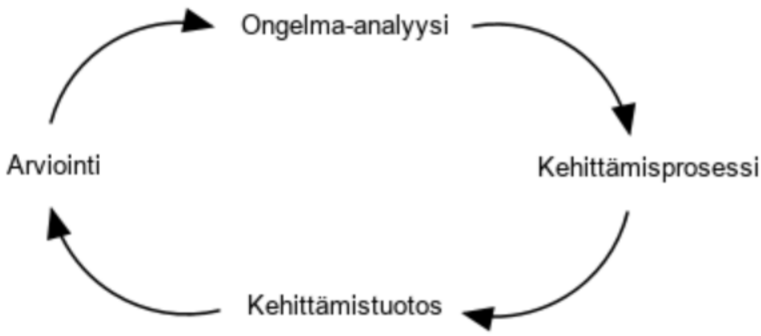
- kehittäminen lähtee liikkeelle aidosta muutoksen tarpeesta ja halusta tehdä muutoksia,
- tutkimus johtaa jonkinlaiseen käytettävään tuotokseen,
- kehittämisen tarkoitus on tuottaa tietoa, joka edistää opetusta.[13]

Yksi kehittämistutkimuksen tavoitteista on tuottaa yleisölle siirrettäviä kehittämistuotoksia, joita voivat olla esimerkiksi kokeelliset työt tai verkkomateriaalit [1]. Kehittämistutkimus toteutetaan todellisissa olosuhteissa, käyttäen tutkimusprosessissa apuna tutkimukseen osallistujia. Tältä osin kehittämistutkimus ja perinteinen kvantitatiivinen tutkimus eroavat toisistaan, sillä perinteiset tutkimusmenetelmät mittaavat tiettyjä muuttujia ja käsittelevät tutkimukseen osallistujia puhtaasti koehenkilöinä. Avoimen tilanteen vuoksi kehittämistutkimuksessa on enemmän muuttujia kuin perinteisillä tutkimusmenetelmillä. [24]

Käsitteet kehittämistutkimus ja kehittämistyö ovat lähellä toisiaan, mutta niitä ei saa sekoittaa keskenään. Päivittäinen kehittämistyö on organisaatioissa tapahtuvaa toiminnan parantamiseksi tehtävää työtä. Työelämässä kehittämistutkimuksen kohteita ovat esimerkiksi prosessit, toiminnot, tuotteet sekä palvelut. Se, että kehittämistyöstä saadaan tieteellinen tutkimus, vaatii kehittämistyön dokumentointia ja sitä, että työssä käytetään tieteellisiä menetelmiä, jotka tuottavat uutta ja luotettavaa tietoa. Kehittämistutkimuksen tarkoituksena on poistaa jokin ongelma tai kehittää jotain asiaa paremmaksi. [15]

Tutkimusmenetelminä kehittämistutkimus ja toimintatutkimus ovat hyvin lähellä toisiaan. Tämä tekee kehittämistutkimuksen määrittelystä entistä haastavampaa. [1] Tutkijat pitivät näitä kahta menetelmää alkuun kokonaan samana menetelmänä, jotka oli jostain syystä nimetty eri tavoin. Tämän takia näiden tutkimusmenetelmien suhdetta kuvataan usein kehittämistutkimusta tarkastelevassa teoriakirjallisuudessa. [15, 24] Sekä kehittämistutkimus että toimintatutkimus tähtäävät muutokseen tai parannukseen [15]. Näille tutkimusmenetelmille yhteistä on myös se, että molemmissa pyrkimyksenä on tehdä teoriaan pohjautuvaa kehittämistä, jota voidaan arvioida ja kehittää kohti parempaa lopputulosta [1, 24]. Tärkein eroavaisuus näiden tutkimusmenetelmien välillä on se, että toimintatutkimuksessa tutkija on kehittämiskohteen toiminnassa mukana. Kehittämistutkimuksessa ei edellytetä tutkijan mukana oloa. [15] Menetelmien eroina voidaan pitää myöskin muun muassa tutkimustavoitteita, mittakaavaa ja toteuttamistapoja [1].

Kehittämistutkimus yhdistää kehittämisen ja tutkimuksen, noudattaen syklisiä vaiheita. Kehittämissyklit määräytyvät projektin luonteen mukaisesti [15, 24]. Kehittämissyklissä on neljä vaihetta: ongelma-analyysi, kehittämisprosessi, kehittämistuotos ja arviointi. Nämä vaiheet ovat jatkuvasti vuorovaikutyksessa toistensa kanssa koko kehittämistutkimuksen ajan. [5] Sykli on esitetty kuvassa 2.1. Kehittämistutkimus alkaa määrittämällä kehittämisen tarpeet, mahdollisuudet ja haasteet. Tätä vaihetta kutsutaan ongelma-analyysiksi. Tämä on tutkimuksen kannalta tärkeä ja välttämätön vaihe, sillä kehittämistarpeen täytyy nousta aina todellisesta ongelmasta. Ongelma-analyysi voi olla empiirinen, teoreettinen tai sisältää näitä molempia. Sykli voidaan toistaa useita kertoja, jotta tuotos saadaan vastaamaan mahdollisimman hyvin kehittämisprosessille asetettuja tavoitteita. [24] Tämän vuoksi kehittämistutkimuksen syklisyys on ehdottomasti katsottavissa tutkimusmenetelmän vahvuudeksi [1].



Kuva 2.1. Kehittämissyklin vaiheet, ensimmäinen vaihe on ongelma-analyysi [5].

Kehittämistutkimusta on pidetty opiskelijoiden keskuudessa mielekkäänä, mutta haastavana tapana toteuttaa opinnäytetyö. Tutkimuksesta jää usein opiskelijalle käteen konkreettinen tuotos, jota voidaan mahdollisesti hyödyntää esimerkiksi tulevissa työtehtävissä. Kehittämisprosessi on haastava, koska opiskelijan tulee pystyä yhdistämään sekä itse oppiaineen että sen opetuksen tutkimusta. [1] Kun kehittämistutkimus tehdään pro gradu -tutkielmana, kehittämisprosessi koostuu usein yhdestä tai kahdesta kehittämissyklistä. Syklien määrään vaikuttavat muun muassa käytettävissä oleva aika, tutkimuksen aihe sekä mahdollisesti opiskelijan arvosanatavoitteet. Mikäli kehittämistutkimusta ei toteuteta syklisesti, ei se ole tieteellisesti pätevä tai luotettava. Pro gradu -tutkielmissa kehittämistutkimuksen tavoitteena on saada aikaiseksi jonkin tyyppinen konkreettinen kehittämistuotos, joka voi olla esimerkiksi oppimisympäristö tai opetusmateriaali. Kehittämiskuvaus on kehittämistutkimuksen pohjalta laadittu raportti, jonka tavoitteena on antaa lukijalle luotettava ja kokonaisvaltainen kuva suoritetusta kehittämisprosessista. Halutessaan lukijan pitäisi raportin pohjalta pystyä toistamaan kehittämisasetelma, joten raportista on laadittava riittävän yksityiskohtainen. Käytännössä täydellinen toistaminen ei ole mahdollista, esimerkiksi muuttuvien olosuhteiden ja testaajajoukon vuoksi. [1]

2.2 Luotettavuus

Kehittämistutkimuksen luotettavuutta on usein kritisoitu tutkimuskirjallisuudessa. Kritisoinnin kohteeksi ovat joutuneet esimerkiksi tutkimuskäytännöt, jotka eivät ole yhteneväisiä kaikkien tutkijoiden mielestä. Kehittämistutkimukselle ei ole ehtinyt vielä syntyä vahvaa tutkimusperinnettä, joka tulee ottaa huomioon kehittämistutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa. [24] Lisäksi heikkoutena on pidetty sitä, että tutkimus toteutetaan useimmiten kvalitatiivisena pienellä otoskoolla, jolloin se ei kuvaa perusjoukkoa niin hyvin kuin mitä kvantitatiiviset tutkimusmenetelmät laadukkaalta tieteelliseltä tutkimukselta odottavat. Toisaalta tämän menetelmän puolustajat pitävät kehittämistutkimuksen vahvuutena juuri tutkimustulosten yleistettävyyttä ja selitettävyyttä, vaikkakaan sen luotettavuutta ei välttämättä pystytä todistamaan tilastollisesti vakuuttavasti [5].

Tutkimuksen luotettavuuden kannalta kehittämistutkimuksen vahvuutena on pidetty myös mahdollisuutta hyödyntää sekä kvantitatiivisia että kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä samanaikaisesti. [24] Kehittämistutkimuksen luotettavuutta lisää eri aineistonkeruumenetelmien triangulaatio sekä kehittämissyklien aineiston analysoinnin toistaminen [27]. Luotettavuus paranee, kun on mahdollista käyttää erilaisia tutkimusmenetelmiä samanaikaisesti, tätä kutsutaan monimenetelmäiseksi tutkimusmenetelmäksi. Lisäksi esimerkiksi syklisyys, testaamisten määrät sekä tarkka dokumentointi ja raportointi vaikuttavat tutkimuksen luotettavuuteen. [24]

Useimmiten tieteellisen tutkimuksen luotettavuutta arvioidaan validiteetin ja reliabiliteetin avulla. Nämä käsitteet ovat kehittyneet määrällisen tutkimuksen käyttöön, joten niitä ei voi sellaisenaan soveltaa kehittämistutkimukseen. [24] Laadullisessa tutkimuksessa luotettavuustarkastelussa käytetään yleisesti Lincolnin ja Guban (1985) määrittelemää luokittelua, joka sisältää neljä luokkaa. Nämä luokat ovat uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus ja vahvistettavuus [18]. Vaikka kehittämistutkimus on haasteellinen menetelmä luotettavuuden kannalta, voidaan sitä arvioida vertaamalla Design-Based Research Collectiven (2003) [4] määrittelemiä yleisiä laadukkaan kehittämistutkimuksen kriteereitä edellä mainittuun Lincolnin ja Guban (1985) neliluokkaiseen luokitteluun. Yleisiä laadukkaan kehittämistutkimuksen kriteereitä ovat:

- kokonaisvaltainen kehittäminen (uskottavuus, siirrettävyys),
- syklinen jatkuva kehitys ja arviointi (uskottavuus, luotettavuus, vahvistettavuus),
- teorioiden siirtäminen kentälle opetusalan ammattilaisten käyttöön (siirrettävyys),
- testaaminen autenttisissa (aidoissa alkuperäisissä) olosuhteissa (siirrettävyys, luotettavuus, vahvistettavuus),
- syklien dokumentointi (luotettavuus, vahvistettavuus). [24] [4]

2.3 Toteutusmalli

Tässä pro gradu -tutkielmassa kehitetään oppimateriaalia lukion matematiikan MAA 10 3D-geometrian kurssille. Oppimateriaalin toteutus suoritetaan kehittämistutkimuksena, joka sisältää yhden kehittämissyklin. Tämä kehittämissykli etenee suunnilleen kuvan 2.1 syklin mukaisesti. Tämä kehittämistutkimus alkaa ongelma-analyysillä, jossa määritetään kehittämisen tarpeet ja mahdollisuudet. Tämän jälkeen tapahtuu oppimateriaalin kehittämisprosessi. Tässä välissä poiketen kuvasta 2.1 tapahtuu niin sanottu esitestaus. Tämä tarkoittaa sitä, että Tampereen yliopiston matematiikan opiskelijat, jotka suorittavat aineenopettajan pedagogisia opintoja, käyvät oppimateriaalin läpi, arvioivat ja kommentoivat sitä. Tämän palautteen perusteella oppimateriaalin epäkohtia ja virheitä korjataan. Seuraavaksi lopullista kehittämistuotosta kokeillaan todellisessa ympäristössä. Tutkimustuloksia kerätään monitriangulaatiolla eli opiskelijoilta kerätään kyselylomakkeilla vastauksia ja luokan opettajaa haastatellaan. Lisäksi tuloksissa huomioidaan tutkijan paikan päällä tekemät havainnot ja oppilaiden palauttamia tehtäviä tulkitaan. Tulosten pohjalta oppimateriaalia parannellaan. Tämän tutkielman kirjallinen raportointi noudattaa näitä vaiheita.

3 Teoreettinen viitekehys

Tässä kappaleessa kuvataan kehittämistutkimuksen taustoja eri näkökulmista. Ensimmäisenä, aliluvussa 3.1, käsitellään matemaattista viitekehystä pistetulon ja ristitulon osalta. Seuraavaksi aliluvussa 3.2 käsitellään matematiikan oppimista muun muassa opetussuunnitelman ja sähköisten oppimisympäristöjen kannalta. Aliluvussa 3.3 käsitellään verkko-oppimisympäristön rakentamista, hyvän oppimisaihion piirteitä sekä verkko-oppimateriaalin laadun arviointia. Luvussa 3.4 kerrotaan yleisesti GeoGebrasta, sen historiasta, sen käytöstä opetuksessa sekä siitä, miten ohjelmiston avulla luodaan oppimateriaalia.

3.1 Matemaattinen osuus

Tässä luvussa käsitellään matemaattista viitekehystä pistetulon ja ristitulon osalta. Luomani oppimateriaalin matemaattista teoriaa ei käsitellä siis kokonaisuudessaan, sillä se ei olisi mahtunut työn laajuuteen. Tieteellisessä kirjallisuudessa vektorit on tapana kirjoittaa lihavoituina, esimerkiksi vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$. Koulukirjoissa puolestaan käytetään kirjaimen päällä olevaa nuolta, esimerkiksi vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$. Tässä luvussa käytetään tieteellisen kirjallisuuden kirjoitustavan mukaan lihavoituja kirjaimia.

3.1.1 Vektoreiden pistetulo

Määritellään nyt vektoreiden pistetulo eli skalaaritulo. Se on kahden vektorin välinen laskutoimitus, jonka vastaukseksi saadaan aina skalaari. Tässä luvussa tarkastellaan euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$. Päälähteenä tässä aliluvussa 3.1.1 on käytetty Howard Antonin ja Chris Rorresin teosta Elementary Linear Algebra [3, s. 142–162] sekä Pentti Haukkasen Lineaarialgebra 1A:n opintomonistetta [7, s. 34–39].

Määritelmä

Määritelmä 3.1. Olkoot $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ja $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ vektoreita. Silloin niiden pistetulo eli skalaaritulo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ on

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Huomautus. Jos $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ ja $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, niin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Esimerkki 3.1. Olkoon $\boldsymbol{u} = (-2,3,2)$ ja $\boldsymbol{v} = (3,1,-1)$. Lasketaan pistetulo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. Saadaan

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= (-2 \cdot 3) + (3 \cdot 1) + (2 \cdot (-1)) \\ &= -6 + 3 - 2 \\ &= -5.\end{aligned}$$

Algebrallisia ominaisuuksia

Lause 3.1. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ *vektoreita ja olkoon* $k \in \mathbb{R}$. *Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ *(kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus),*

(2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ *(osittelulaki),*

(3) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ *(osittelulaki),*

(4) $k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$ *(skalaarin siirto),*

(5) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$ *ja* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ *, jos ja vain jos* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$,

(6) $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ ovat vektoreita ja olkoon $k \in \mathbb{R}$.

Todistetaan kohta (1). Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (u_1, \ldots, u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) \\ &= u_1v_1 + \cdots + u_nv_n && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\ &= v_1u_1 + \cdots + v_nu_n && \text{[Reaalialgebra]} \\ &= (v_1, \ldots, v_n) \cdot (u_1, \ldots, u_n) && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

Siis kohta (1) pätee.

Todistetaan kohta (2). Nyt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} &= (u_1 + v_1)w_1 + \cdots + (u_n + v_n)w_n && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\ &= u_1w_1 + v_1w_1 + \cdots + u_nw_n + v_nw_n && \text{[Reaalialgebra]} \\ &= (u_1w_1 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n) && \text{[Reaalialgebra]} \\ &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}. && \text{[Pistetulon määritelmä]}\end{aligned}$$

Siis kohta (2) pätee.

Todistetaan kohta (3). Nyt

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})) \\
&= u_1(v_1 + (-w_1)) + \cdots + u_n(v_n + (-w_n)) && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\
&= u_1v_1 + u_1(-w_1) + \cdots + u_nv_n + u_n(-w_n) && \text{[Reaalialgebra]} \\
&= u_1v_1 - u_1w_1 + \cdots + u_nv_n - u_nw_n && \text{[Reaalialgebra]} \\
&= (u_1v_1 + \cdots + u_nv_n) - (u_1w_1 + \cdots + u_nw_n) && \text{[Reaalialgebra]} \\
&= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}. && \text{[Pistetulon määritelmä]}
\end{aligned}
$$

Siis kohta (3) pätee.

Todistetaan kohta (4). Nyt

$$
\begin{aligned}
k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) &= k((u_1, ..., u_n) \cdot (v_1, ..., v_n)) \\
&= k(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n) && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\
&= k(u_1v_1) + \cdots + k(u_nv_n) && \text{[Reaalialgebra]} \\
&= (ku_1)v_1 + \cdots + (ku_n)v_n && \text{[Reaalialgebra]} \\
&= (ku_1, ..., ku_n) \cdot (v_1, ..., v_n) && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\
&= (k(u_1, ..., u_n) \cdot (v_1, ..., v_n)) && \text{[Skalaarilla kertominen]} \\
&= (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}.
\end{aligned}
$$

Siis kohta (4) pätee.

Todistetaan kohta (5). Nyt

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} &= v_1v_1 + \cdots + v_nv_n && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\
&= (v_1)^2 + \cdots + (v_n)^2 \\
&= ||\boldsymbol{v}||^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Siis kohta (5) pätee.

Todistetaan kohta (6). Nyt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{v} &= (0, \ldots, 0) \cdot (v_1, \ldots, v_n) \\
&= 0v_1 + \cdots + 0v_n && \text{[Pistetulon määritelmä]} \\
&= 0 \\
&= v_10 + \cdots + v_n0 && \text{[Reaalialgebra]} \\
&= (v_1, ..., v_n) \cdot (0, ..., 0) \\
&= \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Siis kohta (6) pätee.

□

Esimerkki 3.2. Olkoot $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \cdot ((-2-3)\boldsymbol{i} + (1-4)\boldsymbol{j} + (-2-1)\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{u} \cdot (-5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) \\ &= (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) \cdot (-5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) \\ &= (1 \cdot (-5)) + (2 \cdot (-3)) + (-3 \cdot (-3)) \\ &= -5 - 6 + 9 \\ &= -2\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) \cdot (-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) \cdot (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \\ &= 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-3 \cdot (-2)) - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1) \\ &= -2 + 2 + 6 - 3 - 8 + 3 \\ &= -2.\end{aligned}$$

Siis

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Geometrisia ominaisuuksia

Määritelmä 3.2. Olkoon $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ vektori. Silloin tämän vektorin pituus $\|\boldsymbol{v}\|$ on

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Esimerkki 3.3. Olkoon $\boldsymbol{v} = (4, 3, 1)$. Lasketaan vektorin $\boldsymbol{v}$ pituus. Nyt

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}.$$

Pistetulon avulla voidaan määritellä vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen kulma α seuraavasti.

Määritelmä 3.3. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektoreita. Silloin vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen kulma voidaan määritellä kaavalla

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|}.$$

Eli

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||}\right).$$

Huomautus. Kun tiedetään vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen kulma α sekä niiden pituudet $||\boldsymbol{u}||$ ja $||\boldsymbol{v}||$, niin pistetulo voidaan laskea kaavalla

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||\ \cos(\alpha).$$

Esimerkki 3.4. Olkoot $||\boldsymbol{u}|| = 2$ ja $||\boldsymbol{v}|| = 7$ ja $\alpha = 45°$. Nyt vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen pistetulo on

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}|| \cos(\alpha) = 2\cdot 7\cdot\cos(45°) = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}.$$

Lause 3.2 (Cauchy-Schwarz)**.** *Olkoot* $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots u_n)$ *ja* $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *vektoreita. Silloin*

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leq ||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||$$

tai käyttäen vektorien komponentteja

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2}.$$

Määritelmä 3.4. Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on nolla eli $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Vektoreiden kohtisuoruutta merkitään $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Lause 3.3. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. *Silloin* $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Todistus. " $\Rightarrow$ " Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ja, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ovat kohtisuorassa, siis $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. Määritelmän 3.3 perusteella

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||u||\ ||v||}\right).$$

Nyt koska vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat oletuksen perusteella kohtisuorassa, niin $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Siis

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{0}{||u||\ ||v||}\right)\\ &= \arccos(0)\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq 0$ ja $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Nyt $\cos(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Määritelmän 3.3 perusteella

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||}\\ \Rightarrow 0 &= \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0.\end{aligned}$$

Nyt vektoreiden kohtisuoruusehdon mukaan $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Siis

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

□

Esimerkki 3.5. Vektorit $\boldsymbol{u} = (2,3,8)$ ja $\boldsymbol{v} = (3,-2,0)$ ovat kohtisuorassa, sillä

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (2,3,8) \cdot (3,-2,0) \\ &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 \\ &= 6 - 6 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Määritelmä 3.5. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ja olkoon $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$. Vektoreiden yhdensuuntaisuutta merkitään $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$.

Huomautus. Jos $k > 0$, niin vektoreiden sanotaan olevan samansuuntaiset ja voidaan merkitä $\boldsymbol{u} \upuparrows \boldsymbol{v}$. Jos $k < 0$, niin vektoreiden sanotaan olevan vastakkaissuuntaiset ja voidaan merkitä $\boldsymbol{u} \uparrow\downarrow \boldsymbol{v}$.

Lause 3.4. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq 0$. Silloin $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \alpha = 0$ tai $\alpha = \pi$.*

Todistus. " $\Rightarrow$ " Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq 0$. Oletetaan lisäksi, että $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat yhdensuuntaiset. On siis olemassa sellainen $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, että $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Määritelmän 3.3 perusteella

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||}.$$

Päätellään, että

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (k\boldsymbol{u}) = k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) = k||\boldsymbol{u}||^2$$

ja

$$||\boldsymbol{v}|| = ||k\boldsymbol{u}|| = k||\boldsymbol{u}||.$$

Tästä seuraa

$$\cos(\alpha) = \frac{k||\boldsymbol{u}||^2}{||\boldsymbol{u}||\ |k|\ ||\boldsymbol{u}||} = \frac{k}{|k|} = \pm 1,$$

siis täytyy olla $\alpha = 0$ tai $\alpha = \pi$.
" $\Leftarrow$ " Sivuutetaan. □

Lause 3.5 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Silloin*

$$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Todistus. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) && \text{[Pituuden määritelmä]} \\
&= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) && \text{[Osittelulaki]} \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \\
&= ||\boldsymbol{u}||^2 + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + ||\boldsymbol{v}||^2 && \text{[Pituuden määritelmä]} \\
&\leq ||\boldsymbol{u}||^2 + 2|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| + ||\boldsymbol{v}||^2 && [\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \leq |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|] \\
&\leq ||\boldsymbol{u}||^2 + 2||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}||^2 && \text{[Cauchy-Schwarzin lause]} \\
&= (||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||)^2.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.6. Olkoot $\boldsymbol{u} = (2, 3, 2)$ ja $\boldsymbol{v} = (1, 1, 2)$. Nyt

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}.$$

Siis

$$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41} \approx 6,40$$

ja

$$||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}|| = (\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}) + (\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}) = \sqrt{17} + \sqrt{6} \approx 6,57.$$

Nyt selvästi

$$\sqrt{41} \leq \sqrt{17} + \sqrt{6}.$$

Lause 3.6 (Pythagoraan lause)**.** *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ sellaiset vektorit, että $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. Silloin*

$$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2.$$

Todistus. Nyt vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat kohtisuorassa, joten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) && \text{[Pituuden määritelmä]} \\
&= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) && \text{[Osittelulaki]} \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \\
&= ||\boldsymbol{u}||^2 + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + ||\boldsymbol{v}||^2 && \text{[Pituuden määritelmä]} \\
&= ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.7. Olkoot $\boldsymbol{u} = (3, -3, -9)$ ja $\boldsymbol{v} = (9, 3, 2)$, jolloin ne ovat kohtisuorat vektorit. Tällöin

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (12, 0, -7) \Rightarrow ||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = \sqrt{12^2 + 0^2 + (-7)^2}^2 = 193$$

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-9)^2}^2 + \sqrt{9^2 + 3^2 + 2^2}^2 \\ &= 9 + 9 + 81 + 81 + 9 + 4 = 193. \end{aligned}$$

Siis

$$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 = 193.$$

Projektio

Olkoon $\boldsymbol{a} \neq 0$ annettu suunta. Oletetaan, että $\boldsymbol{w_1} \parallel \boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{w_2} \perp \boldsymbol{a}$. Kirjoitetaan vektori $\boldsymbol{u}$ muotoon

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2}.$$

Vektori $\boldsymbol{w_1}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\boldsymbol{w_1} = k\boldsymbol{a}$. Siis

$$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w_2}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} &= (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w_2}) \cdot \boldsymbol{a} \\ &= k||\boldsymbol{a}||^2 + (\boldsymbol{w_2} \cdot \boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

Koska $\boldsymbol{w_2}$ ja $\boldsymbol{a}$ ovat kohtisuorassa, niin $\boldsymbol{w_2} \cdot \boldsymbol{a} = 0$. Saadaan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} = k||\boldsymbol{a}||^2$, joten

$$k = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2}$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\boldsymbol{w_1} = k\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2}\boldsymbol{a}$$

ja

$$\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{u} - k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2}\boldsymbol{a}.$$

Vektoria $\boldsymbol{w_1}$ kutsutaan vektorin $\boldsymbol{u}$ projektioksi vektorille $\boldsymbol{a}$. Vektoria $\boldsymbol{w_2}$ puolestaan kutsutaan vektorin $\boldsymbol{u}$ kohtisuoraksi komponentiksi vektorille $\boldsymbol{a}$. Näin saadaan seuraavat määritelmät.

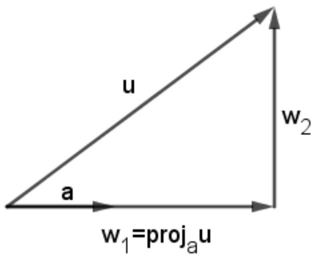
Määritelmä 3.6. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ vektoreita ja $\boldsymbol{a} \neq 0$. Silloin vektorin $\boldsymbol{u}$ projektio suuntaan $\boldsymbol{a}$ on

$$\boldsymbol{w_1} = proj_a \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2} \boldsymbol{a}.$$

Määritelmä 3.7. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ vektoreita ja $\boldsymbol{a} \neq 0$. Silloin vektorin $\boldsymbol{u}$ kohtisuora komponentti suuntaan $\boldsymbol{a}$ nähden on

$$\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{u} - proj_a \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2} \boldsymbol{a}.$$

Kuvassa 3.1 on havainnollistettu projektiota.



Kuva 3.1. Havainnollistus projektiosta.

Esimerkki 3.8. Olkoot $\boldsymbol{u} = (8, 7, -3)$ ja $\boldsymbol{a} = (6, 0, 2)$. Etsi vektorin $\boldsymbol{u}$ projektio vektorille $\boldsymbol{a}$ ja vektorin $\boldsymbol{u}$ kohtisuora komponentti vektorille $\boldsymbol{a}$. Nyt vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{a}$ pistetuloksi saadaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} &= (8, 7, -3) \cdot (6, 0, 2) \\ &= 8 \cdot 6 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 \\ &= 48 + 0 - 6 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Lisäksi vektorin $\boldsymbol{a}$ pituuden neliöksi saadaan

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{a}||^2 &= \sqrt{6^2 + 0^2 + 2^2}^2 \\ &= 36 + 0 + 4 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Nyt vektorin $\boldsymbol{u}$ projektio suuntaan $\boldsymbol{a}$ on

$$\boldsymbol{w_1} = proj_a \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2} \boldsymbol{a} = \frac{42}{40}(6, 0, 2) = \left(\frac{63}{10}, 0, \frac{21}{10}\right)$$

ja vektorin $\boldsymbol{u}$ kohtisuora komponentti suuntaan $\boldsymbol{a}$ nähden on

$$\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{u} - proj_a \boldsymbol{u} = (8, 7, -3) - \left(\frac{63}{10}, 0, \frac{21}{10}\right) = \left(\frac{17}{10}, 7, \frac{-51}{10}\right).$$

Huomautus. Projektion pituudelle saadaan

$$\begin{aligned}
||proj_a \boldsymbol{u}|| &= \left|\left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2}\boldsymbol{a}\right|\right| \\
&= \left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||^2}\right| ||\boldsymbol{a}|| \\
&= \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}|}{||\boldsymbol{a}||^2}||\boldsymbol{a}|| \\
&= \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}|}{||\boldsymbol{a}||.}
\end{aligned}$$

Jos kulma α on $\boldsymbol{u}$:n ja $\boldsymbol{a}$:n välinen kulma. Nyt $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} = ||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{a}||\cos(\alpha)$, niin edellinen kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$||proj_a \boldsymbol{u}|| = ||\boldsymbol{u}||\,|\cos(\alpha)|.$$

3.1.2 Vektoreiden ristitulo

Määrittelemme nyt vektoreiden eräänlaisen kertolaskun, jota kutsutaan ristituloksi tai vektorituloksi. Ristitulon vastaukseksi saadaan aina vektori. Tätä voidaan soveltaa tässä muodossa vain kolmiulotteisessa avaruudessa, siten tässä luvussa tarkastellaan euklidista avaruutta $\mathbb{R}^3$. Päälähteenä tässä aliluvussa 3.1.2 on käytetty Howard Antonin ja Chris Rorresin teosta Elementary Linear Algebra [3, s. 172–179], sekä Pentti Haukkasen Lineaarialgebra 1A:n opintomonistetta [7, s. 39–46].

Määritelmä

Määritelmä 3.8. Olkoot $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ vektoreita. Tällöin niiden ristitulo eli vektoritulo $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ on

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{k} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).
\end{aligned}$$

Huomautus. Pystyviivat tarkoittavat ns. determinanttia, ks. [3, s. 105] ja [7, s. 14].

Esimerkki 3.9. Olkoot $\boldsymbol{u} = (3,2,2)$ ja $\boldsymbol{v} = (1,2,-1)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\ &= (2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)\boldsymbol{i} - (3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)\boldsymbol{j} + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1)\boldsymbol{k} \\ &= (-2 - 4)\boldsymbol{i} - (-3 - 2)\boldsymbol{j} + (6 - 2)\boldsymbol{k} \\ &= -6\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Algebrallisia ominaisuuksia

Lause 3.7. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ *(antikommutatiivisuus),*

(2) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$ *(osittelulaki),*

(3) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ *(osittelulaki),*

(4) $k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \times v = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v})$ *(skalaarin siirto),*

(5) $\boldsymbol{v} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ *(nollavektorin tulo),*

(6) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Todistus. Olkoot $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ja $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ vektoreita ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Todistetaan kohta (1). Nyt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}).$$

Siis kohta (1) pätee.

Todistetaan kohta (2). Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) =& [(u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2)]\boldsymbol{i} + [u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3)]\boldsymbol{j} \\ & [+u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1)]\boldsymbol{k} \\ =& u_2v_3\boldsymbol{i} + u_2w_3\boldsymbol{i} - u_3v_2\boldsymbol{i} - u_3w_2\boldsymbol{i} + u_3v_1\boldsymbol{j} + u_3w_1\boldsymbol{j} - u_1v_3\boldsymbol{j} - u_1w_3\boldsymbol{j} \\ & + u_1v_2\boldsymbol{k} + u_1w_2\boldsymbol{k} - u_2v_1\boldsymbol{k} - u_2w_1\boldsymbol{k} \\ =& [(u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2w_3 - u_3w_2)]\boldsymbol{i} + [(u_3v_1 - u_1v_3) + (u_3w_1 - u_1w_3)]\boldsymbol{j} \\ & + [(u_1v_2 - u_2v_1) + (u_1w_2 - u_2w_1)]\boldsymbol{k} \\ =& (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

Siis kohta (2) pätee.

Todistetaan kohta (3). Nyt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w} =& [(u_2+v_2)w_3-(u_3+v_3)w_2]\boldsymbol{i}+[(u_3+v_3)w_1-(u_1+v_1)w_3]\boldsymbol{j}\\ &+[(u_1+v_1)w_2-(u_2+v_2)w_1]\boldsymbol{k}\\ =& u_2w_3\boldsymbol{i}+v_2w_3\boldsymbol{i}-u_3w_2\boldsymbol{i}-v_3w_2\boldsymbol{i}+u_3w_1\boldsymbol{j}+v_3w_1\boldsymbol{j}-u_1w_3\boldsymbol{j}-v_1w_3\boldsymbol{j}\\ &+u_1w_2\boldsymbol{k}+v_1w_2\boldsymbol{k}-u_2w_1\boldsymbol{k}-v_2w_1\boldsymbol{k}\\ =& [(u_2w_3-u_3w_2)+(v_2w_3-v_3w_2)]\boldsymbol{i}+[(u_3w_1-u_1w_3)+(v_3w_1-v_1w_3)]\boldsymbol{j}\\ &+[(u_1w_2-u_2w_1)+(v_1w_2-v_2w_1)]\boldsymbol{k}\\ =& (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

Siis kohta (3) pätee.

Todistetaan kohta (4). Nyt

$$k(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=k\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ku_1&ku_2&ku_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=(k\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{v}$$

ja

$$k(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=k\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\kv_1&kv_2&kv_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\times(k\boldsymbol{v}).$$

Siis kohta (4) pätee.

Todistetaan kohta (5). Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{0}&=(v_2\cdot 0-v_3\cdot 0)\boldsymbol{i}+(v_3\cdot 0-v_1\cdot 0)\boldsymbol{j}+(v_1\cdot 0-v_2\cdot 0)\boldsymbol{k}\quad\text{[Ristitulon määritelmä]}\\&=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{v}&=(0\cdot v_3-0\cdot v_2)\boldsymbol{i}+(0\cdot v_1-0\cdot v_3)\boldsymbol{j}+(0\cdot v_2-0\cdot v_1)\boldsymbol{k}\quad\text{[Ristitulon määritelmä]}\\&=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

Siis kohta (5) pätee.

Todistetaan kohta (6). Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}&=(v_2v_3-v_3v_2)\boldsymbol{i}+(v_3v_1-v_1v_3)\boldsymbol{j}+(v_1v_2-v_2v_1)\boldsymbol{k}\quad\text{[Ristitulon määritelmä]}\\&=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

Siis kohta (6) pätee. □

Huomautus. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ ei päde yleisesti.

Esimerkki 3.10. Olkoot $\boldsymbol{u} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v} = (2,3,1)$ ja $\boldsymbol{w} = (-3,2,-3)$. Nyt

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (2 + (-3), 3 + 2, 1 + (-3)) = (-1,5,-2).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \times (-1,5,-2) \\
&= (1,1,1) \times (-1,5,-2) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\
&= (1 \cdot (-2) - 1 \cdot 5)\boldsymbol{i} - (1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1))\boldsymbol{j} + (1 \cdot 5 - (1 \cdot (-1))\boldsymbol{k} \\
&= -7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\
&= (1-3)\boldsymbol{i} - (1-2)\boldsymbol{j} + (3-2)\boldsymbol{k} + (-3-2)\boldsymbol{i} - (-3+3)\boldsymbol{j} + (2+3)\boldsymbol{k} \\
&= -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - 5\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \\
&= -7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Siis

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}).$$

Geometrisia ominaisuuksia

Lause 3.8. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ *ovat vektoreita. Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$, *ts.* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$,

(2) $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$, *ts.* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$,

(3) $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 ||\boldsymbol{v}||^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 (Lagrange)$,

(4) $\quad \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ *(Vektorikolmiotulo),*

(5) $\quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$ *(Vektorikolmiotulo).*

Todistus. Olkoot $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ja $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ vektoreita. Todistetaan kohta (1). Nyt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) && \text{[Ristitulon määritelmä]}\\
&= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) && \text{[Pistetulon määritelmä]}\\
&= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis kohta (1) pätee.

Todistetaan kohta (2). Nyt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (v_1, v_2, v_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) && \text{[Ristitulon määritelmä]}\\
&= v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1) && \text{[Pistetulon määritelmä]}\\
&= v_1u_2v_3 - v_1u_3v_2 + v_2u_3v_1 - v_2u_1v_3 + v_3u_1v_2 - v_3u_2v_1\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis kohta (2) pätee.

Todistetaan kohta (3). Nyt

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 =& (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \quad \text{[Pituuden määritelmä]}\\
=& (u_2v_3)^2 - 2(u_2v_3u_3v_2) + (u_3v_2)^2 + (u_3v_1)^2 - 2(u_3v_1u_1v_3) + (u_1v_3)^2\\
&+ (u_1v_2)^2 - 2(u_1v_2u_2v_1) + (u_2v_1)^2\\
=& u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2\\
=& (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2\\
=& \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2.
\end{aligned}$$

Siis kohta (3) pätee.

Todistetaan kohta (4). Nyt

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\boldsymbol{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\boldsymbol{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\boldsymbol{k}. \quad \text{[Ristitulon määritelmä]}$$

Tehdään todistus $\boldsymbol{i}$-komponentille. $\boldsymbol{j}$- ja $\boldsymbol{k}$-komponentit todistettaisiin samalla tavalla, jätetään tämä kuitenkin tekemättä, sillä muuten todistuksesta tulisi melko pitkä.

Vektorin $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ $\boldsymbol{i}$-komponentti on

$$\begin{aligned}
&u_2(v_1w_2 - v_2w_1) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3) \quad \text{[Ristitulon määritelmä]}\\
=&u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3\\
=&v_1(u_2w_2 + u_3w_3) - w_1(u_2v_2 - u_3v_3)\\
=&v_1(u_2w_2 + u_3w_3) - w_1(u_2v_2 - u_3v_3) + (u_1v_1w_1 - u_1v_1w_1))\\
=&v_1(u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) - w_1(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3),
\end{aligned}$$

joka on vektorin $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ $\boldsymbol{i}$-komponentti. Siis kohta (4) pätee.

Todistetaan kohta (5). Nyt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{k}. \quad \text{[Ristitulon määritelmä]}$$

Tehdään todistus $\boldsymbol{i}$-komponentille. $\boldsymbol{j}$- ja $\boldsymbol{k}$-komponentit todistettaisiin samalla tavalla, jätetään tämä kuitenkin tekemättä, sillä muuten todistuksesta tulisi melko pitkä. Vektorin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w})$ $\boldsymbol{i}$-komponentti on

$$\begin{aligned}
&(u_3v_1 - u_1v_3)w_3 - (u_1v_2 - u_2v_1)w_2 \quad \text{[Ristitulon määritelmä]}\\
=&u_3v_1w_3 - u_1v_3w_3 - u_1v_2w_2 + u_2v_1w_2\\
=&v_1(u_3w_3 + u_2w_2) - u_1(v_3w_3 + v_2w_2)\\
=&v_1(u_3w_3 + u_2w_2) - u_1(v_3w_3 + v_2w_2) + (u_1v_1w_1 - u_1v_1w_1)\\
=&v_1(u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) - u_1(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3),
\end{aligned}$$

joka on vektorin $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{i}$-komponentti. Siis kohta (5) pätee. □

Esimerkki 3.11. Olkoot $\boldsymbol{u} = (8, 3, -2)$ ja $\boldsymbol{v} = (-1, 6, -2)$. Silloin

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\
&= (-6 + 12)\boldsymbol{i} - (-16 - 2)\boldsymbol{j} + (48 + 3)\boldsymbol{k}\\
&= 6\boldsymbol{i} + 18\boldsymbol{j} + 51\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) \cdot (6\boldsymbol{i} + 18\boldsymbol{j} + 51\boldsymbol{k}) \\
&= 8 \cdot 6 + 3 \cdot 18 + (-2) \cdot 51 \\
&= 48 + 54 - 102 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Jos α on $\boldsymbol{u}$:n ja $\boldsymbol{v}$:n välinen kulma, niin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}||\, ||\boldsymbol{v}|| \cos(\alpha)$, joten Lagrangen lause saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||^2 &= ||\boldsymbol{u}||^2 ||\boldsymbol{v}||^2 - ||\boldsymbol{u}||^2 ||\boldsymbol{v}||^2 \cos^2(\alpha) \\
&= ||\boldsymbol{u}||^2 ||\boldsymbol{v}||^2 (1 - \cos^2(\alpha)) \\
&= ||\boldsymbol{u}||^2 ||\boldsymbol{v}||^2 \sin^2(\alpha).
\end{aligned}
$$

Otetaan yhtälöstä neliöjuuri puolittain. Nyt koska tässä yhteydessä $\sin(\alpha) \geq 0$ ja vektorin pituus on aina ei-negatiivinen, niin yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}||\, ||\boldsymbol{v}|| \sin(\alpha).$$

Lause 3.9. *Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ vektoreita. Silloin niiden määräämän suunnikkaan pinta-ala on*

$$A = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||.$$

Todistus. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Kuvassa 3.2 on havainnollistettu vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräämän suunnikkaan pinta-alaa. Nyt $\boldsymbol{u}$ on suunnikkaan kanta, suunnikkaan korkeutta on puolestaan merkitty kirjaimella h. Silloin

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{||\boldsymbol{v}||} \Rightarrow h = \sin(\alpha) \cdot ||\boldsymbol{v}||.$$

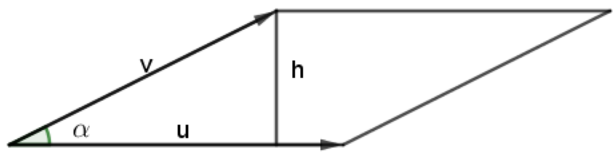
Nyt

$$A = ||\boldsymbol{u}||\, h = ||\boldsymbol{u}||\, ||\boldsymbol{v}|| \cdot \sin(\alpha) = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||,$$

siis

$$A = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||.$$

$\square$



Kuva 3.2. Vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräämä suunnikas.

Esimerkki 3.12. Olkoot $\boldsymbol{u} = (3,3,3)$ ja $\boldsymbol{v} = (2,4,2)$. Lasketaan vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräämän suunnikkaan pinta-ala. Nyt

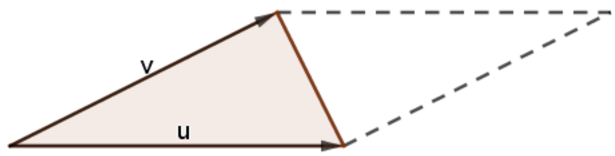
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{k}\\ &= (3\cdot 2 - 3\cdot 4)\boldsymbol{i} + (3\cdot 2 - 3\cdot 2)\boldsymbol{j} + (3\cdot 4 - 3\cdot 2)\boldsymbol{k}\\ &= -6\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}\\ &= -6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Siis

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49.$$

Huomautus. Kahden vektorin määräämän kolmion pinta-ala on puolet niiden määräämän suunnikkaan pinta-alasta kuvan 3.3 mukaisesti. Siis

$$A = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|.$$



Kuva 3.3. Vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräämä kolmio.

Lause 3.10. *Olkoot* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. *Silloin*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}.$$

Todistus. ” $\Rightarrow$ ” Olkoon $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ ja $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$. Tästä seuraa, että

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = 0.$$

Koska $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||\ \sin(\alpha)$ ja $||\boldsymbol{u}||, ||\boldsymbol{v}|| \neq 0$, niin täytyy olla $\sin(\alpha) = 0$. Eli $\alpha = 0$ tai $\alpha = \pi$. Tämä pätee, jos ja vain jos $\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}$.

"$\Leftarrow$"Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ ja $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$. Lauseen 3.4 perusteella $\alpha = 0$ tai $\alpha = \pi$, eli $\sin(\alpha) = \sin(\pi) = 0$. Nyt

$$||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}|| \sin \alpha = 0,$$

siis

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0.$$

Siispä

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}.$$

□

Skalaarikolmitulo

Määritelmä 3.9. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ vektoreita. Silloin vektoreiden niin kutsuttu skalaarikolmitulo on

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}).$$

Lause 3.11. *Olkoot* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *ja* $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$. *Silloin*

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ vektoreita. Nyt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.13. Olkoot $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1(-1-1) - 3(4-2) - 2(4-(-2)) \\
&= -2 - 6 - 12 \\
&= -20.
\end{aligned}$$

Lause 3.12. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ *vektoreita. Näiden vektoreiden määräämän suuntaissärmiön tilavuus on*

$$V = |\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|.$$

Todistus. Suuntaissärmiön pohjan pinta-ala on $A = ||\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}||$. Suuntaissärmiön korkeutta merkitään h:lla, tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.4. Suuntaissärmiön korkeus saadaan vektorin $\boldsymbol{u}$ projektion pituutena suuntaan $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ eli

$$h = ||proj_{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}|| = \frac{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|}{||\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}||}.$$

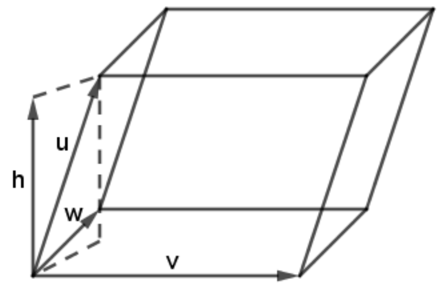
Näin ollen

$$V = Ah = ||\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|| \cdot \frac{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|}{||\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}||} = |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|.$$

Siis

$$V = |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|.$$

□



Kuva 3.4. Vektoreiden $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ määräämä suuntaissärmiö.

3.2 Matematiikan oppiminen

Tässä luvussa käsitellään matematiikan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä. Ensimmäiseksi analysoidaan vektoreiden oppimista ja tarkastellaan vektoreiden esiintymistä lukion opetussuunnitelman perusteissa. Tämän jälkeen käsitellään sähköisiä oppimisympäristöjä osana matematiikan opetusta ja oppimista. Lisäksi tarkastellaan oppimateriaalin vaikutusta oppimiseen sekä muita oppimiseen vaikuttavia tekijöitä. Lopuksi tutustutaan Wilsonin taksonomiaan.

3.2.1 Vektoreiden oppiminen ja opetussuunnitelma

Lukion opetussuunnitelman perusteet (2019) otetaan käyttöön vuonna 2021, lukion aloittaneilla opiskelijoilla. Lukiokoulutus perustuu perusopetuksen oppimäärälle ja sen tarkoitus on antaa yleiset ja monipuoliset jatko-opintovalmiudet. [20] Tässä kehittämistutkimuksessa luodaan oppimateriaalia uudistuvan opetussuunnitelman perusteiden mukaiselle kokonaan uudelle kurssille MAA10 3D-geometria (2op). Kurssi sisältää osittain päällekkäistä sisältöä nykyisen lukion opetussuunnitelman perusteiden (2015) kurssin MAA4 Vektorit kanssa. Lisäksi kuitenkin MAA10-kurssille tulee aivan uutta sisältöä, esimerkiksi ristitulon käsite.

Lukion opetussuunnitelman 2019 mukaan opiskeluympäristöjä tulee laajentaa yleisesti oppilaitosten ulkopuolelle hyödyntäen tieto- ja viestintäteknologiaa. Opiskelijaa pitäisi ohjata hyödyntämään erilaisia digitaalisia opiskeluympäristöjä, oppimateriaaleja ja työvälineitä tiedon hankintaan, käsittelyyn, arviointiin, tuottamiseen ja jakamiseen. Yksittäiselle opiskelijalle voidaan luoda esimerkiksi henkilökohtaisia oppimispolkuja tarjoamalla hänelle mahdollisuus suorittaa opintoja myös verkko-opiskeluna. Yksi matematiikan opiskelun tärkeistä tavoitteista on kehittyä hyödyntämään tietokoneohjelmistoja ja digitaalisia tiedonlähteitä oppimisessa, tutkimisessa ja ongelmanratkaisussa. Oppiaineen yleisissä tavoitteissa mainitaan myös, että oppilaan tulisi osata käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, ohjelmistoja ja tiedonlähteitä.[20]

Vektorin käsite tulee opiskelijalle ensimmäistä kertaa eteen lukion pitkässä matematiikassa opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaan kurssilla MAA4 Analyyttinen geometria ja vektorit (3op). Tältä kurssilta opiskelija saa perustiedot vektoreista, lisäksi tämä kurssi antaa pohjatiedot MAA10-kurssia varten. MAA10-kurssin pohjatietojen kannalta moduulin tärkeimpiä tavoitteita ovat:

- vektorikäsitteen ymmärtäminen ja perehtyminen vektorilaskennan perusteisiin,
- kaksiulotteisen koordinaatiston pisteiden, etäisyyksien ja kulmien tutkiminen vektoreiden avulla,
- tasogeometrian ongelmien ratkaiseminen geometrian avulla,
- ohjelmistojen käyttäminen käyrien ja vektoreiden tutkimisessa. [20]

MAA10 3D-geometrian kurssi on valtakunnallinen valinnainen opintojakso. Lukion oppimäärän tulee sisältää ainakin 20 opintopistettä valtakunnallisia valinnaisia opintojaksoja. Tämä koskee nuorten lukiokoulutusta. Kokonaisuudessaan nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen laajuus on 150 opintopistettä. Pitkän matematiikan valtakunnallisia opintoja on tarjolla yhteensä 3 moduulia. MAA10 3D-geometria -moduulin keskeisimpiä tavoitteita ovat:

- vektorilaskennan tuntemuksen syventäminen ja vektoreiden käyttäminen kolmiulotteisessa avaruudessa,
- xyz-koordinaatiston pisteiden, suorien ja tasojen tutkiminen vektoreiden avulla,
- avaruusgeometrian osaamisen vahvistaminen ääriarvosovellusten yhteydessä,
- kahden muuttujan funktioon tutustuminen,
- vektoreiden, suorien, tasojen ja pintojen havainnollistaminen vektorilaskentaohjelmistoja käyttäen.

Tässä kehittämistutkimuksessa luodaan oppimateriaalia tämän kurssin sisältöjen pohjalta, tosin materiaali ei sisällä kaikkia aihealueita, ajan käytöllisten haasteiden vuoksi.

3.2.2 Sähköiset oppimisympäristöt matematiikan oppimisessa

Suomesta on kehittynyt moderni tietoyhteiskunta ja yhä useampi ihminen käyttää päivittäin työssään tietotekniikkaa. Tämän vuoksi tietotekniikan osaamista pidetään nykyisin ennemmin itsestäänselvyytenä kuin poikkeuksena. On siis selvää, että digitalisaation vaikutukset ulottuvat yhteiskunnassa kaikkiin eri toimijoihin, tästä osansa saa myös koulutus. Tässä nopeasti muuttuvassa mediayhteiskunnassa teknologian kehitys vaikuttaa myös siihen, minkälaisena näemme koulun roolin lasten ja nuorten kasvattajana sekä millaiset oppimistavat ja oppimisympäristöt tähän suuntaan parhaiten johtavat. [26]

Teknologian käyttö matematiikan opetuksessa on lisääntynyt huomattavasti, sillä aikaisemmin matematiikassa on käytetty varsin vähän teknisiä apuvälineitä [26]. Verkko-oppimisympäristöjen kehitys ja käyttö opetuksessa ottivat suuren harppauksen www-selainten kehittymisen vuoksi, 1990-luvun puolen välin tienoilla. Tuolloin opettajat innostuivat rakentamaan laajojakin verkko-opintokokonaisuuksia. Kaupalliset oppimisalustat alkoivat yleistyä vuosituhannen lopulla, vaikkakin ne olivat tuolloin vielä melko kalliita. [6]

Digitalisoituminen on vaikuttanut sekä opettajien työvälineisiin että oppilaiden käyttämiin oppimisympäristöihin. Teknologian tarkoituksena on toimia, lasku- ja päättelytaidon kehityksen ohessa, oppilaalle apuvälineenä esimerkiksi laskemista tai piirtämistä vaativissa tehtävissä. Teknologian ansiosta matematiikan oppimisympäristöt ovat monipuolisempia ja tehokkaampia kuin aiemmin. Lisäksi oppilaan on mahdollista ymmärtää käsitteet syvällisemmin, sillä teknologian avulla matematiikan käsitteiden ja sääntöjen havainnollistaminen helpottuu. Tämä puolestaan voi lisätä tai ainakin ylläpitää oppilaiden kiinnostusta matematiikan oppimista kohtaan. Tehtävätyypit ovat muuttuneet teknologian vaikutuksesta, esimerkiksi ongelmalähtöinen tehtävänanto on yleistynyt. Verkko-oppiminen mahdollistaa opiskelun aikaan ja paikkaan katsomatta, vaikka koulu- ja oppilaitosverkosto onkin supistumaan päin. Oppilaiden on mahdollista etsiä tietoa opettajan ohjaamana, mutta tehtävien harjoitteleminen onnistuu hyvin myös omatoimisesti. Tietysti oppilaan tulee ottaa vastuu tiedon oikeellisuudesta, merkityksestä ja käyttökelpoisuudesta. [26]

Matematiikan ylioppilaskoe muuttui vuoden 2019 keväällä paperikokeesta sähköiseksi. Kokeen tarkoitus on kuitenkin edelleen sama: selvittää, onko opiskelija omaksunut lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot sekä saavuttanut lukion tavoitteiden mukaisen kypsyyden. Digitaalisessa kokeessa on mahdollista tuottaa erilaisia tehtäviä ja ratkaisutapoja aiempaan verrattuna. Digitaaliseen ylioppilaskokeeseen voi edelleen parhaiten valmistautua opiskelemalla monipuolisesti opetussuunnitelman mukaisia asoita. Jo vuosien 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien perusteiden mukaan tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen on tärkeä osa matemaattista osaamista ja näin ollen sen hallitsemisesta on hyötyä matematiikan ylioppilaskokeessa. [31]

Matematiikan ylioppilaskirjoituksissa kokelas saa kirjoittaa joko pitkän tai lyhyen oppimäärän mukaisen kokeen, riippumatta siitä, minkä oppimäärän kursseja on lukiossa suorittanut [32]. Nykyään molemmat kokeet suoritetaan sähköisesti ja niissä on yhteensä 13 tehtävää, joista enintään 10:een saa vastata. Molemmat kokeet sisältävät nykyisin A-osan ja B-osan. A-osassa kokelas ei saa käyttää symbolisia laskentaohjelmia, kuten TI-Nspire -laskinsovellusta tai GeoGebraa. B-osassa kokelas saa käyttää kaikkia koejärjestelmään sisältyviä ohjelmia. [30]

3.2.3 Oppimateriaalin ja muiden asioiden vaikutus oppimiseen

Oppijan aikaisemmalla tietämyksellä ja erityisesti tietämisen luonteella on hyvin olennainen rooli uusien asioiden oppimisessa, tutkimusten mukaan. Hyvin varhaisesta vaiheesta lähtien aiemmin opitun tiedon rakenteen ja uskomusten varaan kehitetään uutta tietoa. On myös todettu, että ihmisten on vaikeaa muuttaa vanhoja uskomuksiaan. [14] Edellytyksenä tarkoituksenmukaiselle oppimiselle on saada oppija aktiiviseksi toimijaksi, tällöin oppija pyrkii luomaan uutta tietoa, antamaan asioille merkityksiä ja oppimaan ongelmanratkaisua. Tällöin opiskelijan tulisi olla vuorovaikutuksessa opettajan, muiden oppilaiden ja fyysisen sekä kulttuurisen ympäristönsä kanssa. Edellytyksenä aktiiviselle oppimiselle on sellainen oppimisympäristö, jossa on mahdollista kokeilla omia ajatuksia, havaita niissä olevia ongelmia ja rakentaa tutkiskelemalla uusia tiedollisia rakenteita. [11] Olisi hyvä, jos oppimateriaali antaisi tilaa myöskin oppijan omalle ajattelulle, toiminnalle ja yhteisölliselle tiedonrakentelulle. Hyvä oppimateriaali tukee aktiivisuutta ja ohjaa työstämään tietoa eteenpäin .[22]

Oppimisaihioiden käytön ideana on oppimisen ja opetuksen tukeminen. Lisäksi toinen oppimisaihioajattelun lähtökohta on niin kutsuttu ekonomisuuden periaate, jolla tarkoitetaan materiaalin äärimmäistä hyödyntämistä. [11] Matematiikasta on tullut monen oppilaan mielestä ymmärrettävämpää ja näin ollen myös kiinnostavampaa, kun matematiikan käsitteiden, sääntöjen ja operaatioiden konkretisoiminen on yksinkertaistunut oppimisaihioiden yleistyessä [26]. Tehtyjen tutkimusten perusteella voidaan sanoa, että oppimisaihoiden avulla on mahdollista saavuttaa vähintään yhtä hyviä oppimistuloksia kuin perinteisten oppimateriaalien avulla. Kuitenkin on huomioitava, että perinteisen oppimateriaalin ja oppimisaihioiden ei tarvitse olla toisiaan poissulkevia, vaan ennemminkin toisiaan täydentäviä sekä oppimista ja opetusta rikastuttavia elementtejä. Tutkimustuloksista löytyykin viitteitä siitä, että oppimisaihioita ja perinteistä oppimateriaalia yhdistelemällä voidaan saavuttaa parempia oppimistuloksia kuin käyttämällä ainoastaan toista näistä opetusmateriaaleista. [11]

Tietotekniikasta puhuttaessa on otettava huomioon sen jatkuva ja nopea muuttuminen. Toisaalta kuitenkin keskeiset oppimista ja ymmärtämistä edistävät mekanismit pysyvät samoina, välittämättä siitä, minkälaista teknologiaa oppimisessa hyödynnetään [14]. Sähköisten oppimisympäristöjen käyttämisessä piilee myös omat vaaransa. Kun matemaattisia toimintoja ulkoistetaan yhä enenevässä määrin koneille, se voi aiheuttaa oppilaille puutteita matemaattiseen ymärrykseen. Oppilaat saattavat osata käyttää ohjelmia hyvin ja ulkopuolisen silmin näyttää, että oppilas osaa asian, mutta todellinen ymmärrys ilmiön takaa saattaa puuttua. Koska koulumatematiikan tulee perustua matemaattiseen ymmärrykseen, tulee opettajien miettiä hyvin tarkkaan, mitkä ovat sellaisia asioita, joita voidaan ulkoistaa koneille ja mitkä taas täytyy osata laskea "käsin". [26] Asioiden syvällinen ymmärtäminen ei todellakaan ole helppoa, usein kuitenkin oppimisesta puhuttaessa kiinnitetään huomiota nimenomaan ymmärtävään oppimiseen. Tarkasteltaessa teknologian käyttöä opetuksessa on syytä ottaa huomioon yksilön oma vastuu oman oppimisen ja ymmärtämisen prosessissa, sillä usein teknologiaan luotetaan liikaa, jolloin oppimisen vastuu saattaa siirtyä teknologian ja oppimisympäristön haltuun. [14]

Teknologian käyttö opetuksessa ei missään tapauksessa poista sitä tosiasiaa, että oppiminen vaatii oppijan omaa motivaatiota ja pohdiskelua omien tietojen ja taitojen kehittymisestä. Usein motivaatio jaetaan ulkoiseen ja sisäiseen motivaatioon. Ulkoisesti motivoitunut oppija opiskelee ainoastaan saadakseen palkinnon oppimisestaan, esimerkiksi hyvän arvosanan kokeesta, mutta tämä ei johda syvälliseen oppimiseen. Sisäisesti motivoitunut oppilas opiskelee oman mielenkiintonsa ohjaamana, eikä tavoittele mitään varsinaista palkintoa. Tietotekniikan suhde motivaatioon on kaksijakoinen. Toisaalta voidaan ajatella, että tietotekniikan käyttö itsessään motivoi oppilaita ja siinä samalla oppilas innostuu myöskin opiskeltavasta aiheesta. Toisaalta voidaan nähdä, että tietotekniikka on eräs väline kehittyneempien pedagogisten mallien toteutukselle, jolloin se voisi välillisesti antaa tukea oppilaan motivationaalisille prosesseille. Tieto- ja viestintätekniikkaa pitäisi siis käyttää välineenä oppimisen tavoitteiden saavuttamiselle, oppilaiden innostuksen puolestaan pitäisi lähteä muista asioista. Toisaalta motivaatiota pidetään yksilöllisenä asiana ja toisaalta siihen on mahdollista pyrkiä vaikuttamaan oppimistilanteen ja materiaalin suunnittelulla. Parhaimmillaan tietotekniikan avulla mahdollistetaan syvällinen oppiminen. Täytyy kuitenkin ottaa huomioon myös se, että kaikille oppilaille tietotekniikan käyttö ei välttämättä ole mieluisaa, se voi tuntua haastavalta tai omiin tavoitteisiin nähden sopimattomalta. [14]

Oppimateriaalien kehittämisen kannalta tietokäsitys on hyvin keskeinen käsite, koska oppimateriaali osaltaan muokkaa oppilaiden käsitystä tiedosta ja sen kanssa toimimisesta. Tietokäsitys on se tapa, millaisena tiedon ja tietämisen luonne nähdään jonkin oppimistapahtuman yhteydessä. Mikkilän tutkimuksen mukaan oppimis- ja tietokäsitykset ovat suomalaisissa oppikirjoissa enimmäkseen hyvin perinteisiä. Siis kirjoissa tarjotaan faktat ja niiden ulkoa opettelun perusteella suoritetaan tehtäviä. Tästä poikkeavia muita oppimistapoja on esimerkiksi tiedon arviointi, tiedon liittäminen muuhun tietoon tai osaamiseen. Myös digitaalinen oppimateriaali on tällä hetkellä vielä hyvin perinteisen tietokäsityksen mukaan tehtyä. [22]

3.2.4 Wilsonin taksonomia

Opiskelijan ajatteluprosessia on mahdollista arvioida hänen suorituksensa pohjalta. Tätä tarkoitusta varten on käytetty Wilsonin taksonomiaa tai sen perusteella luotuja muunnelmia niin kansallisissa kuin kansainvälisissäkin koulusaavutustesteissä (kuten Pisa-tutkimus) sekä tutkimuksissa. Wilson (1971) on luonut mallinsa Bloomin taksonomiaan perustuen, ja se on nimenomaan matemaattisten tehtävien luokitukseen luotu malli. Bloomin taksonomia sisältää kuusi pääluokkaa eli tasoa, hierarkkiset tasot ovat matalimmasta korkeimpaan seuraavat: tietäminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analyysi, synteesi ja evaluaatio. Myös Wilsonin (1971) malli on hierarkkinen ja sen neljä tasoa ovat laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analyysi. Nämä tasot voidaan jakaa edelleen alatasoiksi. Taulukossa 3.1 on esitetty Wilsonin mallin kognitiiviset tasot sekä näiden keskeiset piirteet, joita myös alatasoiksi kutsutaan. [28]

Laskutaito kognitiivisena tasona edellyttää ainoastaan tosiasioiden muistamisen. Tällä tasolla opiskelijalta ei edellytetä päätöksentekoa eikä monimutkaisten asioiden muistamista. Tällä tasolla myöskään algoritmia ei tarvitse osata valita tehtävään, vaan riittää osata noudattaa algoritmia. Eli käytännössä tulee osata käyttää tehtävään liittyviä elementtejä tiettyjen sääntöjen mukaan. [28]

Yleensä tehtävän ratkaisu vaatii sekä laskutaitoa että ymmärtämistä. Tämän vuoksi näiden tasojen välinen raja on keinotekoinen ja näin ollen vaikea erottaa. Ymmärtämisen tasolla opiskelijalta vaaditaan kykyä tehdä päätös siitä, kuuluuko tehtävä opiskelijan tunteman käsitteen alaisuuteen vai ei. Ymmärtämisen tason tehtävä edel-

Taulukko 3.1. Wilsonin mallin kognitiiviset tasot ja niiden keskeidet piirteet (alatasot) [28, s. 649]

Kognitiivinen taso	Keskeiset piirteet (alatasot)
LASKUTAITO	– yksinkertaiset muistamisharjoitukset sekä rutiininomaiset käsittelyharjoitukset – terminologian tunteminen – algoritmien käytön hallitseminen
YMMÄRTÄMINEN	– käsitteiden tietäminen – periaatteen, säännön tai yleistyksen tietäminen – matemaattisen rakenteen tietäminen – tehtävien eri osien muuntaminen muodosta toiseen ja menetelmällinen yleistäminen – tehtävän loogisuuden seuraaminen ja ymmärtäminen
SOVELTAMINEN	– rutiinitehtävän ratkaiseminen – vertailujen tekeminen – tietojen erotteleminen – mallien ja rakenneyhtäläisyyksien hyväksikäyttö
ANALYSOIMINEN	– ei-rutiinitehtävien ratkaiseminen – relaation löytäminen – todistuksen konstruointi – yleistyksen muodostaminen ja koettelu

lyttää opiskelijalta tehtävän ratkaisuun johtavaa kykyä noudattaa tiettyä ajatuksen kulkua.Tämän tason taitojen hallintaa edellyttävät myös matemaattisen väittelyn ja todistelun seuraaminen. [28]

Soveltamisen kognitiivisella tasolla opiskelijan tulee hallita useita tehtävän ratkaisuun johtavia toimintoja peräkkäin. Kuitenkin tällä tasolla uusiin ratkaisutilanteisiin opitun siirtovaikutus voi olla vähäinen, sillä tällä tasolla toiminnot voivat olla opittuja. Usein opiskelija tunnistaa ratkaisuperiaatteen jo ennen kuin saa ratkaisun tehtävään, sillä hän on aikaisemminkin ratkaissut vastaavan tyyppisiä tehtäviä. Opiskelija joutuu tekemään päätöksiä, jotka kuitenkin ovat rutiiniluonteisia tehtävän tutun rakenteen vuoksi. Opiskelijan täytyy pystyä paloittelemaan ongelmia ja yhdistelemään alaongelmia, jotka on saanut jo ratkaistua. [28]

Analysoinnin tason soveltamisen tasosta erottaa luovuus ja keksimisen kokemukset. Tällä tasolla esiintyy opitun siirtovaikutusta sisältöalueille, joilta opiskelija ei ole saanut aiemmin harjoitusta. Opiskelija joutuu erittelemään ongelman eri tavalla kuin aikaisemmin ja myöskin yhdistelemään saamansa osaratkaisut uudelleen, saadakseen koko ongelman ratkaistua. Tehtävien ratkaiseminen edellyttää usein uusien muuttujien tai käsitteiden havainnointia ja yhdistelemistä. Tällä osa-alueella tulee myöskin matemaattisten todistusten laatiminen, ei pelkästään niiden mieleenpalauttaminen tai toistaminen. Korkein taso, synteesi, on tässä mallisssa yhdistetty analysointitasoon, sillä niiden erottaminen toisistaan on usein hankalaa ja tulkinnanvaraista.

Koska tehtävien luokitteleminen yksiselitteisesti Wilsonin tasojen mukaisesti on hankalaa, on Jorma Joutsenlahti käyttänyt väitöskirjassaan (2005) vielä yksinkertaistetumpaa luokittelua. Tässä luokittelussa on kolme tasoa:

1. Laskutaito / Ymmärtäminen (LY-taso),
2. Ymmärtäminen / Soveltaminen (YS-taso),
3. Soveltaminen / Analyysi (SA-taso). [12]

Näiden tasojen mukaan voidaan luokitella tehtävien vaikeusastetta ja sitä ajatteluprosessia, jota tehtävän suorittaminen edellyttää. Tasolla 1, eli alimmalla tasolla, korostuu tosiasioiden muistaminen sekä proseduraalisen tiedon hallinta. Tasolla 2, eli keskimmäisellä tasolla, opiskelijan tulee hallita proseduureja ja kyetä siirtämään ja soveltamaan niitä vastaavanlaisiin tilanteisiin. Tasolla 3, eli korkeimmalla tasolla, vaaditaan ongelmanratkaisutehtäviin konseptuaalista tietoa ja strategiatietoa. Taulukossa 3.2 on esitetty matemaattisen ajatteluprosessin, Wilsonin kognitiivisten tasojen ja Joutsenlahden käyttämien tasojen yhteys. [12]

Taulukko 3.2. Wilsonin kognitiivisten tasojen ja Joutsenlahden tasojen välinen yhetys, sekä tasoja vastaava ajatteluprosessi. [12, s. 124]

Ajatteluprosessi	Wilsonin tasot	Joutsenlahden tasot
1. Tunnistaminen, mieleenpalauttaminen	1. Laskutaito (L)	Laskutaito/ Ymmärtäminen (LY)
2. Algoritminen ajattelu, yleistäminen	2. Ymmärtäminen (Y) 3. Soveltaminen (S)	Ymmärtäminen/ Soveltaminen (YS)
3. Reflektoiva ajattelu, avoin etsiminen	4. Analyysi (A)	Soveltaminen/ Analyysi (SA)

Tässä pro gradu -tutkielmassa hyödynnetään Joutsenlahden käyttämää yksinkertaistetumpaa luokittelua harjoitustehtävien luokittelussa.

3.3 Verkko-oppimisympäristön rakentaminen

Tässä luvussa käsitellään oppimisympäristöjen rakentamista erityisesti verkko-oppimisympäristöihin perehtyen. Lisäksi tässä luvussa käsitellään sitä, minkälainen on hyvä oppimisaihio ja minkälaisia piirteitä sellaisella on. Lopuksi käsitellään opetushallituksen työryhmän laatimia verkko-oppimateriaalin laatukriteereitä, joita käsitellään pedagogisen laadun, käytettävyyden, esteettömyyden ja tuotannon laadun näkökulmista.

3.3.1 Oppimisympäristön rakentaminen

Oppimateriaalit ovat tärkeässä roolissa puhuttaessa oppimisesta ja opiskelusta. Oppimateriaalien luokittelu ei ole helppoa, mutta yleisesti voidaan sanoa, että oppimateriaalia on kaikki sellainen aineisto, jota oppija käyttää oppimisprosessin aikana. [16] Verkko-oppimateriaalilla tarkoitetaan kaikkea verkossa saatavilla olevaa oppimateriaaliksi tarkoitettua sisältöä [21]. Oppimisympäristö voidaan käsittää tilana, yhteisönä tai toimintakäytäntönä, useimmiten kuitenkin oppimisympäristö on kaikkia näitä yhdessä. Oppimisympäristöllä voidaan katsoa olevan sosiaalisia, fyysisiä, teknisiä ja didaktisia ulottuvuuksia. Verkko-oppimisympäristöt voivat tuoda opetukseen tärkeän lisän, sillä verkko-oppimateriaalin avulla voidaan mahdollisesti ottaa erilaiset oppijat paremmin huomioon. [6] Oppimisaihio on yleisesti käytetty nimitys verkko-oppimateriaalista. Oppimisaihiolla tarkoitetaan yhden asiasisällön muodostamaa oppimateriaalikokonaisuutta. [16]

Nykyisin digitaalisen oppimateriaalin käyttö on tavallinen osa opetusta. Verkko-oppiminen voidaan käsittää laajimmillaan olevan kaikkea tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntävää oppimista, toisaalta sen voidaan käsittää myös suppeammin olevan yksittäistä verkko-opppimisalustaa hyödyntävää oppimista. [6] Verkko-oppimateriaaleja on tuotettu sekä kaupallisesti että harrastajapohjalta jo useiden vuosien ajan. Tästä huolimatta opettajilla voi olla ongelmana käyttökelpoisen opetusmateriaalin löytäminen. Tämä voi johtua myös siitä, että vaikka periaatteessa internet on täynnä kaikenlaista verkko-oppimateriaalia, ei opettajilla ole välttämättä aikaa tai kiinnostusta alkaa etsiä omiin tarkoitusperiinsä sopivaa materiaalia. [19] Jotta opettajat voisivat vaivattomasti käyttää verkko-oppimateriaaleja opetuksessaan, ensiarvoisen tärkeää olisi, että niitä olisi riittävästi saatavilla. [11].

Oppimisaihioiden toteutukselle ei ole asetettu erityisesti mitään vaadittavaa muotoa. Ne voivat olla esimerkiksi luettavia oppimateriaaleja, pelejä, tehtäviä tai jokin sekoitus erilaisia yhdistelmiä. Etuna oppimisaihioilla on hyvä jaettavuus ja niiden muokkaamisen helppous. [16] Oppimisaihioiden parhaita puolia ovat lisäksi helppo saatavuus ja kohtuullinen hinta tai ilmaisuus sekä helppokäyttöisyys. Valmis oppimateriaali helpottaa huomattavasti opettajan työtä ja pedagogisesti joustavaa materiaalia on helppo yhdistellä toisten materiaalien kanssa ja lisäksi ne ovat käytettävissä hyvin erilaisissa tilanteissa. Kuitenkin oppimisaihion sisältö ja toteutustapa vaikuttavat paljolti siihen, kuinka monipuolisesti käytettävä oppimisaihio on erilaisissa tilanteissa. [10]

Oppimisaihioilla ei ole myöskään mitään määriteltyä oikeaa kokoa, sekä pienillä että suurilla oppimisaihioilla on omat hyvät ja huonot puolensa. Pieniä aihioita on helpompi yhdistellä erilaisiksi kokonaisuuksiksi ja suuria voi olla todellisuudessa kätevämpi käyttää. [11] Monikäyttöisyys on yksi oppimisaihioiden monista eduista, ja olisi suotavaa, että yhtä oppimisaihiota voitaisiin käyttää useisiin eri tarkoituksiin. Yhdistelemällä erilaisia oppimisaihioita opettaja voi rakentaa sisällöltään ja tasoltaan erilaisia verkkokursseja. [16] Esimerkiksi pienten oppimisaihioiden avulla opettaja pystyy kokoamaan yksittäiselle oppilaalle oman, hänen tietojaan vastaavan oppimiskokonaisuuden [11]. Uudelleenkäytettävyys on oppimisaihiossa vaikea tavoite ja usein ajatellaankin, että pienentämällä oppimisaihion kokoa ja rajaamalla sen kohdetta uudelleen käytettävyys lisääntyy. Esimerkiksi kokonaisen kurssin suunnittelun sijaan käyttökelpoisempi voisi olla jokin sen osio. Toisaalta taas oppimiaihion pedagoginen käytettävyys voi heikentyä, jos oppimateriaali pienenee liikaa. Asiasisältö saattaakin jäädä vain pieneksi irralliseksi palaksi kokonaisuudesta, eikä oppimisaihio autakaan oppilasta ymmärtämään kokonaisuutta laajemmin. Tärkeä piirre oppimisaihiossa on se, että sitä voidaan joustavasti käyttää osana laajempia oppimisaihioiden kokonaisuuksia tai käyttää kokonaan erillisen materiaalin osana. Vaikka opetuksessa käytettäisiin oppimisaihioita, jää opettajalle kuitenkin suuri vastuu opetuksellisesta kokonaisuudesta, siis siitä missä kohtaa ja miten oppimisaihioita hyödynnetään opetuksen kannalta parhaalla mahdollisella tavalla. [10]

Oppimisaihion sisällön suunnittelu alkaa luonnollisesti aiheen rajaamisella, lisäksi on syytä miettiä aiheen käsittelytapaa. Oppimisaihion sisällön suunnittelussa aihetta tulisi lähestyä yleisestä näkökulmasta. On myös hyvin yleistä, että lähtökohdaksi otetaan kuitenkin opetussuunnitelma. Tällöin kohderyhmä, tavoite ja sisältö on valmiiksi määritelty. Tältä pohjalta rakennettua oppimisaihiota on vaikeaa hyödyntää muussa kuin alkuperäisessä tarkoituksessaan. Aihion käyttöalue on laajempi silloin, kun oppimisaihio on toteutettu yleisestä näkökulmasta. Verkko-oppimateriaalin tuotanto etenee ennakkosuunnittelun kautta toteutusvaiheeseen, testaukseen ja jakeluun. Laadukkaan verkko-oppimateriaalin luominen vaatii riittävästi aikaa, etenkin jos prosessi lähtee aivan nollasta liikkeelle. [16]

3.3.2 Millainen on hyvä oppimisaihio?

Hyvälle oppimisaihiolle on tyypillistä, että se rakentuu erillisenä osana ja että sitä voi käyttää ilman muita pakollisia osia [10]. Ihanteellisessa oppimisympäristössä erilaisia opiskelumuotoja, oppimistapoja sekä työskentelyvälineitä hyödynnetään monipuolisesti [6]. Verkko-oppimateriaalien suunnittelussa pitäisi ottaa huomioon pedagogiset periaatteet. Seuraavassa on listattu laadukkaan e-oppimateriaalin piirteitä tutkimuksien pohjalta:

- joustava käyttö oppilaan osaamisen tason, kiinnostuksen ja tarpeiden mukaan,
- yhteisöllisyyden ja pitkäkestoisen opiskelun tukeminen ja oppijan ajattelun aktivointi,
- opittavan ilmiön ydinasioihin keskittyminen,
- oppimisen taitojen kehittymisen tukeminen. [19]

Perkkilän, Joutsenlahden ja Sareniuksen (2018) mukaan Uno Jansson esitti vuonna 1927 seuraavia vaatimuksia hyvälle laskennon oppikirjalle. Seuraaviin kappaleisiin on kerätty näistä edelleen paikkansapitäviä vaatimuksia. Täytyy tosin huomioida, että nämä vaatimukset ovat kirjoitettu lähes 90 vuotta sitten, eli termejä voisi valita nykyisin hieman toisin, mutta ajatus on edelleen pysynyt samana. [23]

Janssonin mukaan hyvä oppikirja muun muassa sisältää kaiken kurssiin kuuluvan oppiaineksen metodillisesti järjestettynä. Nykyisinkin matematiikan hierarkkinen rakenne jo ohjaa tähän tavoitteeseen kaikkia oppimateriaaleja. Lisäksi Jansson näkyy korostaneen esimerkkien tärkeyttä, hänen mukaansa oppikirjan tulee sisältää tarpeellinen lukumäärä esimerkkejä, lisäksi esimerkkien tulee olla osaksi harjoitustehtäviä ja osaksi soveltavampia tehtäviä ja soveltavien esimerkkien joukossa tulee olla paljon kertausesimerkkejä eli sekalaisia laskuja. Nykyisin ajatellaan, että esimerkkejä ei kuitenkaan ole tarkoitus tehdä pelkästään malliksi, jota toistamalla saadaan ratkaisu, esimerkit on laadittu ponnahduslaudaksi omalle matemaattiselle ajattelulle. Ymmärtävän matematiikan oppimisen näkökulmasta kertaustehtävät vanhoista asioista uudessa kontekstissa ovat hyvin merkittäviä, tämä asia on jäänyt taka-alalle vuosikymmenten aikana. Esimerkkien tulisi vastata oppilaiden kehitysastetta ja ne on valittava niin, että oppilas tutustuu erilaisiin aloihin jokapäiväisessä elämässä. Oppilaiden kehitysasteen huomioiminen on tietysti myös nykyisin tärkeässä roolissa, ja se on hyvä lähtökohta myös oppimateriaalin tekijälle. [23]

Oppimateriaalissa tulisi ottaa huomioon monen tasoiset oppijat, parhaimmillaan oppimateriaalin avulla saadaan luotua jokaiselle oppilaalle sopivan haastavaa opetusta. Käytännönläheinen oppimateriaali nähdään nykyään etuna, se saattaa saada oppilaan mielenkiinnon ja uteliaisuuden heräämään aivan eri tavalla. Viimeisenä Jansson on maininnut, että oppikirjan tulisi saada aikaan tarpeellinen konsentraatio laskuopin ja muiden opetusaineiden välillä. Nykyisin oppiaineiden integrointi toisiinsa on kehittynyt pitkälle, se on kouluissa nykyisin arkipäivää. [23]

3.3.3 Verkko-oppimateriaalin laatukriteerit

Opetushallituksen työryhmä on laatinut verkko-oppimateriaalien laatukriteerit sekä peruskoulussa että toisella asteella käytettävälle verkko-oppimateriaalille. Opetushallituksen työryhmä on jakanut kriteerit neljään ryhmään, jotka ovat pedagoginen laatu, käytettävyys, esteettömyys ja tuotannon laatu. Laatukriteeristö on laadittu joustavaan käyttöön ja kaikki kriteerit eivät sovellu kaikkiin materiaaleihin. [21] Olenkin tähän koonnut kriteeristön pääkohdat sekä juuri minun oppimateriaaliini soveltuvia alakohtia. Tässä kappaleessa käydään läpi nämä neljä laatukriteeristöryhmää.

Käsitellään ensiksi pedagogisen laadun kriteerit. Pedagogisella laadulla tarkoitetaan lähinnä sitä, että oppimateriaali soveltuu opetuskäyttöön ja tukee opetusta. Alle on listattu neljä pääperiaatetta ja niiden alle varsinkin tässä tutkimuksessa huomioon otettavia tarkentavia alakohtia.

1. Verkko-oppimateriaalin tavoitteet ja luonne ilmaistaan selkeästi.

    - Verkko-oppimateriaalin tavoitteet, käyttötapa, laajuus, pohjatietovaatimukset sekä arviointitapa ilmaistaan selkeästi oppimateriaalissa tai metatiedoissa.

2. Verkko-oppimateriaali tukee kehittyneitä opiskelukäytänteitä.

- Verkko-oppimateriaalin tulee olla pedagogisesti joustava, oppimisen motivaatiota tukeva, ajattelua aktivoiva ja vaikeasti opittavien asioiden omaksumista tukeva. Lisäksi verkko-oppimateriaalin rakenteen tulee ohjata oppimista ja mahdollistaa aktiivinen vuorovaikutus.

3. Verkko-oppimateriaalin tieto on merkityksellistä ja se esitetään oppimista tukevalla tavalla.

    - Verkko-oppimateriaalissa esitettävän tiedon tulee olla merkityksellistä, riittävää, oikeellista, perusteltua, ajantasaista ja se tulee esittää oppijalle omaksuttavassa muodossa. Lisäksi verkko-oppimateriaalin tarkoitus on keskittyä opittavan ilmiön ydinasioihin ja auttaa oppijaa yhdistämään uutta tietoa omaan aikaisempaan tietoonsa.

4. Verkko-oppimateriaali tukee monipuolista arviointia.

    - Verkko-oppimateriaalin tulee ohjata monipuoliseen arviointiin ja opiskelun aikainen palaute pitäisi olla oppijaa ohjaavaa ja ymmärtämistä korostavaa. [21]

Käsitellään seuraavaksi verkko-oppimateriaalin käytettävyyttä. Käytettävyydellä tarkoitetaan käytön sujuvuutta ja helppoutta, tämän pitäisi olla koko ajan oppimateriaalin tekijällä mielessä. Käytettävyydellä tarkoitettaan muun muassa sitä, että verkko-oppimateriaali löytyy vaivattomasti ja se voidaan ottaa käyttöön helposti. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että verkko-oppimateriaali on käytettävissä yleisimmillä laitteilla ja materiaalissa on ilmoitettu, millä laitteella sitä on tarkoitus käyttää. Lisäksi verkko-oppimateriaalin tulee olla käytön laajuudesta ja määrästä riippumatta teknisesti toimintavakaa. Toisena pääkohtana käytettävyyden kriteereissä on verkko-oppimateriaalin käytön nopeus ja tehokkuus, jolla tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että olennainen tieto on nopeasti löydettävissä, liikkuminen verkko-oppimateriaalissa on sujuvaa ja verkkomateriaali on jaettu sopivan kokoisiin osiin. Kolmantena kohtana mainitaan, että verkko-oppimateriaalin tulee ohjata käyttäjää toimimaan oikein. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että verkko-oppimateriaalin perustoimintojen tulee olla niin helppoja, että niihin ei tarvita ohjeita. Lisäksi verkko-oppimateriaalin tulee ohjata oppijaa korjaamaan tekemänsä virheet ja käyttäjän tulee saada selkeää, johdonmukaista, oppimista tukevaa ja ohjaavaa palautetta, kun se on aineiston käytön kannalta relevanttia. Neljäntenä kohtana mainitaan että, verkkoliittymän tulee olla selkeä ja innostava. Tämän tarkoitus on ohjata oppimateriaalin tekijää kiinnittämään huomiota siihen, että visuaalinen ilme on tarkoituksenmukainen ja tukee hahmottamista. Myös oppimateriaalin toimivuus on huomioitava. [21]

Seuraavaksi käsitellään verkko-oppimateriaalin esteettömyyttä. Esteettömyydellä tarkoitetaan sitä, että verkko-oppimateriaali on erilaisten ihmisten käytettävissä. Esteettömän verkko-oppimateriaalin luominen on hyvin laaja-alainen tavoite, koska sillä tarkoitetan saavutettavuutta, käytettävyyttä ja ymmärrettävyyttä kaikille ihmisille heidän fyysisistä, psyykkisistä ja sosiaalisista ominaisuuksistaan riippumatta. Alle on listattu neljä pääkohtaa ja niiden alle muutamia alakohtia, jotka koskettavat parhaiten juuri tätä oppimateriaalia.

1. Verkko-oppimateriaalin sisältö on kaikkien saavutettavissa.
    - Värien käyttö, taustan ja tekstin välinen kontrasti, eri fonttikokojen käytön mahdollistaminen.
2. Verkko-oppimateriaalin käyttöliittymä on kaikkien käytettävissä.
    - Käyttöliittymää on mahdollista käyttää ilman hiirtä, vuorovaikutteisessa käytössä käyttönopeutta on mahdollista säätää, käyttöliittymä ei sisällä automaattisesti avautuvia ikkunoita.
3. Verkko-oppimateriaalin sisältö ja käyttöliittymä on helppo ymmärtää.
    - Käyttöliittymän kieli on käyttäjän hyvin osaamaa, kieli on niin yksinkertaista ja ymmärrettävää kuin esitettävän asian sisältö sallii, käyttöliittymä sallii kohtien ohittamisen.
4. Käytetyt tekniikat toimivat luotettavasti mahdollisimman monissa käyttömuodoissa.
    - Oppimateriaali on käytettävissä myös erikoisselaimissa ja poikkeavilla käyttöasetuksilla. [21]

Viimeisenä laatukriteerinä käsitellään verkko-oppimateriaalin tuotannon laatua. Laadukkaalla verkko-oppimateriaalin tuotannolla tarkoitetaan hallitusti toteutettua tuotantoprosessia, jota ohjaavat tavoitteet ja jonka työn jälki on ammattimaista. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi oppimateriaalin hallittua tuotantoa ja sitä, että tuotanto perustuu tiedollisiin, taidollisiin ja oppimista tukeviin tavoitteisiin. Käyttäjäryhmät, käyttäjien tarpeet ja käyttötilanteet on otettava huomioon. Lisäksi sisällöntuotannon ammattimaisuus ja verkko-oppimateriaalin turvallisuus ja tekninen toimivuus tulee varmistaa. [21]

3.4 GeoGebra

Opetuskäyttöön suunniteltu dynaaminen matematiikkaohjelma GeoGebra on saanut alkunsa osana Markus Hohenwarterin pro gradu -tutkielmaa vuosina 2001-2002, Salzburgin yliopistossa Itävallassa. Hohenwarter jatkoi ohjelmiston kehittämistä väitöskirjassaan Itävallan tiedeakatemian hänelle myöntämän stipendin tuella. Alkaen vuodesta 2006 Itävallan opetusministeriö on tukenut GeoGebraa, sen vapaan saatavuuden turvaamiseksi kouluissa ja yliopistoissa. Myöskin vuonna 2006 GeoGebra löysi tiensä Yhdysvaltoihin, missä sen kehitystä jatketaan Florida Atlantic yliopistossa. [8]

GeoGebra tarjoaa erinomaisen lisän matematiikan havainnollistamiseen, mutta on kuitenkin helppokäyttöinen. Tämän vuoksi GeoGebra on saavuttanut viime vuosien aikana suuren suosion matematiikan opettajien työvälineenä. [8] Perinteiseen paperille piirtämiseen verrattuna GeoGebra antaa etulyöntiaseman kuvioiden tutkimisessa, esimerkiksi tarkasteltaessa vektoreita [2].

GeoGebra on ilmainen avoimen lähdekoodin ohjelmisto, jota voi käyttää joko verkkoselaimella tai lataamalla ohjelman tietokoneelle. GeoGebra on saatavilla osoitteessa: www.geogebra.org. GeoGebraa voi käyttää ainoastaan opetusvälineenä tai sen avulla voi luoda interaktiivisia verkkosivuja. Erityisesti opetustarkoitukseen suunniteltu GeoGebra voi auttaa oppimisessa monin tavoin. GeoGebran yksi parhaista ominaisuuksista on se, että se on käännetty ainakin 25 eri kielelle, mukaan lukien suomen kielelle. [8]

3.4.1 GeoGebra opetuskäytössä

Tietokoneiden käyttö on on ottanut yhä suurempaa roolia matematiikan opetuksessa. Tämä on johtanut myös siihen, että esimerkiksi ylioppilaskirjoitukset ovat myös matematiikan osalta nykyisin sähköisiä. GeoGebraa saa käyttää matematiikan yo-kirjoituksissa, lukuunottamatta A-osiota [29]. Nykyisin voidaan sanoa, että teknologia on lähes välttämätöntä opettamisessa ja oppimisessa. GeoGebra on luotu auttamaan opiskelijoita ymmärtämään entistä paremmin matematiikkaa. GeoGebraa voidaan käyttää aktiiviseen ja ongelmakeskeiseen opetukseen niin kotona kuin koulussakin. [8]

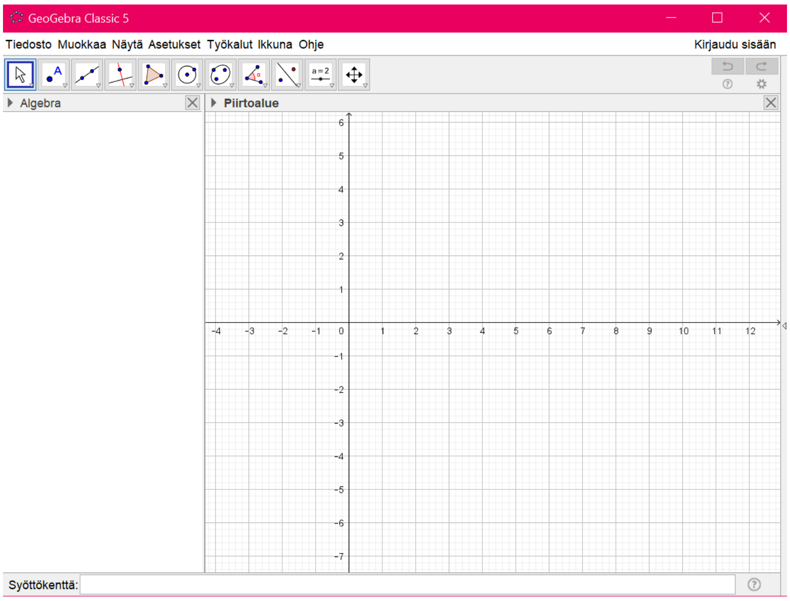
Tähän hetkeen mennessä GeoGebra on laajentunut monipuolista symbolista laskentaa käyttäväksi matematiikan yleisohjelmaksi. Ohjelman käyttäjä kokee olevansa aidossa vuorovaikutuksessa koneen kanssa tehtäviä suorittaessaan. Käyttäjä ikään kuin ”keskustelee” tietokoneen kanssa antaen käskyjä ja saaden välittömästi palautetta tehtävästä. [26] GeoGebran yhtenä parhaista puolista voidaan pitää sitä, että opettajan on helppo havainnollistaa opetettavaa matematiikan käsitettä sen avulla. Vielä tehokkaanmpana keinona voidaan pitää sitä, kun oppilaat tutkivat itse jotain matematiikan osa-aluetta GeoGebralla. GeoGebran kaltaisissa dynaamisissa matematiikkaohjelmissa tyypillistä on se, että oppilaan on mahdollista havaita, että jokin tietty ominaisuus pätee tietyille asioille. GeoGebran havainnollisuuden avulla voidaan vakuuttaa opiskelijat siitä, että jokin väite on tosi, todistamatta sitä. [9]

Opettajan on helppo myöskin mahdollistaa oppilaille tutkiva lähestymistapa. Esimerkiksi tehtävien asettelu voisi olla seuraava: aluksi kuvan tai taulukon laatiminen, sitten kuvan tai taulukon perusteella jonkin ominaisuuden kokeileminen, tämän jälkeen opiskelija voi tehdä ilmiöstä omia johtopäätöksiä, jonka jälkeen voi kokeilla päätelmän toimivuutta ja perustella kokeilun tulokset. Tietenkään perinteinen ja tutkiva lähestymistapa eivät sulje toisiaan pois, vaan ennemminkin täydentävät toisiaan. [26] Tutkivan matematiikan kannalta olisi todella tärkeää, että olisi olemassa valmiita opetuspaketteja, joita opettajat voisivat vapaasti hyödyntää. Materiaalin laadinta on aikaa vievää ja varsinkin vähäisellä opettajakokemuksella tehtävien muotoilu voi olla haastavaa. [2]

3.4.2 GeoGebran käyttäminen ja oppimateriaalin luominen

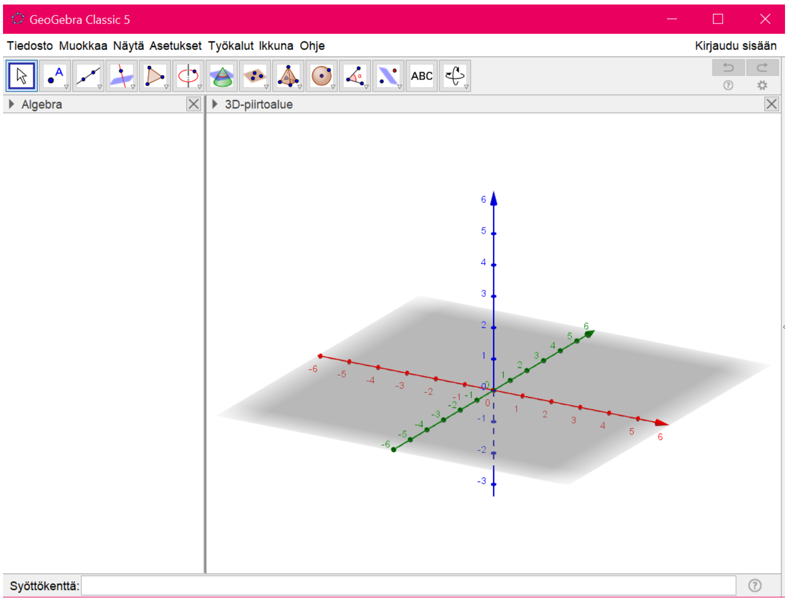
Tietokoneelle ladatun GeoGebra-ohjelmiston aloitusnäkymä on kuvassa 3.5. GeoGebran käytön aloittaminen on suhteellisen yksinkertaista kokeilemalla erilaisia toimintoja, suomenkielisyys mahdollistaa tämän nuoremmillekin opiskelijoille. Toisaalta osoitteessa www.geogebra.org on ohjesivu, joka tarjoaa neuvoja alkuun pääsemiseen ja opetusmateriaalin luomiseen [8]. Lisäksi internetistä löytyy melko paljon erilaisia ohjeita alkuun pääsemisen helpottamiseksi.

GeoGebrassa on erilaisia työskentelyalueita, kuten kaksiulotteinen ja kolmiulotteinen piirtoalue. Alueita voi käyttää samanaikaisesti tai esimerkiksi vain kolmiulotteista koordinaatistoa. Työskentelyalueita voi vaihtaa yläreunan Näytä-toiminnon



Kuva 3.5. GeoGebran aloitusnäkymä.

avulla. Kuvassa 3.6 näkyy kolmiulotteinen koordinaatisto GeoGebrassa. Kuvien 3.5 ja 3.6 yläreunassa näkyvien kuvakkeiden avulla voi käyttää GeoGebran erilaisia toimintoja. Viemällä hiiren kuvakkeiden päälle saa enemmän toimintoja, joista voi valita sen, mitä itse tarvitsee. Toimintoja on helppo käyttää, sillä viemällä hiiren kuvakkeen päälle saa näkyviin ohjeen, miten sitä tulee käyttää.



Kuva 3.6. GeoGebran aloitusnäkymän kolmiulotteinen alue.

Oppimateriaalia on helpoin luoda GeoGebran selainversiolla. Työkirjoihin voi lisätä esimerkiksi tekstiä, GeoGebra-appletteja, kysymyksiä, videoita, kuvia tai pdftiedostoja. GeoGebra-appletteihin voi lisäillä erilaisia toimintoja havainnollistamisen parantamiseksi, esimerkiksi liukusäätimiä tai erilaisia painikkeita. Luoduista työkirjoista voi rakentaa GeoGebra-kirjan, johon on koottu esimerkiksi työkirjoja yhden kurssin aihepiireistä. Julkaisun jälkeen työkirjoja ja kokonaisia GeoGebra-kirjoja voi kuka tahansa käydä harjoittelemassa. Tehdyt harjoitukset saa jäämään talteen ja opettajalle näkyviin käytettäessä GeoGebran ryhmäominaisuutta. Muussa tapauksessa tehtävät katoavat poistuttaessa kyseiseltä sivustolta.

4 Kehittämisprosessi

Tämän kehittämistutkimuksen tavoitteena on kehittää oppimateriaalia lukion MAA 10 3D-geometrian kurssille. Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2019) uuden version tullessa voimaan vuonna 2021 matematiikan kurssit on järjestetty ja rakennettu aivan uudella tavalla. Näin ollen vanhat oppimateriaalit eivät enää vastaa täysin uusien kurssien aihe-alueita. Tähän tarpeeseen tässä pro gradu -tutkielmassa kehitetään oppimateriaalia. Luvussa 4.1 kuvataan kehittämisprosessin lähtökohtia, tavoitteita ja tutkimusongelmia, jotka ohjaavat kehittämisprosessia. Luvussa 4.2 kuvataan pedagogisia ja matemaattisia ratkaisuja, joita oppimateriaalin luomisessa on tehty. Oppimateriaalin luomisen aikana tehdyt matemaattiset ja pedagogiset ratkaisut tähtäävät luvussa 4.1 määriteltyjen tavoitteiden saavuttamiseen. Luvussa 4.3 käsitellään oppimateriaalin tavoitteiden täyttämiseksi tehtyjä ratkaisuja muun muassa käytettävyyden, esteettömyyden ja tuotannon laadun kannalta.

4.1 Ongelma, lähtökohdat ja tavoitteet

Oppimateriaali on luotu kokonaan GeoGebraa käyttäen. Tässä verkko-oppimateriaalissa lähtökohdaksi otettiin se, että oppilas osaa perusasiat GeoGebran käytöstä, muiden pohjatietojen ohella. GeoGebra valikoitui oppimateriaalin alustaksi, sillä se tarjoaa erinomaisen lisän matematiikan havainnollistamiseen, mutta on kuitenkin helppokäyttöinen. Lukion opetussuunnitelman perusteet (2019) ohjasi myös oppimateriaalin alustan valinnassa. Siellä korostetaan, että opiskelijaa tulee ohjata hyödyntämään digitaalisia oppimateriaaleja ja opiskeluympäristöjä sekä matemaattisten ohjelmistojen käytön osaamiseen. [20] GeoGebrassa on monia hyviä ominaisuuksia ja esimerkiksi se on ylioppilaskirjoituksissa sallittu apuväline. Tässä tutkielmassa luodaan oppimateriaalia lukion MAA10 3D-geometrian kurssille. Luotu GeoGebra-kirja sisältää useita työkirjoja eri aihe-alueista. Oppimateriaali tuotetaan opetussuunnitelman (2019) pohjalta, joka otetaan käyttöön vuonna 2021. Materiaali ei tule kattamaan koko kurssin keskeisiä sisältöjä, koska se ei sovi työn laajuuteen. Tavoitteena on, että oppimateriaali kattaa seuraavat opetussuunnitelman perusteissa mainitut aihealueet:

- vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa,
- pistetulo,

- ristitulo,
- piste, suora ja taso avaruudessa,
- kulma avaruudessa.

Edellä mainituissa aihealueissa on käsitelty kaikki teoria-asiat ainakin jollakin tasolla, mutta tehtäviä ei ole koko kurssille tarpeeksi. Materiaalin voi suorittaa minimissään kuuden oppitunnin aikana. Tällöin materiaalin täytyy kuitenkin olla enemmänkin kertausta tai sitten opiskelijalle jää melko paljon itseopiskelua. Oppimateriaalia voi käyttää myös koko kurssin ajan, esimerkiksi kuuden viikon jakson kaikilla oppitunneilla, muun oppimateriaalin rinnalla.

Teoreettiseen viitekehykseeen (luku 3) peilaten oppimateriaalille on asetettu tavoitteita. Ensinnäkin, luotu verkko-oppimateriaali pyrkii noudattamaan opetushallituksen luomia laatukriteerejä, pedagogisen laadun, käytettävyyden, esteettömyyden ja tuotannon laadun osalta. Tavoitteena on luoda monipuolinen, motivoiva ja tehokas, syvälliseen ymmärtämiseen tähtäävä verkko-oppimateriaali. Oppimateriaalin monikäyttöisyys ja uudelleen käytettävyys on myöskin tärkeä tavoite. Tarkoituksena on luoda sellainen oppimateriaali, jossa jokainen kirjan sisältämä työkirja on erillinen kokonaisuus ja näin ollen irrotettavissa muusta materiaalista. Jokaisen työkirjan voi yhdistää osaksi muuta materiaalia. Täytyy kuitenkin huomioida, että oppilaalla olisi syytä olla hankittuna vastaavat pohjatiedot.

Asetettujen tavoitteiden pohjalta esiin nousivat seuraavat tutkimuskysymykset:

- Millaisia ominaisuuksia on motivoivalla, tehokkaalla ja syvälliseen ymmärtämiseen tähtäävällä matematiikan verkko-oppimisympäristöllä?
- Miten rakennan laadukkaan ja monikäyttöisen verkko-oppimateriaalin?
- Millaisia uusia mahdollisuuksia kehitetyt oppimisympäristöt tuovat mielekkään matematiikan opetuksen tukemiselle?

Verkko-oppimateriaalia lähdettiin luomaan näiden tavoitteiden ja tutkimuskysymysten pohjalta.

4.2 Pedagogiset ratkaisut

Pedagoginen laatu on yksi tärkeimmistä tätä opetusmateriaalia ohjaavista seikoista. Sen vuoksi oppimateriaalin suhteen tehtyjä ratkaisuja lähestytään opetushallituksen laatimien verkko-oppimateriaalin pedagogisten laatukriteerien pohjalta. Lisäksi tässä kappaleessa käsitellään muitakin tavoitteita tukevia pedagogisia ratkaisuja ja esimerkiksi verkko-oppimateriaalin laatukriteereitä tukevia ratkaisuja.

Opetushallituksen laatimassa pedagogisen laadun kriteereissä mainitaan verkko-oppimateriaalien tavoitteen ja luonteen ilmaiseminen selkeästi oppimateriaalin yhteydessä [21]. Tämän vuoksi tässä verkko-oppimateriaalissa materiaalin tavoitteet ja laajuus ilmaistaan oppimateriaalin saatetekstissä, lisäksi saatetekstissä on annettu ehdotus muutamasta materiaalille sopivasta käyttötavasta. Toki käyttötapoja on yhtä paljon kuin käyttäjiäkin ja kukin voi käyttää materiaalia parhaaksi katsomallaan tavalla. Oppimateriaalin esitietovaatimukset on kuvattu GeoGebra-kirjan johdannossa.

Pedagogisen laadun kriteereissä on mainittu, että laadukas verkko-oppimateriaali tukee kehittyneitä opiskelukäytäntäntöjä [21]. Tämän oppimateriaalin luomisessa onkin kiinnitetty huomiota sen monikäyttöisyyteen. Hyvälle oppimisaihiolle on tyypillistä, että se rakentuu erillisenä osana ja sitä voi käyttää ilman muita pakollisia osia [10]. Tämä oppimateriaali on pyritty luomaan niin, että sitä voi käyttää pedagogisesti joustavasti erilaisissa oppimistilanteissa. Jokainen työkirja on irrotettavissa omaksi kokonaisuudekseen. Opettaja voi tällöin itse valita sopivat työkirjat osaksi opetustaan. Opettaja voi esimerkiksi poimia vain yhden työkirjan tai jonkin erillisen osion, jonka teettää oppilaillaan, vaihtoehtoisesti opettaja voi käyttää materiaalia kokonaisuutena.

Opiskelijan on mahdollista työskennellä pitkäkestoisesti tämän oppimateriaalin parissa ja työskentelyä voi aina halutessaan jatkaa siitä kohtaa, mihin edelliskerralla jäi. Tällöin oppilaan täytyy luoda GeoGebra-tunnukset, jolloin tehtävien tallennus on mahdollista ja näin ollen oppilas voi jatkaa toisella kertaa siitä tehtävästä, johon jäi ja kaikki tehtävät tallentuvat automaattisesti. GeoGebran huonona puolena onkin se, että vastaukset eivät tallennu automaattisesti mihinkään, jollei opiskelijalla ole GeoGebraan omia tunnuksia. Tunnusten avulla myös opettajalla on mahdollisuus saada vastaukset itselleen ja hän voi arvioida tehtäviä. Tunnusten luominen on kuitenkin sähköpostin avulla helppoa ja nopeaa.

Verkko-oppimateriaali tarjoaa opiskelijoille mahdollisuuden aktiiviseen vuorovaikutukseen muiden oppilaiden kanssa. Oppilaan saaminen aktiiviseksi toimijaksi edellyttää vuorovaikutteisuuden lisäksi sellaista oppimisympäristöä, jossa opiskelija voi kokeilla omia ajatuksiaan ja havaita niissä olevia ongelmia [11]. Tämän oppimateriaalin työkirjat sisältävät joitain pohdintatehtäviä, joissa oppilaat ovat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Mikäli ei ole mahdollista olla vuorovaikutuksessa kenenkään kanssa, esimerkiksi jos suorittaa materiaalia kokonaan itsenäisesti, voi pohdintaa tehdä myös yksin. Verkko-oppimateriaali on myöskin oppilaan toimintaa ohjaavaa, oppilas saa palautetta tehtävistä ja sen perusteella hän voi pohtia tekemiään virheitä ja korjata tai tehdä tehtävän uudelleen. Tässä opetusmateriaalissa tavoitteena on aktivoida oppilaan ajattelua ja saada hänet tekemään omia pohdintojaan, mikä tapahtuu ainakin osittain juuri oppilasta aktivoivin kysymyksin.

Verkko-oppimateriaalin tarkoitus on tukea syvällistä ymmärtämistä ja huomioida etenkin vaikeasti ymmärrettävät asiat. Tähän tavoitteeseen pyritään pääsemään havainnollistavien GeoGebra-applettien avulla. Vektoreiden ominaisuudet ja toiminnot kolmiulotteisessa koordinaatistossa voivat olla vaikeasti ymmärrettävissä. Tässä oppimateriaalissa tilanteita on havainnollistettu GeoGebra-appleteilla, joiden avulla hankalia kolmiulotteisen koordinaatiston toimintoja pyritään havainnollistamaan mahdollisimman kattavasti.

Pedagogisen laadun kriteereissä mainitaan myös, että tiedon pitää olla merkityksellistä ja se pitää esittää oppimista tukevalla tavalla [21]. Kirjaa luotaessa on pyritty ottamaan huomioon oppijan lähtötaso ja tieto on koitettu valita siten, että se on kaikilta osin merkityksellistä. Tiedot esitetään loogisessa järjestyksessä ja tarkoituksena on auttaa oppilasta yhdistelemään vanhaa tietoa uuteen tietoon. Esitestauksen yksi tärkeimmistä tavoitteista on karsia asiavirheet pois materiaalista.

Pedagogisen laadun kriteereissä mainitaan lisäksi että verkko-oppimateriaalin tulee tukea monipuolista arviointia [21]. Tämä verkko-oppimateriaali ei sisällä varsinaisia ohjeita opettajalle arviointia ajatellen, mutta opettaja pystyy arvioimaan oppilaiden tuotoksia heidän ratkaisujensa perusteella. Opettajan on mahdollista saada oppilaiden vastaukset Ryhmät-toiminnon avulla. Suorittaessaan työkirjojen sisältämiä tehtäviä opiskelija saa palautetta suorituksistaan. Oikean vastauksen lisäksi opiskelija saa näkyviin ratkaisun vaiheet, ainakin soveltavissa tehtävissä. Näiden perusteella hän voi arvioida ratkaisunsa eri vaiheita ja sitä, missä kohtaa on tehnyt mahdollisen virheen.

Oppimateriaalin yhtenä tavoitteena oli syvälliseen ymmärtämiseen tähtäävän materiaalin luominen. Ymmärtävän matematiikan oppimisen näkökulmasta kertaustehtävät vanhoista asioista uudessa kontekstissa ovat hyvin merkittäviä [23]. Tässä kirjassa onkin käytetty kertaamista yhtenä syvällistä ymmärtämistä tukevana keinona. Tässä GeoGebra-kirjassa kertaamisella tarkoitetaan sitä, että esimerkiksi jossain työkirjassa pyydetään määrittelemään käsite, joka on käsitelty jo paljon aikaisemmin. Tällöin oppilas joutuu muistelemaan käsitteen myöskin toisessa yhteydessä. Kuten aiemmin todettiin, tässä kirjassa uusi tieto rakentuu aina aikaisemman päälle, joten näin halutaan myös saada opiskelija huomaamaan, että aikaisempaa käsitettä saatetaan tarvita muissakin tehtävissä. Lisäksi syvällistä ymmärtämistä ja oppilaan omaa ajattelua pyritään aktivoimaan siten, että myös aikaisemmin käsiteltyjä tehtäviä saattaa tulla vastaan uuden teoria-asian yhteydessä. Tällä pyritään saamaan oppilas huomaamaan, että tähän ei sovelletakaan juuri nyt käsiteltyä teoriaa, vaan jo sitä aiemmin käsiteltyä teoriaa. Parhaassa tapauksessa oppilas siis huomaa, että kyseisen tehtävän ratkaisuun tarvitaan edellisissä työkirjoissa käsiteltyjä asioita ja osaa käyttää niitä. Tarkoituksena on, että opiskelija pystyy koostamaan asioista selkeän kokonaiskuvan ja pystyy yhdistelemään asioita luovasti tehtävissä. Esimerkiksi tässä GeoGebra-kirjassa pyritään siihen, että aikaisemmissa työkirjoissa opittu käsite toistuu usein seuraavissakin työkirjoissa ja näin käsitteitä kerrataan jatkuvasti. Usein esimerkiksi pistetuloa laskettaessa kaikkia tarvittavia tietoja ei ole annettu valmiiksi, vaan opiskelijan tulee ensiksi itse muodostaa esimerkiksi tarvittavat vektorit tai laskea niiden pituudet.

Kirjan tehtävien taso vaihtelee tarkoituksella aika paljon, sillä joidenkin tehtävien tarkoituksena on pelkästään testata, onko opiskelija ymmärtänyt perusasiat ja osassa tehtävissä täytyy myös osata soveltaa teoria-asioita. Luodussa oppimateriaalissa käytetään Jorma Joutsenlahden luomaa, Wilsonin taksonomiaan perustuvaa, kolmiportaista tehtävien luokittelua. Ensimmäinen taso on laskutaito/ymmärtäminen, jossa opiskelijan tulisi muistaa tosiasiat ja hallita toiminnot, jotka suoritetaan aina samalla tavalla. Tasolla kaksi on ymmärtäminen/soveltaminen, tällöin opiskelijan tulee hallita toiminnot ja kyetä siirtämään ja soveltamaan niitä eri tilanteisiin. Kolmas taso on soveltaminen/analyysi, jossa vaaditaan ongelmaratkaisutehtäviin konseptuaalista tietoa ja strategiatietoa. [12] Teoriapohjaisiin työkirjoihin upotetut tehtävät ovat pääsääntöisesti tasojen 1 ja 2 tehtäviä. Varsinaisissa tehtäväosuuksissa on joukossa myös aina joitain tason 3 tehtäviä. Tehtäviin ei ole merkitty kuitenkaan niiden vaikeustasoa, jotta oppilaat eivät sen takia jätä tehtäviä tekemättä, vaan tarttuisivat jokaiseen tehtävään innolla ja saisivat kokea onnistumisen riemua.

Työkirjoista voidaan eritellä tietynlaisia tehtävätyyppejä, joilla on myös erilaisia tarkoituksia. Esimerkiksi useammassa kohdassa GeoGebra-appletin pohjalta pyydetään pohtimaan ratkaisuja joihinkin helpohkoihin kysymyksiin. Näiden tehtävien tarkoituksena on saada oppilas ymmärtämään teoriaosuus GeoGebra-appletin perusteella syvällisesti ja varmistaa, että oppilas on ymmärätnyt teorian oikein. Lisäksi työkirjoihin on upotettu pohdintatehtäviä, joiden tarkoituksena on saada oppilas pohtimaan esimerkiksi asioita, jotka oletetaan hänen jo osaavan. Tarkoitus on siis lähinnä palauttaa asioita mieleen kertauksenomaisesti.

Oppimateriaalissa on käytetty jonkin verran sellaisia esimerkkejä ja teoriaosuuksia, jotka oppilaan on mahdollista saada vaiheittain näkyviin. Tarkoituksena on, että oppija pohtisi ensin itse ratkaisua ja sitten vasta katsoisi sen vaihe vaiheelta läpi tai jos esiin tulee ongelmallinen kohta, voi siinä vaiheessa katsoa apua. Kuitenkin tarkoitus on aktivoida omaa pohdintaa ja saada opiskelijalle onnistumisen tunne. Lisäksi materiaalissa on käytetty sellaista teorianesitystyyppiä, jossa teorian saa vaiheittain näkyviin ja samalla myös kuvaan tulee lisää vaiheita. Asiaa havainnollistetaan siis samanaikaisesti sanallisesti ja appletilla kuvan kautta. Tämä opetuskeino tähtää syvälliseen ymmärtämiseen.

4.3 Käytettävyyden, esteettömyyden ja tuotannon laadun kannalta tehdyt keskeisimmät ratkaisut

Käytettävyyden kannalta tehtyjä ratkaisuja ovat esimerkiksi käytön sujuvuuteen ja helppouteen liittyvät ratkaisut, muun muassa antamalla selkeät ohjeet tehtävien suorittamiseen. Oppimateriaali on vapaasti saatavilla internetissä, jolloin mahdollisimman moni voi sitä käyttää. Materiaalin voi avata oikeastaan kaikilla laitteilla, joissa on internet-yhteys, toki käyttö on helpointa tietokoneella. Verkko-oppimateriaalin rakenne on yritetty tehdä mahdollisimman loogiseksi ja oppimista tukevaksi. Materiaali on yritetty jakaa sopiviin osiin, aina yksi osa-alue yhteen työkirjaan siten, että se ei olisi liian pitkä, eikä liian lyhyt. Toki työkirjat ovat eri pituisia. Verkko-oppimateriaali myös ohjaa oppilasta korjaamaan tekemänsä virheet. Työkirjojen tehtävien antamisen jälkeen opiskelija saa vastauksen, josta voi tarkistaa, menikö tehtävä oikein. Kaikissa perustehtävissä tätä ominaisuutta ei kuitenkaan ole. Verkko-oppimateriaalin visuaalinen ilme on hyvin pelkistetty, mutta se sisältää kuitenkin paljon hahmottamista tukevia GeoGebra-appletteja.

Verkko-oppimateriaalin esteettömyys on pyritty huomioimaan kirjoittamalla kaikki tekstit ja ohjeet niin selkeästi kuin mahdollista. Tekstissä on vältetty erikoisempien sanojen käyttöä, mikäli ei ole selitetty, mitä ne tarkoittavat. Värien käyttöä sekä taustan ja tekstin välistä kontrastia on pohdittu ja ilmeestä on tehty mahdollisimman yksinkertainen. Lisäksi esimerkiksi sellaisissa tehtävissä, joissa ratkaisun vaiheet tulevat automaattisesti tietyin väliajoin, on mahdollista nopeutta säätää, ja niin on myös tarpeen vaatiessa kehotettu tekemään. Oppimateriaalia voi käyttää myöskin ilman hiirtä.

Tuotannon laadun kannalta keskeisimpiä ratkaisuja on esimerkiksi tuotantoprosessin hallittu toteutus, jota ohjasivat selkeät tavoitteet. Lisäksi käyttäjien tarpeet ja käyttötilanteet on huomioitu mahdollisimman hyvin. Myös oppimateriaalin tekniseen toimivuuteen on kiinnitetty huomiota.

5 Kehittämistuotos

Kehittämisprossesin aikana luotiin verkko-oppimateriaalia, joka suoritetaan dynaamisella matematiikkaohjelmalla nimeltä GeoGebra. Tässä luvussa käsitellään kehittämisprosessin tulosta, jota kutsutaan kehittämistuotokseksi. Toteutettu oppimateriaali on julkaistu osoitteessa https://www.geogebra.org/m/zqrhvd7m, GeoGebra-kirjana. GeoGebra-kirja sisältää saatetekstin, jonka tarkoituksena on kertoa oppimateriaalin tarkoituksesta ja tavoitteista. Kirja sisältää myös johdannon, jonka tarkoituksena on kertoa kirjan käyttäjälle esitietovaatimuksista. Lisäksi kirja sisältää viisi opetussuunnitelman perusteiden 2019 pohjalta luotua päälukua, joista jokainen sisältää 5–13 työkirjaa. Työkirjat sisältävät teoria- ja tehtäväosuuksien lisäksi muun muassa GeoGebra-appletteja. Päälukujen aiheet ovat vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa (alaluku 5.2); pistetulo (alaluku 5.3); ristitulo (alaluku 5.4); piste, suora ja taso avaruudessa (alaluku 5.5) ja kulma avaruudessa (alaluku 5.6). Kuitenkin ensiksi alaluvussa 5.1 käydään läpi yleisiä asioita liittyen kirjan lukuihin. Kaikkiin kirjan päälukuihin sisältyy tehtävätyökirja ja Harjoittele GeoGebraa! -työkirja, joita luvussa 5.1 myöskin tarkastellaan. Suurimman osan kirjan asioista oletetaan olevan tuttuja kaksiulotteisessa koordinaatistossa, mutta kolmiulotteisen koordinaatiston oletetaan olevan kokonaan uusi asiakokonaisuus.

5.1 Yhteistä kirjan luvuissa

Jokainen kirjan viidestä pääluvusta sisältää toiseksi viimeisenä osiona työkirjan, johon on koottu pelkästään tehtäviä. Näihin työkirjoihin on koottu tehtäviä, jotka käsittelevät aiemmin koko pääluvussa tarkasteltuja asioita. Tehtävät ovat monipuolisia ja vaikeustasoltaan vaihtelevia. Lisäksi tehtäväosuuksiin on koottu joitain aiheeseen liittyviä vanhoja ylioppilaskoetehtäviä, joiden tarkoituksena on saada opiskelija huomaamaan, että vaikka tämä ei olekaan pakollinen kurssi, niin tämänkin aihealueen kysymyksiä on aikaisemmin ollut säännöllisesti ylioppilaskokeissa. Työkirjoissa ei todennäköisesti ole kokonaiselle kurssille tarpeeksi tehtäviä ja tarkoitus onkin, että opettaja voi oppilaan tason huomioiden antaa tälle lisää tehtäviä.

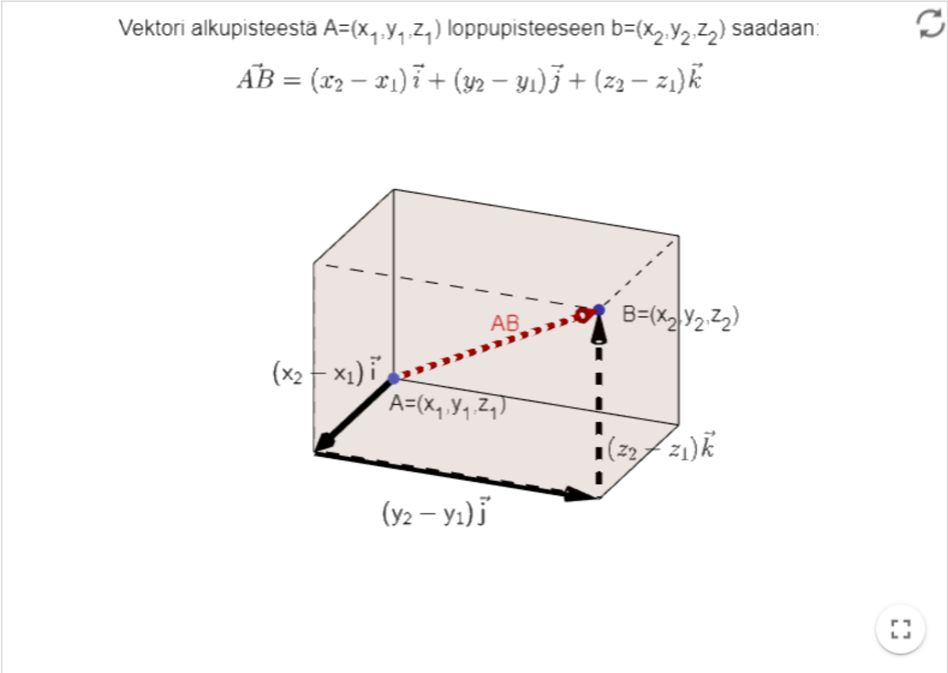
Jokaisen pääluvun viimeisenä työkirjana on Harjoittele GeoGebraa! -työkirja. Näissä työkirjoissa on tarkoitus harjoitella GeoGebran käyttöä kolmiulotteisessa koordinaatistossa. Työkirjaan on listattu perusasioita ja toimintoja, joista ajatellaan olevan eniten hyötyä opiskelijalle. Harjoittele GeoGebraa! -osuuksissa kehotetaan harjoittelemaan varsinkin sellaisia asioita, joita muissa työkirjoissa opeteltiin laskemaan. Tämä helpottaa tulosten tarkistamista GeoGebraa hyväksikäyttäen. Harjoittele GeoGebraa! -osuudet vaativat opettajalta ja opiskelijalta enemmän aktiivisuutta, sillä ne eivät sisällä niin paljon ohjeita, kuin oppilas mahdollisesti tarvitsee. Lisäksi tehtävät eivät sisällä ratkaisuja. Jokaisella oppilaalla on GeoGebran käytöstä myös erilaiset pohjatiedot riippuen siitä, kuinka paljon hänen opetuksessaan ohjelmistoa on aikaisemmin käytetty. Nämä työkirjat sisältävät vain raamit opetukselle, joten jokaisen opettajan on sen perusteella helpoin tehdä itse se ratkaisu, minkä verran tälläkin kurssilla on intoa ja resursseja käyttää GeoGebran harjoitteluun.

5.2 Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa

Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa -luku sisältää yhteensä seitsemän työkirjaa. Ensimmäinen työkirja nimeltään Kolmiulotteinen koordinaatisto, sisältää yleistä tutustumista kolmiulotteiseen koordinaatistoon. Työkirja sisältää teoriaosuuden, jossa käsitellään muun muassa avaruuden kantavektoreita. Lisäksi työkirjassa on GeoGebra-appletti, jonka tarkoitus on havainnollistaa kaksiulotteisen ja kolmiulotteisen koordinaatiston välisiä eroja. GeoGebra-applettiin pohjautuen työkirjassa on kysymys, johon on tarkoitus pohtia vastauksia applettia hyväksi käyttäen mahdollisesti parin kanssa. Työkirjan lopussa on seuraavaan aiheeseen, paikkavektoriin, viittaava pohdintakysymys. Tarkoitus on saada opiskelijat palauttamaan mieleensä paikkavektorin käsite kaksiulotteisessa koordinaatistossa ja laajentamaan ajatteluaan kolmiulotteiseen koordinaatistoon – jos mahdollista tämä on tarkoitus suorittaa ryhmissä tai pareittain.

Seuraavassa työkirjassa käsitellään paikkavektoria kolmiulotteisessa koordinaatistossa. Ensimmäisenä annetaan paikkavektorin määritelmä, jonka jälkeen kuvaan liittyvän kysymyksen avulla halutaan varmistaa, että jokainen oppija on ymmärtänyt määritelmän. Tämän jälkeen on tasojen 1 ja 2 tehtävät. Paikkavektori voidaan muodostaa myös toisella tavalla, tunnetun reitin perusteella. Tätä on havainnollistettu työkirjassa GeoGebra-appletin avulla, ja siihenkin liittyy ymmärtämisen varmistava tehtävä. Työkirjan lopussa on vielä yksi tason 2 tehtävä.

Seuraavassa työkirjassa käsitellään vektorin muodostamista. Vektorin muodostamiseen alkupisteen ja loppupisteen perusteella on annettu kaava, jota on havainnollistettu kuvassa 5.1 olevalla GeoGebra-appletilla. Kaavan käytöstä on esitetty myös yksinkertainen esimerkki. Lisäksi työkirjassa on GeoGebra-applettiin pohjautuvia tehtäviä, joissa tarvittavat tiedot pitää osata lukea appletista. Nämä tehtävät ovat pääosin tasoa 1. Työkirjan lopussa on vielä tason 2, ymmärtämistä ja soveltamista vaativa, laskutehtävä. Viimeiseksi on lisätty huomautus, liittyen vektoreiden yhdensuuntaisuuteen.



Kuva 5.1. GeoGebra-havainnollistus vektorin muodostamisesta.

Vektorin pituutta käsittelevässä työkirjassa käydään ensiksi läpi vektorin pituuden laskeminen, merkintätavat sekä yksikkövektorin käsite ja laskeminen. Tämän jälkeen on yksinkertainen esimerkki, jonka saa vaiheittain näkyviin. Seuraavaksi tulee GeoGebra-applettiin pohjautuvia, tason 1 tehtäviä, joissa ennen vektorin pituuden laskemista kerrataan vektorin muodostaminen. Viimeisenä kysymyksenä on, että tarkoittavatko $|\vec{u}+\vec{v}|$ ja $|\vec{u}|+|\vec{v}|$ samaa asiaa. Tässä vaiheessa kaikki tarvittavat pituudet on jo laskettu, ja tarkoitus on huomata sekä sanallisesti selittää, minkä vuoksi pituudet eivät ole samat. Tehtävässä kehotetaan myös piirtämään tilanteesta kuva, joka toivottavasti viimeistään selventää asian. Tämä on tason 2, ymmärtämistä ja soveltamista vaativa tehtävä.

Alun perin tähän kokonaisuuteen kuului myös kertauskappale. Sen aiheena olisi ollut esimerkiksi yksikkövektori, joka oletettiin tutuksi vektoreiden peruskurssilta. Kuitenkin esitestauksen perusteella tämä kappale poistettiin ja nämä asiat sisällytettiin muihin osuuksiin. Kertauskappale näin alkuvaiheessa olisi ollut turha ratkaisu.

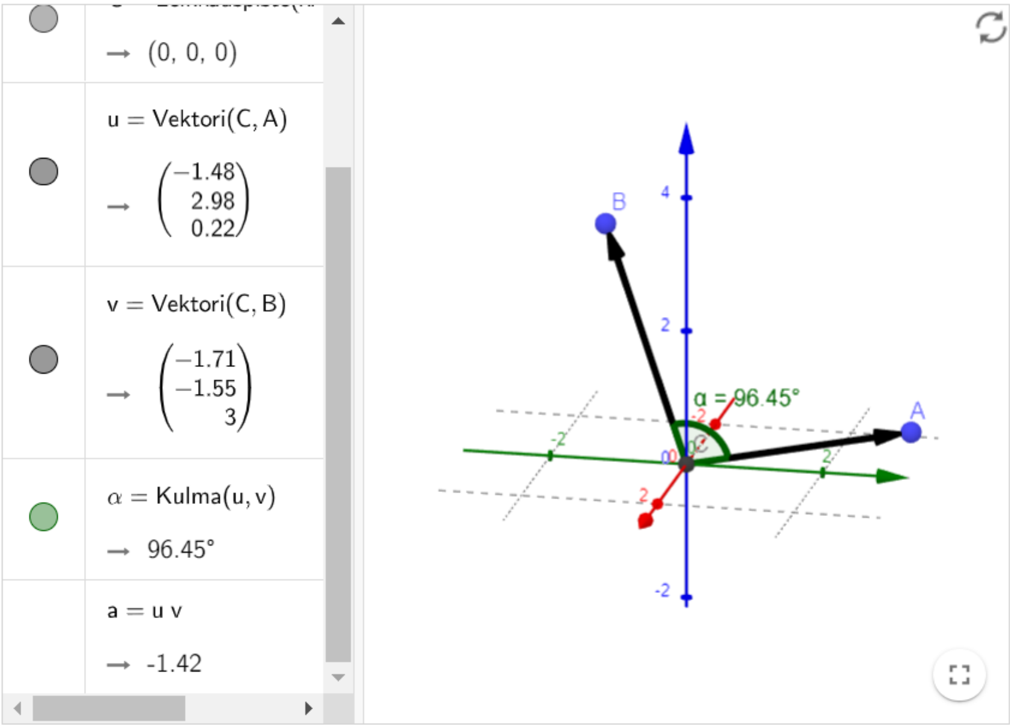
Koko tulevan oppimateriaalin kannalta on hyvin tärkeää, että jokainen oppija on ymmärtänyt perusasiat, sillä tieto rakentuu aiemmin opitun tiedon päälle. Tämän takia ko. asiat siirrettiin muihin kappaleisiin kertaukseksi.

5.3 Pistetulo

Oppimateriaalin kolmas luku käsittelee pistetuloa, se sisältää yhteensä kuusi työkirjaa. Luvun ensimmäisessä työkirjassa pyydetään ensiksi pohtimaan mitä asioita vektoreiden pistetulon avulla voidaan tutkia, olettaen että pistetulo on tuttu käsite kaksiulotteisesta koordinaatistosta. Lyhyen kertauksen jälkeen siirrytään pistetulon algebralliseen määritelmään. Määritelmää seuraa GeoGebra-applettiin pohjautuvia tehtäviä, joissa ensiksi kerrataan vektoreiden muodostaminen. Työkirjassa viimeisenä tehtävänä on pohtia vektoreiden välistä kulmaa ja kohtisuoruutta appletin perusteella. Seuraavassa työkirjassa tutustutaan tarkemmin vektoreiden väliseen kulmaan, mutta ennen sitä on tärkeää saada oppija pohtimaan itsenäisesti asiaa. Kääntelemällä applettia oppija voi huomata, että kuvan vektorit eivät ole kohtisuorassa. Koska aiemmin laskettiin vektoreiden pistetulo, voi oppija parhaassa tapauksessa näiden perusteella muistaa kohtisuoruuden ja pistetulon yhteyden kaksiulotteisessa koordinaatistossa, ja soveltaa sitä myös kolmiulotteiseen koordinaatistoon.

Luvun toisessa työkirjassa käsitellään siis vektoreiden välistä kulmaa ja pistetulon yhteyttä siihen. Aluksi oppija tutustuu GeoGebra-applettiin (kuva 5.2), jossa voi liikutella vektoreita samalla seuraten vektoreiden välisen kulman ja pistetulon arvon muutoksia. Tämän avulla on tarkoitus vastata muutamaan avoimeen kysymykseen ja muutamaan monivalintakysymykseen. Tarkoituksena on, että oppilas ymmärtää, mitkä asiat vaikuttavat pistetulon suuruuteen ja mikä on pistetulon ja vektoreiden välisen kulman yhteys. Työkirjan lopussa on vielä muutama tehtävä liittyen edellisessä työkirjassa käsiteltyyn pistetulon algebralliseen määritelmään ja vektoreiden kohtisuoruuteen.

Luvun kolmannessa työkirjassa päästään pistetulon geometriseen tulkintaan ja ensimmäisenä esitetäänkin määritelmä. Seuraavaksi oppija pääsee ratkaisemaan pistetulon vaiheittain ja ohjatusti käyttäen pistetulon geometrista määritelmää, tarvittavat tiedot oppijan tulee osata lukea annetusta GeoGebra-appletista. Tässä työkirjassa oppija ratkaisee pistetulon myöskin käyttäen aikaisemmin opeteltua algebrallista tapaa ja tarkoituksena on huomata, että tulos on sama tavasta riippumatta. Työkirjan lopussa sovelletaan vielä pistetulon geometrista tulkintaa vektoreiden välisen kulman



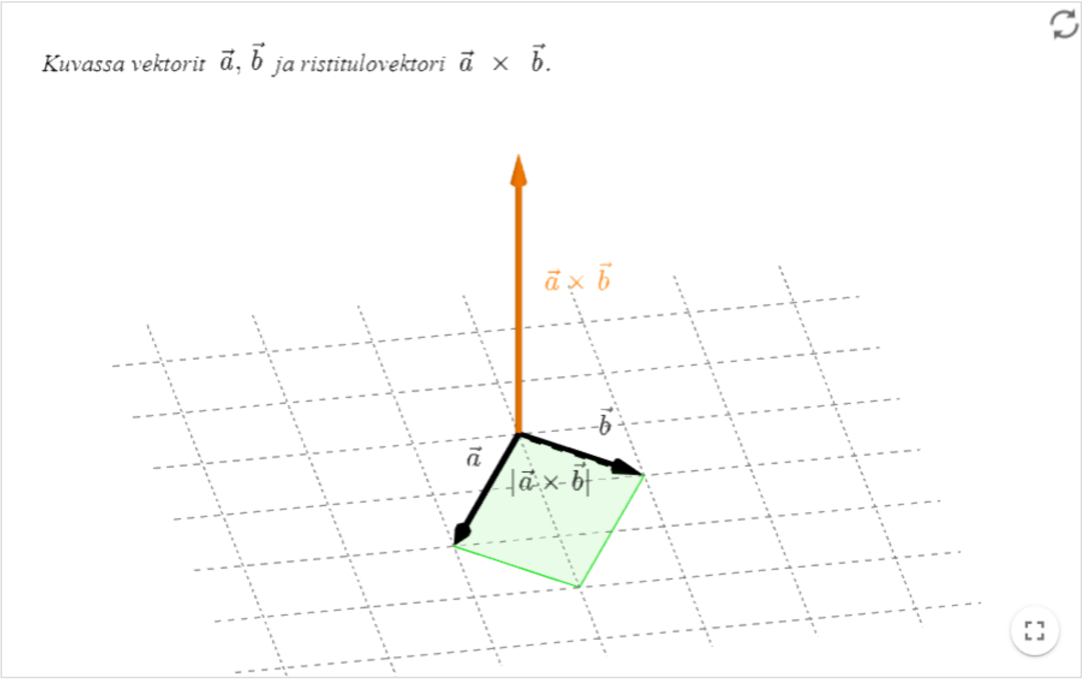
Kuva 5.2. Harjoitus vektoreiden välisen kulman ja pistetulon yhteydestä.

ratkaisemiseen ja oppija pääsee itse laskemaan vektoreiden välisen kulman.

Luvun seuraava työkirja on nimeltään Kolmio. Työkirja sisältää GeoGebra-applettiin liittyvän soveltavamman tehtävän. Appletissa on kolmen vektorin muodostama kolmio ja kaksi näistä vektoreista on annettu valmiiksi. Tehtävässä on tarkoitus laskea jokaisen kolmion kulman suuruus. Tehtävä on selvästi soveltavan tason tehtävä, sillä siinä ei voi vain suoraan käyttää opittua kulmakaavaa, vaan pitää ensinnäkin osata muodostaa puuttuva kolmas vektori. Tehtävään saa vastauksen lisäksi näkyviin ratkaisun vaiheet sen jälkeen, kun oppilas on antanut oman ratkaisunsa.

5.4 Ristitulo

Luku Ristitulo sisältää yhteensä kuusi työkirjaa. Ristitulon oletetaan olevan täysin uusi aihe kurssin oppijoille. Ensimmäisessä työkirjassa halutaan, että oppija palauttaa mieleensä pistetulon käsitteen, jotta pistetulo ja ristitulo eivät menisi käsitteinä sekaisin. Sen jälkeen työkirjassa määritellään sekä sanallisesti että kuvan avulla (kuva 5.3), mitä ristitulolla tarkoitetaan. Ensimmäisessä työkirjassa ei näin ollen päästä vielä ristitulon laskemiseen. Työkirja sisältää GeoGebra-applettiin liittyviä kysymyksiä, joiden tarkoitus on jälleen varmistaa oppijan ymmärrys.



Kuva 5.3. Havainnollistus ristitulosta.

Luvun toisessa työkirjassa päästään ristitulovektorin määrittämiseen, johon esitetään kaksi vaihtoehtoista tapaa. Ensimmäinen tapa on määritelmän perusteella ristitulovektorin määrittäminen, tähän on esimerkiksi luotu GeoGebra-appletti. Toinen tapa on määrittää ristitulovektori kahden erisuuntaisen vektorin determinantin avulla. Tästä tavasta on laadittu yksityiskohtainen esimerkki, sillä ratkaisu noudattaa aina samaa kaavaa. Yleisemmin, ainakin tässä oppimateriaalissa, käytetään tätä jälkimmäistä tapaa määrittää ristitulovektori. Työkirja sisältää muutaman tason 1 tehtävän ja kertaavan tehtävän vektorin pituuden laskemisesta.

Ristitulon ominaisuuksia käsittelevässä työkirjassa, luvun kolmas työkirja, tutustutaan vaihdantalakiin, osittelulakiin ja vektoreiden yhdensuuntaisuuteen. Oppija pääsee itse pohtimaan harjoitusten avulla, pitävätkö vaihdantalaki ja osittelulaki paikkansa. Käytännössä oppija ratkaisee tehtävän ja huomaa, pitääkö laki paikkansa vai ei. Tarkistamalla vastauksensa hän näkee oikean ratkaisun. Pistetulon ominaisuuksista ei ollut aikaisemmin erillistä työkirjaa, sillä ne oletettiin jo tunnetuiksi kaksiulotteisesta koordinaatistosta.

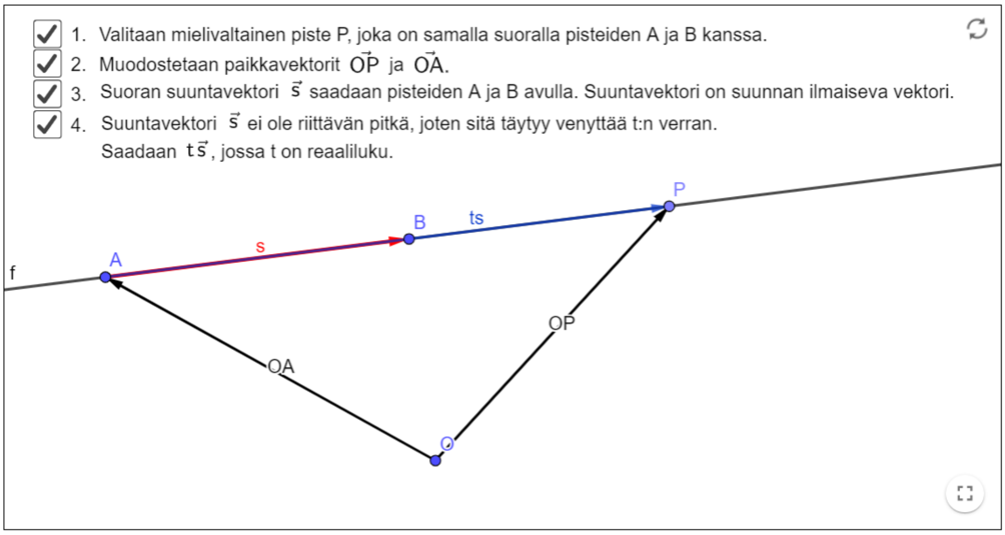
Tämä luku sisältää myöskin työkirjan nimeltä Kolmion pinta-ala. Nimensä mukaisesti siinä määritetään ristitulon avulla annetun kolmion pinta-ala. Avuksi on piirretty tilanteesta GeoGebra-appletti, johon on merkitty kolmion kärkipisteet. Mitään muita alkutietoja ei ole annettu. Tässä tehtävässä tarvitsee siis osata yhdistellä monia aikaisemmin opittuja asioita, aina vektorin muodostamisesta lähtien. Applettiin on kuitenkin lisätty tehtävää helpottamaan kaava, jolla kolmion pinta-ala saadaan ratkaistua. Kun opiskelija tarkistaa vastauksensa, saa hän näkyviin myös ratkaisun vaiheet, mikä helpottaa virheen löytämistä, jos ei heti kerralla saanut oikeaa vastausta.

5.5 Piste, suora ja taso avaruudessa

Neljäs luku käsittelee pistettä, suoraa ja tasoa kolmiulotteisessa koordinaatistossa. Luku on tämän oppimateriaalin luvuista kaikkein laajin, se sisältää yhteensä 13 työkirjaa. Ensimmäiset kaksi työkirjaa käsittelevät pisteitä kolmiulotteisessa avaruudessa. Ensimmäinen työkirja sisältää sekä monivalinta- että avoimia kysymyksiä, joihin on tarkoitus vastata GeoGebra-appletin pohjalta. Tämän työkirjan tarkoitus on olla johdantona ja kertauksena tulevia työkirjoja varten. Toisessa, pistettä avaruudessa käsittelevässä, työkirjassa keskitytään kahteen pisteeseen avaruudessa. Pisteiden välinen etäisyys ja kahden pisteen välisen janan keskipiste on käsitelty esimerkein. Viimeisenä työkirjassa on tason 1 tehtävä.

Seuraavat kolme työkirjaa käsittelevät suoraa avaruudessa. Suorien käsittely avaruudessa aloitetaan esittämällä ne tavat, joilla suora voidaan määritellä yksiselitteisesti avaruudessa. Tämän jälkeen siirrytään suoran vektorimuotoiseen yhtälöön, jota on havainnollistettu GeoGebra-appletilla. Vektorimuotoisen yhtälön käsittelyn ja havainnollistuksen saa vaiheittain näkyviin GeoGebra-appletissa haluamassaan tahdissa, kuvan 5.4 mukaisesti. Teoriaosuuden jälkeen on muutama tason 1 tehtävä. Seuraava työkirja käsittelee suoran parametrimuotoista yhtälöä. Työkirjassa on teorian jälkeen heti tason 1 tehtävä. Tämän jälkeen on tason 2 tehtävä, joka yhdistää edellisissä työkirjoissa olleita teoria-asioita. Viimeisessä suoriin liittyvässä työkirjassa käsitellään useita suoria avaruudessa ja sitä, kuinka ne voivat sijaita toisiinsa nähden. Tässä työkirjassa tehtävätyyppinä on jälleen nopeisiin, melko helppoihin kysymyksiin vastaaminen GeoGebra-appletin pohjalta.

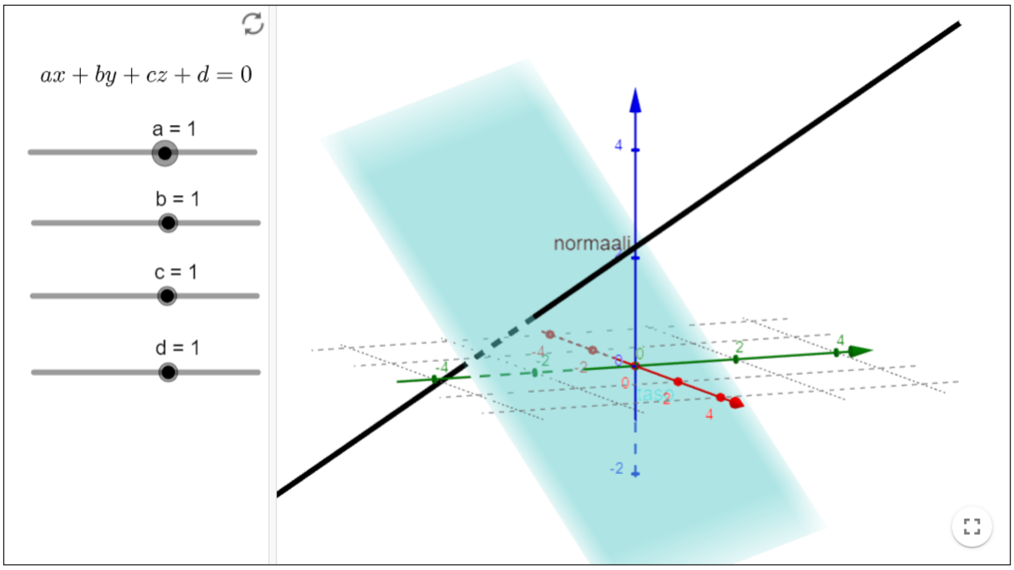
Luvun neljä seuraavaa työkirjaa käsittelevät tasoa avaruudessa. Myös tasojen käsitteleminen aloitetaan siitä, millä tavoilla taso voidaan määritellä kolmiulotteisessa avaruudessa yksikäsitteisesti. Tapoja on neljä ja kutakin on havainnollistettu omalla GeoGebra-appletillaan. Seuraavassa työkirjassa käsiteltävää tason vektoriyhtälöä havainnollistetaan kahdella erilaisella GeoGebra-appletilla. Ensimmäisessä kuvataan tilannetta samaan tyyliin kuin suoran vektorimuotoisen yhtälön kohdalla, toisessa appletissa tilanne on piirretty oikeaan kolmiulotteiseen koordinaatistoon, ja tarkoi-



Kuva 5.4. Suoran vektorimuotoista yhtälöä havainnollistava GeoGebra-appletti.

tuksena on, että opiskelija voi pyöritellä applettia ja ymmärtää, millainen tilanne on todellisuudessa. Työkirjassa kehotetaan pohtimaan suoran ja tason vektorimuotoisten yhtälöiden eroja ja sitä mistä erot johtuvat. Tämä pyrkii saamaan opppijan ajattelemaan itsenäisesti ja keksimään ratkaisu itse. Työkirja sisältää yhden tason 1 tehtävän. Tason koordinaatti- ja normaaliyhtälöä käsittelevässä työkirjassa teorian jälkeen havainnollistetaan tason yhtälön kertoimien vaikutuksia GeoGebra-appletin avulla. Kuvassa 5.5 näkyvän GeoGebra-appletin liukusäätimiä siirtelemällä oppilas voi tutkia, mihin kertoimet a, b, c ja d vaikuttavat. Tämän jälkeen työkirjassa on yksi tason 1 tehtävä normaaliyhtälön muodostamisesta. Työkirjassa on vielä huomio liittyen normaalivektoria vastaan kohtisuorista tasoista ja tähän liittyen tehtävä, jossa kehotetaan käyttämään kuvassa 5.5 näkyvää applettia hyväksi. Seuraavassa työkirjassa olevaa tason parametriesitystä lähestytään lyhyen teorian ja esimerkkitehtävän avulla, jonka ratkaisu ei ole heti näkyvissä. Tässä työkirjassa on lisäksi muutama tasoihin liittyvä tehtävä, yksi tason 1 tehtävä ja kaksi tason 2 tehtävää.

Tämän luvun viimeiset teoriaan pohjautuvat työkirjat käsittelevät sekä suoria että tasoja avaruudessa. Ensiksi käsitellään tason ja suorien sijaintia avaruudessa toisiinsa nähden, jota harjoitellaan GeoGebra-appletin avulla vastattavilla monivalintakysymyksillä. Seuraavassa työkirjassa käsitellään suorien ja tasojen leikkauspisteitä. Kahden suoran välinen leikkauspiste on käsitelty vaiheittain esiin tulevan esimerkin avulla, jonka jälkeen on vastaava harjoitustehtävä. Suoran ja tason leikkauspistettä lähestytään kertaamalla ensiksi suoran ja tason yhtälöiden esitysmuodot. Se, mi-

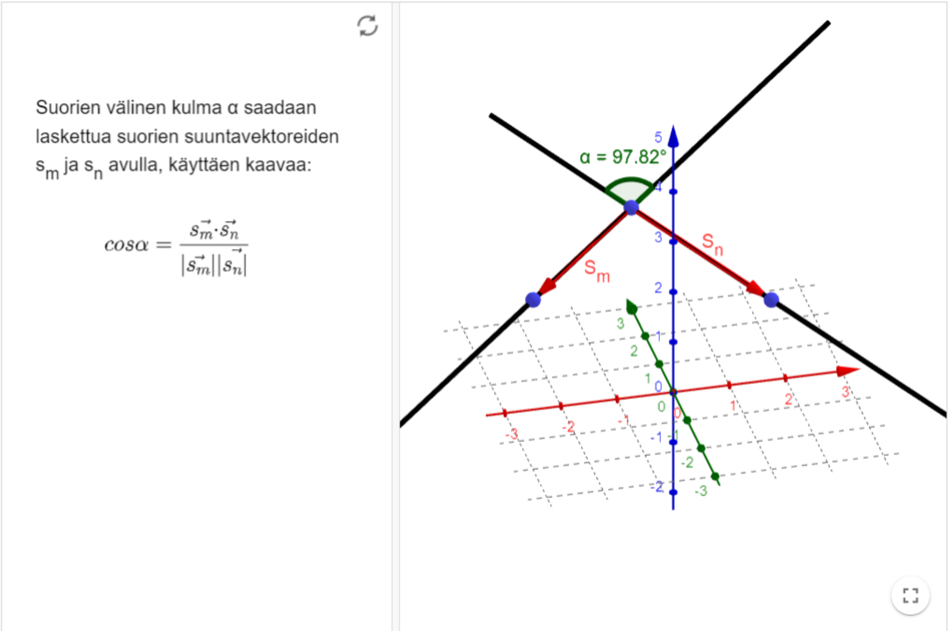


Kuva 5.5. Havainnollistus tason normaalimuotoisen yhtälön kerrointen vaikutuksesta tasoon.

ten suoran ja tason leikkauspiste kannattaa ratkaista, riippuu siitä, missä muodossa suoran ja tason yhtälöt on annettu. Eri ratkaisutavoista ei ole annettu suoria esimerkkejä, vaan on tarkoitus, että opiskelija luo itse itselleen esimerkit työkirjasta löytyvien ohjeiden mukaisesti. Tasojen leikkaussuoran määrittämisestä puolestaan on perinteiseen tyyliin annettu esimerkki ja sen jälkeen on tason 1 harjoitustehtävä.

5.6 Kulma avaruudessa

Luku Kulma avaruudessa käsittelee kahden suoran, suoran ja tason ja kahden tason välistä kulmaa, joista jokaisesta on oma työkirjansa. Yhteensä luku käsittää 5 työkirjaa. Suorien välinen kulma voidaan laskea samalla vektoreiden välisen kulman kaavalla, jota jo opittiinkin käyttämään. Tämän vuoksi kahden suoran välistä kulmaa käsittelevä työkirja alkaa kertauskysymyksillä, joiden avulla oppija palauttaa mieleensä asioita, joista on hyötyä tässä luvussa. Lisäksi tämä työkirja sisältää teoriaosan, suorien välistä kulmaa havainnollistavan GeoGebra-appletin (kuva 5.6) ja siihen liittyviä tasojen 1 ja 2 tehtäviä, joihin sisältyy myös aikaisempien asioiden kertausta.



Kuva 5.6. GeoGebra-appletti suorien välisestä kulmasta.

Suoran ja tason välistä kulmaa käsittelevässä työkirjassa on teorian jälkeen GeoGebra-applettiin liittyvä esimerkki. Työkirjan lopussa on tasojen 1 ja 2 harjoitustehtävät. Kahden tason tai tarkemmin niiden normaalien välistä kulmaa on myöskin havainnollistettu GeoGebra-appletilla, johon liittyen on tason 1 harjoitustehtävä. Työkirjan lopussa on vielä tason 2 tehtävä.

6 Tutkimus

Useimmiten kehittämistutkimuksessa kehittämistuotoksen valmistuttua sitä kokeillaan todellisessa ympäristössä. Näin tässäkin kehittämistutkimuksessa tehtiin. Ennen varsinaista kokeilua oppimateriaalille suoritettiin esitarkastus, jossa Tampereen yliopiston aineenopettajaopiskelijat tarkastivat materiaalin mahdollisten asiavirheiden ja epäloogisuuksien karsimiseksi. Esitarkastuksesta lisää luvussa 6.1. Tämän jälkeen suoritettiin oppimateriaalin kokeilu Tampereen teknillisen lukion MAA 4 -kurssilla. Saatujen tulosten – kommenttien ja parannusehdotusten – perusteella oppimateriaalia paranneltiin. Luvussa 6.2 tarkastellaan tutkimusasetelmaa eli käytännössä sitä, miten tutkimus toteutetaan. Luvussa 6.3 analysoidaan tutkimuksen luotettavuutta. Luvussa 6.4 esitetään tutkimuksen tulokset ja jatkokehittämisen aikana kirjaan tehdyt muutokset. Luvussa 6.5 esitetään jatkotutkimusmahdollisuuksia, joita on mahdollisuus tehdä tulevaisuudessa.

6.1 Esitarkastus

Luomalleni opetusmateriaalille suoritettiin siis esitarkastus ennen kokeilua todellisessa ympäristössä. Esitarkastuksen suorittivat matematiikan aineenopettajaopiskelijat, jotka suorittavat tänä vuonna aineenopettajan pedagogisia opintoja. Esitarkastus toteutettiin käytännössä siten, että aineenopettajaopiskelijat jakaantuivat suunnilleen viiden henkilön ryhmiin, ja jokainen ryhmä kävi läpi aina yhden opetusmateriaalin viidestä aihealueesta. Aihealueet olivat luvussa 5 esitellyt kirjan alaluvut: vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa; pistetulo; ristitulo; piste, suora ja taso avaruudessa sekä kulma avaruudessa. Jokainen ryhmä tutustui ensiksi kirjan johdantoon ja saatetekstiin, jotta kaikille olisi selvää, mikä on kirjan tavoite ja tarkoitus sekä mitä pohjatietoja opiskelijoilla oletetaan olevan.

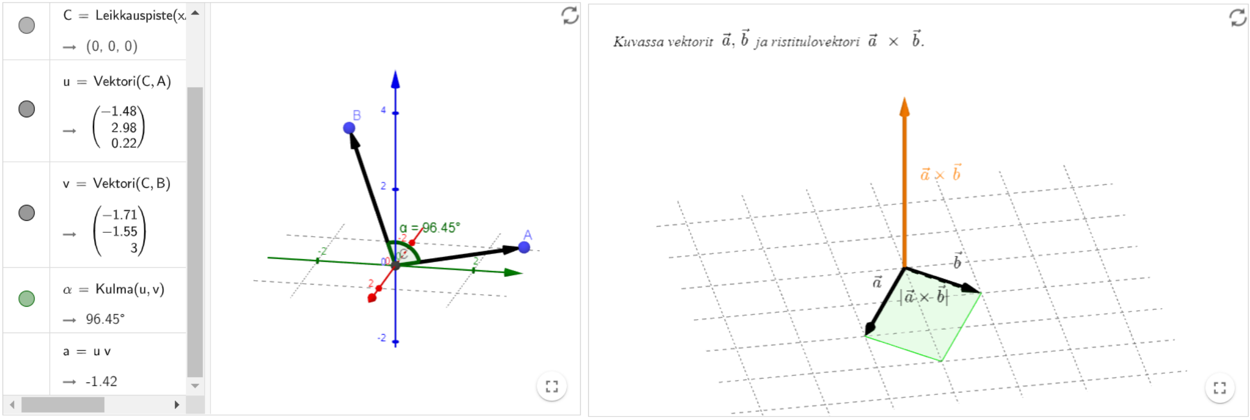
Esitarkastuksen tarkoitus oli ennen kaikkea saada toisten opettajaopiskelijoiden mielipide materiaalista. Tarkastajia pyydettiin ottamaan kantaa tehtävien vaikeustasoon ja monipuolisuuteen, mahdollisiin asiavirheisiin, ratkaisujen laajuuteen sekä siihen, täyttääkö oppimateriaali saatetekstissä mainitut tavoitteet. Lisäksi huomiota toivottiin kiinnitettävän tehtävien ymmärrettävyyteen, lisäesimerkkien tarpeeseen sekä siihen, onko teoria-asiat käsitelty sopivalla laajuudella. Sain tarkastusryhmiltä kattavat kirjalliset palautteet. Palautteiden avulla huomasin sellaisia virheitä ja epäkohtia, jotka muutoin olisivat jäänyt huomaamatta. Vastausten perusteella muokkailin ja parantelin luomaani oppimateriaalia. Näitä muutoksia käydään läpi tarkemmin seuraavaksi.

Yleisimpiä asioita, joista sain kommentteja, olivat kirjoitusvirheet sekä tekstin selkeyteen liittyvät epäkohdat. Kirjoitusvirheet korjattiin välittömästi ja useiden tehtävien tehtävänantoja muokattiin täsmällisemmiksi ja selkeämmiksi. Tehtävänannoista pyrittiin saamaan selkeämpiä esimerkiksi muuttamalla kirjoitusasua tai sanajärjestystä. Lisäksi joitain tehtävänantoja tiivistettiin eli niistä poistettiin ylimääräisiä ymmärrystä heikentäviä osia. Työkirjoihin sisältyi myös muutama asiavirhe, jotka korjattiin.

Esimerkkeihin ja teoriaosuuksiin liittyen ehdotettiin vaihtoehtoisten laskutapojen esittämistä ja jonkin verran kaivattiin lisäesimerkkejä. Tärkeinä näkökohtina nostettiin esille myöskin ratkaisun vaiheisiin tai ratkaisuihin liittyvät epätäsmällisyydet tai virheelliset vastaukset. Ne korjattiin välittömästi. Lisäksi ratkaisun vaiheita selkeytettiin ja laajennettiin sekä muokattiin kirjoitusasua selkeämmäksi. Esimerkkejä ja vaihtoehtoisia laskutapoja lisättiin tärkeimpiin kohtiin.

Yksi tärkeimmistä huomioista liittyi GeoGebra-applettien toimivuuteen, tarkemmin eri elementtien liikkuvuuteen. Pääosin kirja sisältää kahdenlaisia appletteja. Käsitellään ensiksi kuvassa 6.1 vasemmalla puolella olevaa applettia. Tässä appletissa tarkoituksena on, että opiskelija voi esimerkiksi siirrellä pisteitä tai vektoreita ja käännellä kuvaa ja tarkastella tilannetta haluamastaan kulmasta. Tämän tapaisissa appleteissa elementtien liikkuvuus ei aiheuta ongelmaa. Toiseksi käsiteltävien applettien (kuvassa 6.1 oikealla puolella) tarkoitus on havainnollistaa jotakin tiettyä tilannetta. Kuvaa voi jälleen pyöritellä haluamiinsa kulmiin, mutta elementtejä kuten pisteitä ja vektoreita, ei pysty siirtelemään. Tähän kohtaan palautteissa tartuttiin. Joissain kohdissa ei ollut kiinnitetty sellaisia elementtejä, jotka oli ollut tarkoitus kiinnittää. Nämä virheet korjattiin tässä vaiheessa joka kohtaan, jossa niistä oli huomautettu. Osaan appletteja niiden merkintöjä selkeytettiin, ja esimerkiksi lisättiin niihin akselien nimet tarvittaviin kohtiin. Lisäksi vaiheittain rakennettuja appletteja lisättiin työkirjoihin.

Yksi mielestäni parhaista huomautuksista, mitä sain, liittyi edellisten työkirjojen kertaukseen. Palautteessa ehdotettiin, että voisin lisätä työkirjoihin sellaisia linkkejä, joista opiskelija voi tarvittaessa kerrata pohjatietona olevaa aikaisempaa työkirjaa. Minulla on monessa kohtaa työkirjojen alussa esimerkiksi tehtävä, jossa pyydetään palauttamaan mieleen jotakin tiettyä asiaa yksin tai parin kanssa. Esimerkiksi tällai-



Kuva 6.1. Kuvassa vasemmalla tilanne, jossa opiskelija voi liikutella kaikkia kuvan elementtejä. Oikella tilanne, jossa opiskelijan ei ole tarkoitus liikutella elementtejä.

seen kohtaan voisi liittää linkin siihen työkirjaan, jossa asiaa on käsitelty. Tämä on mielestäni erittäin hyvä lisä oppimateriaaliin. Lisäsin tällaisia linkkejä tässä vaiheessa muutamiin tärkeimpiin kohtiin, mutta jos kirjaa haluaa jatkokehittää, niin tällaisten linkkien luominen useampiin kohtiin olisi mielestäni erittäin hyödyllinen lisä.

Viimeisenä kohtana haluan mainita huomautuksen tehtävien numeroinnista. Tämä on myöskin erittäin hyvä huomio, sillä jos oppimateriaalia käsitellään koulussa ja opettaja haluaa esimerkiksi tarkistaa oppilaiden kanssa yhteisesti jonkun tehtävän, on opettajan huomattavasti helpompaa kertoa, mikä tehtävä on kyseessä, jos ne on numeroitu. Tästä tuli itselleni mieleen, että olisi hyvä, jos luvut ja alaluvut olisi numeroitu. Siten niistäkin kertominen olisi opettajalle helpompaa. En kuitenkaan vielä onnistunut numeroinnissa, joten jätetään se jatkokehitysideoihin.

6.2 Tutkimusasetelma ja tutkimustehtävät

Tässä kehittämistutkimuksessa tuotettiin uutta oppimateriaalia, joten tässä vaiheessa oli tärkeää tutkia työkirjojen toimivuutta ja tehtävämateriaalin onnistumista. Tämä tutkimus toteutettiin Tampereen teknillisessä lukiossa keväällä 2020. Tutkimukseen osallistuivat pitkän matematiikan neljännen kurssin opiskelijat. Nykyisten lukion opetusuunnitelman perusteiden (2015) mukaan MAA4 -kurssin keskeinen aihepiiri on vektorit. Kurssilla oli yhteensä 30 opiskelijaa. Luomaani oppimateriaalia päästiin kokeilemaan kolmella 75 minuutin mittaisella oppitunnilla. Ripeimmillä opiskelijoilla oli mahdollisuus suorittaa yhteensä 12 työkirjaa. Tutkimus toteutettiin siten, että opiskelijat suorittivat ennalta määrättyjä työkirjoja oppituntien aikana. Tarkoituksena oli, että opiskelijat suorittivat työkirjoja suhteellisen itsenäisesti omaan tahtiinsa. Toki jos opiskelijat kohtasivat ongelmia joko materiaalin käytössä tai tehtävien ratkaisuissa, oli suositeltavaa pyytää apua. Luomieni työkirjojen lisäksi oppitunneilla sai suorittaa myös oppikirjan tehtäviä.

Suoritettavien työkirjojen lopussa oli linkit kyselylomakkeisiin, joihin opiskelijoiden toivottiin vastaavan. Kyselylomakkeeseen oli koottu kyseiseen työkirjaan liityyvät kysymykset. Kysymykset valittiin tietyille työkirjoille laatimastani kysymyspatteristosta (liite 2), joka luotiin Opetushallituksen luoman e-oppimateriaalin laatukriteerien pohjalta. Erityisesti huomiota kiinnitettiin pedagogisen laadun ja käytettävyyden konteksteihin. Kysymyspatteristo sisältää yhteensä 18 kysymystä, joista 14 on pakollisia monivalintakysymyksiä ja loput vapaaehtoisia avoimia kysymyksiä. Kysymyksiä on neljästä eri näkökulmasta, jotka ovat teoriaosuus, GeoGebra-appletit, tehtävät sekä kokonaisuus.

Valitsin kysymyspatteristosta käsiteltävien työkirjojen loppuun muutaman juuri kyseiseen työkirjaan kohdennetun kysymyksen. Kysymykset valittiin työkirjan sisällön perusteella, mikä osa-alue korostuu tietyssä työkirjassa tai mistä kohdasta nimenomaan kaivataan kommentteja. Lisäksi on otettu huomioon työkirjan tavoite. Yksittäisen työkirjan perään liitetylle kysymyslomakkeelle valittiin tarkoituksella vain muutama täsmällinen kysymys, jotta ne eivät veisi liikaa aikaa ja mahdollisimman moni opiskelija viitsisi kyselyyn vastata. Jälkeenpäin ajateltuna olisi ehkä kannattanut laittaa enemmän avoimia kysymyksiä, sillä kehittämisen kannalta niistä oli eniten hyötyä.

Aineistona tutkimuksessa oli siis oppilaiden vastaukset kyselylomakkeisiin, tutkijan huomiot oppitunneilta sekä oppilaiden oppitunneilla tutkijalle esittämiä kommentteja. Lisäksi pyydettiin asiantuntija-arvio opetusmateriaalin sisällöstä ja toimivuudesta osana opetusta. Lisäksi jokainen opiskelija palautti minulle vähintään viisi luomani oppimateriaalin tehtävää, jotka oli tehnyt. Vertailemalla ja yhdistelemällä näitä aineistoja muodostettiin käsitys niistä seikoista, joita haluttiin parannella. Koska käytettävissä oli vain kolme oppituntia, ei koko luomaani materiaalia ehditty kokeilemaan. Teoriaosuudet, tehtävätyypit ja GeoGebra-appletit ovat kuitenkin samantyyppisiä jokaisessa työkirjassa, joten saan osviittaa siitä, mitä muutoksia kaikkiin työkirjoihin olisi hyvä tehdä. Esiin nousseita seikkoja ja parannusehdotuksia sovellettiin myös niihin työkirjoihin, joita ei päästy kokeilemaan. Ongelmat, jotka liittyivät useampiin työkirjoihin, voitiin tällä tavoin korjata. Sen sijaan esimerkiksi vain yhteen työkirjaan kohdistuvia ongelmia ei voitu soveltaa muihin työkirjoihin.

6.3 Tulosten analysointi, luotettavuus ja eettinen näkökulma

Tutkimukseen osallistui yhteensä 30 opiskelijaa. Kyselylomakkeisiin vastaaminen oli vapaaehtoista. Yksittäisen työkirjan kyselyyn vastauksia saatiin 2–25 kappaletta. Ensimmäisellä tunnilla käsiteltyihin työkirjoihin koskeviin kyselyihin vastasi suurin osa ryhmästä, loppupään kyselyihin sen sijaan ei vastannut kovinkaan moni. Tämä voi johtua kiinnostuksen vähenemisestä kyselyitä kohtaan tai siitä, että osa opiskelijoista ei ehtinyt tutustua kaikkiin työkirjoihin. Kyselyihin, joihin on vastannut vain muutama opiskelija, herättää kysymyksen, millainen joukko luokasta on vastannut kyselyihin. Jos esimerkiksi vain luokan parhaat opiskelijat tai luokan heikoimmat opiskelijat ovat vastanneet kyselyihin, tulos ei anna täysin realistista kuvaa.

Kyselylomakkeiden, tutkijan huomioiden ja asiantuntijan arvion avulla saatua aineistoa analysoitiin sisällön analyysin keinoin. Sisällön analyysissä aineiston tutkiminen toteutetaan eritellen, tiivistäen sekä yhtäläisyyksiä ja eroja etsiskellen [25]. Tämän tutkimuksen tuloksia analysoitaessa opiskelijoiden vastaukset käytiin läpi huolellisesti ja niistä pyrittiin löytämään yhteneväisyyksiä ja luomaan kokonaiskuva tuloksista. Tämän perusteella valittiin kohdat, joita työkirjoissa paranneltiin.

Tutkimustuloksia tarkasteltaessa on otettava huomioon, että tutkimukseen osallistuneiden opiskelijoiden määrä oli verrattaen pieni. Tämän vuoksi tuloksia ei voida yleistää koskemaan laajempaa joukkoa. Kyselylomakkeisiin vastanneet opiskelijat antoivat kuitenkin ensiarvoisen tärkeän näkemyksen, sillä he olivat todellista kohdeyleisöä. Heidän antamallaan palautteella on iso rooli jatkokehittämisessä. Taulukossa 6.1 on lueteltu opetuskokeilun aikana käsitellyt työkirjat sekä kyselylomakkeiden vastausten lukumäärä. Liitteessä 1 on listattu kaikki GeoGebra-työkirjat ja liitteessä 2 kysymyspatteristo, josta on valittu kysymykset kyselyihin.

Kyselyt, joihin opiskelijat pääsivät vastaamaan, sisälsivät sekä monivalinta- että avoimia kysymyksiä. Monivalintakysymyksiin saatuja vastauksia on hankalampi tulkita, mutta niiden perusteella voidaan kokonaisuuden sanoa onnistuneen kohtalaisen hyvin. Monivalintakysymyksiin saatiin enemmän vastauksia kuin avoimiin kysymyksiin. Opiskelijat olivat melko yksimielisiä esimerkiksi teorian selkeästä kokonaiskuvasta ja helposti omaksuttavasta muodosta. Lisäksi malliratkaisuista koet-

Taulukko 6.1. Käsiteltävät työkirjat oppitunneilla sekä kyselylomakkeen vastauksien lukumäärä.

Oppitunnin nro	Käsiteltävät työkirjat	Vastaajien lkm.
1	Kolmiulotteinen koordinaatisto	22
	Paikkavektori	25
2	Vektorin muodostaminen	11
	Vektorin pituus	9
	Tehtäviä 1	4
3	Taso avaruudessa	ei kyselyä
	Tason vektoriyhtälö	9
	Tason koordinaattiyhtälö ja normaaliyhtälö	7
	Tason parametriesitys	6
	Suora ja taso avaruudessa	ei kyselyä
	Tehtäviä 2	2

tiin olevan hyötyä. Toisaalta osa vastaajista olisi toivonut enemmän esimerkkejä ja osan mielestä niitä oli sopivasti. Muutamassa työkirjassa pyydettiin antamaan arvio kokonaisuuden oppimisesta. Suurin osa opiskelijoista vastasi oppineensa asian vähintäänkin kohtalaisesti.

Oppilaiden kirjoittamia sanallisia kommentteja tuli melko vähän. Tosin tätä paikkaa se, että osa oppilaista halusi kertoa tutkijalle henkilökohtaisesti ongelmakohdista ja antaa ehdotuksensa työkirjan parantamiseksi. Eniten kommentteja tuli GeoGebra-applettien toimivuuteen liittyen. Tuloksia käsiteltäessä on otettava huomioon, että ongelmaa tutkimuksessa saattoi osaltaan aiheuttaa se, että materiaalia ei ole suunniteltu käytettäväksi MAA 4 -kurssilla. Sen sijaan materiaali on tarkoitettu käytettäväksi valtakunnallisella valinnaisella MAA 10 -kurssilla (Lops 2019), jolloin opiskelijoilla oletetaan olevan pohjatietoina kaksiulotteinen koordinaatisto ja laskurutiinia vektoreihin liittyvissä tehtävissä. Tämän vuoksi kommenteissa saatettiin pyytää lisäämään esimerkkejä johonkin tiettyyn työkirjaan tai jossain työkirjassa asia on opiskelijan mielestä esitetty liian suppeasti. Syy tähän voi olla se, että oletetaan jokin asia jo osittain tutuksi tai että teoria-asia käydään tässä materiaalissa tavallaan kertauksena, vaikka se tulikin vasta uutena asiana MAA 4-kurssin opiskelijoille. Tämä tietysti vaikeuttaa opiskelijoiden vastausten tulkintaa.

Aikaisemmin kerroin tutkimuksen aineistoja olevan myös opiskelijoiden tutkijalle lähettämät tehtävät. Jokainen opiskelija lähetti minulle sähköpostiin viisi tekemäänsä tehtävää. Tehtävien perusteella ajateltiin voitavan selvittää, onko erityisesti jokin tehtävä ymmärretty väärin. Oppilaiden minulle lähettämien tehtävien avulla on kuitenkin vaikea arvioida yksittäisten tehtävien toimivuutta, sillä jokainen opiskelija lähetti minulle viisi satunnaista tehtävää. Tehtäväosuuksia koskeviin kyselyihin sain vain vähän vastauksia, sillä opiskelijoiden on palautettava omalle opettajalleen 95 oman kirjan tehtävää. Tämän takia he ymmärrettävästi tekivät mieluummin niitä saatuaan palautettua minulle viisi vaadittua tehtävää. Lisäksi opiskeljat näkivät tehtävien ratkaisut ennen lähettämistä, jolloin heillä oli myös mahdollisuus korjata virheet etukäteen.

Sain muutamia kommentteja oppituntien aikana myös kurssin opettajalta Antti Saariselta. Hän kommentoi GeoGebra-kirjaa havainnolliseksi tavaksi esittää vektoreita ja tasoja. Käytettäessä materiaalia jatkossa opiskelijat voidaan liittää ryhmään GeoGebra Groups -toiminnolla, jolloin opiskelijoiden tekemät tehtävät näkyvät suoraan opettajalla. Tätä toimintoa ei käytetty tässä kokeilussa, sillä opiskelijat olivat tottuneet tekemään tehtäviä hyvin eri tyyleillä ja näin lyhyessä kokeilussa aikaa olisi kulunut liikaa uuden alustan käytön opiskeluun.

Tämän tutkimuksen tutkimustilanne ei vastannut täysin todellista oppimistilannetta, sillä opiskelijat suorittivat työkirjoja suhteellisen itsenäisesti omaan tahtiinsa. Uskon, että tämä verkko-oppimateriaali on parhaimmillaan käytettynä osana opetusta, perinteisempien opetusmuotojen rinnalla. Toisaalta oppimateriaali ei toimi parhaalla mahdollisella tavalla täysin itsenäisesti käytettynä. Opimateriaali voi kuitenkin antaa opetukselle uuden ulottuvuuden, muun opetuksen rinnalla.

Kehittämistuotos on suunniteltu niin, että sitä on mahdollista käyttää MAA 10 -kurssilla lukiosta riippumatta Suomessa. Laadullisen tutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa käytetään yleisesti neliluokkaista määritelmää: uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus ja vahvistettavuus [18]. Opetusmateriaali on toteutettu ja siirretty kaikkien opetusalan ammattilaisten käyttöön ja sitä on kehitetty kokonaisvaltaisesti. Tällöin tutkimus on ollut uskottavaa ja siirrettävää. Materiaalia on arvioitu koko prosessin ajan ja kehitetty syklisesti. Lisäksi sitä on kokeiltu aidoissa olosuhteissa, joten nämä seikat parantavat sekä luotettavuutta että vahvistettavuutta.

Kehittämistutkimusta tulee tarkastella myös eettisestä näkökulmasta. Eettisyys tulee arvioida erityisellä tarkkuudella etenkin kun osa tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista oli alaikäisiä. Tampereen kaupungin organisaatiossa tehtäviin tutkimuksiin, selvityksiin ja opinnäytteisiin tarvitaan tutkimuslupa. Näin ollen myös tähän kehittämistutkimukseen haettiin tutkimuslupaa, joka myös myönnettiin. Tutkimuksen jokaisessa vaiheessa aineistoa käsiteltiin anonyymisti, esimerkiksi kyselylomakkeisiin vastaaminen oli täysin anonyymiä. Opiskelijoiden nimet päätyivät tutkijalle ainoastaan, kun opiskelijat lähettivät tekemänsä viisi tehtävää tutkijalle sähköpostilla, tehtyjä tehtäviä tarkasteltiin tutkimuksessa kuitenkin anonyymisti. Opiskelijoille kerrottiin tutkimuksesta etukäteen ja lisäksi tutkimukseen osallistuminen ja kyselylomakkeisiin vastaaminen oli täysin vapaaehtoista.

6.4 Tutkimustulokset ja jatkokehittäminen

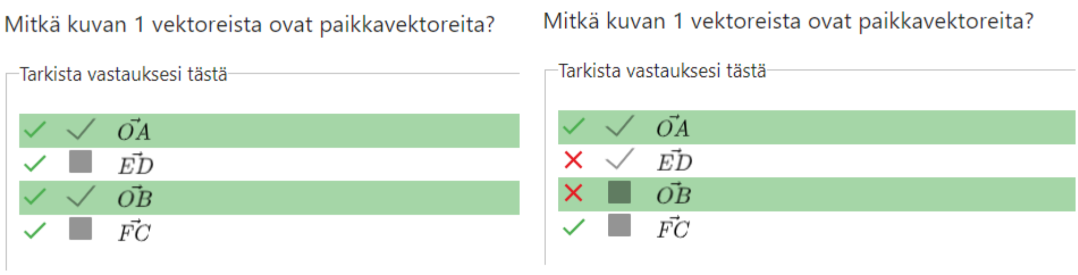
Oppilaiden palautteiden perusteella korjailtiin muutamia kirjoitusvirheitä ja joitain tehtävänantoja pyrittiin selkeyttämään esimerkiksi muokkaamalla sanamuotoja tai lauserakenteita. Varsinkin ensimmäisiä työkirjoja tehtäessä opiskelijat vaikuttivat innostuneilta ja keskustelivat keskenään GeoGebra-appleteista. Lisäksi he kommentoivat ja kyselivät melko paljon. Seuraavaksi analysoidaan tutkimustuloksia tarkemmin.

Aloitetaan tutkimustulosten analysointi opiskelijoiden antamista kirjallisista palautteista. Käsitellään ensiksi teoriaosuuksista annettuja kirjallisia palautteita. Kaikista saaduista palautteista esiin nousi se, että kaikkia asioita ei ole selitetty yksityiskohtaisesti tai että teoriaosuudet ovat osittain suppeita. Samoin joissain palautteissa toivottiin lisää esimerkkitehtäviä. En kuitenkaan tässä vaiheessa alkanut laajentamaan teoriaosuuksia, sillä oletan tämän johtuvan juuri siitä, että materiaalia ei ole tehty tätä MAA 4 -kurssia varten. Kuitenkin palautteisiin on syytä suhtautua vakavasti ja kokeilla materiaalia tulevaisuudessa MAA 10 -kurssilla, ja jos palautteet ovat samanlaisia, niin ryhtyä toimiin. Toisaalta sain kommentteja myös teoriaosuuksien helppolukuisuudesta ja selkeydestä, tämänkään vuoksi muutoksiin ei tässä vaiheessa ryhdytty. Eräässä palautteessa ehdotettiin tärkeimpien käsitteiden tummentamista, tämä oli mielestäni hyvä ajatus, joten muutos tehtiin kaikkiin työkirjoihin.

Seuraavaksi käsitellään opiskelijoiden kirjoittamia palautteita GeoGebra-appleteista. Palautteiden mukaan appletti auttoi hahmottamisessa esimerkiksi sellaisissa tilanteissa, joissa opiskelija ei ollut vielä täysin ymmärtänyt teoriaa. Erityisesti nämä kommentit lämmittivät mieltäni, sillä juuri tämä oli yksi applettien perimmäisistä tarkoituksista. Osa kommentoijista oli sitä mieltä, että appletti toimi ongelmitta, mutta sain myös muutamia kommentteja siitä, että niiden liike nyki tai ei toiminut toivotusti. Tätä virhettä on hankala korjata, sillä en tarkalleen ottaen tiedä, mistä ongelma on johtunut. Opiskelijat eivät maininneet asiasta tunneilla. Ongelmat voivat johtua esimerkiksi siitä, että opiskelija ei ole ymmärtänyt, miten applettia oli tarkoitus käyttää, nettiyhteysongelmista tai siitä että niin moni opiskelija käytti alustaa yhtä aikaa. Omassa käytössäni tai esitestauksen aikana ongelmia ei ole esiintynyt.

Seuraavaksi käsitellään opiskeljoiden antamia kirjallisia palautteita liittyen kirjan tehtäviin. Sain muutamia kommentteja siitä, että kun syöttää vastausruutuun vastauksen, kone saattaa näyttää, että vastaus on väärin. Tämä taas johtuu siitä, että vastauksen lisäksi kone antaa myös ratkaisun vaiheet tai opiskelija ei ole kirjoittanut vastausta täsmälleen haluttuun muotoon. Tähän osaltaan vaikuttaa myöskin kaavaeditorin puuttuminen. Ratkaisun vaiheet vastausten yhteydessä koettiin kuitenkin pääosin positiivisena asiana, jonka vuoksi en halua niitä missään tapauksessa poistaa. Ennemminkin tätä kirjaa käyttäville opiskelijoille voisi korostaa, että ei välitä siitä, näyttääkö ohjelma ratkaisun olevan oikein tai väärin, vaan tarkistaisi itse, onko vastaus sama. Ainakin muutaman kommentin sain siitä, että tehtävänannossa ei kerrottu vektoreita. Tarkoituksena tällaisissa tehtävissä on ollut lukea ne appletista tai muodostaa vektorit itse annettuja tietoja käyttäen. Tehtävissä, joissa vektorit on tarkoitus lukea appletista, en ole varma, olisiko vektorit syytä lukea myös tehtävänannossa ja tavallaan appletti olisi vain tehtävien tekemisen apuna. Tämän ehtii tosin muuttaa myöhemminkin, jos se tuntuu tärkeältä.

Seuraavissa kappaleissa käyn läpi omia huomioitani oppitunneilta sekä oppilaiden suoraan minulle oppitunneilla kertomia parannusehdotuksia. Kaikilla oppitunneilla nousi esille monivalintatehtävien oikeat vastaukset ja tarkemmin se, että kone näyttää oikeat vastaukset epäselvästi. Kuvassa 6.2 näkyy vasemmalla puolella oikein vastattu monivalintakysymys ja oikealla puolella sama kysymys, johon on vastattu väärin. Mikäli oppilaalla ei ole mitään käsitystä siitä, mikä on paikkavektori, on koneen antama vastaus kieltämättä epäselvä. Ehkä työkirjojen ohjeisiin olisi syytä kirjoittaa, mitä merkinnät tarkoittavat, sillä en pysty muuttamaan vastauksen ulkonäköä itse.



Kuva 6.2. Vasemmalla oikein vastattu monivalintakysymys ja oikealla väärin vastattu monivalintakysymys.

Toinen paljon huomiota oppitunneilla saanut seikka mainittiin jo joidenkin applettien kohdalla esitestauksen yhteydessä: sellaisten osien kiinnittäminen, joita ei kuulu opiskelijan liikutella. Tämä korjattiin tässä vaiheessa jokaisesta GeoGebra-appletista. Tehtävien ratkaisuun liittyvä käytännön ongelma oli kuvien paikat. Opiskelijoiden mielestä olisi hyvä, jos kuva tulisi saataville heti, kun siitä on mainittu esimerkiksi jo ennen tehtävää. Kuviin viittaavat tehtävät ovat muutenkin hieman ongelmallisia opiskelijoiden mielestä, koska heidän täytyy rullata hiirellä kuvan ja tehtävänannon välillä. En kuitenkaan haluaisi näitä tehtäviä poistaakaan niiden havainnollisuuden vuoksi. Opiskelijoita voisi ohjeistaa avaamaan appletin toiseen välilehteen, jos tehtävänantoa ja kuvaa ei saa muuten näkymään samalla sivulla.

6.5 Jatkotutkimusmahdollisuudet

Seuraavissa kappaleissa käsitellään opiskelijoiden tai tutkijan esittämiä kehitysideoita, joilla GeoGebra-kirjaa voisi kehittää entistä paremmaksi tulevaisuudessa. Ensinnäkin GeoGebra-kirjaa voisi jatkokehittää laajentamalla se koskemaan koko kurssia. Verrattaessa kirjan sisältöä lukion opetussuunnitelman perusteisiin (2019), voidaan huomata, että siitä jää puuttumaan kokonaisia aihealueita, kuten yhden muuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan sovellukset avaruusgeometriassa sekä kahden muuttujan funktio ja pinta avaruudessa [20]. Kaikkia aihealueita ei ehditty sisällyttää kirjaan rajallisen ajan vuoksi. Lisäksi nykyisiä aihealueita ja työkirjoja on mahdollista jatkokehittää laajentamalla niitä entistä kattavammiksi ja lisäämällä tehtäväosuuksiin eri tasoisia tehtäviä. Tällä hetkellä tehtäväosuudet eivät kata kaikkia kurssilla tarvittavia tehtäviä.

Jatkokehittäminen voisi olla myös uuden opetuskokeilun järjestämistä. Kaikkia tehtäviä ei päästy kokeilemaan todellisessa ympäristössä, joten niitä kehitettiin vain muihin työkirjoihin tulleiden palautteiden perusteella, jolloin niiden toimivuus opetuskäytössä jäi kokeilematta. Paras tapa tutkia kirjan toimivuutta MAA10 3D-geometrian kurssilla olisi päästä kokeilemaan oppimateriaalia tällä tarkoituksenmukaisella kurssilla. Kurssin voisi pitää käyttäen tätä materiaalia pääasiallisena kurssikirjallisuutena ja yhdistää siihen tarvittaessa esimerkiksi joitain tehtäviä muusta materiaalista. Näin saataisiin kokonaiskuva kirjan toimivuudesta ja mahdollisista puutteista tai ongelmista.

GeoGebra-kirjaa voisi kehittää entistä käyttäjäystävällisemmäksi laittamalla työkirjoihin linkkejä, joiden avulla pääsisi kertaamaan tarvittavan aiemman teorian. Kirjaan lisättiin näitä linkkejä jonkin verran, mutta niitä voisi lisätä säännönmukaisesti kaikkiin tarvittaviin kohtiin. Lisäksi ainakin vaikeimpien tehtävien yhteyteen voisi lisätä tällaiset linkit teoriaan. Toinen käyttäjäystävällisyyttä parantava kehityskohde voisi olla opiskeljoiden ehdottama "vinkki-toiminto, jonka avulla ohjelma voisi antaa opiskelijalle jonkin tehtävän ratkaisua helpottavan vinkin. Tämä on mielestäni hyvä huomio ja olisi hyödyllinen lisä kirjaan, joten jätetään se jatkokehittämismahdollisuuksiin. Tällä hetkellä jos opiskelija ei osaa tehtävää, hän voi avata ratkaisun ja saada sieltä apua, mutta samalla hän näkee ratkaisun kokonaisuudessaan.

Yksi kehittämismahdollisuus, joka nousi esiin jo esitestauksen aikana, oli yhteyden tuominen reaalimaailmaan sekä oppiainerajat ylittävät tehtävät. Reaalimaailman esimerkit havainnollistaisivat oppilaille paremmin, mihin esimerkiksi vektoreita voi tarvita todellisessa elämässä. Yleisestikin oppiainerajat ylittäviä tehtäviä korostetaan nykyisin paljon, joten niitä voisi kirjaan lisätä.

7 Johtopäätökset ja yhteenveto

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoituksena oli kehittää oppimateriaalia lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaiselle MAA10 3D-geometrian kurssille. Kurssi on uudistuvan, vuonna 2021 käyttöön otettavan, opetussuunnitelman perusteiden mukaan valtakunnallinen valinnainen kurssi, jonka aihepiirit ovat osittain samoja kuin nykyisen opetussuunnitelman perusteiden (2015) kurssin MAA4 sisällöt. Luotu oppimateriaali on kaikkien käytettävissä verkossa, sillä se on luotu GeoGebra-kirjana. Oppimateriaali päätettiin luoda juuri GeoGebraa hyödyntäen sen lukuisten hyvien ominaisuuksien ansiosta: esimerkiksi verrattuna kirjalliseen materiaaliin asioiden havainnollistaminen tämän ohjelmiston avulla on ylivertaista. Lisäksi GeoGebra on salittu apuväline matematiikan ylioppilaskirjoitusten B-osiossa, jolloin sen käyttö on perusteltua kaikilla lukion matematiikan kursseilla.

Tämä pro gradu -tutkielma toteutettiin yhden syklin käsittävänä kehittämistutkimuksena, jossa oli siis tarkoituksena luoda verkko-oppimateriaalia. Tutkimustyypille tavanomaisesti kehittämissykli alkoi ongelma-analyysistä ja jatkui kehittämisprosessina. Uusien lukion opetussuunnitelmien perusteiden (2019) astuessa voimaan kurssit uudistuvat, jolloin aikaisemmin käytössä olleet materiaalit eivät vastaa täysin uusien kurssien aihe-alueita. Tähän tarpeeseen luotua materiaalia on kehittämisprosessin aikana arvioitu matemaattisten ja pedagogisten näkökulmien lisäksi muun muassa käytettävyyden, esteettömyyden ja tuotannon laadun kannalta.

Kehittämistuotoksena syntynyt GeoGebra-kirja sisältää johdannon lisäksi viisi päälukua, jotka kaikki sisältävät 5–13 työkirjaa. Työkirjat sisältävät niin teoria- kuin tehtäväosuuksiakin, mutta lisäksi havainnollistavia GeoGebra-appletteja sekä harjoituksia GeoGebra-ohjelmiston käytöstä. Kirjalle asetettuja tavoitteita olivat motivoivan, tehokkaan ja monipuolisen kokonaisuuden luominen sekä syvälliseen ymmärtämiseen tähtäävän oppimisprosessin mahdollistaminen.

Kehittämistuotoksen valmistuttua se annettiin matematiikassa pedagogisia opintoja suorittaville aineenopettajaopiskelijoille niin kutsuttuun esitarkastukseen. Tämän perusteella oppimateriaalista korjattiin kirjoitusvirheitä ja muokattiin lauserakenteita, lisäksi esitarkastajat esittivät huomioita siitä, miten kirjasta voisi kehittää paremman. Esimerkiksi ehdotettiin linkkien lisäämistä edellisiin työkirjoihin, jotta voisi helposti palata kertaamaan asioita. Tämä lisä kirjaan tehtiin. Esitarkastuksen perusteella tehtyjen muutosten valmistumisen jälkeen oppimateriaalia kokeiltiin

Tampereen teknillisessä lukiossa MAA4 -kurssilla. Opiskelijoilta kerättiin palautteita sekä monivalinta- että avoimia kysymyksiä sisältävillä kyselylomakkeilla. Lisäksi oppimateriaalia arvioitiin luokan opettajan kommenttien perusteella sekä tutkijan oppitunneilla tekemien huomioiden perusteella.

Oppimateriaalin kokeilun ja saatujen palautteiden perusteella materiaalia paranneltiin ja kehitettiin. Tehtävänantojen selkeyttämisen ja kirjoitusvirheiden korjaamisen ohella suurimmat muokkaukset tehtiin GeoGebra-applettien toiminnan parantamiseksi. Osoitteessa https://www.geogebra.org/m/zqrhvd7m on julkaistu valmis verkko-oppimateriaali. Materiaali on kaikkien saatavilla ja sitä on mahdollista käyttää MAA10 -kurssilla kaikkialla Suomessa. Tutkimustulosten luotettavuutta tarkasteltaessa on otettava huomioon, että tutkimustilanne ei vastannut täysin todellista opetustilannetta oppilaiden runsaan itsenäisen työskentelyn vuoksi. Lisäksi tuloksia analysoitaessa on otettu huomioon, että materiaalin kokeilu suoritettiin MAA4 -kurssilla (Lops 2015), vaikka se on tarkoitettu käytettäväksi MAA10 -kurssilla (Lops 2019).

Tämän kehittämistutkimuksen tavoitteena oli luoda syvälliseen ymmärrykseen tähtäävä monipuolinen verkko-oppimateriaalikokonaisuus, joka on yhtä aikaa sekä motivoiva että tehokas. Materiaalin onnistumista on tässä vaiheessa melko hankala arvioida. Opiskelijoita pyydettiin muutamissa työkirjoissa arvioimaan omaa oppimistaan tietyn kokonaisuuden osalta. Heidän vastauksistaan voitiin huomata, että suurin osa opiskelijoista koki oppineensa asian kohtalaisesti tai sitä paremmin. Jatkossa käytettäessä tätä materiaalia, uskon parhaan mahdollisen oppimistuloksen saavuttamisen tapahtuvan, kun materiaalia käytetään osana opetusta, muun materiaalin ja opetuksen rinnalla.

Jatkotutkimusmahdollisuuksia on useita. Esimerkiksi uuden ja mahdollisesti laajemman opetuskokeilun järjestäminen. Toteutetussa opetuskokeilussa ei päästy kokeilemaan GeoGebra-kirjan kaikkia työkirjoja, joten niitä kehitettiin vain muihin työkirjoihin tulleiden palautteiden perusteella, jolloin niiden toimivuus opetuskäytössä jäi kokeilematta. Lisäksi GeoGebra-kirja ei sisällä kaikkia kurssin osa-alueita, joten kirjan laajentaminen koko kurssin kattavaksi materiaaliksi voisi olla hyödyllinen lisä. GeoGebra-kirjaa voisi jatkossa kehittää käyttäjäystävällisemmäksi pienillä muutoksilla, esimerkiksi lisäämällä vinkki-toiminnon.

Lähteet

[1] M. Aksela, J. Pernaa, *Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä*, teoksessa: *Kehittämistutkimus opetusalalla*, PS-kustannus, 2013, s. 181–200.

[2] H. Anttila, M. Heimonen, *Oppilaiden esittämät kysymykset geometrian tunneilla*, teoksessa: *GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa. Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta*, Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos. s. 14–28. Saatavissa (viitattu 3.12.2019): https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/37131/978-951-39-4623-4.pdf?sequence=1#page=14

[3] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version,* 11th ed., John Wiley & Sons Inc., 1991, 802 p.

[4] Design-Based Research, *An Emerging Paradigm for Educational Inquiry*, Vol. 32, Iss. 1, 2003, pp. 5–8. Saatavissa (viitattu 20.9.2019): https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

[5] D. C. Edelson, *Design Research: What We Learn When We Engage in Design*, Journal of the Learning Sciences, Vol. 11, Iss. 1, 2002, pp. 10–121. Saatavissa (viitattu 30.8.2019):https://www.cs.uic.edu/ i523/edelson.pdf

[6] A. Haasio, M. Haasio, *Pulpetit virtuaalivirrassa*, BTJ Finland, Helsinki, 2008, 176 s.

[7] P. Haukkanen, *Lineaarialgebra 1A*, luentomoniste, 25.04.2019, Tampereen yliopisto.

[8] M. Hohenwarter, J. Preiner, *Dynamic Mathematics with GeoGebra, The Journal of Online Mathematics and Its Applications (JOMA)* Vol. 7, 2007. Saatavissa (viitattu 6.4.2020): https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

[9] M. Hähkiöniemi, *Johdatus GeoGebra-avusteiseen tutkivaan matematiikkaan*, teoksessa: *Geogebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa. Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta*, Jy-

väskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos. s. 4–12. Saatavissa (viitattu 3.12.2019): https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/37131/978-951-39-4623-4.pdf?sequence=1#page=4

[10] L. Ilomäki, *Oppimisaihiot opetuksen ja oppimisen tukena*, teoksessa: *Opi ja onnistu verkossa – aihiot avuksi*, Hakapaino Oy, 2004, s. 9–26.

[11] T. Jaakkola, L. Nirhamo, S. Nurmi, E. Lehtinen, *Erilaiset oppimisaihiot osana joustavaa kokonaisuutta*, teoksessa: *Opi ja onnistu verkossa – aihiot avuksi*, Hakapaino Oy, 2004, s. 27–39.

[12] J. Joutsenlahti, *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä – 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*, väitöskirja, Tampere, Tampere University Press, 2005. Saatavissa (viitattu 1.10.2020): https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[13] K. Juuti, J. Lavonen, *Design-tutkimukseen osallistuvien opettajien rooli tutkimuksen eri vaiheissa*, teoksessa: *Kehittämistutkimus opetusalalla*, PS-kustannus, 2013, s. 45–67.

[14] S. Järvelä, P. Häkkinen, E. Lehtinen, *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 8–13.

[15] J. Kananen, *Kehittämistutkimus opinnäytetyönä*, Jyväskylän ammattikorkeakoulu, 2012, 212 s.

[16] V. Keränen, J. Penttinen, *Verkko-oppimateriaalin tuottajan opas*, WSOY, 2007, 293 s.

[17] K. Kiviniemi, *Design- eli suunnittelututkimus opetus- ja kasvatusalalla*, teoksessa: *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1*, PS-kustannus, 2015, s. 220–240.

[18] Y. S. Lincoln, E. G. Guba, *Naturalistic Inquiry*, Sage Publications, 1985, 417 p.

[19] L. Ilomäki, *Erilaiset e-oppimateriaalit*, teoksessa: *Laatua e-oppimateriaaleihin*, 2012, s. 7–11. Saatavissa (viitattu 20.10.2019):

https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/144415_laatua_e-oppimateriaaleihin_2.pdf

[20] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*, 2019. Saatavissa: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

[21] Opetushallituksen työryhmä, *Verkko-oppimateriaalin laatukriteerit*, 2006, 37 s. Saatavissa (viitattu 20.09.2019): file:///C:/Users/Omistaja/Downloads/VERKKO-OPPIMATERIAALIN%20LAATUKRITEERIT.pdf

[22] S. Paavola, L. Ilomäki, M. Lakkala, *Tiedon esittäminen verkko-oppimateriaalissa*, teoksessa: *Laatua e-oppimateriaaleihin*, 2012, s. 44–53. Saatavissa (viitattu 16.11.2019): https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/144415_laatua_e-oppimateriaaleihin_2.pdf

[23] P. Perkkilä, J. Joutsenlahti, V-M. Sarenius, *Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta*, teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*, Niilo Mäki -instituutti, 2018, s. 344–364.

[24] J. Pernaa, *Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä*, teoksessa: *Kehittämistutkimus opetusalalla*, PS-kustannus, 2013, s. 9–26.

[25] A. Saaranen-Kauppinen, A. Puusniekka, *KvaliMOTV – menetelmäopetuksen tietovaranto*, 2006. Saatavissa (viitattu 16.07.2020): <https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/>

[26] H. Silfverberg, *Tieto- ja viestintätekniikka matematiikan oppimisessa*, teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*, Niilo Mäki -instituutti, 2018, s. 394–409.

[27] J. Tuomi, A. Sarajärvi, *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*, Tammi, Helsinki, 2009, 182 s.

[28] J. Wilson, *Evaluation of learning secondary school mathematics*, teoksessa: *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*, McGraw-Hill, 1971, pp. 643–695.

[29] Ylioppilastutkintolautakunta, *Koejärjestelmässä käytettävissä olevat ohjelmat*. Saatavissa (viitattu 2.12.2019): https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat

[30] Ylioppilastutkintolautakunta, *Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet*. Saatavissa (viitattu 2.12.2019): https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikan_koe.pdf?v=060220

[31] Ylioppilastutkintolautakunta, *Tiedote matematiikan opettajille ja opiskelijoille (25.1.2018)*. Saatavissa (viitattu 2.12.2019): https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/fi_sahkoinen_matematiikka_28.11.2016.pdf

[32] Ylioppilastutkintolautakunta, *Ylioppilastutkintolautakunnan yleiset määräykset ja ohjeet*. Saatavissa (viitattu 2.12.2019): https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Yleiset/yleiset_maaraykset_ja_ohjeet.pdf?v=190220

LIITE 1: GeoGebra-työkirjat

Osoitteessa https://www.geogebra.org/m/zqrhvd7m on julkaistu nämä työkirjat sisältävä GeoGebra-kirja.

Johdanto

Pohjatiedot

Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa

Kolmiulotteinen koordinaatisto

Paikkavektori

Vektorin muodostaminen

Vektorin pituus

Tehtäviä

Harjoittele GeoGebraa!

Pistetulo

Vektoreiden pistetulo

Vektoreiden välinen kulma

Geometrinen tulkinta

Kolmio

Tehtäviä

Harjoittele GeoGebraa!

Ristitulo

Ristitulo eli vektoritulo

Ristitulovektorin määrittäminen

Ristitulon ominaisuuksia

Kolmion pinta-ala

Tehtäviä
Harjoittele GeoGebraa!

Piste, suora ja taso avaruudessa

Piste
Kaksi pistettä
Suora avaruudessa
Suoran parametriesitys
Avaruuden suoria
Taso avaruudessa
Tason vektoriyhtälö
Tason koordinaattiyhtälö ja normaaliyhtälö
Tason parametriesitys
Suora ja taso avaruudessa
Suorien ja tasojen leikkauspisteitä
Tehtäviä
Harjoittele GeoGebraa!

Kulma avaruudessa

Kahden suoran välinen kulma
Suoran ja tason välinen kulma
Tasojen välinen kulma
Tehtäviä
Harjoittele GeoGebraa!

LIITE 2: Kysymyspatteristo

Kysymykset liittyen Teoria-osuuteen

Arvioi seuraavat väitteet:

- Teoriaosuus oli mielestäni selkeä.
- Olisin kaivannut lisää esimerkkitehtäviä.
- Minulle jäi selkeä kokonaiskuva käsitellystä aiheesta.
- Teoriaosuudessa oli sellaisia kohtia, jotka jäivät minulle epäselviksi.
- Teoria-asiat on esitetty helposti omaksuttavassa muodossa.

Perustele vastauksesi edellä oleviin väitteisiin. Miten teoriaosuudesta saisi selkeämmän ja ymmärrettävämmän? Mikä kohta jäi epäselväksi? Parannusehdotuksia teoriaosuuteen?

Kysymykset liittyen GeoGebra-appletteihin

Arvioi seuraavat väitteet:

- GeoGebra-appletti toimi hyvin.
- GeoGebra-appletin kanssa oli ongelmia.
- GeoGebra-appletti auttoi vaikeiden asioiden hahmottamista.

Perustele vastauksesi edellä oleviin väitteisiin. Miten GeoGebra-appletteja voisi kehittää selkeämmiksi? Kehitys-/parannusideoita?

Kysymykset liittyen Tehtäviä-osuuteen

Arvioi seuraavat väitteet:

- Tehtävänannot olivat selkeitä.
- Minun oli vaikea ymmärtää, mitä tehtävissä piti tehdä.
- Tein paljon virheitä ennen kuin onnistuin tehtävissä.
- Verkko-oppimateriaali ohjasi minua korjaamaan tekemäni virheet.
- Malliratkaisuista oli minulle hyötyä.

Perustele vastauksesi edellä oleviin väitteisiin. Mikä tehtävä tuntui epäselvältä? Parannusehdotuksia?

Kysymykset liittyen kokonaisuuteen, esim. yksi työkirja

- Anna kokonaisarvosana työkirjalle asteikolla 1–5: Kuinka hyvin opit asian?
- Parannusehdotuksia? Miten kokonaisuudesta saisi paremman ja mielekkäämmän opiskelijan näkökulmasta?