Tampereen yliopisto

Miisa Kortesmäki

LOGARITMIN YMMÄRTÄMISEEN TÄHTÄÄVÄ OPETUS JA OPPIMINEN

Sähköisen oppimateriaalin kehittämistutkimus

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Elokuu 2020

Tiivistelmä

Miisa Kortesmäki: Logaritmin ymmärtämiseen tähtäävä opetus ja oppiminen
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Elokuu 2020

Tässä pro gradu -tutkielmassa kehitettiin sähköinen oppimateriaalipaketti logaritmien opiskeluun lukion pitkässä matematiikassa. Kehittämistutkimuksen avulla pyrittiin vastaamaan logaritmien oppimisessa havaittuihin haasteisiin sekä selvittämään, millaiseksi opiskelijat ja opettajat kokevat laaditun sähköisen oppimateriaalin käytön.

Tutkimusprosessi koostui kolmesta kehittämissyklistä. Tutkielman matemaattisessa osuudessa käsiteltiin eksponentti- ja logaritmifunktioiden teoriaa. Teoreettisessa ongelma-analyysissä tarkasteltiin logaritmeja lukion opetussuunnitelman perusteissa (2015), matematiikan osaamista käsitteellisen ymmärtämisen ja menetelmällisen sujuvuuden näkökulmista, sähköisiä oppimateriaaleja oppimisympäristönä sekä matematiikan kielentämisen ja tutkivan matematiikan tuomia mahdollisuuksia matematiikan oppimiseen ja käsitteellisen ymmärtämisen tehostamiseen. Kehittämistuotoksen ensimmäisen version valmistuttua järjestettiin asiantuntijakierros, jossa joukko matematiikan opetuksen asiantuntijoita testasi ja arvioi kehitettyä oppimateriaalia sekä vastasi sitä koskevaan kyselyyn.

Teoreettiseen ongelma-analyysiin ja asiantuntijakierroksen tuloksiin perustuen oppimateriaalia jatkokehitettiin ja testattiin erään lukion pitkän matematiikan kurssin MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot opetuksessa tammikuussa 2020. Oppimateriaalin toimivuutta tutkittiin opiskelijoilla teetetyn kyselytutkimuksen ($n = 38$), opettajan haastattelun ja opetuskokeilun aikana tehtyjen laadullisten havaintojen avulla. Tutkimus toteutettiin empiirisenä tapaustutkimuksena.

Tulokset osoittivat opiskelijoiden ja opettajan kokeneen kehitetyn materiaalin toimivaksi ja sen sisältämät tehtävät monipuolisiksi ja kivoiksi. Opiskelijat pitivät eniten tutkimuslähtöisistä tehtävistä ja vähiten tehtävistä, joissa pyydettiin esittämään perusteluita tai selittämään jokin asia omin sanoin. Logaritmin käsitteen ymmärtäminen jäi toivottua heikommaksi, mutta muut kehittämisprosessille asetetut tavoitteet saavutettiin hyvin ja testausvaiheen kokemukset olivat innostavia. Kehitetty oppimateriaali on vapaasti käytettävissä osoitteessa **https://tim.jyu.fi/view/tau/toisen-asteen-materiaalit/matematiikka/kertaus/logaritmit**.

Avainsanat: logaritmi, kehittämistutkimus, käsitteellinen ymmärtäminen, kielentäminen, tutkiva matematiikka, sähköinen oppimateriaali

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto **5**

2 Kehittämistutkimus **7**
2.1 Tutkimusmenetelmän taustaa 7
2.2 Tutkimukseen valittu rakenne 8
2.3 Tutkimuskysymykset 10

3 Eksponentti- ja logaritmifunktio **11**
3.1 Tarvittavia lauseita ja määritelmiä 11
3.2 Eksponenttifunktio 12
3.2.1 Eksponenttifunktio rationaalilukujen joukossa 13
3.2.2 Eksponenttifunktio reaalilukujen joukossa 16
3.3 Logaritmifunktio 18
3.4 Tärkeimmät logaritmijärjestelmät 20

4 Teoreettinen ongelma-analyysi **21**
4.1 Logaritmit lukion opetussuunnitelman perusteissa 21
4.2 Käsitteellinen ymmärrys ja menetelmällinen sujuvuus 22
4.3 Tutkimuksia logaritmien osaamisesta ja opetuksesta 23
4.4 Matematiikan kielentäminen 25
4.5 Tutkiva matematiikka 27
4.6 Sähköiset oppimateriaalit 28
4.7 Teknologia-avusteinen tutkiva matematiikka 30
4.8 Analyysin yhteenveto 31

5 Kehittämisprosessi **33**
5.1 Kehittämisvaihe 1 33
5.1.1 Tutkimustehtävät ja johdattelu logaritmeihin 34
5.1.2 Kielentämistehtävät 36
5.1.3 Sähköisten tehtävien mahdollisuudet 37
5.2 Asiantuntijakierros 39
5.2.1 Asiantuntijakyselyn toteutus 39
5.2.2 Tuloksia 40
5.3 Kehittämisvaihe 2 41

6 Kehittämistuotoksen testaus ja tutkimustuloksia **42**
6.1 Materiaalin testaaminen 42
6.2 Aineiston keräys 43
6.3 Tulosten tarkastelua 44
6.3.1 Loppukyselyn väitteet 44
6.3.2 Loppukyselyn avoimet kysymykset 47
6.3.3 Havainnot 51

6.3.4 Opettajan haastattelu 52
6.4 Kehittämisvaihe 3 53

7 Yhteenveto ja pohdintaa 55
7.1 Yhteenveto tutkimuksen tuloksista 55
7.2 Pohdintaa 57
7.3 Luotettavuustarkastelu 59
7.4 Eettiset näkökulmat 61
7.5 Lopuksi 62

Lähteet 65

Liite 1: Asiantuntijakyselyn kysymykset 70

Liite 2: Tiedote opiskelijoille ja huoltajille 71

Liite 3: Loppukysely 72

Liite 4: Opettajan haastattelun kysymykset 78

1 Johdanto

Lukion matematiikan opiskelu ja opetus ovat kohdanneet viime vuosina merkittäviä muutoksen tuulia. Merkittävin uudistus lienee ylioppilaskirjoitusten sähköistyminen [49], joka toi mukanaan tarpeen siirtyä myös opetuksessa sähköisiin ratkaisuihin. Painetuista oppikirjoista on vähitellen siirrytty sähköisiin oppimateriaaleihin ja kynä ja paperi on ainakin osittain korvattu tietokoneilla.

Sen lisäksi, että ylioppilaskoe on sähköistynyt, tehtävien painotus on muuttunut merkittävästi ulkoa opitun tiedon muistamisesta ja toistamisesta tiedon syvällisempään analysointiin ja tulkintaan [36]. Mekaanisen laskutaidon ohella korostetaan yhä enemmän asioiden ja käsitteiden ymmärtämistä ja soveltamista. Mitä abstraktimmasta asiasta on kyse, sitä haastavampaa käsitteenymmärryksestä tulee. Lukiomatematiikassa opiskelija kohtaa useita aiheita, joiden abstraktius tekee niistä haastavia ymmärtää ja joiden osaaminen on siksi heikompaa.

Kun puhutaan lukion pitkän matematiikan haasteista, *logaritmit* nimetään usein haastavimpien aihealueiden joukkoon. Keskusteltuani lukiossa toimineiden opettajien kanssa (mm. asiantuntijakierrokselle osallistuneet opettajat, ks. luku 5.2), monet kertoivat tehneensä havainnon, että vaikka laskukaavoja osattaisiin käyttää, logaritmin käsite jää monilta opiskelijoilta ymmärtämättä. Mitä käsite logaritmi tarkoittaa? – Sitä en ymmärtänyt itsekään ennen kuin ensimmäisen kerran opetin kurssia MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot osana opetusharjoitteluani. Tällöin huomasin oppimateriaalin kehitystarpeen ja aloin pohtia, millainen oppimateriaali auttaisi logaritmien parempaan ymmärtämiseen.

Ennen tätä pro gradu -tutkielmaa tein osana pedagogisten opintojeni tutkivaa harjoittelua opetuskokeilun, jossa tutkin erilaisten kielentämistehtävien vaikutusta logaritmien oppimiseen. Tuloksena huomasin, että opiskelijat kokivat keksimistäni kielentämistehtävistä olleen hyötyä etenkin logaritmien symbolikielisten merkintöjen ymmärtämisessä. Innostuin jatkamaan logaritmien opetuksen ja matematiikan kielentämisen tutkimista myös pro gradussani. Halusin kehittää itse oppimateriaalia, joka pyrkisi edistämään opiskelijoiden oppimista ja ymmärtämistä logaritmeihin liittyen sekä samalla tukisi sähköisessä matematiikan ylioppilaskokeessa tarvittavien taitojen kehittymistä.

Tutkielmani aiheeksi valikoitui kehittämistutkimus, jonka kohteena on logaritmeihin liittyvän oppimateriaalin kehittäminen. Aloittaessani tutkielman tekoa Tampereen yliopistossa oli hiljattain käynnistetty Opetushallituksen rahoittama "Matemaattisten aineiden verkkokurssit lukioon ja ammatilliseen koulutukseen-hanke [25], jossa kehitettiin avointa sähköistä oppimateriaalia toisen asteen opiskelijoille. Tämä kehittämistutkimus päädyttiin liittämään osaksi kyseistä hanketta. Hankkeen ansiosta tutustuin muun muassa sähköisten oppimateriaalien tuottamiseen ja TIM[1]-oppimisympäristöön.

[1] TIM eli "The Interactive Material" on vuorovaikutteisten materiaalien tuottamiseen kehitetty dokumenttipohjainen pilvipalvelu. Lisää tietoa luvussa 4.8 ja osoitteessa https://tim.jyu.fi/view/tim/TIM-esittely.

Matematiikan oppimateriaalien kehittämisestä on julkaistu suhteellisen vähän tutkimuksia. Tämän ovat huomanneet muun muassa Fan, Zhu ja Miao tutkimuksessaan [7], jossa he kartoittivat perusteellisesti matematiikan oppimateriaalien kehitystä kuuden viimeisimmän vuosikymmenen aikana. Tutkimuksen tuloksista he huomasivat, että matematiikan oppimateriaalitutkimus on keskittynyt varsin vahvasti jo olemassa oleviin oppimateriaaleihin ja yllättävän vähän niiden suunnittelu- ja laatimisprosesseihin [7, s. 635–644]. Tarve oppimateriaalien kehittämiseen ja kehittymiseen liittyvälle tutkimukselle on siis ilmeinen, etenkin kun oppimateriaalien sähköistyminen on muuttanut prosesseja, joissa oppimateriaali syntyy.

Tässä kehittämistutkimuksessa tutkitaan oppimateriaalin kehittämisprosessia ja tuotoksena saadaan asiantuntijoilla ja opiskelijoilla testattua sähköistä oppimateriaalia. Samalla pyritään myös keräämään tutkimustietoa muun muassa siitä, millaiseksi opiskelijat kokevat tutkivaa matematiikkaa ja kielentämistä hyödyntävät tehtävät ja sähköisen oppimateriaalin käytön pitkän matematiikan opiskelussa. Sen lisäksi että kehittämistyö nojataan olemassa olevaan teoriaan, on siis tavoitteena myös tuottaa lisää tutkimustietoa.

Luvussa 2 käsitellään kehittämistutkimusta tutkimusmenetelmänä sekä esitellään tämän kehittämistutkimuksen rakenne ja tutkimuskysymykset. Luku 3 sisältää työn matemaattisen osuuden, jossa perehdytään eksponentti- ja logaritmifunktioiden teoriaan. Koska kehittämiskohteena on oppimateriaali, kyseisellä luvulla on suuri merkitys sisällön ymmärtämisen ja rajaamisen kannalta. Luku 4 sisältää kehittämistutkimuksen teoreettisen ongelma-analyysin, jossa muun muassa kartoitetaan logaritmien opetuksen ja osaamisen nykytilannetta, pohditaan kehittämiskohteita, keinoja ja tavoitteita sekä muodostetaan tutkimuksen teoreettinen viitekehys. Luvussa 5 kuvaillaan itse kehittämisprosessia ja kehittämistuotosta, jonka testaamista opetuskokeilussa kuvataan luvussa 6. Lopuksi luvussa 7 esitetään yhteenveto ja johtopäätöksiä saaduista tuloksista sekä pohditaan prosessin onnistumista, luotettavuutta ja eettisyyttä. Tutkielman lopusta löytyvät työhön liittyvät lähteet ja liitteet.

2 Kehittämistutkimus

Käsittelen tässä luvussa kehittämistutkimusta tutkimusmenetelmänä sekä esittelen, millaista rakennetta tässä kehittämistutkimuksessa on noudatettu. Tämän jälkeen esittelen työtä koskevat tutkimuskysymykset.

2.1 Tutkimusmenetelmän taustaa

Kehittämistutkimukseksi tai design-tutkimukseksi (eng. *design research* tai *design-based research*) nimitetään tutkimusprosessia, jossa yhdistetään tieteellinen tutkimus ja kehittämistyö. Sen lähtökohtana on tarve kehittää jotain asiaa paremmaksi, nojaten kuitenkin aina taustalla vallitseviin teorioihin. Kehittämistutkimusta ei yleensä luokitella omaksi erilliseksi tutkimusmenetelmäkseen, vaan siinä voidaan yhdistää useita eri tutkimusmenetelmiä tilanteesta ja kehittämiskohteesta riippuen. [18, s. 19] Monimenetelmäisyyttä pidetäänkin usein yhtenä kehittämistutkimuksen vahvuuksista.

Opetusalalla kehittämistutkimus on vielä suhteellisen uusi tutkimusmenetelmä. Sen kehittäminen on aloitettu 1990-luvun alussa, mutta vasta 2000-luvun puolella menetelmää hyödyntävien tutkimusjulkaisujen määrä on lähtenyt selvästi kasvuun ja kehittämistutkimuksen käyttö opetuksen tutkimuksessa on yleistynyt. Kehittämistutkimuksen synnyn syynä on pidetty halua kehittää opetusta tutkimuspohjaisesti todellisissa opetustilanteissa nousevien tarpeiden pohjalta. Sillä on pyritty vastaamaan opetuksen tutkimukseen kohdistuneeseen kritiikkiin siitä, että tutkijat ovat kykenemättömiä tuottamaan teoreettista tutkimustietoa, jota opettajat pystyisivät hyödyntämään käytännössä. [34, s. 10–11] Pyrkimyksenä on siis ollut saada tieteellinen tutkimus ja todellinen koulumaailma kohtaamaan paremmin, jotta "kentällä" toimivat opettajat voisivat hyödyntää tutkimuksissa saatua tietoa opetuksen kehittämiseen.

Juutin ja Lavosen [17] mukaan kehittämistutkimuksen avulla pyritään opetusalalla yleensä kehittämään jotain opetukseen, opiskeluun tai oppimiseen liittyvää innovaatiota, joka voi olla esimerkiksi oppimateriaali, oppimisympäristö tai opetusmenetelmä. Samalla on tavoitteena luoda uutta tutkimustietoa oppimiseen, opetukseen tai opiskeluun liittyen. [17, s. 46] Kehittämistutkimus koostuu siis sekä kehittämistyöstä että tieteellisestä tutkimuksesta. Edelsonin [5] luoman määritelmän mukaan nämä yhdistyvät teoreettisia ja kokeellisia vaiheita sisältävässä syklisessä prosessissa. Kehittäminen pohjataan tutkimusprosessin jatkuvaan arviointiin, suunnitelman päivittämiseen ja teoriaan perustuvien ratkaisujen tekemiseen. [34, s. 12–17]

Kehittämistutkimusta käsittelevässä kirjallisuudessa pohditaan usein, miten kehittämistutkimus eroaa toimintatutkimuksesta. Molemmissa menetelmissä tehdään teoriaan pohjautuvaa kehittämistä ja arvioidaan ja kehitetään tuotosta kohti parempaa lopputulosta. Menetelmät kuitenkin eroavat toisistaan muun muassa tutkimustavoitteiden, toteuttamistapojen ja tutkimuksen mittakaavan suhteen. Kehittämistutkimuksessa uuden, laajempaan ympäristöön yleistettävissä olevan tuotoksen ja tiedon luomisella on suurempi merkitys kuin toimintatutkimuksessa, joka keskittyy kehittämään lähinnä paikallisesti toimivia ratkaisuja. Kehittämistutkimuksessa tavoitellaan

selkeämmin uuden teorian luomista ja pienessä mittakaavassa kehitettyjen asioiden yleistämistä. [18][34, s. 14] Tässäkin tutkimuksessa kehittämistuotosta testataan pienelle joukolle, mutta sen toimivuus ja ohessa saatu tutkimustieto pyritään yleistämään lopulta suuremmalle käyttäjäkunnalle.

Edellä mainittujen seikkojen lisäksi tutkimusmenetelmien toimintatavat eroavat siten, että toimintatutkimuksen toteuttaa yleensä yksittäinen opettaja, kun taas kehittämistutkimukselle on ominaista kehittämistiimin muodostaminen ja ilmiöiden kokonaisvaltaisempi tarkastelu [18][34, s. 14]. Koska pro gradu -tutkielman on tarkoitus olla itsenäinen työ, olen vastannut tämän kehittämistutkimuksen toteuttamisesta pääasiassa yksin, mutta kehittämistuotoksen testaukseen ja arviointiin on kuitenkin osallistunut monia opetusalan asiantuntijoita.

2.2 Tutkimukseen valittu rakenne

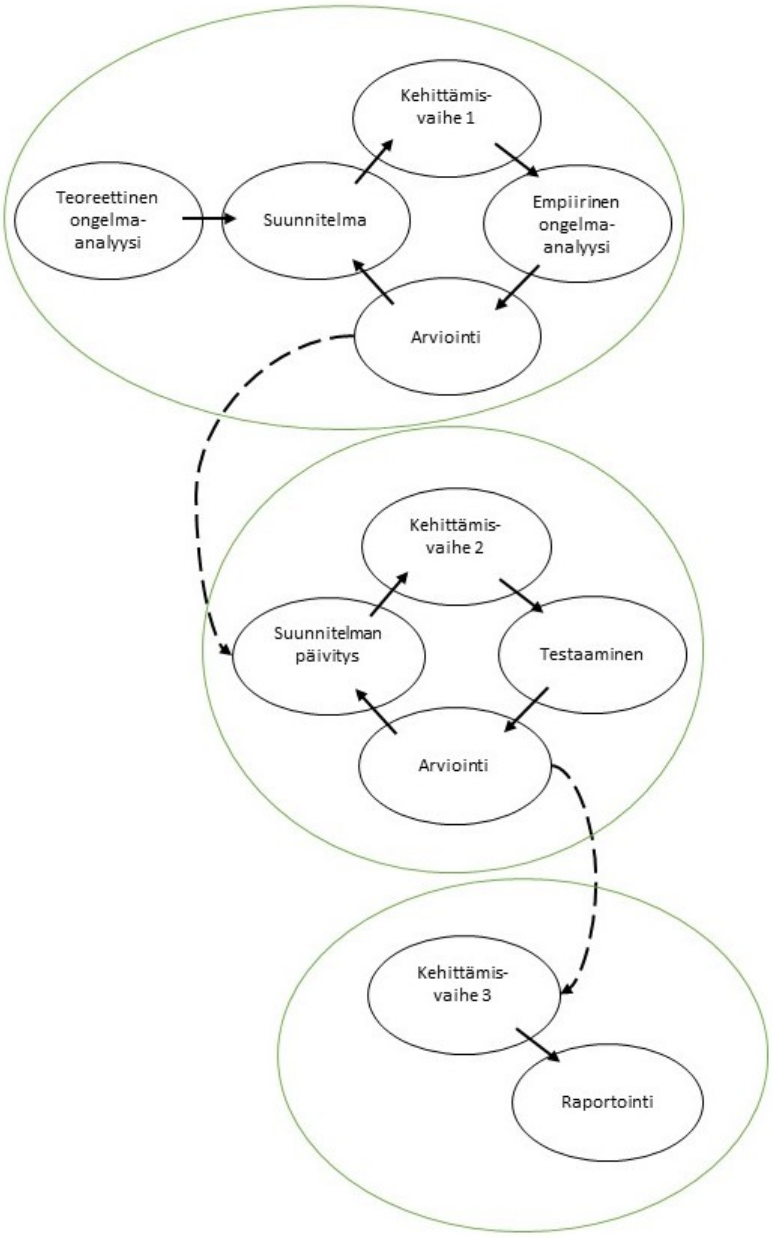
Pro graduissa kehittämistutkimuksen tavoitteena on yleensä ollut kehittää jokin konkreettinen innovaatio tai artefakti eli kehittämistuotos, jonka toimivuutta testataan autenttisessa opetustilanteessa [1]. Tässä kehittämistutkimuksessa artefaktiksi on valittu oppimateriaali logaritmien opiskeluun.

Kehittämistutkimus alkaa tyypillisesti ongelma-analyysillä, jossa kartoitetaan kehittämisen tarpeet, lähtökohdat, haasteet ja mahdollisuudet. Analyysi voi olla luonteeltaan teoreettinen tai empiirinen tai näiden kahden yhdistelmä. Ongelma-analyysia seuraavia vaiheita ovat yleensä suunnittelu-, kehittämis-, testaus- ja arviointivaiheet, joita toistetaan sykleissä. Kehittämissyklejä voidaan toteuttaa tutkimuksen laajuudesta riippuen useita, jolloin voidaan myös parantaa tutkimuksen luotettavuutta ja löytää uusia kehittämishaasteita. Suunnitelmaa päivitetään jatkuvasti tutkimuksen edetessä, ja tuotosta testataan ja kehitetään useaan kertaan prosessin aikana. [5][34] Tässä tutkimuksessa seurataan kuvassa 2.1 havainnollistettua syklistä rakennetta. Kaaviossa on mukailtu Pernaan luomaa kuviota [34, s. 19], jossa havainnollistetaan Edelsonin määritelmän mukaista kehittämistutkimuksen syklistä etenemistä.

Kuten kuvasta 2.1 nähdään, olen valinnut tähän kehittämistutkimukseen rakenteen, joka voidaan jaotella kolmeksi sykliksi. Aloitan tutkimusprosessin teoreettisella ongelma-analyysilla, joka perustuu taustakirjallisuuteen. Se on tärkeä vaihe tutkimuksen teoreettisen viitekehyksen muodostamisessa. Ongelma-analyysiin sisältyy muun muassa aikaisempien tutkimusten ja lukion opetussuunnitelman perusteiden analysointia. Kuvaan teoreettista ongelma-analyysia luvussa 4.

Ongelma-analyysin pohjalta luodaan suunnitelma ja tavoitteet kehittämisprosessille. Kehittämisvaiheessa 1 rakennan ensimmäinen version artefaktista pyrkien kehittämään ongelma-analyysissa ilmenneitä ongelmakohtia. Artefaktin ensimmäistä testausvaihetta nimitän tässä tutkielmassa asiantuntijakierrokseksi (ks. luku 5.2). Asiantuntijakierroksella joukko matematiikan opetuksen asiantuntijoita testaa kehitettyä oppimateriaalia ja vastaa sitä koskevaan kyselyyn. Kyseessä on empiirinen tutkimus, joka toimii kehittämistutkimuksen empiirisenä ongelma-analyysina. Empiirisen ongelma-analyysin pohjalta päivitetään kehittämissuunnitelmaa ja jatkokehitetään materiaalia kehittämisvaiheessa 2. Kuvaan asiantuntijakierrosta sekä kehittämisvaiheita 1 ja 2 luvussa 5.

Tämän jälkeen toteutetaan kehittämistuotoksen varsinainen testaaminen opetuskokeiluna osana aitoa lukio-opetusta. Kokeilun päätteeksi kerätään tutkimusaineisto, jonka avulla suoritetaan kehittämistuotoksen ja -prosessin arviointi. Lopuksi kehittämisvaiheessa 3 kehittämistuotos muokataan "lopulliseen" muotoonsa. Koko tutkimusprosessi raportoidaan tässä pro gradu -tutkielmassa. Testaamista ja tutkimuksen tuloksia sekä kehittämisvaiheessa 3 tehtyjä muutoksia kuvaan tutkielman luvussa 6.



Kuva 2.1. Tämän kehittämistutkimuksen syklinen rakenne

2.3 Tutkimuskysymykset

Tässä kehittämistutkimuksessa on tavoitteena kehittää logaritmin oppimista ja käsitteellistä ymmärtämistä parantava oppimateriaalipaketti lukion pitkän matematiikan opiskeluun. Kehittämistutkimuksen tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Millaisin keinoin logaritmien oppimista ja käsitteellistä ymmärtämistä voitaisiin parantaa?

2. Mitä mieltä asiantuntijat ovat laaditun oppimateriaalin sisällöstä, haastavuustasosta ja helppokäyttöisyydestä?

3. Miten laadittu oppimateriaali soveltuu logaritmien opiskeluun?

Tutkimuskysymykset koskettavat sekä kehitystyötä että kehittämistuotoksen testausta. Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen pyrin löytämään vastauksia jo teoreettisessa ongelma-analyysissa, mutta myös tutkimuksen tuloksia analysoidessani. Olen koostanut yhteenvedon ongelma-analyysin tuloksista ja kehittämisprosessin tavoitteista luvussa 4.8.

Toiseen kysymykseen etsin vastauksia matematiikan opetuksen asiantuntijoilla teetetyn kyselytutkimuksen avulla. Asiantuntijakierroksella on tavoitteena selvittää, täyttääkö materiaali asiantuntijoiden mielestä hyvän oppimateriaalin piirteet ja miten sitä täytyisi muokata ennen sen testaamista opetuskokeilussa. Tähän kysymykseen löytämiäni vastauksia kuvailen luvussa 5.2.2.

Viimeiseen tutkimuskysymykseen etsin vastauksia koko kehittämisprosessin kautta. Ensisijaisesti se kuitenkin koskettaa kehittämisvaiheen 2 tuotoksena syntynyttä oppimateriaalia ja sen testaamista opetuskokeilussa. Opetuskokeilun yhteydessä pyrin selvittämään, millaiseksi kokeiluun osallistuvat opiskelijat ja opettaja kokevat laaditun oppimateriaalin käytön. Vastauksia tutkimuskysymykseen 3 pohdin muun muassa luvussa 7.

3 Eksponentti- ja logaritmifunktio

Tämä luku sisältää matemaattista teoriaa eksponentti- ja logaritmifunktioista. Luvun asiat pohjautuvat pääasiassa Grossmanin teokseen *Calculus, Fifth edition* [8] ja Pehkosen teokseen *Matematiikan peruskurssi 2 korkeakouluja varten* [31].

Korkeakoulumatematiikan tasolla on olemassa monia erilaisia tapoja lähestyä logaritmifunktion käsitettä. Useimmissa lukion oppikirjoissa logaritmi esitellään eksponenttiyhtälön ratkaisuna eli eksponenttina (x). Toinen oppikirjoissa suosittu lähestymistapa on tarkastella ensin eksponenttifunktiota ja esitellä sen jälkeen logaritmifunktio sille käänteisenä operaationa. Tässä tutkielmassa sovelletaan jälkimmäistä lähestymistapaa, eli logaritmifunktio määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona.

Teorian tarkastelu aloitetaan esittelemällä myöhemmin tarvittavia lauseita ja määritelmiä, kuten käänteisfunktion määritelmä. Sitten aloitetaan eksponenttifunktion tarkastelu ja todistetaan sen tärkeimmät ominaisuudet ja laskusäännöt päteviksi ensin rationaalilukujen ja sitten reaalilukujen joukossa. Tämän jälkeen määritellään logaritmifunktio ja johdetaan sen tärkeimmät ominaisuudet ja laskusäännöt eksponenttifunktion ominaisuuksien ja laskusääntöjen pohjalta. Lopuksi esitellään yleisimpinä logaritmijärjestelminä luonnollinen logaritmi ja kymmenkantainen logaritmi.

3.1 Tarvittavia lauseita ja määritelmiä

Tässä luvussa esitellään muutamia myöhemmin tarvittavia määritelmiä ja lauseita. Lukijan oletetaan tuntevan kuvauksiin liittyvää käsitteistöä entuudestaan. Tällaisia käsitteitä ovat muun muassa *monotoninen funktio*, *määrittelyjoukko* ja *arvojoukko*. Funktion f määrittelyjoukolle käytetään merkintää D_f ja arvojoukolle merkintää R_f.

Määritelmä 3.1. [8, s. 385] Olkoot f ja g funktioita. Jos $g(f(x)) = x$ ja $f(g(y)) = y$ aina, kun $x \in D_f$, $y \in D_g$, niin funktioita f ja g kutsutaan toistensa *käänteisfunktioiksi*.

Tällöin funktiolle g voidaan myös käyttää merkintää f^{-1}. Jotta määritelmä 3.1 toteutuu, on myös oltava $D_f = R_g$ ja $D_g = R_f$. Funktiolle on siis olemassa käänteisfunktio, jos ja vain jos funktio on bijektio.

Määritelmä 3.2. [26, s. 27] Kuvaus $f : A \to B$ on bijektio, jos se on sekä injektio että surjektio, eli kun x_1 ja x_2 kuuluvat joukkoon A, niin

(i) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ eli $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ja

(ii) jokaista joukkoon B kuuluvaa lukua y vastaa jokin joukkoon A kuuluva luku x siten, että $f(x) = y$.

Lause 3.3. *[31, s. 116] Aidosti monotoninen funktio on bijektio määrittelyjoukoltaan arvojoukolleen.*

Todistus. Olkoon $f : A \to B$ aidosti monotoninen funktio, jonka määrittelyjoukko on A ja arvojoukko B. Funktio on aidosti kasvava, eli $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ tai aidosti vähenevä, eli $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Täten määritelmän 3.2. kohta (i) täyttyy, eli aidosti monotoninen funktio on injektio. Lisäksi, koska B on funktion arvojoukko, niin arvojoukon määritelmän mukaisesti $B = f(A)$, joten myös kohta (ii) täyttyy ja funktio on surjektio. □

Lause 3.4. *Jos aidosti monotonisella funktiolla on väli määrittelyjoukkona, niin sen arvojoukko on myös väli, jolla käänteisfunktio on (samaan suuntaan) aidosti monotoninen.*

Todistus. [31, s. 116] Olkoon funktio f aidosti kasvava määrittelyvälillään $[a, b]$ ja $x_1, x_2 \in [a, b]$. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen (ks. [31, s. 67]) nojalla, koska f on jatkuva suljetulla välillä, jokaista pistettä y_0, joka on arvojen $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ välissä, vastaa yksi pisteiden x_1 ja x_2 välissä oleva kohta x_0, eli $y_0 = f(x_0) \in f([a, b])$. Täten $f([a, b])$ muodostaa välin ja koska f on aidosti kasvava, niin $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Lisäksi lauseen 3.3 nojalla f on bijektio määrittelyjoukoltaan arvojoukolleen. Tavoitteena on todistaa, että funktio f^{-1} on aidosti kasvava. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$, että $y_1 < y_2$, mutta $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Tällöin $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, koska f on aidosti kasvava. Näin ollen $y_1 \geq y_2$. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $y_1 < y_2$. Vastaväite on siis epätosi ja on oltava $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Lause voidaan todistaa samoin aidosti vähenevälle funktiolle. □

3.2 Eksponenttifunktio

Kun potenssifunktion kantaluku pysyy vakiona ja muuttujana on eksponentti, puhutaan eksponenttifunktiosta. Tässä luvussa käsitellään yleistä eksponenttifunktiota ensin rationaalilukujen joukossa ja sen jälkeen laajennetaan määrittelyjoukko reaalilukujen joukkoon. Potenssifunktio ja kokonaislukupotenssin laskusäännöt oletetaan lukijalle ennestään tunnetuiksi.

Määritelmä 3.5. Eksponenttifunktio on muotoa

$$f(x) = a^x$$

oleva funktio, jossa kantaluku $a > 0$. Funktion arvot määritellään alilukujen 3.2.1 ja 3.2.2 tapauksissa 1 – 4.

Eksponenttifunktiosta käytetään usein myös merkintää $\exp_a : x \to a^x$, missä alaindeksi a kertoo funktion kantaluvun.

Huomautus. Eksponenttifunktiossa kantaluku on rajattu positiiviseksi luvuksi. Näin siksi, että eksponenttifunktiota tarkastellaan seuraavaksi rationaalilukujen joukossa (murtolukupotenssit), jolloin laskusääntöjen todistaminen ei onnistuisi jos kantaluku olisi negatiivinen. Lisäksi, koska $f(x) = 1^x$ saa aina arvon 1, eli se on vakiofunktio $y = 1$, rajataan tapaus $a = 1$ jatkossa tarkastelun ulkopuolelle ja oletetaan siis, että $a \neq 1$. [8, s. 396]

3.2.1 Eksponenttifunktio rationaalilukujen joukossa

Tarkastellaan seuraavaksi eksponenttifunktiota tapauksittain erilaisilla eksponentin x arvoilla. Aloitetaan kokonaislukupotensseilla, jolloin potenssin määritelmän ja käyttäytymisen oletetaan olevan lukijalle ennestään tuttuja.

Tapaus 1. Jos $x = 0$, niin

$$a^x = a^0 = 1.$$

Tapaus 2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku.

(i) Jos $x = n$, niin

$$a^x = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kertaa}}.$$

(ii) Jos $x = -n$, niin

$$a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Seuraavaksi laajennetaan tarkastelua tapauksiin, joissa eksponentti x on rationaaliluku.

Lause 3.6. *(Murtopotenssi) Olkoot $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ja $a > 0$. Tällöin yhtälöllä $y^s = a^r$ on täsmälleen yksi positiivijuuri.*

Todistus. Ks. [31, s. 123–124, Lause 1]. □

Tapaus 3. Olkoot r ja s positiivisia kokonaislukuja, eli $\frac{r}{s}$ kuvaa mitä tahansa positiivista rationaalilukua.

(i) Jos $x = \frac{r}{s}$, niin a^x on lauseen 3.6 positiivijuuri y. Merkitään

$$y = a^x = a^{\frac{r}{s}} = (a^{\frac{1}{s}})^r = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

(ii) Jos $x = -\frac{r}{s}$, niin

$$a^x = a^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{1}{\sqrt[s]{a^r}}.$$

Todistetaan seuraavaksi potenssin laskusäännöt kun eksponenttina on rationaaliluku.

Lause 3.7 (Laskusäännöt)**.** *Olkoot $a, b > 0$. Jokaisella $m, n \in \mathbb{Q}$ on voimassa seuraavat laskusäännöt:*

(a) $(ab)^n = a^n b^n$

(b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(c) $a^{m+n} = a^m a^n$

(d) $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$

(e) $(a^m)^n = a^{mn}$

Todistus. Koska halutaan todistaa laskusääntöjen pätevyys rationaalilukujen joukossa, merkitään todistuksia varten $m = \frac{r}{s}$ ja $n = \frac{u}{v}$, $(r, s, u, v \in \mathbb{Z})$. Lisäksi kun merkitään $y = a^n = a^{\frac{u}{v}}$ ja $z = b^n = b^{\frac{u}{v}}$, niin lauseen 3.6 nojalla $y^v = a^u$ ja $z^v = b^u$.

Kohdan (a) todistus: Todistetaan ensin tapaus $m, n \in \mathbb{Q}_+$. Aloitetaan kirjoittamalla

$$y = a^{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow y^v = a^u$$

ja kerrotaan oikeanpuoleinen yhtälö puolittain termillä b^u, jolloin saadaan

$$y^v b^u = a^u b^u.$$

Koska $z^v = b^u$, niin

$$y^v z^v = a^u b^u$$

joka edelleen saadaan kokonaislukupotenssin laskusääntöjen nojalla muotoon

$$(yz)^v = (ab)^u \Leftrightarrow yz = (ab)^{\frac{u}{v}}$$

Siis pätee $a^{\frac{u}{v}} b^{\frac{u}{v}} = (ab)^{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow a^n b^n = (ab)^n$. Olkoot sitten $m, n \in \mathbb{Q}_-$ eli $-m, -n \in \mathbb{Q}_+$. Nyt

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}\frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n.$$

Kohdan (b) todistus: Kuten kohdan (a) todistus, mutta puolittain kertomisen sijaan jaetaan puolittain termillä b^u, $b \neq 0$.

Kohdan (c) todistus: Kun $m, n \in \mathbb{Q}_+$,

$$m + n = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} = \frac{rv + us}{sv}.$$

Merkitään

$$y = a^{m+n} = a^{\frac{rv+us}{sv}}.$$

Nyt koska rv, us ja sv ovat kokonaislukuja, voidaan lauseen 3.6 mukaisesti kirjoittaa yhtälö muotoon

$$y^{sv} = a^{rv+us}$$

Tämä on edelleen kokonaislukupotenssin laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned} y^{sv} &= a^{rv} a^{us} \\ \Leftrightarrow y &= a^{\frac{rv}{sv}} a^{\frac{us}{sv}} \\ \Leftrightarrow y &= a^{\frac{r}{s}} a^{\frac{u}{v}} \end{aligned}$$

Näin ollen $a^{m+n} = a^m a^n$. Olkoot sitten $m, n \in \mathbb{Q}_-$ eli $-m, -n \in \mathbb{Q}_+$. Nyt

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}}$$

joka edelleen saadaan äskeisen todistuksen nojalla muotoon

$$\frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{(-1)(m+n)}} = a^{m+n}$$

Kohdan (d) todistus: Kuten kohdan (c) todistus, mutta $y^{sv} = a^{rv-us}$.

Kohdan (e) todistus: Olkoot ensin $m, n \in \mathbb{Q}_+$. Silloin

$$a^{mn} = a^{\frac{r}{s} \cdot \frac{u}{v}}.$$

Merkitään $y = a^{\frac{r}{s} \cdot \frac{u}{v}}$. Silloin voidaan lauseen 3.6 nojalla kirjoittaa

$$y^{sv} = a^{ru}$$

Koska $sv, ru \in \mathbb{Z}_+$ voidaan kokonaislukupotenssin laskusääntöjen nojalla kirjoittaa yhtälö muodossa

$$\begin{aligned} (y^v)^s &= (a^u)^r \\ \Leftrightarrow y^v &= (a^u)^{\frac{r}{s}} \\ \Leftrightarrow y^v &= (a^{\frac{r}{s}})^u \\ \Leftrightarrow y &= (a^{\frac{r}{s}})^{\frac{u}{v}} \end{aligned}$$

Näin ollen $a^{mn} = (a^m)^n$. Olkoot sitten $m, n \in \mathbb{Q}_-$, eli $-m, -n \in \mathbb{Q}_+$. Silloin

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = (a^{-m})^{-n}$$

joka edelleen saadaan äskeisen todistuksen nojalla muotoon

$$a^{(-m)\cdot(-n)} = a^{mn}.$$

□

Näin on todistettu laskusäännöt tapauksissa, joissa kantaluku on positiivinen reaaliluku ja eksponentti on rationaaliluku. Tarkastellaan seuraavaksi eksponenttifunktion ominaisuuksia.

Lause 3.8. *Eksponenttifunktiolla $f : x \to a^x$ on rationaalilukujen joukossa seuraavat ominaisuudet [31, s. 126]:*

(a) $a^x > 0$.

(b) *Funktio f on aidosti kasvava, kun $a > 1$.*

(c) *Funktio f on aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.*

Todistus. (a)-kohta seuraa suoraan lauseesta 3.6. Katso (b) ja (c)-kohtien todistukset teoksesta [31, s. 126–127]. □

3.2.2 Eksponenttifunktio reaalilukujen joukossa

Seuraavaksi laajennetaan eksponenttifunktioiden tarkastelua reaalilukujen joukkoon. Aiemmin on osoitettu, että eksponenttifunktio on määritelty rationaalilukujen joukossa, joten riittää todistaa, että eksponentti voi olla irrationaaliluku. Lukijan oletetaan tutustuneen täydellisyysaksioomaan ja supremumin käsitteeseen.

Tapaus 4. [31, s. 126–127] Olkoon x mielivaltainen irrationaaliluku δ. Tämä luku jakaa rationaaliluvut ala- ja yläluokkaan luvun δ molemmin puolin. Merkitään alaluokkaa $A_\delta = \{s \in \mathbb{Q} | s < \delta\}$ ja yläluokkaa $Y_\delta = \{s \in \mathbb{Q} | s > \delta\}$.

(i) Kun $a > 1$, niin lauseen 3.8 kohdan (b) nojalla funktio on aidosti kasvava, eli aina kun $s \in A_\delta$ ja $t \in Y_\delta$ pätee $a^s < a^t$. Näin ollen joukon $X = \{a^s \in \mathbb{R} | s \in A_\delta\}$ on oltava ylhäältä rajoitettu ja silloin täydellisyysaksiooman perusteella sillä on pienin yläraja joukossa $\mathbb{R}$. Nyt siis voidaan määritellä

$$a^\delta = \sup \{a^s \in \mathbb{R} | s \in \mathbb{Q} \text{ ja } s \leq \delta\}.$$

(ii) Kun $0 < a < 1$, niin funktio on aidosti vähenevä. Koska $\frac{1}{a} > 1$ niin $(\frac{1}{a})^\delta$ on äskeisen kohdan perusteella määritelty. Lisäksi $a^\delta = \dfrac{1}{(\frac{1}{a})^\delta}$.

(iii) Kun $a = 1$, niin $1^\delta = 1$ kaikilla eksponentin arvoilla δ.

Samalla todistettiin, että eksponentti voi olla mielivaltainen irrationaaliluku, joten eksponenttifunktion määrittelyjoukko laajeni rationaaliluvuista reaalilukujen joukkoon.

Lause 3.9. *Eksponenttifunktiolle $f : x \to a^x$ pätee reaalilukujen joukossa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $D_f = \mathbb{R}$ *ja* $R_f = \mathbb{R}_+$.

(b) *Funktio f on aidosti kasvava, kun $a > 1$.*

(c) *Funktio f on aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.*

(d) *Eksponenttifunktio f on jatkuva kaikkialla.*

Todistus. [31, s. 126–127] Määrittelyjoukko $D_f = \mathbb{R}$ on todistettu tapauksessa 4. Väitteen (b) todistamiseksi valitaan mielivaltaiset $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $x_1 < x_2$. Tiedetään, että on olemassa rationaaliluvut r_1 ja r_2 siten, että $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Kun $a > 1$ niin lauseen 3.8 nojalla $a^{r_1} < a^{r_2}$. Koska voidaan kirjoittaa

$$a^{x_1} = \sup\{a^s \in \mathbb{R} | s \in \mathbb{Q}, s \leq x_1\}$$

ja myös

$$a^{r_1} = \sup\{a^s \in \mathbb{R} | s \in \mathbb{Q}, s \leq r_1\}$$

niin on oltava $a^{x_1} \leq a^{r_1}$. Edelleen

$$a^{x_2} = \sup\{a^s \in \mathbb{R} | s \in \mathbb{Q}, s \leq x_2\}$$

ja

$$a^{r_2} = \sup\{a^s \in \mathbb{R} | s \in \mathbb{Q}, s \leq r_2\}$$

joten $a^{r_2} \leq a^{x_2}$. Yhteenvetona

$$a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}$$

Näin todistettiin, että ehdosta $x_1 < x_2$ seuraa $a^{x_1} < a^{x_2}$, kun $a > 1$, eli funktio on aidosti kasvava. Myös kohta (c) seuraa edellisistä todistuksista.

Arvojoukon $R_f = \mathbb{R}_+$ ja funktion jatkuvuuden todistaminen sivuutetaan, mutta ne on todistettu teoksessa [19] eksponenttifunktiolle, jonka kantaluku on e ja todistus voidaan yleistää koskemaan kaikkia eksponenttifunktioita. (Ks. [19, Lauseen 6.13 todistus, s. 141–142]) □

Seuraavaksi todistetaan lauseen 3.7 laskusäännöt päteviksi myös reaalilukueksponenteilla. Lukijan oletetaan tuntevan rationaalisia raja-arvoja koskevat laskusäännöt.

Lause 3.10 (Laskusäännöt)**.** *Olkoot $a, b > 0$. Seuraavat laskusäännöt ovat voimassa, kun $m, n \in \mathbb{R}$:*

(a) $(ab)^n = a^n b^n$

(b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(c) $a^{m+n} = a^m a^n$

(d) $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

(e) $(a^m)^n = a^{mn}$

Todistus. Nämä voidaan todistaa lauseen 3.7 nojalla, sillä kaikki reaaliluvut voidaan kirjoittaa rationaalilukujen raja-arvoina, eli sijoitetaan

$$a^n = \lim_{r \to n} a^r,$$

missä $r \in \mathbb{Q}$. Esimerkkinä (b)-kohdan todistus:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\lim_{r \to n} a^r}{\lim_{r \to n} b^r}$$

ja se voidaan edelleen raja-arvon rationaalisten laskusääntöjen nojalla kirjoittaa muotoon

$$\lim_{r \to n} \left(\frac{a^r}{b^r}\right).$$

Koska $r \in \mathbb{Q}$ niin lauseen 3.7 nojalla eksponentti voidaan ottaa sulkeiden ulkopuolelle, eli

$$\lim_{r \to n} \left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Muut säännöt voidaan todistaa vastaavasti. □

3.3 Logaritmifunktio

Tähän mennessä olemme tarkastelleet eksponenttifunktiota ja määritelleet sen reaalilukujen joukossa. Tässä luvussa määrittelemme logaritmifunktion ja tarkastelemme sen ominaisuuksia ja logaritmeille päteviä laskusääntöjä. Perustana kaikelle tälle käytetään eksponenttifunktion yhteyttä logaritmifunktioon.

Koska eksponenttifunktio on jatkuva ja aidosti monotoninen, kun kantaluku a on positiivinen ja luvusta yksi poikkeava, se on lauseen 3.3 nojalla bijektio määrittelyjoukoltaan $\mathbb{R}$ arvojoukolleen $\mathbb{R}_+$. Funktion bijektiivisyydestä seuraa, että sille on olemassa käänteisfunktio. Tätä käänteisfunktiota kutsutaan *logaritmifunktioksi*.

Määritelmä 3.11. Olkoon $a > 0$ ja $a \neq 1$. Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ käänteisfunktiota $f^{-1}(x) = \log_a x$ kutsutaan a-kantaiseksi logaritmifunktioksi.

Käänteisfunktion määritelmän mukaan $f(x) = y$ jos ja vain jos $f^{-1}(y) = x$. Siis, kun $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, niin määritelmä 3.11 tarkoittaa, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}_+$

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x \tag{3.1}$$

Kutsutaan kaavaa (3.1) logaritmin määritelmäksi.

Esimerkki 3.12. [26, s. 50] Olkoon a positiivinen ja $a \neq 1$. Logaritmin määritelmästä (3.1) seuraa, että

(a) $\log_a a^x = x$,

(b) $a^{\log_a y} = y \quad (y > 0)$,

(c) $\log_a a = 1$, sillä $a^1 = a$,

(d) $\log_a 1 = 0$, sillä $a^0 = 1$.

Lause 3.13. *Logaritmifunktiolla $f(x) = \log_a x$ on seuraavat ominaisuudet:*

(a) $D_f = \mathbb{R}_+$ *ja* $R_f = \mathbb{R}$.

(b) *Funktio f on aidosti kasvava, kun $a > 1$.*

(c) *Funktio f on aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.*

(d) *Logaritmifunktio on jatkuva kaikilla $x > 0$.*

Todistus. Kohtaa (a) voidaan pitää seurauksena siitä, että logaritmifunktio on eksponenttifunktion käänteisfunktio ja käänteisfunktioille pätee aina $D_f = R_{f^{-1}}$ ja $D_{f^{-1}} = R_f$ ja lauseen 3.9 mukaan $D_{\exp} = \mathbb{R}$ ja $R_{\exp} = \mathbb{R}_+$. Kohdat (b) ja (c) seuraavat lauseesta 3.3 ja eksponenttifunktion ominaisuuksista. Kohdan (d) todistus sivuutetaan. □

Lauseen 3.10 laskusäännöistä saadaan johdettua logaritmien laskusäännöt, jotka esitellään seuraavaksi.

Lause 3.14 (Logaritmien laskusäännöt)**.** *Olkoot* $a, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$ *ja* $x, y \in \mathbb{R}_+$. *Silloin logaritmeille on voimassa seuraavat laskusäännöt:*

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(c) $\log_a x^r = r \log_a x, \qquad$ *kun* $r \in \mathbb{R}$

(d) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Todistus. (a) Todistusta varten merkitään $\log_a x = u, \log_a y = v$ ja $\log_a xy = z$. Nyt logaritmin määritelmän (kaava (3.1)) ja lauseen 3.10 perusteella $a^u = x, a^v = y$ ja $a^z = xy = a^u a^v = a^{u+v}$ eli

$$\begin{aligned} a^z &= a^{u+v} \\ \Leftrightarrow z &= u + v \\ \Leftrightarrow \log_a xy &= \log_a x + \log_a y. \end{aligned}$$

(b) Merkitään $\log_a x = u, \log_a y = v$ ja $\log_a \frac{x}{y} = w$. Nyt $a^u = x, a^v = y$ ja $a^w = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$ eli

$$\begin{aligned} a^w &= a^{u-v} \\ \Leftrightarrow w &= u - v \\ \Leftrightarrow \log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y. \end{aligned}$$

(c) Merkitään $\log_a x = u$. Tällöin logaritmin määritelmän perusteella $a^u = x$. Voidaan siis kirjoittaa

$$\log_a x^r = \log_a (a^u)^r = \log_a a^{ru} = ru = r \log_a x.$$

(e) Merkitään $\log_a x = y$. Logaritmin määritelmän perusteella $a^y = x$. Koska tiedetään, että kantaluku $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ ja $x \in \mathbb{R}_+$, eli molemmat puolet ovat positiivisia, voidaan ottaa puolittain logaritmi $\log_b$, missä $b \in \mathbb{R}_+$ ja $b \neq 1$.

$$\begin{aligned} a^y &= x \qquad | \log_b \\ \Leftrightarrow \log_b a^y &= \log_b x \end{aligned}$$

Todistettuamme laskusäännön (c) voimme kirjoittaa yhtälön muotoon

$$\begin{aligned} y \log_b a &= \log_b x \quad | : \log_b a \neq 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{aligned}$$

Näin ollen $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. □

Lauseen 3.14 kohdasta (d) voidaan käyttää nimityksiä kantaluvun vaihtosääntö tai logaritmijärjestelmän muunnoskaava. Mikä tahansa logaritmi voidaankin ilmaista halutun kantaluvun logaritmien avulla.

Esimerkki 3.15. Muunna $\log_8 x$ kaksikantaiseksi logaritmiksi.

Ratkaisu:

$$\log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 x}{3}.$$

3.4 Tärkeimmät logaritmijärjestelmät

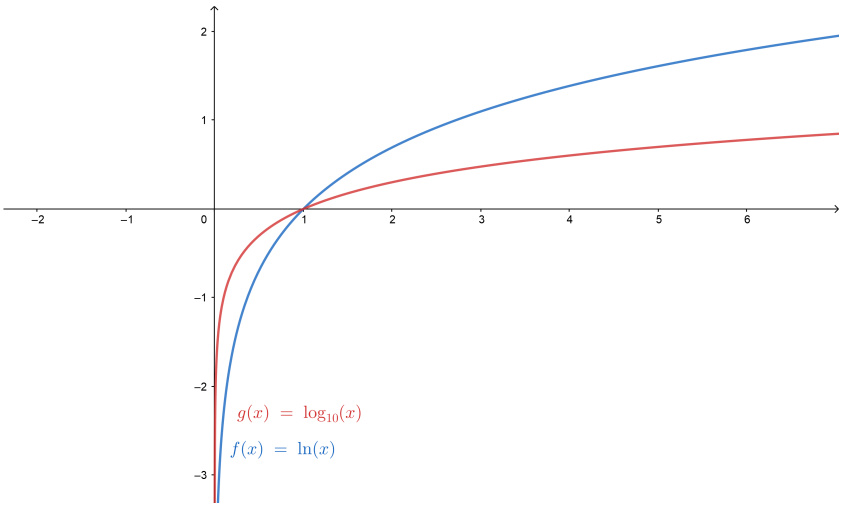
Kuten aiemmin määriteltiin, logaritmin kantalukuna voi olla mikä tahansa positiivinen, luvusta yksi poikkeava reaaliluku. Yleisimmin käytettyjä logaritmijärjestelmiä ovat *luonnollinen logaritmi* ja *Briggsin logaritmi*.

Määritelmä 3.16. Logaritmia, jonka kantalukuna on Neperin luku e, kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi ja siitä voidaan käyttää merkintää $\ln x$ tai $\log_e x$.

Luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktiota $f(x) = e^x$ nimitetään usein luonnolliseksi eksponenttifunktioksi. Joissakin yhteyksissä puhuttaessa eksponenttifunktiosta viitataan nimenomaan e-kantaiseen eksponenttifunktioon.

Määritelmä 3.17. Logaritmia, jonka kantalukuna on 10, kutsutaan Briggsin logaritmiksi tai kymmenkantaiseksi logaritmiksi. Siitä voidaan käyttää merkintää $\lg x$ tai $\log_{10} x$.

Kymmenkantaiseen logaritmiin törmätään esimerkiksi kemiassa pH-arvojen laskemisessa. Koska Neperin luku e ja luku 10 kuuluvat positiivisiin reaalilukuihin, riittää todeta, että näille logaritmeille pätevät samat säännöt ja ominaisuudet kuin edellä on esitelty. Kuvassa 3.1 sinisellä on luonnollisen logaritmifunktion kuvaaja $f(x)$ ja punaisella kymmenkantaisen eli Briggsin logaritmifunktion kuvaaja $g(x)$.



Kuva 3.1. Luonnollinen logaritmifunktio $f(x)$ ja Briggsin logaritmifunktio $g(x)$

4 Teoreettinen ongelma-analyysi

Kehittämistutkimus aloitetaan ongelma-analyysilla, jossa pyritään kartoittamaan kehittämisen lähtökohdat ja selvittämään kehittämisen tarpeet, mahdollisuudet ja haasteet [34, s. 17]. On tärkeää selvittää, mitä aiheesta jo tiedetään ja mitä on tarve tutkia lisää.

Siihen, millainen kehitettävän oppimateriaalin täytyisi olla, vaikuttaa monia tekijöitä. Tässä tutkielmassa oppimateriaalilla tarkoitetaan opetussuunnitelmaan perustuvaa, tietylle ikäluokalle tai tietyn oppimiskokonaisuuden opiskelua varten laadittua materiaalia (vrt. [44, s. 231]). Aloitetaan siis kehittämisprojektin suunnittelu tarkastelemalla lukion opetussuunnitelman perusteita. Muita materiaalin kehittämisessä huomioitavia seikkoja ovat muun muassa sähköisten ylioppilaskirjoitusten vaatimukset, oppimateriaalin kohderyhmä sekä opetuskokeilun aika ja paikka.

4.1 Logaritmit lukion opetussuunnitelman perusteissa

Tässä luvussa tarkastellaan vuonna 2015 julkaistuja lukion opetussuunnitelman perusteita [28]. Tarkastelun kohteena ovat ne matematiikan kurssit, joilla käsitellään logaritmeja. Marraskuussa 2019 julkaistiin uuden opetussuunnitelman perusteet, jotka astuvat voimaan syksyllä 2021 [30]. Tästä huolimatta tässä tutkimuksessa päädyttiin keskittymään vuonna 2015 julkaistuihin opetussuunnitelman perusteisiin, koska tutkimuksen suorittamisen aikana lukio-opetus noudattaa vielä kyseistä opetussuunnitelmaa.

Lukion matematiikassa törmätään logaritmin käsitteeseen ensimmäisen kerran jo ensimmäisellä matematiikan kurssilla *MAY1 Luvut ja lukujonot*, joka on kaikille opiskelijoille yhteinen riippumatta siitä, valitseeko opiskelija pitkän vai lyhyen matematiikan oppimäärän. Kurssin keskeisten sisältöjen joukosta löytyvät logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys. Lisäksi listasta löytyy muotoa $a^x = b, x \in \mathbb{N}$ olevien yhtälöiden ratkaiseminen, mutta sitä opetussuunnitelmassa ei määritetä, käytetäänkö yhtälön ratkaisemiseen logaritmia vai muita keinoja. [28, s. 130]

Lyhyen matematiikan osalta logaritmiin törmätään uudelleen kurssilla *MAB4 Matemaattisia malleja*. Kyseisen kurssin keskeisiin sisältöihin on listattu muun muassa eksponentiaalisen mallin soveltaminen ja eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla. [28, s. 137–138] Logaritmin käsitteen ymmärtäminen ei kuitenkaan näyttäisi olevan suurimmassa roolissa tälläkään kurssilla, sillä logaritmia käsitellään pääasiassa välineenä ratkaista eksponenttiyhtälöitä.

Pitkän matematiikan kurssilla *MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot* logaritmin käsitteeseen perehdytään edellä mainittuja kursseja syvällisemmin. Opetussuunnitelman perusteissa on listattu kurssin tavoitteiksi, että opiskelija

- kertaa potenssienlaskusäännöt mukaan lukien murtopotenssit,
- tuntee juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä,

- osaa tutkia juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita derivaatan avulla,
- osaa hyödyntää eksponenttifunktiota mallintaessaan erilaisia kasvamisen ja vähenemisen ilmiöitä,
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden tutkimisessa ja juuri-, eksponentti- ja logaritmiyhtälöiden ratkaisemisessa sekä juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktion derivaattojen määrittämisessä sovellusongelmissa. [28, s. 134]

Tavoitteiksi logaritmien osalta on siis asetettu, että opiskelija oppii tuntemaan logaritmifunktion ominaisuudet, osaa ratkaista logaritmiyhtälöitä, osaa tutkia logaritmifunktioita derivaatan avulla ja käyttää teknisiä apuvälineitä logaritmifunktioiden tutkimisessa ja niiden derivaattojen määrittämisessä. Logaritmifunktiot ja -yhtälöt sekä logaritmifunktion derivaatta on listattu kurssin keskeisiin sisältöihin. [28, s. 134]

4.2 Käsitteellinen ymmärrys ja menetelmällinen sujuvuus

Erkki Pehkonen on todennut matematiikan opetuksesta seuraavaa:

> *Koulun matematiikanopetuksen pitäisi tähdätä sekä laskutaitojen hankkimiseen että ymmärtämiseen. Kumpikaan näistä ei yksin riitä, koska runsas laskeminen ei vielä lisää ymmärtämistä eikä myöskään laskutaito lisäänny pelkästään ymmärtämisen myötä.* [33, s. 37]

Ymmärtäminen on myös opetussuunnitelmissa matematiikan opetuksen tavoitteena. Kuitenkin itse ymmärtämisen käsite jätetään yleensä lukijan tulkittavaksi. Ymmärtäminen on monitulkintainen ja siksi myös vaikeasti mitattavissa oleva ilmiö. Esimerkiksi Leinosen [22] mukaan ymmärtäminen voidaan käsittää tilaksi, jossa yksilö näkee tapahtumat osana laajempaa kontekstia tai käsitteellistä viitekehystä. Pehkonen [32] korostaa, että matemaattisessa ymmärtämisessä painotetaan nykyisin sen prosessiominaisuutta ja luonnehtii ymmärtämistä yksilön kannalta ikään kuin loputtomaksi portaikoksi, jolla noustaan ylöspäin kokemusten ja tiedon lisääntymisen myötä. Täydellistä ymmärtämistä ei hänen mukaansa voida koskaan saavuttaa, sillä vaikka asiakokonaisuuden ymmärtäisi kuinka hyvin tahansa, sitä voidaan aina tarkastella jostain uudesta näkökulmasta. [32, s. 376]

Tässä tutkielmassa on päädytty rinnastamaan matemaattinen ymmärtäminen käsitteelliseen ymmärtämiseen. Matematiikassa tarvitaan sekä menetelmällistä sujuvuutta että käsitteellistä ymmärtämistä. Menetelmällisellä sujuvuudella tarkoitetaan yleensä sitä, mitä joku voisi nimittää myös laskutaidoksi, eli matematiikan merkintöjen, algoritmien, kaavojen sekä menetelmien hallintaa. Tämä tarkoittaa, että henkilö tavallaan tietää *miten* jokin asia tehdään, mutta siihen *miksi* jotain tehdään, tarvitaan myös käsitteellistä ymmärtämistä. [12, s. 111]

Käsitteellinen ymmärrys muodostuu, kun henkilö yhdistää uutta tietoa osaksi vanhaa eli muodostaa tiedon osasista ikään kuin tietoverkon. Ymmärtämisen merkkinä onkin usein pidetty sitä, että henkilö osaa konstruoida tietoa ja muodostaa yhteyksiä asioiden tai erilaisten esitysmuotojen välille. [12, s. 111, 114] Uuden tiedon

liittäminen aiemmin opittuihin asioihin korostuu ymmärtämisen kannalta etenkin matematiikassa sen kumulatiivisen luonteen takia.

Ymmärtämiseen liitetään usein myös termi käsitteellinen eli konseptuaalinen tieto. Konseptuaalisen tiedon ajatellaan olevan verkosto, jossa asioiden väliset yhteydet ovat yhtä merkittäviä kuin yksittäiset tiedon osat. Itse asiassa konseptuaalisen tiedon yksikkö ei voi määritelmän mukaan olla erillinen tieto, vaan tieto on konseptuaalista vain, jos henkilö tunnistaa sen suhteen muihin tietoihin. [10, s 3-4] Haapasalo ym. [9, s. 50–54] määrittelevät konseptuaalisen tiedon semanttiseksi verkoksi, ”jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan”. Puolestaan Leinosen määritelmän [22, s. 30] mukaan konseptuaaliseen tietoon kuuluu faktoja, relaatioita, periaatteita ja yleistyksiä, jotka tallentuvat kestomuistin semanttisiin verkkoihin. Useimmissa määritelmissä korostuukin semanttisen tietoverkon muodostaminen yksilön konstruoimista tiedon osista.

Proseduraalinen tieto taas usein määritellään dynaamiseksi ja tarkoituksenmukaiseksi sääntöjen, menetelmien ja toimintakaavojen suorittamiseksi. Sen prosessien voidaan ajatella etenevän ikään kuin suoritusjonoina. [22, s. 53] Proseduraalinen tieto käsittää kahdentyyppistä tietoa: matematiikan symbolien ja symboliyhdistelmiin liittyvien käytäntöjen tuntemus sekä matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen tarvittavien sääntöjen ja proseduurien tuntemus [10, s. 7]. Kuten muun muassa Haapasalo [9, s. 50–54] on todennut, konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välille on vaikeaa tehdä selvää erotusta, minkä vuoksi matematiikan tehtävienkään luokittelu näihin kahteen kategoriaan ei ole yksinkertaista tai mielekästä.

Matematiikan ylioppilaskokeissa on viimevuosina alettu entistä enemmän painottaa käsitteiden ymmärtämistä ja konseptuaalisen tiedon soveltamista. Logaritmin käsitteen ymmärtäminen ei ole sama asia kuin logaritmin määritelmän osaaminen. Logaritmin määritelmä esitetään oppikirjoissa yleensä valmiina symbolikielen kaavana $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$, joka ei sellaisenaan välttämättä kerro opiskelijalle mitään siitä, mitä logaritmi tarkoittaa. Määritelmän osaaminen edellä mainittuna kaavana voitaisiin luokitella menetelmälliseksi sujuvuudeksi ja käsitteellinen ymmärtäminen astuu mukaan vasta, kun henkilö ymmärtää esimerkiksi, miksi logaritmi on määritelty näin tai mistä sen ehdot ovat peräisin. Matematiikan oppiminen ei yleensä myöskään ala luontevasti laskuprosesseilla, joten ennen kuin opetellaan laskemaan logaritmien arvoja, olisi hyvä olla muodostettuna jokin käsitys siitä, mitä logaritmi tarkoittaa ja miten se liittyy aiemmin opittuihin asioihin.

4.3 Tutkimuksia logaritmien osaamisesta ja opetuksesta

Ongelma, josta idea tälle kehittämistutkimukselle syntyi, oli empiirinen havainto siitä, että logaritmin käsite jää monilta lukiolaisilta ymmärtämättä ja logaritmeihin liittyvien oppisisältöjen osaaminen jää siten heikoksi. Vaikka tutkimustietoa logaritmien osaamisen tilasta Suomessa oli löydettävissä vähän, tutkimukset tukevat tätä havaintoa. Esimerkiksi tutkimuksessa [27], jossa analysoitiin Tampereen teknillisen yliopiston perustaitotestin tuloksia vuosilta 2006–2017, huomattiin, että matemaattinen osaaminen on heikointa trigonometriassa, derivoinnissa ja logaritmeissa.

Perustaitotesti on järjestetty Tampereen teknillisessä yliopistossa vuodesta 2004 alkaen ensimmäisen vuoden opiskelijoille, ja siinä mitataan lukiotason matematiikan osaamista. Edellä mainittuihin aiheisiin liittyvissä tehtävissä sekä pistekeskiarvo että vastausprosentti olivat analyysin mukaan tehtäväsarjan alimpia. Tutkimuksessa todetaan myös, että yliopisto-opintojen kannalta olisi toivottavaa, että lukiomatematiikan painopistealueet keskittyisivät entistä enemmän ymmärtämiseen. [27]

Toinen tutkimus, jossa on mitattu korkeakouluopinnot juuri aloittaneiden opiskelijoiden osaamista logaritmien suhteen, on Vesa Koivusen pro gradu -tutkielma [20]. Koivunen teetti Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen uusilla matematiikan aineenopettajaksi opiskelevilla kyselyn, jonka perusteella hän arvioi heidän osaamistasoaan logaritmi- ja eksponenttifunktioissa. Hänen tutkimuksensa tulosten perusteella opiskelijoiden ymmärrys logaritmeista on vahvasti proseduraalisen tiedon tasolla, mutta eksponenttifunktioiden osalta on nähtävissä myös konseptuaalisen tiedon tasoa. Eksponenttifunktio näytti muutenkin olevan opiskelijoilla paljon paremmin hallinnassa kuin logaritmi. [20]

Molemmissa edellä kuvatuissa tutkimuksissa on syytä huomioida, että tutkitut henkilöt ovat päässeet korkeakouluun opiskelemaan alaa, jossa vaaditaan hyvää matemaattista osaamista. Tämän vuoksi he ovat hyvin todennäköisesti matemaattisesti lahjakkaampia ja enemmän matematiikasta kiinnostuneita kuin keskivertolukiolaiset. Koska tutkimuksissa ilmeni, että logaritmien osaaminen oli näillä opiskelijoilla heikkoa, on se mitä todennäköisimmin keskivertotasoltaan vieläkin heikompaa, joten kehittämistarve on ilmeinen.

Tämän tutkimuksen kannalta hyödyllisin logaritmien opiskelua koskeva tutkimus lienee Weberin pilottitutkimus [48], jossa pyrittiin luomaan konseptuaalisempaa käsitystä eksponentti- ja logaritmilausekkeista. Pilottitutkimuksessa testattiin Weberin teoreettiseen tarkasteluun perustamaa lähestymistapaa, jossa pyrittiin ensin vahvistamaan eksponenttilausekkeen ymmärtämistä prosessina ja sen jälkeen suoritettiin rutiinilaskuja, joissa eksponentti- ja logaritmilausekkeita kuvattiin matemaattisina objekteina. Näin tavoiteltiin sitä, että käsitys eksponentin ja logaritmin välisestä yhteydestä vahvistuisi. Eksponenttilausekkeen ymmärtämistä prosessina pyrittiin tehostamaan muun muassa esittämällä se toistuvana kertolaskuna, esimerkiksi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kertaa}}.$$

Lisäksi tehtävissä pyrittiin selventämään eksponentti- ja logaritmilausekkeiden merkintöjen rakennetta. Sekä pilottiryhmä että vertailuryhmä osoittivat Weberin kokeilun jälkeen hyvää proseduraalista osaamista, mutta etenkin konseptuaalisissa tehtävissä pilottiryhmän tulokset olivat vertailuryhmää paremmat. [48]

Weberin tutkimuksen teoriapohjana sovellettiin niin sanottuja prosessi-objekti-teorioita. Niiden perusta on, että matemaattiset käsitteet voidaan ymmärtää sekä prosesseina että objekteina. [12, s. 114] Esimerkiksi merkintä $\log_2 4$ voidaan käsittää prosessina, jossa otetaan kaksikantainen logaritmi luvusta 4, mutta yhtä hyvin se voidaan ajatella objektina, kuten esimerkiksi laskutehtävän tarkkana vastauksena, joka tässä tapauksessa vastaa lukua 2. Käsiteltäessä logaritmeja objekteina voi olla

helpompi ymmärtää, että niille voidaan edelleen suorittaa toimintoja. Näin ajateltuna on myös helpompi ymmärtää sellaisia merkintöjä, jotka sisältävät tuntemattomia osia.

Myös Hähkiöniemi nostaa tämän teorian esiin tutkimuksessaan [12, s. 114], koska tutkimuksissa on havaittu, että oppija hahmottaa useat käsitteet ensin prosesseina ja vasta myöhemmin objekteina. Esimerkiksi logaritmien laskusääntöjä ei kyetä muodostamaan ennen kuin logaritmeja opitaan käsittelemään objekteina, joille voidaan suorittaa toimintoja. Logaritmin oppimisprosessia voisikin olla hyvä viedä Weberin pilottitutkimuksen tapaisesti prosessiajattelun kautta kohti objektiajattelua ja siten myös käsitteellistä ymmärtämistä.

4.4 Matematiikan kielentäminen

Jotta matematiikkaa ylipäätään voi osata, on osattava matematiikan kieltä. Matematiikan kieli saattaa olla esteenä matematiikan ymmärtämiselle varsinkin logaritmikurssilla, jossa opiskelija törmää uusiin, monimutkaisiin symbolijonoihin.

Termillä *kielentäminen* tarkoitetaan tässä tutkielmassa oman ajatteluprosessin kuvaamista kielen keinoin. Tarkemmin sanottuna matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan oman matemaattisen ajattelun ilmaisemista kirjallisesti tai suullisesti. *Matemaattisella ajattelulla* puolestaan tarkoitetaan matemaattisen tiedon prosessointia, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot. Tieto voi olla luonteeltaan proseduraalista tai konseptuaalista [14, s. 103]. Tässä tutkielmassa tarkastellaan matematiikan kirjallista kielentämistä, jossa voidaan käyttää hyväksi matematiikan symbolikieltä, matematiikan luonnollista kieltä ja matematiikan kuviokieltä. Nämä matematiikan kielen eri muodot ovat vahvasti yhteydessä toisiinsa. [13][15]

Aikaisempien tutkimusten perusteella matematiikan opetuksessa on hyvin perusteltua käyttää kielentämistä oppimateriaaleissa ja oppimisen tukena (mm. [2], [3], [13], [15], [38]). Matematiikan kielentäminen saattaa auttaa oppilasta jäsentämään omaa ajatteluaan ja sen avulla oppilaan oma ajattelu tulee näkyväksi myös muille. Lisäksi oppijan matemaattisen ajattelun sanallistaminen luonnollisen kielen avulla auttaa opettajaa oppimisen arvioinnissa ja opetustilanteiden suunnittelussa. [13][15]

Matematiikan kielentämistä opetusmenetelmänä on tutkittu Suomessa noin 20 vuotta. Esimerkiksi Tampereen yliopiston matematiikan didaktiikan yliopistonlehtori Jorma Joutsenlahti on tutkinut matematiikan kielentämistä paljon. Artikkelissaan *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa* [15] hän esittelee tutkimuskokeilunsa siitä, miten lyhyen matematiikan opiskelijat kokevat kielentämismallien käyttökelpoisuuden sanallisten tehtävien ratkaisemisessa. Tutkimuksen aikana opiskelijoille esiteltiin erilaisia kielentämisen malleja ja selvitettiin, miten opiskelijat kokevat kielentämismallien käyttökelpoisuuden sanallisten tehtävien ratkaisuissa sekä millaisia kielentämismalleja opiskelijat käyttävät. [15]

Suurin osa opiskelijoista koki kirjallisen kielentämisen auttavan heitä ajattelunsa jäsentämisessä itselleen ja siten myös tukevan asioiden ymmärtämistä. Noin puolet vastaajista koki kirjallisen kielentämisen tärkeäksi myös ratkaisun muille esittämisen näkökulmasta. Useimpia auttavaksi apukeinoksi koettiin kuvan piirtäminen. Ainoastaan noin viidesosa vastaajista ei kokenut saavansa mitään hyötyä kielentämisestä.

Kirjallisen kielentämisen huonoiksi puoliksi koettiin tekstin tuottamisen työläys ja että se vie paljon aikaa. Tämä turhautti etenkin opiskelijoita, joilla ei yleensä ole vaikeuksia löytää tehtäviin oikeita ratkaisuja. [15]

Muissakin tutkimuksissa on huomattu useimpien opiskelijoiden kokeneen kirjallisen kielentämisen suurimmaksi hyödyksi sen, että se auttaa tilanteen hahmottamista ja prosessin selkenemistä. Kielentämistehtävien hyödyntämistä nimenomaan logaritmien opiskelussa on käsitelty muun muassa Markus Blomqvistin pro gradu -tutkielmassa, jossa tutkittiin kielentämistehtävien tärkeimpiä ominaisuuksia ja tarkoituksenmukaisuutta lukion lyhyessä matematiikassa. Tutkimuksen kohteena oli lyhyen matematiikan vanha kurssi *MAB3 Matemaattisia malleja 1*, jonka sisältöihin kuuluivat myös eksponentti- ja logaritmifunktiot ja -yhtälöt. Tutkimuksessaan Blomqvist testasi kehittämiään kielentämistehtäviä kahdessa lukiossa, ja tutkimusaineisto koostui palautetuista kielentämistehtävistä, Likert-asteikollisesta mielipide- ja asennekyselystä ($n = 63$) sekä avoimista kysymyksistä liittyen kielentämisen hyötyihin ja huonoihin puoliin. Blomqvist jaotteli vastaajat matematiikan arvosanan perusteella kolmeen arvosanaluokkaan, heikot (4-6), keskitasoiset (7-8) ja hyvät (9-10) ja tutki arvosanaluokan ja sukupuolen vaikutusta tuloksiin. [3]

Tutkimuksen tulosten perusteella kielentämistehtävät antoivat kullekin arvosanaluokalle sen tarvitsemaa tukea matematiikan osaamisen suhteen; ”heikot” kokivat kielentämisen auttaneen hieman heidän ymmärrystään, ”keskitasoiset” kokivat sen olleen hyödyllistä ratkaisun helpottumisen kautta ja ”hyvät” näkivät kielentämisen arvon heidän ajattelunsa edelleen syvenemiselle. Kuitenkin parhaimman arvosanaluokan tytöt kokivat kielentämistehtävät turhiksi ja vaikeiksi. Lisäksi tutkimuksessa vahvistui, että opettaja saa kielentämistehtävien vastauksista paljon hyödyllistä tietoa opiskelijoiden matemaattisesta osaamisesta ja ajattelusta. [3, s. 132–135] Näin opettaja voi toteuttaa monipuolista arviointia ja tukea opiskelijoita entistä paremmin niissä asioissa, jotka ovat jääneet epäselviksi.

Matematiikan kielentäminen on tärkeä väline myös omien ratkaisujen perustelussa, mitä vaaditaan esimerkiksi ylioppilaskokeessa hyvään suoritukseen ja kokelaan kypsyyden osoittamiseen [50]. Ratkaisun esittäminen perusteluineen vaatii yleensä matematiikan symbolikielen lisäksi luonnollisen kielen ja kuviokielen tarkoituksen mukaista käyttöä [16, s. 412]. Siksi täytyisikin pohtia, millainen matematiikan opetus harjaannuttaa opiskelijaa perustelemaan sekä käyttämään ja ymmärtämään matematiikan kielen erilaisia esitysmuotoja.

Matematiikan kirjallista kielentämistä varten on kehitetty monia erilaisia kielentämistehtävätyyppejä (mm. [38], [24], [2]), joita olen koonnut taulukkoon 4.1. Kielentämistehtävissä oleellista on, että oppija pääsee operoimaan useammilla kuin yhdellä matematiikan kielellä. Etenkin koodinvaihtotehtävät tukevat yhteyksien muodostamista matematiikan eri kielten ja esitysmuotojen välille. Kielentämistehtävien etuna on muun muassa se, että niiden ratkaisut vastaavat sekä *miten*- että *miksi*-kysymyksiin. Näin ollen ne tukevat proseduraalisen tiedon kehittymisen lisäksi konseptuaalisen tiedon syntyä. [3][38]

Koodinvaihtotehtävät osoittautuivat tutkivan harjoittelun tutkimuksessani hyödyllisiksi ainakin logaritmimerkintöjen ymmärtämisen kannalta, joten haluan käyttää niitä myös tässä tutkimuksessa. Lisäksi tulen hyödyntämään täydennys-, vir-

heen etsintä-, ratkaisun argumentointi-, omin sanoin selittäminen-, matematiikan konkretisointi- ja ratkaisun järjestäminen -tehtävätyyppejä.

Taulukko 4.1. Kielentämistehtävätyyppejä

Tehtävämalli	**Kuvaus**
Koodinvaihto	Asian ilmaiseminen jollain toisella matematiikan kielellä
Täydennys	Täydennetään annettuun ratkaisuun puuttuvat ratkaisun kannalta olennaiset osat
Virheen etsintä	Etsitään valmiista ratkaisusta virhe(itä)
Ratkaisusta tehtävä	Päätellään annetusta ratkaisusta, mikä olisi tehtävänanto, johon ratkaisu sopiin
Ratkaisun argumentointi	Perustellaan valmista tai itse tehtyä ratkaisua matematiikan eri kielien avulla
Tiedon seulonta	Etsitään tehtävänannosta ratkaisun kannalta olennaiset asiat
Omin sanoin selittäminen	Selitetään jokin asia omin sanoin, eli annetaan sille jokin merkitys ilman matematiikan symbolikieltä
Matematiikan konkretisointi	Keksitään matemaattiselle sisällölle vastineita tai käyttötarkoituksia arkielämästä
Ratkaisun järjestäminen	Järjestetään ratkaisulle valmiiksi annetut elementit, kuten ratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen

4.5 Tutkiva matematiikka

Hähkiöniemen [12, s. 128] mukaan matematiikan käsitteiden opiskelussa on tärkeää aktivoida opiskelija itse tutkimaan, tekemään havaintoja, päättelemään ja harrastamaan matemaattista ajattelua. Hänen mukaansa tutkijayhteisössä onkin jo pitkään pidetty tehokkaina opetusmenetelmiä, jotka perustuvat siihen, että opiskelija itse tutkii jotain matematiikan ilmiötä tehtävissä, joihin hänelle ei ole annettu valmista ratkaisumenetelmää. Tällaisille opetusmenetelmille on käytetty tutkimuksesta riippuen useita eri nimityksiä, kuten tutkiva matematiikka, tutkiva oppiminen tai ongelmakeskeinen oppiminen. Näissä menetelmissä keskeistä on oppijan oma tutkiskelu ja ongelmien ratkaiseminen. Itse työstetty jää yleensä paremmin muistiin kuin valmiina annettu tieto. [11, s. 4][33, s. 36–37]

Hähkiöniemen mallin mukaan tutkivan matematiikan oppitunti rakentuu kolmesta keskeisestä vaiheesta: *alustus*, *tutkimus* ja *koonti*. Alustusvaiheessa opettaja esittelee tehtävät opiskelijoille ja motivoi heitä tehtävien tekoon. Tutkimusvaiheessa opiskelijat tekevät tehtäviä ja tutustuvat tutkittavaan asiaan itseohjautuvasti, yksin tai yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa. Opettajan roolina tutkivan matematiikan oppitunneilla on lähinnä kiertää auttamassa ja keskustelemassa opiskelijoiden kanssa

heidän ratkaisuistaan ja pyytää heiltä perusteluja ratkaisuilleen. Tällä pyritään matemaattiseen työskentelyyn, joka painottaa perustelujen tärkeyttä. [11, s. 5–7] Samalla kun opiskelija perustelee vastauksiaan, hän kielentää matemaattista ajatteluaan, mikä saattaa edelleen vahvistaa hänen ymmärrystään asiasta. Vuorovaikutus opiskelijoiden kanssa auttaa lisäksi myös opettajaa hahmottamaan opiskelijoiden osaamista ja toteuttamaan formatiivista arviointia.

Koontivaiheessa opettaja tiivistää opitut asiat ja korostaa keskeisimpiä sisältöjä, jotta opiskelijoille syntyisi kuva siitä, mitä tutkimalla oli tarkoitus oppia. Opettaja voi myös pyytää oppilaita esittämään omia ratkaisumenetelmiään [11, s. 5–7]. Koontivaiheella varmistetaan, että opiskelijat ovat ymmärtäneet asiat oikein ja saavat käyttöönsä asioiden viralliset nimitykset ja merkinnät. Opettajan tehtävä tutkivan matematiikan tunneilla on toimia pääasiassa opetuksen organisoijana ja ohjaajana opiskelijan toimiessa aktiivisena oppijana. Tämä istuu hyvin yhteen konstruktivistisen oppimiskäsityksen kanssa.

Tutkivassa matematiikassa hyödynnetään avointa ongelmanratkaisua, ja tehtäviin on yleensä olemassa monia erilaisia ratkaisumenetelmiä, jotka saattavat sisältää erilaisia matemaattisia ideoita. Muun muassa Pehkonen nostaa artikkeleissaan [32] ja [33] esiin avoimen ongelmanratkaisun ja tutkimustehtävien merkityksen matematiikan ymmärtävälle oppimiselle. Tutkivan matematiikan on monissa tutkimuksissa osoitettu tehostavan matematiikan oppimista ja lisäävän opiskelijan uskoa omiin matemaattisiin kykyihin. Lisäksi sen on Hähkiöniemen [11, s. 4] mukaan todettu kehittävän muun muassa ymmärtämistä ja matemaattisen ajattelun taitoja, joten siitä saattaisi olla apua myös logaritmin käsitteen ymmärtämisessä.

4.6 Sähköiset oppimateriaalit

Tässä tutkielmassa oppimateriaali on määritelty aineistoksi, joka perustuu opetussuunnitelmaan ja on laadittu tietylle ikäluokalle tai tietyn oppimiskokonaisuuden opiskelua varten. On kuitenkin hyvä huomioida, että kyseessä on hyvin moniselitteinen käsite, sillä esimerkiksi Vainionpään [47, s. 81] mukaan oppimateriaaliksi voidaan käsittää kaikki informaatio, jota oppija käyttää oppimisprosessin aikana. Perinteisesti eniten käytetty oppimateriaali matematiikan opetuksessa on kautta aikojen ollut oppikirja. Oppikirjoiksi voidaan lukea esimerkiksi kaikki itsenäiset opetuskäyttöön laaditut teokset, jotka sisältävät oppiaineen opetussuunnitelman mukaiset ydinasiat muodostaen kokonaisuuden [44, s. 231].

Viimevuosina on tehty entistä enemmän oppimateriaalin digitalisaatiota, jolla tarkoitetaan oppimateriaalien sisältöjen kehittämistä ja muuttamista tietokoneiden ymmärtämään tallennusmuotoon. Painettujen oppimateriaalien ohelle ovat tulleet digitaaliset oppimateriaalit, jotka voivat olla vuorovaikutteisia ja monimediaisia. Tämä on edellyttänyt myös sellaisten sovellusohjelmien luomista, että sisältöjä voidaan käyttää tietokoneella, älypuhelimella, tabletilla tai muulla medialaitteella. [44, s. 230–232] Digitalisaatiosta voidaan puhua myös sähköistymisenä. Oppimateriaalien ja opetuksen sähköistämistä on tehty jo vuosikymmeniä, mutta huomattavimman sysäyksen sille toi ylioppilaskirjoitusten muuttuminen sähköisiksi vaiheittain

syksystä 2016 alkaen. Ylioppilaskokeiden sähköistyminen on edellyttänyt sähköisten ohjelmistojen ja materiaalien käyttöä myös opetuksessa.

Nimityksiä sähköinen oppimateriaali, e-oppimateriaali, verkko-oppimateriaali ja digioppimateriaali on käytetty eri yhteyksissä monista erilaisista sähköisistä aineistoista, kuten verkkosivustoista, oppimisaihioista, verkkokursseista ja oppikirjan oheismateriaaleista [39, s. 172].Oppimisaihio (eng. *learning object*) on 1990-luvulla kehitetty käsite, jolle on olemassa useita erilaisia määritelmiä. Yleensä sillä kuitenkin tarkoitetaan mitä tahansa tietoon liittyvää itsenäistä esitystä, jota voidaan käyttää opetuksen tai oppimisen materiaalina. Useimmissa määritelmissä ajatellaan lisäksi, että oppimisaihio on tallennettu nimenomaan digitaaliseen muotoon. Käytännössä oppimisaihio voi olla esimerkiksi video, tekstitallenne tai matemaattinen työalusta tai vaikkapa näiden kaikkien yhdistelmä. Oleellisinta on, etteivät oppimisaihiot ole laajoja kokonaisuuksia, vaan johonkin yksittäiseen rajattuun teemaan keskittyviä esityksiä. Tämän vuoksi niitä voitaisiin kutsua myös oppimateriaalin sisällön perusyksiköiksi. [43, s. 160–161]

Sähköistymisen selvänä etuna on, että internet mahdollistaa sähköisten oppimateriaalien helpon jakamisen ja ajan tasalla pitämisen. Toinen merkittävänä pidetty sähköisten oppimateriaalien hyöty on mahdollisuus luoda materiaalista vuorovaikutteinen ja monimediainen. Sähköinen oppimateriaali on mahdollista koostaa monipuolisesti erilaisista oppimisaihioista, eli tekstin ohelle voidaan liittää esimerkiksi videoita, ääntä, vuorovaikutteisia kuvia, mallinnuksia, linkkejä, simulaatioita tai pelejä. Erilaisilla viihdyttävillä elementeillä, kuten pelillistetyillä tehtävillä, saattaa tutkimusten mukaan olla motivoiva vaikutus opiskelijoihin. [41, s. 188, 190] Erilaiset interaktiiviset elementit, kuten liikkuvat GeoGebra-appletit, voivat lisäksi välittää opiskelijalle sellaista tietoa, jota perinteisistä painetuista kuvista ei saa. Tämä saattaa helpottaa eri esitysmuotojen välisten yhteyksien löytämistä. [42, s. 135] Näin oppija voi saada tukea käsitteellisen ymmärryksen kehitykselle.

Tossavaisen [41, s. 191] mielestä sähköisten oppimateriaalien tärkein etu ei kuitenkaan ole perinteisen kirjan rikastuttaminen vaan se, että digitaalisuus mahdollistaa uuden tyyppisen opiskelun tukemisen. Digitaalisuuden myötä on alettu puhua oppikirjan avulla oppimisen sijaan oppimisympäristössä oppimisesta. Oppimisympäristöllä tarkoitetaan yleisesti fyysisistä, psyykkisistä ja sosiaalisista tekijöistä koostuvaa ympäristöä, jossa oppiminen ja opiskelu tapahtuvat [44, s. 232]. Sähköisessä oppimisympäristössä oleellista on vuorovaikutteisuus, jota ei pelkässä tekstikeskeisessä materiaalissa ole. Sähköisiin materiaaleihin sisältyy erilaisia luovaan kokeiluun, keksimiseen ja tutkimiseen soveltuvia työalustoja. Tossavaisen mukaan sähköiset oppimateriaalit mahdollistavatkin konstruktivistisemman ja kokeilevamman opiskelun kuin perinteiset oppimisympäristöt. [41, s. 189–193][42, s. 129]

Osa sähköisen oppimateriaalin tehtävistä voi myös sisältää automaattitarkastuksen, minkä ansiosta opiskelija saa osaamisestaan välittömän palautteen. Automaattitarkastus ja -vinkit sekä opetusvideot voivat korvata opettajan työtä silloin kun opettaja ei ole saavutettavissa. Oppitunneille tämä mahdollistaa sen, että opettaja voi keskittyä entistä enemmän toimimaan opetustilanteen ohjaajana, mikä myös tukee konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä suosittua asetelmaa. Samalla nämä ominaisuudet lisäävät joustavuutta oppimisen ajankohdan ja paikan valintaan. [41,

s. 188, 190][43, s. 169] Aikaa ei välttämättä tarvitse oppitunneilla käyttää tehtävien tarkistamiseen, opiskelijat voivat edetä omaan tahtiin ja välitön palaute osaamisesta voi lisätä opiskelijan pystyvyyden tunnetta ja motivaatiota.

Sähköisten oppimateriaalien ongelmana on, että niiden laatiminen voi olla perinteisiä painettuja oppikirjoja työläämpää ja kalliimpaa, sillä monimediaisten sisältöjen luominen saattaa vaatia paljon ohjelmointityötä [42, s. 135–136]. Myös tekniset ongelmat on listattu useissa tutkimuksissa sähköisten oppimateriaalien huonoihin puoliin. Haasteena on muun muassa saada materiaalit toimimaan samoin monenlaisilla tietokoneilla, sillä opiskelijoilla saattaa olla käytössään esimerkiksi käyttöjärjestelmältään tai tehokkuudeltaan eroavia tietokoneita.

4.7 Teknologia-avusteinen tutkiva matematiikka

Digitalisaation myötä teknologia-avusteista matematiikan opetusta ja opiskelua on kokeiltu ja tutkittu runsaasti. Samu Eskelinen tutki pro gradu -tutkielmassaan [6] tutkivaan matematiikkaan pohjautuvaa teknologia-avusteista opetusta derivaatan opetuksessa. Tutkimuksessa hän selvitti opiskelijoiden ajatuksia ja kokemuksia tällaisen opetuksen ja tehtävien käytöstä motivoivuuden kannalta sekä sitä, kokevatko opiskelijat käytettyjen menetelmien olevan tehokkaita tapoja derivaatan määritelmän oppimiseen. [6]

Eskelinen keräsi tutkimusdataa kurssin MAA7 opiskelijoilta ja tutkimukseen osallistui 13 opiskelijaa yhdestä lukiosta. Hän valmisteli yhdelle opetuskerralle tehtäväsarjan, joka koostui GeoGebra-appleteista ja keräsi tutkimusaineiston tunnin jälkeen toteutetuilla parihaastatteluilla. Opiskelijoille oli aiemmin opetettu derivaatan määritelmä, joten osa tehtäviin liittyvistä käsitteistä oli heille jo tuttuja, mutta ymmärrystä pyrittiin vahvistamaan. [6, s. 21–22]

Tutkimuksen tulosten perusteella opiskelijat kokivat teknologia-avusteisen tutkivan matematiikan mielekkääksi tavaksi opiskella. Käytetyt appletit lisäsivät opiskelijoiden mielestä ilmiöiden havainnollisuutta ja auttoivat ymmärtämään ilmiöitä syvemmällä tasolla. Appletit auttoivat oppilaita myös ajattelemaan derivaatan määritelmää matematiikan eri kielten kautta. Opiskelijat olivat lähes yksimielisiä teknologia-avusteisten tutkivan matematiikan tehtävien hyödyllisyydestä ja toivoivat niitä lisää. Teknologia-avusteista tutkivaa matematiikkaa toivottiin kuitenkin perinteisen opetuksen lisänä, eikä perinteisen opettajajohtoisen opetuksen korvaajana. [6, s. 34–36]

Eskelisen tutkimuksessa tavallaan yhdistettiin sekä tutkiva matematiikka, matematiikan kielentäminen että sähköisten materiaalien ja tietokoneen käyttö matematiikan opiskelussa. Koska tutkimuksen tulokset olivat pääasiassa positiivisia, saadaan teoreettinen tuki näiden elementtien yhdistämiselle oppimateriaalia rakentaessa.

4.8 Analyysin yhteenveto

Tässä luvussa esitellään teoreettisen ongelma-analyysin perusteella kehittämistutkimukselle asetetut tavoitteet ja valinnat, kuten oppimateriaalin muoto, sisältö sekä pedagogiset ja mediatekniset työkalut.

Kehitettävän materiaalin pääasialliseksi kohteeksi valittiin pitkän matematiikan kurssi *MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot*, jolla logaritmeihin perehdytään eniten. Materiaalin sisällön rajaamisessa täytyi ottaa huomioon testiryhmälle järjestettävän opetuskokeilun laajuus. Opetuskokeilun toteutukseen varattiin yhden viikon matematiikan oppitunnit, mikä vastaa noin 225 minuuttia opetusta. Rajasin materiaalin sisällön siten, että kurssin asioista käsitellään kaikki logaritmeihin liittyvät oppisisällöt lukuun ottamatta logaritmin derivointia. Tämä rajaus on linjassa myös sen kanssa, että marraskuussa 2019 julkaistussa uudessa opetussuunnitelmassa kurssijako uudistuu niin, että logaritmifunktion derivaatta käsitellään eri kurssilla kuin muut logaritmeihin liittyvät asiat [29][30]. Näin on huomioitu materiaalia hyödyntämismahdollisuudet myös tulevaisuudessa, vaikka opetussuunnitelma uudistuu.

Materiaali päädyttiin luomaan sähköiseksi oppimateriaaliksi, jossa mukaillaan oppikirjamaista rakennetta. Tähän päätökseen vaikuttivat sekä teoreettisessa ongelma-analyysissa esille tulleet sähköisen oppimateriaalin ja teknologia-avusteisen oppimisen hyödyt että sähköisen ylioppilaskokeen mukanaan tuomat vaatimukset. Halusin, että opiskelijat voivat tehtäviä tehdessään hyödyntää sähköisen ylioppilaskokeen ohjelmistoja ja harjoitella sähköistä vastaamista. Lisäksi tämä kehittämistutkimus päädyttiin liittämään osaksi Tampereen yliopiston koordinoimaa hanketta "Matemaattisten aineiden verkkokurssit lukioon ja ammatilliseen koulutukseen", joten oppimateriaalin alustaksi valikoitui hankkeessa käytetty TIM.

TIM eli *The Interactive Material* on dokumenttipohjainen pilvipalvelu vuorovaikutteisten materiaalien tuottamiseksi. Se on Jyväskylän yliopistossa kehitetty avoimeen lähdekoodiin perustuva verkkosivusto, jossa on mahdollisuus tuottaa kirjamaisesti etenevää lineaarista materiaalia, joka toimii pöytäkoneella, tabletilla sekä kännykällä. TIM soveltui hyvin tämän oppimateriaalin luomiseen, sillä sen avulla on mahdollista luoda erilaisia sähköisen oppimateriaalin ominaisuuksia hyödyntäviä tehtävätyyppejä, joissa on mahdollisuus käyttää myös automaattitarkastusta. Lisätietoa TIM:istä löytyy osoitteesta https://tim.jyu.fi/view/tim/TIM-esittely (Luettu 9.6.2020).

Tämän kokeilun oppimistavoitteissa mukaillaan luonnollisesti opetussuunnitelman perusteissa (2015) asetettuja logaritmeihin liittyviä oppimistavoitteita. Tavoitteista painotetaan kuitenkin logaritmin käsitteen ymmärtämistä. Näin siksi, että aikaisempien tutkimusten tarkastelun perusteella nykyiset materiaalit ja opetusmuodot tukevat enimmäkseen logaritmien proseduraalista osaamista, vaikka sähköisissä ylioppilaskokeissakin painotetaan ulkoa opitun tiedon muistamisen ja toistamisen sijasta yhä enemmän tiedon syvällisempää tulkintaa ja analysointia [36, s. 54]. Logaritmien oppimista ja käsitteellistä ymmärtämistä pyritään vahvistamaan hyödyntämällä matematiikan kielentämisen ja teknologia-avusteisen tutkivan matematiikan keinoja, joilla on aiempien tutkimusten perusteella havaittu olevan positiivisia vaikutuksia matematiikan oppimiseen. Matematiikan kielentämistä hyödynnetään muun muassa

soveltamalla erilaisia kielentämistehtävätyyppejä (ks. taulukko 4.1). Lisäksi pyrin luomaan monipuolisesti vuorovaikutteisia oppimisaihioita sisältävän materiaalipaketin, jossa hyödynnetään mahdollisuuksien mukaan myös pelillisyyttä.

Tutkivaa matematiikkaa hyödynnetään tutkimusperustaisten tehtävien lisäksi opetuskokeilun toteuttamisessa, sillä opetusmenetelmään otetaan vaikutteita Hähkiöniemen esittelemästä tutkivan matematiikan oppitunnista. Opetuksen ja oppimateriaalien sähköistymisen myötä sekä opettajan että opiskelijan rooli on muuttunut ja konstruktivistisen oppimiskäsityksen asema noussut entisestään. Opiskelijan vastuu omasta oppimisestaan kasvaa ja rooli muuttuu entistä enemmän aktiiviseksi toimijaksi. Vaikutuin siitä, että tutkivan matematiikan oppitunti tukee opiskelijan itseohjautuvuutta ja mahdollistaa opettajan toimimisen ohjaajana.

Yhteenveto oppimateriaalille ja opetuskokeilulle asetetutuista tavoitteista:

1. Opiskelija oppii tuntemaan logaritmifunktion ominaisuudet, ratkaisemaan logaritmiyhtälöitä ja käyttämään teknisiä apuvälineitä logaritmifunktioiden tutkimisessa sekä muodostaa kokonaiskuvan siitä, mikä ovat logaritmi ja mihin sitä käytetään.

2. Oppimateriaalissa hyödynnetään sähköisen oppimateriaalin mahdollisuuksia sekä mahdollistetaan sähköisessä ylioppilaskokeessa tarvittavien taitojen harjoittaminen.

3. Oppimateriaalin tehtävät hyödyntävät tutkivaa matematiikkaa ja matematiikan kielentämistä ja kehittävät näissä tarvittavia taitoja, kuten kriittistä ajattelua, matemaattisen ajattelun jäsentelyä ja ilmaisemista sekä siten myös käsitteellistä ymmärtämistä.

4. Opetuskokeilun opiskelumuoto tukee opiskelijan itseohjautuvuutta ja roolia aktiivisena oppijana.

5 Kehittämisprosessi

Teoreettisen ongelma-analyysin avulla muodostettiin tutkimuksen teoreettinen viitekehys ja suunnitelma siitä, millainen oppimateriaali on tavoitteena kehittää ja millaisia keinoja kehityksessä hyödynnetään. Kehittämisprosessi alkoi alustavan materiaalipaketin koostamisella ja ohjelmoimisella. Kuvaan tässä luvussa kehittämisvaiheita 1 ja 2 sekä niiden välissä toteutettua asiantuntijakierrosta, jossa selvitettiin, millaiseksi asiantuntijat arvioivat laaditun oppimateriaalin ja miten sitä tulisi kehittää ennen sen testaamista opetuskäytössä.

5.1 Kehittämisvaihe 1

Materiaali kehitettiin ja julkaistiin osana Opetushallituksen rahoittamaa hanketta *Matemaattisten aineiden verkkokurssit lukioon ja ammatilliseen koulutukseen*, jota koordinoi Tampereen yliopisto. Kuten muutkin hankkeen oppimateriaalit, kehittämistuotos luotiin sähköiseksi oppimateriaaliksi TIM-alustalle ja se pyrittiin suunnittelemaan niin, että sitä voidaan hyödyntää sekä oppitunneilla että itsenäisessä opiskelussa. Kehitetty oppimateriaali koostuu neljästä pääluvusta: 1) Johdatus logaritmin käsitteeseen, 2) Logaritmifunktio, 3) Logaritmin laskusääntöjä ja 4) Logaritmiyhtälö. Luvut on jaoteltu pienempiin osioihin, jotka on sisältönsä perusteella nimetty "Teoriaa", "Tutkimus" tai "Tehtävä". Osioita on yhteensä 18 ja niistä 11 on tehtäviä ja 3 on tutkimuksia.

Kehittämistutkimuksen tavoitteena oli luoda oppimateriaali, joka auttaisi sen käyttäjää logaritmin käsitteen ymmärtämisessä. Koska materiaalissa haluttiin painottaa käsitteellistä ymmärtämistä, päädyin jättämään mekaanisten laskutehtävien osuuden systemaattisesti pienemmäksi kuin lukion oppikirjoissa. On kuitenkin syytä huomata, että mikään ei estä materiaalin käyttäjää hyödyntämään oppikirjaa tai muita oppimateriaaleja tämän materiaalin ohella.

Aloitin kehittämistyön ongelma-analyysin tuloksena asetettujen tavoitteiden pohjalta. Ensin kartoitin, mitkä oppisisällölliset asiat materiaaliin tulee sisällyttää ja millaisia tehtäviä TIM:ssä on mahdollista luoda. Lisäksi sovelsin listaa kirjallisen kielentämisen tehtävätyypeistä (taulukko 4.1) ja pohdin, millaisia muita kielentämistä ja tutkivaa matematiikkaa hyödyntäviä tehtäviä sähköiseen oppimateriaaliin voisi luoda ja millainen tehtävä mihinkin aiheeseen soveltuisi. Suunnitelmaa päivitettiin jatkuvasti kehittämisprosessin edetessä, ja sitä mukaa kun ohjelmointitaitoni vahvistuivat, pystyin kehittämään tehtävistä yhä monipuolisempia ja kiinnittämään huomiota myös pelillistämiseen.

Esittelen seuraavissa alaluvuissa oppimateriaaliin kehittämieni tehtävien ideaa ja kuinka olen niissä hyödyntänyt tutkivan matematiikan, matematiikan kielentämisen ja vuorovaikutteisen sähköisen oppimisympäristön elementtejä. On kuitenkin hyvä huomioida, että vaikka olen jaotellut tehtäviä eri otsikoiden alle, useimmissa tehtävissä on hyödynnetty näistä kaikkia.

5.1.1 Tutkimustehtävät ja johdattelu logaritmeihin

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2015) sanotaan, että "opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä" [28, s. 126]. Tähän tavoitteeseen olen pyrkinyt vastaamaan luomalla tutkivaa matematiikkaa soveltavia tehtäviä, joita nimitän materiaalissa tutkimuksiksi. Tutkimuksiksi nimitettyjä osioita on materiaalissa yhteensä kolme kappaletta. Niiden lisäksi olen sisällyttänyt materiaaliin muitakin päättelyyn ja teorian itse oivaltamiseen pohjautuvia osioita. Tutkimuksissa ideana on, että opiskelija noudattaa listattuja ohjeita, esimerkiksi piirtää annetut kuvaajat, ja sen jälkeen vastaa kysymyksiin, jotka ohjailevat häntä itse oivaltamaan jonkin halutun teoriaan liittyvän asian.

Materiaalissa johdatellaan opiskelijaa logaritmin käsitteen ymmärtämiseen hänelle ennestään tutun asian, eksponenttiyhtälön kautta. Opiskelijan ensimmäisenä tehtävänä onkin ratkaista helppoja eksponenttiyhtälöitä päättelemällä. Tämän jälkeen tehdään ensimmäinen tutkimus, jossa ideana on piirtää 2-kantaisen eksponenttifunktion kuvaaja ja analysoida sitä. Tavoitteena on, että opiskelija selvittää tutkimalla eksponenttifunktion määrittely- ja arvojoukon ja oppii lukemaan kuvasta eksponenttiyhtälön ratkaisuja. Tässä harjoitellaan sekä havaintojen ja johtopäätösten tekemistä kuvaajasta että matematiikan kuviokielen yhdistämistä symbolikieleen ja luonnolliseen kieleen. Päätavoitteena on saada opiskelija huomaamaan, ettei kaikille eksponenttiyhtälöille voida löytää ratkaisua päättelemällä tai kuvaajasta katsomalla. Myöhemmin esitellään logaritmin olevan ratkaisu tähän ongelmaan, joka tutkimuksessa havaittiin. Tällä lähestymisnäkökulmalla pyritään luomaan motivaatiopohja sille, miksi tällainen asia kuin logaritmi on olemassa ja mitä sillä voidaan tehdä. Oppiminen, kuten matematiikan luominenkaan, ei yleensä ala luonnollisesti määritelmästä, vaan ensin on muodostuttava jokin syy määritelmän muotoilemiseen [12, s. 117].

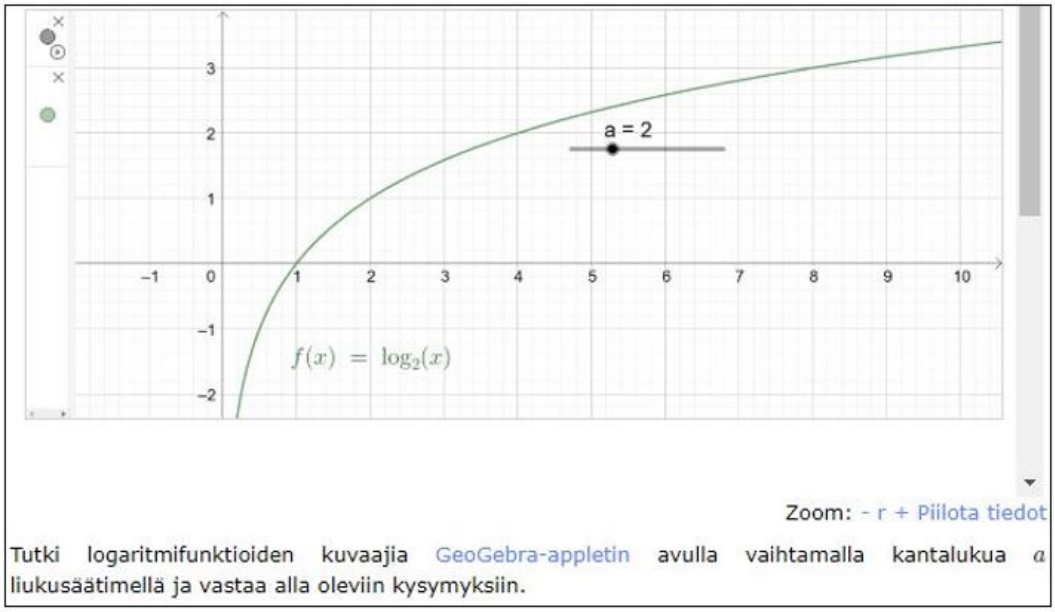
Myös logaritmifunktion käsitettä pohjustetaan jo ensimmäisessä tutkimuksessa; Opiskelijan tehtävänä on taulukoida eksponenttifunktion pisteiden koordinaatteja ja sitten kääntää koordinaattien arvot toiseen taulukkoon toisin päin. Tällä pyritään konkretisoimaan opiskelijalle sitä, mistä nimitys käänteisfunktio tulee. Lisäksi tutkimalla on tavoitteena huomata, että eksponenttifunktion käänteisfunktio vaikuttaisi olevan logaritmifunktio ja oivaltaa myös, että määrittelyjoukko ja arvojoukko ovat käänteisfunktiolla toisin päin. Näin pohjustetaan sitä, mikä on logaritmifunktio, millaisia ominaisuuksia sillä on ja mikä yhteys sillä on eksponenttifunktioon.

Materiaaliin valitussa lähestymistavassa tutkitaan siis ensin eksponenttifunktiota ja selvitetään muun muassa, mitä keinoja meillä on sen ratkaisemiseen, miltä sen kuvaaja ja käänteisfunktion kuvaajat näyttävät ja miten logaritmifunktioksi kutsutun funktion kuvaaja liittyy eksponenttifunktioon. Sen jälkeen päätellään ja muodostetaan matematiikan symbolikielen merkinnöistä luonnollisella kielellä sääntö eksponenttiyhtälön ja logaritmiyhtälön välille ja vasta tämän jälkeen määritellään täsmällisesti uudet käsitteet logaritmi ja logaritmifunktio. Lisäksi näillä uusilla käsitteillä vahvistetaan olevan ne ominaisuudet, jotka aiemmin tutkimuksessa havaittiin intuitiivisesti.

Koska en halunnut antaa logaritmin määritelmää oppimateriaalissa valmiina kaavana, kuten monissa oppikirjoissa tehdään, päädyin ratkaisuun, jossa opiskelijan tehtävänä on itse päätellä eksponentin ja logaritmin välinen yhteys keksimällä sääntö taulukon yhtälöille ja vasta tämän jälkeen hänelle kerrotaan, että yhteyttä kutsutaan logaritmin määritelmäksi. Näin opiskelijan täytyy paneutua monimutkaiselta näyttävään logaritmin määritelmän symboliesitykseen, joka valmiina kaavana esitettynä olisi helppo vain sivuuttaa. Määritelmään perehdytään useasti tämän jälkeenkin ja sitä pyritään ymmärtämään muun muassa kielentämisen keinoin (esim. kuva 5.2).

Monessa muussakin tehtävässä on pohjimmaisena ideana itse selvittämällä tai tutkimalla päästä teoriatietoon käsiksi ennen kuin teoria esitetään opiskelijalle täsmällisesti. Opiskelija muun muassa pohtii perusteluja logaritmifunktion määrittelyehdoille monivalintatehtävän avulla, millä pyritään siihen, että hän oikeasti ymmärtäisi ehtojen merkityksen, eikä ainoastaan opettelisi niitä ulkoa. Itse tutkimalla selvitetään myös logaritmifunktion ominaisuudet, kuten määrittely- ja arvojoukko sekä milloin funktio on kasvava, milloin vähenevä ja mikä on logaritmin arvo kohdassa $x = 1$. Tutkimusten kohteina käytetään muun muassa kuvaajia, valmiita ratkaisuja ja GeoGebra-appletteja, kuten kuvassa 5.1 näkyvässä tutkimuksen 2.2 oppimisaihiossa.

Tehtävässä 1.6 yhdistin tutkivaa matematiikkaa tiedonhankintataitojen harjoittelemiseen. Tehtävänä on ottaa selvää tai päätellä, mitä tunnetuimmista logaritmijärjestelmistä käytetyt merkinnät ln ja lg tarkoittavat, eli mitä nimityksiä niille käytetään ja mikä kyseisissä logaritmeissa on kantalukuna. Lisäksi opiskelijan täytyi etsiä tietoa siitä, missä muualla kuin matematiikassa logaritmia lg tarvitaan, millä pyrittiin konkretisoimaan logaritmien arkipäivän käyttötarkoituksia.



Kuva 5.1. Oppimisaihio, jossa hyödynnetään dynaamisen GeoGebra-appletin tutkimista

5.1.2 Kielentämistehtävät

Opetussuunnitelman perusteissa asetetaan matematiikan opetuksen tehtäväksi myös, että ”opiskelijaa rohkaistaan käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen” [28, s. 129]. Kehitin materiaaliin paljon kuvaajiin liittyviä tehtäviä, joissa pyritään siihen, että opiskelija yhdistäisi matematiikan symbolikielen, kuviokielen ja luonnollisen kielen merkintöjä sekä omia intuitiivisia havaintojaan ja niistä tekemiään päätelmiä monipuoliseksi tietoverkoksi. Esimerkiksi edellä esitellyt tutkimustehtävät sisältävät kuvaajien ja applettien analysointia sekä tulkintojen tekemistä. Näissä tehtävissä opiskelijan tehtävä on myös kirjoittaa luonnollisella kielellä omia havaintojaan, jolloin hän jäsentää ja sanoittaa matemaattista ajatteluaan.

Havaintojen kirjoittaminen voitaisiin sisällyttää taulukossa 4.1 esitellyistä kielentämistehtävätyypeistä omin sanoin selittäminen -tehtävätyyppiin. Sisällytin materiaaliin monia muitakin kielentämistehtävätyyppejä. Esimerkiksi koodinvaihtotehtävillä pyritään selkeyttämään oppijalle, mitä uusilla symbolikielen merkinnöillä tarkoitetaan. Koodinvaihtotehtävissä symbolikielen merkinnät halutaan sanoittaa luonnollisella kielellä, jolloin ne saavat helpommin ymmärrettävissä olevan muodon. Esimerkiksi $y = \log_2 x$ voitaisiin sanoittaa ”luku y on 2-kantainen logaritmi luvusta x” tai ”y on luku, johon kantaluku 2 on korotettava, jotta saadaan luku x”. Tällaiset tehtävät osoittautuivat toimiviksi tutkivassa harjoittelussa järjestämässäni tutkimuksessa.

Koodinvaihtotehtäviin sain inspiraatiota myös Helen Alfaron pro gradu -tutkielmassa [2] luomasta taulukkomuotoisesta tehtävästä, jossa matemaattinen asia on esitetty valmiiksi matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä ja opiskelijan tehtävänä on täydentää sama asia taulukkoon puuttuvilla esitystavoilla. Kehittämässäni tehtävässä 4.4 tehtävänantona on "Ilmaise alla olevassa taulukossa luonnollisella kielellä annettu selitys matematiikan symbolikielellä (esim. yhtälöt, laskut, muut symbolimerkinnät) ja kuviokielellä (esim. funktioiden kuvaajat). Käytä haluamiasi ohjelmistoja." Tällaisiin tehtäviin on useita oikeita tapoja vastata ja pääasia onkin haastaa opiskelija matemaattiseen ajatteluun.

Täydennys-tehtävätyyppiä on käytetty tehtävässä 3.3, jonka tehtävänanto on seuraavanlainen:

> Maija on muokannut lausekkeen $\ln e^2 + 2\lg 4 - \lg 8$ sievennettyyn muotoon $2 + \lg 2$. Millaisin välivaihein sievennys on voinut tapahtua? Päättele puuttuvat välivaiheet ja kirjoita jokaiselle vaiheelle mahdollisimman kattavat perustelut kokonaisin lausein.

Kyseisessä tehtävässä harjoitellaan materiaalissa aiemmin esiteltyjen logaritmin laskusääntöjen soveltamista, mutta myös kielennetään välivaiheisiin tarvittavaa matemaattista ajattelua. Materiaalissa on useampiakin tehtäviä, joissa on esitettävä perusteluita omalle tai valmiiksi annetulle ratkaisulle (ratkaisun argumentointi -tehtävätyyppi). Perustelu on tärkeää esimerkiksi tehtävässä 3.1, joka näkyy kuvassa 5.2. Tehtävän alussa on ensin sanallistettu logaritmin määritelmän symboliesitystä matematiikan luonnollisella kielellä ja tehostettu ymmärtämistä värien avulla. Tehtävänä on määritelmää hyödyntäen päätellä niin sanotut logaritmien erityistapaukset – jotka usein annetaan opiskelijoille ulkoa opeteltavaksi – ja myös perustella ne.

Kuva 5.2. Tehtävä 3.1, jossa hyödynnettiin logaritmin määritelmän sanallistamista eritystapausten päättelyyn

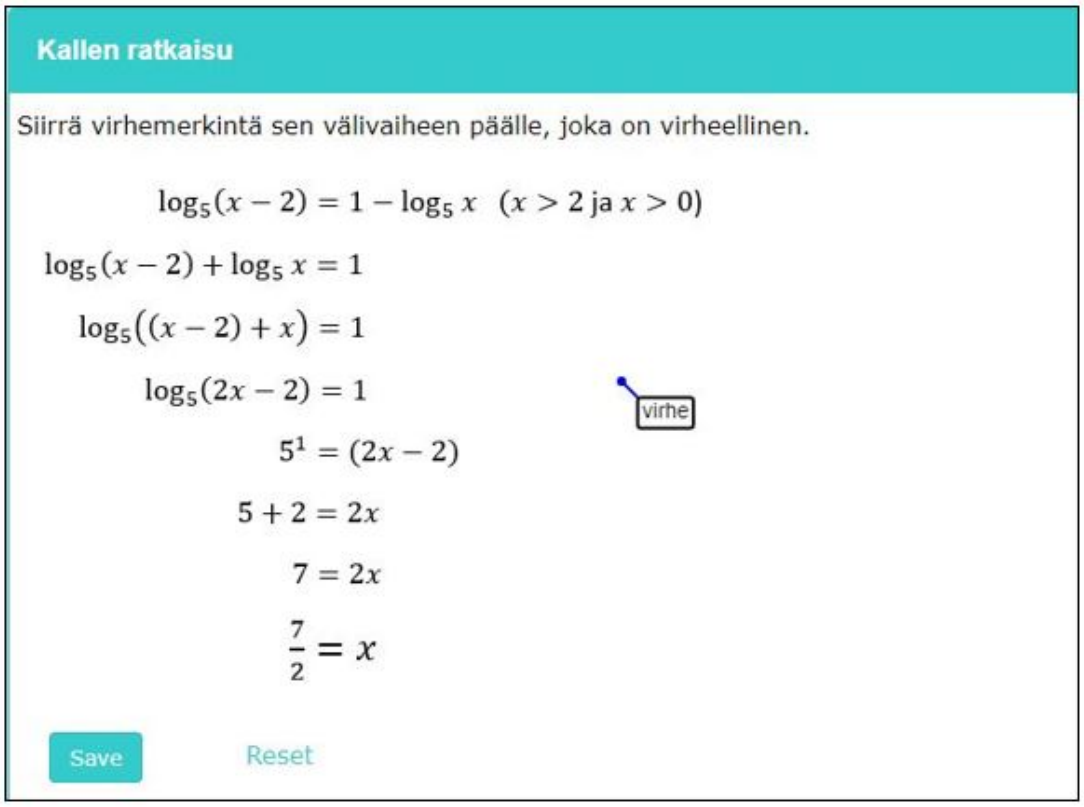
Virheen etsintä -tehtävätyypin tehtävä 4.1 on esitetty kuvassa 5.3. Tehtävässä on hyödynnetty TIM:in mahdollistamaa pelillisyyttä ja valmiin ratkaisun tutkimista. Tehtävässä pitää etsiä Kallen tekemä virhe ja kirjoittaa sitten koko lasku korjattuna ja ratkaista x. Tehtävän alakohtana on "Kirjoita lyhyt arvostelu Kallen vastaustyylille, eli perustele, mikä vastauksessa on hyvää ja mitä voisi vielä lisätä tai tehdä paremmin, jotta lukijan olisi helpompi ymmärtää, mitä Kalle on ajatellut tehtävää ratkaistessaan". Tällä halutaan sekä saada opiskelija analysoimaan logaritmiyhtälön ratkaisemisen vaiheita että pohtimaan itse hyvän vastauksen piirteitä. Eräänlaisena piilotavoitteena on näin parantaa ylioppilaskoetehtävävastausten laatua.

Tehtävässä 4.3, joka näkyy kuvassa 5.4, hyödynsin ratkaisun järjestäminen -tehtävätyyppiä. Tarkoitus on siis ensin jäsentää yhtälön ratkaisuprosessin vaiheet oikeaan järjestykseen ja sen jälkeen ratkaista tehtävä vaiheiden mukaisesti välivaiheineen. Kaiken kaikkiaan hyödynsin materiaalissa seitsemää eri kielentämistehtävätyyppiä.

5.1.3 Sähköisten tehtävien mahdollisuudet

Kuten edellä esitellyistä tehtävistä huomataan, sähköinen oppimisympäristö TIM mahdollisti monipuolisten tehtävien luomisen. Tehtävissä voitiin hyödyntää pelillisyyttä ja materiaaliin voitiin sisällyttää muun muassa tekstiä, taulukoita, kuvia ja dynaamisia esitysmuotoja, kuten GeoGebra-appletteja, sisältäviä oppimisaihioita.

Koska aiemmissa tutkimuksissa on todettu automaattitarkisteisten tehtävien ja välittömän palautteensaannin motivoivan opiskelijoita, sitä on hyödynnetty mahdol-



Kuva 5.3. Kuva virheenetsintätehtävästä 4.1

Kuva 5.4. Tehtävä 4.3, jossa hyödynnettiin pelillistämistä raahaustehtävän muodossa

lisimman monessa tämän oppimateriaalin tehtävässä. Pelillisyyttä tehtäviin tuo myös se, että oikeasta vastauksesta saa pisteitä. Kielentämistehtävien hyödyntäminen kuitenkin hieman rajoitti tätä, sillä avoimien tekstivastausten tarkistamiseen ei ollut mahdollisuutta luoda automaattitarkistusta tai -pisteytystä.

Tehtäviä monipuolistettiin hyödyntämällä erilaisia vastaustapoja ja tehtävätyyppejä. Tekstivastaustehtävien lisäksi materiaalissa on muun muassa monivalintatehtäviä, kyllä-ei-tehtäviä (ks. kuva 5.5), laskutehtäviä sekä tehtäviä, joissa raahataan palikat oikeille paikoilleen. Lisäksi joissakin tehtävissä tarvitaan ulkopuolisia ohjelmistoja, kuten GeoGebraa. Materiaalin ohjeistuksessa on myös huomautettu, että kaikissa tehtävissä saa hyödyntää sähköisessä ylioppilaskokeessa sallittuja ohjelmistoja. Erillisillä ohjelmistoilla tehtyjen vastausten palauttamista varten lisäsin materiaaliin palautuslaatikoita, joihin voi ladata tiedoston omalta koneelta. Näin kaikki vastaukset voidaan tallentaa samaan paikkaan tehtävän tekotavasta riippumatta.

Kuva 5.5. Esimerkki kyllä-ei-tehtävätyypistä, jossa opiskelija saa automaattitarkistuksen ansiosta välittömän palautteen sekä perustelun tai mallivastauksen

5.2 Asiantuntijakierros

Nimitän asiantuntijakierrokseksi empiiristä ongelma-analyysia, jonka avulla testattiin kehittämisvaiheessa 1 luotua kehittämistuotosta, arvioitiin sen onnistumista ja päivitettiin suunnitelmaa kehittämisvaihetta 2 varten. Kuvailen tässä luvussa asiantuntijakierrokseen sisältyneen kyselytutkimuksen toteutusta ja sillä saatuja tuloksia.

5.2.1 Asiantuntijakyselyn toteutus

Asiantuntijakierroksen empiirinen tutkimus toteutettiin kyselytutkimuksena ja siihen osallistui neljä asiantuntijaa. Asiantuntijoista kaksi oli lukion matemaattisten aineiden opettajia ja kaksi matematiikan aineenopettajiksi pian valmistuvia opiskelijoita, jotka ovat suorittaneet opettajan pedagogiset opinnot. Asiantuntijoita pyydettiin lukemaan kehitetty oppimateriaali läpi ja vastaamaan sitä koskevaan kyselylomakkeeseen. Kyselylomakkeessa oli jokaista materiaalin tehtävää kohden vastaustaulukko,

jossa otettiin kantaa väittämiin kolmeportaisella asteikolla: "eri mieltä", "en osaa arvioida" ja "samaa mieltä". Lisäksi jokaista oppimateriaalin osiota varten oli mahdollisuus kirjoittaa kommentteja tai parannusehdotuksia. Lopuksi kyselyssä pyydettiin arvioimaan materiaalia kokonaisuutena väittämiä sisältävän taulukon avulla. Asiantuntijakyselyssä käytetyt väitetaulukot löytyvät liitteestä 1.

Ensisijaisesti asiantuntijakyselyllä haluttiin selvittää, millaisia muutoksia oppimateriaaliin olisi hyvä tehdä kehittämisvaiheessa 2. Kehittämistutkimuksen tutkimuskysymyksistä tätä vaihetta koski kysymys "Mitä mieltä asiantuntijat ovat materiaalin sisällöstä, haastavuustasosta ja helppokäyttöisyydestä?". Analysoin asiantuntijakyselyn tuloksia poimimalla vastauksista kaikki kehittämisehdotukset ja palautteet. Sisällönanalyysissa ryhmittelin palautteet aiheittain ja pyrin löytämään vastauksia edellä mainittuun tutkimuskysymykseen. Kehittämisehdotusten ja kritiikin perusteella suunnittelin, mitä muokkauksia teen materiaalille kehittämisvaiheessa 2. Tarkastellaan seuraavaksi asiantuntijakyselyn tärkeimpiä tuloksia.

5.2.2 Tuloksia

Asiantuntijat olivat pääasiassa samaa mieltä siitä, että materiaali vastaa hyvin opetussuunnitelman sille asettamiin tavoitteisiin ja kattaa logaritmeista kaikki oleelliset asiat. Jonkin verran vastauksissa nousi esiin, että teoriatietoa tai esimerkkejä voisi olla enemmän tai käydä opettajajohtoisesti läpi, mutta mitään tiettyä asiaa ei kuitenkaan mainittu puuttuvan. Erään kyselyyn vastanneen asiantuntijan mielestä materiaali sisältää tehtäviä, jotka "auttavat ymmärtämään syvällisemmin, sanallistamaan matemaattista ajattelua sekä tarjoavat vaihtelua perinteisiin mekaanisiin tehtäviin". Silti vastauksista nousi myös esiin, että mekaaniseen laskemiseen ja logaritmin määritelmän käyttöön liittyviä esimerkkejä ja tehtäviä olisi kaivattu lisää.

Materiaali oli asiantuntijoiden mielestä johdonmukaisesti rakennettu ja pohjautui hyvin aiemmin opitun päälle. Muutamat tehtävät arvioitiin kuitenkin liian haastaviksi heikoimmille opiskelijoille. Kaikkien asiantuntijoiden mielestä liian haastavia olivat tehtävät 2.1 ja 3.1. Toisaalta se mainittiin vastauksissa myös hyvänä asiana, että materiaalista löytyy tällaisia ylöspäin eriyttäviä tehtäviä. Teoriaosuudet arvioitiin tarpeeksi tiiviiksi ja selkeiksi ja materiaalin käytön ohjeistus oli asiantuntijoiden mielestä riittävä. Osa tehtävistä oli kuitenkin tehtävänannoltaan hieman monimutkaisia ja niihin annettiin korjausehdotuksia.

Hyvänä huomiona asiantuntijakyselystä nousi esiin, että automaattitarkisteisten tehtävien takia opiskelijat saattavat alkaa arvaamaan vastauksia, jolloin aitoa oppimista ei tapahdu. Tämä on kieltämättä joidenkin automaattitehtävien huono puoli. Kielentämistehtäviin asiantuntijat suhtautuivat varauksella, koska matematiikan kielentäminen voi olla opiskelijoille uutta ja hankalaa. Tämän takia myös materiaalin läpikäymiseen kuluvaa aikaa ja tehtävien osaamista oli heidän mielestään haasteellista arvioida. Avoimien sanallisten tehtävien tarkistaminen herätti myös pohdintaa. Huolta herätti muun muassa se, että opiskelijat eivät välttämättä osaa tuottaa niihin oikeaa vastausta, joten jonkinlainen yhteenveto tai yhdessä tarkistaminen tarvittaisiin, ennen kuin opiskelijan olisi järkevää siirtyä seuraavaan vaiheeseen.

5.3 Kehittämisvaihe 2

Kehittämisvaiheessa 2 oppimateriaaliin tehtiin muutoksia asiantuntijakyselyn tulosten pohjalta. Niissä asioissa, jotka mainittiin palautteissa vain kerran, käytin kuitenkin omaa harkintaa. Muutosehdotusten perusteella muun muassa muokkasin sanavalintoja ja selkeytin tehtävänantoja. Tehtävänantoja selkeytti esimerkiksi pitkän tehtävän jakaminen alakohtiin. Lisäsin materiaaliin myös muutaman esimerkkitehtävän muun muassa laskusääntöjen käytöstä.

Tehtävä 1.2 sisälsi alun perin TIM:iin upotetun GeoGebran piirtoikkunan. Asiantuntijapalautteen perusteella päädyin kuitenkin poistamaan sen, sillä sen ei koettu tuovan materiaaliin lisäarvoa, kun piirrosten tallentaminen siihen ei onnistunut. Lisäksi suurin osa lukio-opiskelijoista on tottunut käyttämään sähköisten tehtävien tekemiseen GeoGebran työpöytäsovellusta, mikä on toimivampi ratkaisu tässäkin tehtävässä.

Tehtävät, jotka asiantuntijat arvioivat liian haastaviksi, päädyin merkitsemään *-merkillä, joka osoittaa opiskelijalle, että tehtävä on arvioitu muita tehtäviä haastavammaksi. Näin opiskelija voi itse toteuttaa eriyttämistä valitsemalla tekeekö kyseisen tehtävän. Automaattitarkisteisiin tehtäviin ja avoimiin tekstivastaustehtäviin en päätynyt tekemään muutoksia asiantuntijoiden epäilyksistä huolimatta, sillä halusin tutkia, miten opiskelijat niihin suhtautuvat.

TIM-materiaaliin on mahdollista liittää hyperlinkkejä muille internet-sivuille. Tämä toimi ratkaisuna sille, että asiantuntijat pohtivat, pitäisikö teoriaa olla hieman enemmän. Lisäsin linkin esimerkiksi sivulle, jossa on kerrottu tarkemmin teoriaa käänteisfunktiosta. Lisäksi lisäsin materiaalin ohjeisiin linkit GeoGebran online-versioon ja Abitin matikkaeditoriin, joka on myös sähköisissä ylioppilaskokeissa käytettävissä matematiikan symbolikielen kirjoittamisen työkaluna.

6 Kehittämistuotoksen testaus ja tutkimustuloksia

Toteutin kehittämistutkimuksen empiirisenä tapaustutkimuksena, jossa selvitin kehittämistyössä laaditun oppimateriaalipaketin toimivuutta logaritmien opiskelussa. Teoreettisen ongelma-analyysin avulla muodostin tutkimuksen teoreettisen viitekehyksen ja loin suunnitelman siitä, millaisen materiaalin pyrin kehittämään ja millaisia keinoja pyrin kehityksessä hyödyntämään. Asiantuntijakierroksella selvitin matematiikan opetuksen asiantuntijoiden mielipiteitä laaditusta oppimateriaalista sekä miten sitä tulisi kehittää kehitysvaiheessa 2. Toisen kehitysvaiheen jälkeen testasin materiaalia autenttisissa luokkahuonetilanteissa, joissa toimin sekä opettajana että tutkijana. Kokeilun päätteeksi keräsin tutkimusaineiston, jonka avulla pyrin arvioimaan kehittämistuotoksen soveltumista logaritmien opiskeluun sekä koko kehittämisprosessin onnistumista.

Tässä luvussa kuvaillaan materiaalin testausta opetuskokeilussa sekä kerätyn tutkimusaineiston analysointia. Ensin esitellään, miten opetuskokeilu toteutettiin ja millä tavoin tutkimusaineistoa kerättiin. Sen jälkeen tarkastellaan tutkimuksen loppukyselystä ja opettajan haastattelusta saatuja tuloksia sekä verrataan niitä oppimistilanteesta ja tehtävien ratkaisuista tekemiini havaintoihin. Kehittämistuotoksen arviointi perustuu tutkimuksen tulosten ja asetettujen tavoitteiden vertaamiseen. Luvun lopussa kerrotaan vielä, miten tulokset vaikuttivat kehittämisvaiheeseen 3.

6.1 Materiaalin testaaminen

Oppimateriaalia testattiin eräässä tamperelaisessa lukiossa, kahden pitkän matematiikan ryhmän opetuksessa. Materiaalia käytettiin kurssin MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot opetuksessa 14.–20.1.2020 välisen ajan, jolloin materiaalia testasi yhteensä 44 opiskelijaa. Olin itse ohjaamassa opetuskokeilua ja toisena opettajana vastailemassa opiskelijoiden kysymyksiin. Samalla pyrin myös tekemään havaintoja opetuskokeilun ja materiaalin toimivuudesta.

Kummallakin testiryhmällä oli opetuskokeilun aikana yksi 60 minuutin, yksi 75 minuutin ja yksi 90 minuutin oppitunti matematiikkaa. Ensimmäisellä oppitunnilla esittelin opetuskokeilun sisällön ja kerroin kokeilun päätteeksi toteutettavasta kyselystä, jotta opiskelijat voisivat jo kokeilun aikana kerätä muistiin esiin nousevia kehittämistarpeita. Testiryhmillä oli kurssilla käytössään pistejärjestelmä, jossa saa sitä enemmän pisteitä, mitä enemmän kurssin aikana on tehnyt tehtäviä. Tätä järjestelmää päädyttiin opiskelijoiden toiveesta käyttämään myös opetuskokeilun aikana, koska sen arvioitiin motivoivan opiskelijoita tehtävien tekoon.

Jokaisen opetuskerran alussa kerroin, mihin saakka materiaalissa on kyseisen päivän aikana tavoitteena edetä ja kysyin, onko opiskelijoilla kysyttävää tai haluavatko he käydä jonkun tehtävistä yhdessä läpi. Sen jälkeen opiskelijat tekivät materiaalin tehtäviä omaan tahtiin minun ja kurssin vastuuopettajan kiertäessä auttamassa ja

keskustelemassa opiskelijoiden kanssa. Opiskelijat saivat istua tehtäviä tehdessään pienissä ryhmissä ja keskustella vapaasti keskenään. Opiskelijat etenivät tehtävissä eri tahdissa, joten päädyin antamaan kotitehtävät siten, että seuraavan oppitunnin alussa erot olisivat hieman tasoittuneet, esimerkiksi "tee tehtävät luvun kaksi loppuun saakka".

Halusin soveltaa opetuskokeilussa Hähkiöniemen tutkivan matematiikan oppitunnin asetelmaa. Opiskelijoiden väliset erot materiaalissa etenemisen suhteen olivat kuitenkin kotitehtävistä huolimatta niin suuria, että en kokenut koontivaiheiden järjestämisen olevan järkevää kesken kokeilun. Kävin kuitenkin TIM:ssä läpi opiskelijoiden ratkaisuja niihin tehtäviin, joissa ei ollut automaattitarkastusta ja lisäsin niihin muutamia kommentteja ja parannusehdotuksia. Näin opiskelijat saivat palautetta osaamisestaan opetuskokeilun aikana ja samalla sain itse tietoa opiskelijoiden etenemisestä ja siitä, mitkä asiat on koettu haastaviksi. Lisäksi opetuskokeilun päätteeksi kurssin vastuuopettaja piti noin tunnin mittaisen opettajajohtoisen koontivaiheen, jossa koottiin yhteen tärkeimmät asiat logaritmeista ja käytiin läpi muutama esimerkkitehtävä. Näin varmistettiin, että opiskelijat saivat käyttöönsä oikeat termit ja opetuskokeilun aikana opitut asiat kertaantuivat.

Opetuskokeiluun liittyi tutkimuskysymys "Miten laadittu oppimateriaali soveltuu logaritmien opiskeluun?". Tähän tutkimuskysymykseen haettiin vastauksia seuraavien apukysymysten kautta:

(a) Mitä vaikutuksia laaditun oppimateriaalin käytöllä opiskelijoiden mielestä oli?

(b) Millaiseksi opettaja ja opiskelijat kokevat laaditun oppimateriaalin käytön?

Tavoitteena oli myös selvittää, miten materiaalia pitäisi kehitysvaiheessa 3 kehittää.

Ennen tutkimuksen toteuttamista tiedotin opiskelijoita ja heidän huoltajiaan pro gradu -tutkielmaani liittyvästä tutkimuksesta Wilma-viestillä. Tiedotteessa pyysin alaikäisten opiskelijoiden huoltajia ilmoittamaan, jos he eivät halua opiskelijan osallistuvan tutkimukseen. Täysi-ikäiset opiskelijat saivat päättää itse osallistumisestaan. Kukaan ei kieltäytynyt osallistumasta tutkimukseen tai kieltänyt tutkimusaineiston käyttöä. Tiedote löytyy kokonaisuudessaan liitteestä 2.

6.2 Aineiston keräys

Tutkimuskysymyksiin pyrittiin etsimään vastauksia mittaamalla opiskelijoiden ja opettajan mielipiteitä ja käsityksiä materiaalin vaikutuksista. Opetuskokeiluun osallistuneita opiskelijoita pyydettiin kokeilun lopuksi vastaamaan loppukyselyyn, joka toteutettiin sähköisenä Google Forms -kyselynä (liite 3). Kyselyyn vastasi yhteensä 38 opiskelijaa. Taustatietoina kysyttiin vastaajan sukupuolta, kuinka pitkälle materiaalissa eteni ja mikä on ollut vastaajan yleisin kurssiarvosana lukion matematiikassa. Kysely koostui pääasiassa Likert-asteikkokysymyksistä, joissa vastattiin materiaalia ja opetuskokeilua koskeviin väitteisiin neliportaisella asteikolla. Likert-asteikkokysymykset ovat tyypillisiä kyselytutkimuksissa, joissa kartoitetaan vastaajien mielipiteitä ja tuntemuksia. Annetut vastausvaihtoehdot olivat täysin eri mieltä,

osittain eri mieltä, osittain samaa mieltä ja täysin samaa mieltä. Näillä kysymyksillä kerättiin määrällistä tutkimusaineistoa. Kyselyn lopussa oli lisäksi viisi avointa kysymystä, joista saatiin laadullista tutkimusaineistoa.

Kokeilun jälkeen haastattelin ryhmien vastuuopettajaa, joka oli mukana kokeilussa seuraamassa ja auttamassa opiskelijoita. Haastattelu toteutettiin sähköpostihaastatteluna ja se sisälsi avoimia kysymyksiä materiaalista ja opetuskokeilusta. Kysymykset löytyvät liitteestä 4.

Lisäksi pyrin opetuskokeilun aikana tekemään havaintoja ja muistiinpanoja opiskelutilanteista sekä opiskelijoiden tekemistä ratkaisuista, jotka pääsin TIM:issä kurssin opettajaoikeuksilla näkemään. Suoritin tutkimuksessa osallistuvaa havainnointia, sillä toimin samaan aikaan sekä tutkijana että opettajana.

6.3 Tulosten tarkastelua

Tässä luvussa esittelen kerätyn tutkimusaineiston analyysin ja kehittämistutkimuksen tuloksia. Tuloksia ja tulkintoja luettaessa on hyvä muistaa, että kaikki tutkimuksessa saatu tieto on sosiaalisesti konstruoitua.

6.3.1 Loppukyselyn väitteet

Opiskelijoilla teetetyssä loppukyselyssä vastattiin materiaalia ja opetuskokeilua koskeviin väitteisiin neliportaisella Likert-asteikolla: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä ja 4 = täysin samaa mieltä. Yleinen trendi vastauksissa oli, että äärivastauksia vältettiin, jolloin suurimmat vastausprosentit ovat lähes poikkeuksetta osuneet vaihtoehdoille 2 ja 3. Tästä syystä päädyin analysoimaan vastauksia luokittelemalla vastaukset kahteen luokkaan siten, että vaihtoehdot 1 ja 2 muodostavat luokan ”eri mieltä” ja 3 ja 4 luokan ”samaa mieltä”. Taulukossa 6.1 on esitetty kaikki kyselyn väitteet sekä kuinka suuri osa vastauksista kuului luokkaan ”samaa mieltä”.

Kuten taulukosta 6.1 voidaan nähdä, monen kysymyksen kohdalla vastaukset ovat jakautuneet lähes puoliksi. Tarkastellaan tarkemmin niitä väitteitä, joiden prosenttiosuus poikkeaa eniten 50 prosentista.

Väitteillä 1–8 pyrittiin tutkimaan, mitä mieltä opiskelijat olivat materiaalin käytettävyydestä, sisällöstä ja tehtävätyypeistä. Kaikkien näiden väitteiden kohdalla enemmistö (yli 50 % vastaajista) oli samaa mieltä, eli suhtautui materiaaliin positiivisesti. Vastaajista 73,7 % oli samaa mieltä siitä, että materiaalin tehtävät olivat kivoja (väite 3) ja 68,4 % sitä mieltä, että ne olivat monipuolisia (väite 6).

Lopuilla väitteillä pyrittiin selvittämään oppimiseen ja opetusmenetelmän käyttöön liittyviä asioita. Opetuskokeilun sovellettiin tutkivaan matematiikkaan pohjautuvaa opiskelutapaa. Materiaalissa edettiin omaan tahtiin ja itseohjautuvuus korostui enemmän kuin testiryhmien normaalissa opetuksessa. Opiskelijoille korostettiin, että minulta ja ryhmän vastuuopettajalta saa kysyä apua aina kun tarvitsee. Kyselyyn vastanneista jopa 89,5 % oli samaa mieltä väitteen "sain apua aina kun tarvitsin” kanssa (täysin samaa mieltä $n = 25$), joten ohjauksen tarpeen täyttäminen näyttää onnistuneen hyvin opetuskokeilun aikana.

Taulukko 6.1. Väitteen kanssa samaa mieltä (eli osittain samaa mieltä tai täysin samaa mieltä) olleiden prosenttiosuus kaikkiin vastanneisiin nähden (n = 38)

Väite	**Samaa mieltä**
1. Materiaalin käyttö oli helppoa	55,3 %
2. Materiaalin laajuus oli sopiva käytettyyn aikaan nähden	57,9 %
3. Tehtävät olivat kivoja	73,7 %
4. Tehtävänannot olivat selkeitä	55,3 %
5. Ymmärsin, mitä kussakin tehtävässä oli tavoitteena oppia	52,6 %
6. Tehtävät olivat monipuolisia	68,4 %
7. Pidin tutkimuslähtöisistä tehtävistä, joissa teoria opittiin esim. tekemällä itse havaintoja	52,6 %
8. Tykkään tehdä interaktiivisia tehtäviä, joissa tutkitaan kuvaajia tai applettia	55,3 %
9. Olisin tarvinnut enemmän mallivastauksia	68,4 %
10. Käyttäisin mielelläni vastaavan tyylistä materiaalia muidenkin matematiikan aiheiden opiskelussa	47,4 %
11. Materiaalin käyttö itseohjautuvasti oli minulle sopiva opiskelumuoto	50,0 %
12. Sain apua aina kun tarvitsin	89,5 %
13. Koen ymmärtäneeni, mitä ovat logaritmit ja mihin niitä tarvitaan	50,0 %
14. Ymmärsin eksponenttifunktion ja logaritmifunktion yhteyden	55,3 %
15. Koin kokeilun aikana oivalluksia tai onnistumisen tunteita	68,4 %
16. Onnistuin löytämään yhteyksiä kuvien, symbolikielen ja/tai luonnollisen kielen ilmausten väliltä (esim. kuvaajien tulkinta tai viimeinen tehtävä)	44,7 %
17. Koen oppineeni logaritmitunneilla paremmin kuin normaaleilla matematiikan oppitunneilla	34,2 %
18. Logaritmien osuus tuntui minusta vaikeammalta kuin muu pitkä matematiikka tähän asti	28,9 %
19. Valmiiden ratkaisujen tutkiminen ja kommentoiminen auttoi minua ymmärtämään, millainen olisi hyvä koevastaus	55,3 %
20. Perusteluiden kirjoittaminen on mielestäni helppoa	36,8 %
21. Koen että asiat jäivät paremmin mieleeni, kun niitä ei annettu valmiina sääntöinä vaan ne täytyi selvittää itse	36,8 %
22. Välillä en ymmärtänyt tehtävää, mutta sain oikean vastauksen kokeilemalla	81,6 %
23. Perusteluiden liittäminen osaksi tehtävää on turhaa	36,8 %
24. Logaritmilausekkeiden kirjoittaminen sanalliseen muotoon auttoi minua ymmärtämään mitä merkinnät tarkoittavat	57,9 %

Käytetyssä opetusmenetelmässä huomionarvoisinta kuitenkin on, että vain puolet vastaajista koki materiaalin itseohjautuvan käytön olleen sopiva opiskelumuoto hänelle itselleen ja vain 47,4 % käyttäisi mielellään vastaavan tyylistä materiaalia muidenkin matematiikan aiheiden opiskelussa. Opiskelijoista ainoastaan 34,2 % vastasi olevansa samaa mieltä väitteen "Koen oppineeni logaritmitunneilla paremmin kuin normaaleilla matematiikan oppitunneilla" kanssa, eli 65,8 % oli väitteen kanssa eri mieltä, mikä kertoo myös siitä, että niin sanottua perinteistä opettajajohtoista opetusta kaivattiin.

68,4 % kyselyyn vastanneista opiskelijoista vastasi kokeneensa kokeilun aikana oivalluksia ja onnistumisen tunteita. Materiaalin päätavoitteeseen, eli logaritmin käsitteen ymmärtämiseen koki päässeensä kuitenkin vain puolet vastaajista (väite 13). Väitteen 20 perusteella perusteluiden kirjoittaminen koettiin hankalaksi, mutta toisaalta, koska vain 36,8 prosentin mielestä perusteluiden liittäminen osaksi tehtävää on turhaa, voitaisiin päätellä perustelutehtävien olleen hyödyllisiä. Toisin kuin ongelma-analyysin perusteella arvioitiin, vähemmistö (36,8 %) koki, että asiat jäivät paremmin mieleen, kun ne täytyi selvittää itse. Pienenä yllätyksenä tuli myös se, ettei logaritmien arvioitu olevan muita pitkän matematiikan aiheita haastavampi aihe (väite 18). Toisaalta voitaisiin myös pohtia, oliko materiaalin käytöllä kenties vaikutusta asiaan.

Selvä enemmistö (81,6 %) myönsi, ettei välillä ymmärtänyt jotain materiaalin tehtävää kunnolla, mutta sai silti oikean vastauksen kokeilemalla. Tämä oli osittain ennalta arvattavissa, sillä materiaali sisälsi tehtäviä, joissa vastauskertojen lukumäärää ei ollut rajoitettu, joten vastausta pystyi kokeilemaan uudelleen ja uudelleen. Samaa asiaa pohdittiin myös asiantuntijakierroksella. Viimeisessä kehittämisvaiheessa onkin hyvä pohtia, miten tehtäviä voitaisiin muokata, jotta ne edellyttäisivät paremmin asian todellista ymmärtämistä arvailun sijaan. 68,4 % vastaajista ilmoitti myös kaivanneensa enemmän mallivastauksia materiaaliin. Tämäkin on hyvä ottaa huomioon viimeisessä kehittämisvaiheessa.

Kielentämistehtäviin liittyen, enemmistö (57,9 %) oli sitä mieltä, että koodinvaihtotehtävät auttoivat ymmärtämään symbolikielen merkintöjä. Tämä on linjassa aiemmin, osana tutkivaa harjoittelua, toteuttamassani tutkimuksessa saatujen tulosten kanssa. Matematiikan kirjallisen kielentämisen hyötyjen selvittämiseksi tarkemmin loppukyselyssä esitettiin taulukosta 6.2 löytyvät väitteet, joita alustin seuraavanlaisesti:

> Tehtäviin sisältyi kielentämistehtäviä, joissa mm. pyydettiin selittämään asioita omin sanoin, kirjoittamaan omia havaintoja, analysoimaan valmiita ratkaisuja tai esittämään perusteluja. Tällaiset tehtävät. . .

Tulosten perusteella kielentämistehtävät saivat opiskelijat pohtimaan asioita syvemmin, mikä oli huomattu myös aiemmissa tutkimuksissa (ks. luku 4.4). Lisäksi koska selvä vähemmistö (34,2 %) vastasi kielentämistehtävien olleen turhia ja/tai ettei niistä ollut apua oppimisessa, kielentämistehtävistä voitaisiin tulkita olleen hyötyä logaritmien oppimisessa. Kuitenkin, kuten aiemmissakin tutkimuksissa on todettu, kielentämistehtävät koettiin haastaviksi ja niitä pitäisi enemmistön (63,2 %) mielestä harjoitella enemmän.

Taulukko 6.2. Kielentämistehtäviä koskevien väitteiden kanssa samaa mieltä olleiden prosenttiosuus kaikkiin vastanneisiin nähden (n = 38)

Väite	Samaa mieltä
saivat minut pohtimaan asioita syvemmin	63,2 %
olivat helppoja	28,9 %
olivat turhia	34,2 %
olivat liian työläitä	42,1 %
jättivät asiat minulle epäselviksi	44,7 %
eivät auttaneet minua oppimaan	34,2 %
pitäisi harjoitella enemmän	63,2 %

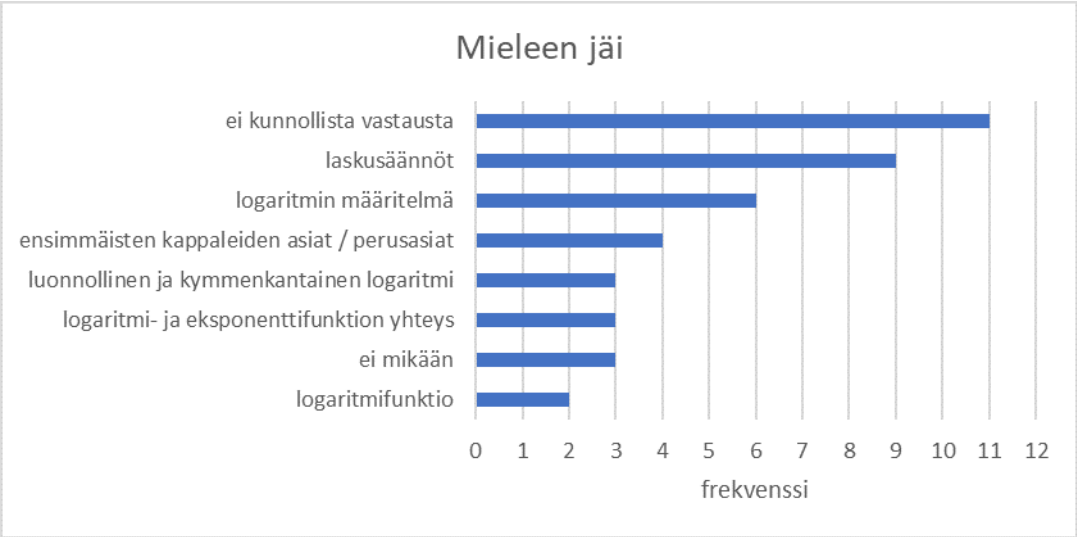
6.3.2 Loppukyselyn avoimet kysymykset

Loppukyselyn avoimilla kysymyksillä kerätylle laadulliselle aineistolle suoritettiin sisällönanalyysi siten, että vastauksissa esiintyneet asiat luokiteltiin ja tekstiaineisto kvantifioitiin. Tämä tehtiin segmentoimalla eli katsomalla, mitä asioita tekstivastaukset pitävät sisällään ja yhdistämällä samaa tarkoittavat asiat luokiksi, minkä jälkeen luokille laskettiin frekvenssit. Näin tutkittiin asioiden esiintymistiheyttä eli sitä, mitkä asiat nousivat selkeimmin esiin kunkin kysymyksen kohdalla. [18, s. 118]

Kuvaan tässä luvussa analyysin tuloksia ja niistä tekemiäni tulkintoja. Esittelen lisäksi muutamia suoria lainauksia opiskelijoiden vastauksista. Tällä pyrin selkeyttämään, millaisia vastauksia muodostetut luokat pitävät sisällään. Vastaajat on identifioitu lainauksissa anonyymeilla tunnuksilla opiskelija1, opiskelija2 ja niin edelleen.

Kuvassa 6.1 on havainnollistettu kysymykseen "Mitkä asiat jäivät sinulle erityisesti mieleen materiaalin ansiosta?" annetuissa vastauksissa esiintyneiden aiheiden frekvenssejä ja kuvassa 6.2 vastaavasti kysymykseen "Mitkä asiat jäivät epäselviksi?" annettuja aiheita. Kuvien diagrammeja vertaamalla nähdään, että moni ensinnäkin muistaa törmänneensä materiaalissa logaritmien laskusääntöihin. Osa vastaajista on listannut ne erityisesti mieleen jääneeksi asiaksi ja osa epäselväksi jääneeksi asiaksi. On hyvä ottaa huomioon, että missään vaiheessa kyselyä ei ole määritelty, mitä tarkoitetaan sillä, että asia jäi epäselväksi. Joku saattaa esimerkiksi kokea, että jos hän ei oppinut muistamaan kaikkia laskusääntöjä ulkoa, ne jäivät hänelle epäselviksi. Myöskään ensimmäisen kysymyksen asettelu ei takaa, että mieleen jääminen tulkittaisiin asian oppimiseksi. Diagrammeja vertaamalla huomataan myös, että oppimateriaalin ensimmäisten päälukujen (1 ja 2) asiat ja niin sanotut perusasiat, kuten logaritmin määritelmä, on koettu jääneen hyvin mieleen, kun taas viimeisten lukujen (3 ja 4) asiat ovat jääneet osalle epäselviksi. Luonnollisesti ne asiat, joihin opiskelijat eivät ehtineet kunnolla perehtymään, jäivät heille epäselviksi, ja koska monelta jäi luku 4 tekemättä, jäi muun muassa logaritmiyhtälö epäselväksi aiheeksi.

Muutama vastaaja (n = 4) oli sitä mieltä, että lähes kaikki asiat jäivät epäselviksi. Opiskelija1 perusteli tätä sillä, että aihe oli vaikea, eikä ollut opettajajohtoista opetusta. Vastauksesta huomaa, että hän ei pitänyt käytetystä opetusmenetelmästä.



Kuva 6.1. Kysymyksen "Mitkä asiat jäivät sinulle erityisesti mieleen materiaalin ansiosta?" vastaukset luokiteltuina (n = 38 vastaajaa). Vastaaja saattoi mainita useamman asian.

Kuva 6.2. Kysymyksen "Mitkä asiat jäivät epäselviksi?" vastaukset luokiteltuina (n = 38 vastaajaa). Vastaaja saattoi mainita useamman asian.

Vastuuopettajan mukaan tutkimukseen osallistuneiden matematiikan ryhmien opetus rakentuu yleensä siten, että teoria opiskellaan yhdessä opettajajohtoisesti ja sen jälkeen tehdään oppikirjan tehtäviä. Kun opiskelija on tottunut tällaiseen opiskelumuotoon ja kokee sen hyväksi oppimisen kannalta, on ymmärrettävää, että uudenlaisen opiskelutavan soveltaminen saattaa tuntua turvattomalta. Vapaa sana -osiossa opiskelumuoto sai opiskelijoilta sekä kritiikkiä että kehuja. Muutama opiskelija kirjoitti, ettei opetustapa sopinut hänelle, koska tarvitsee sen, että "opettaja kertoo teorian". Toisaalta osa vastaajista kertoi myös pitäneensä tästä erilaisesta opiskelutavasta todella paljon ja oppineensa paremmin kuin perinteisellä oppitunnilla.

Opiskelija2 vastasi samaan kysymykseen seuraavasti:

> *En ole ihan varma opinko asioita oikeasti. Osaan kaiken jotenkuten mutta kaikki on myös hiukan epäselvää.*

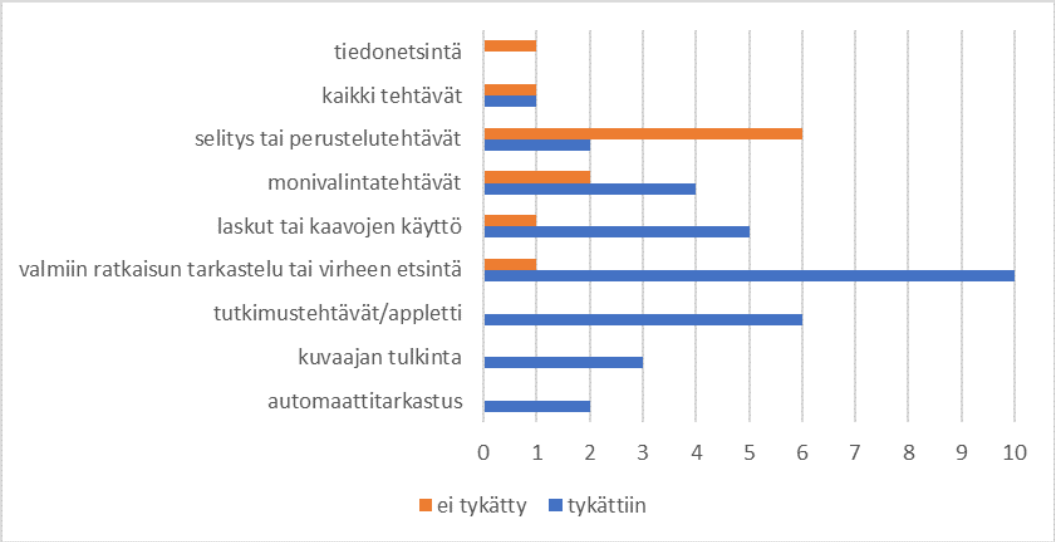
Tästä vastauksesta voidaan päätellä osaamisen tavoitteiden jääneen hieman epäselviksi. Luokkaan ”soveltaminen tai tietyt yksityiskohdat” olen sisällyttänyt vastaukset, joista käy ilmi, että opiskelija on todennäköisesti ymmärtänyt suurimman osan asioista hyvin, mutta on epävarma siitä, osaako hän soveltaa materiaalista oppimaansa muualla, esimerkiksi kirjan vaikeammissa tehtävissä. Samaan luokkaan sisällytin ne vastaukset, joissa on mainittu epäselväksi jokin tietty yksityiskohta, jota ei ollut tavoitteena oppia tämän materiaalin avulla, kuten logaritmin vastauksen muuttaminen desimaali- tai murtoluvuksi.

Yhtenä avoimena kysymyksenä oli ”Millaiset tehtävät toimivat mielestäsi parhaiten ja mitkä heikoiten? Minkä tyylisistä tehtävistä pidit eniten ja mistä vähiten? Miksi?”. Tämänkin kysymyksen vastaukset luokiteltiin ja frekvenssit on esitetty diagrammina kuvassa 6.3. Vastauksista nousivat selvästi eniten pidetyiksi tehtäviksi ne, joissa tarkasteltiin jotain valmista ratkaisua ja tehtiin päätelmiä, täydennettiin välivaiheita, etsittiin virheitä tai järjestettiin ratkaisun vaiheita oikeaan järjestykseen. Opiskelija3 kirjoitti, että ”*tehtävät joissa piti mallivastauksen avulla vastata oli kivoja, koska aluks sai pienen käsityksen että miltä oma vastaus pitäis näyttää*”. Tällaiset tehtävätyypit toimivat siis tavallaan esimerkkeinä, mutta samalla aktivoivat opiskelijaa matemaattiseen ajatteluun.

Opiskelija4 puolestaan kirjoitti näin:

> *Sellaiset tehtävät mistä pystyi heti tarkastamaan onko tehtävän vastaus oikein, olivat todella hyviä. Ylipäätään se, että tehdystä tehtävästä sai aina jonkilaista palautetta tai edes vihreän sävyisen ruudukon, oli palkitsevaa ja motivoivaa. Pidin eniten siitä, kuinka joihinkin aiheisiin johdateltiin helpolla tavalla ja sillein, että asian oivaltaa itse ilman sen kummempaa teoriaa. Pidin eniten logaritmifunktion ja eksponenttifunktion yhteyden pohdinnasta, sillä sen ymmärsi itsekin helposti. - -*

Muun muassa tästä vastauksesta käy ilmi, että automaattitarkisteiset tehtävät koettiin motivoiviksi, mikä on hyvin linjassa aiempien tutkimusten kanssa. Lisäksi opiskelija4 nostaa esiin sen, että tutkivaa matematiikkaa hyödyntäneet tehtävät auttoivat häntä oivaltamaan teorian itse. Moni opiskelija mainitsikin pitäneensä erityisesti niistä tehtävistä, joissa tutkittiin jotain applettia tai kuvaajaa.



Kuva 6.3. Kysymyksen "Millaiset tehtävät toimivat mielestäsi parhaiten ja mitkä heikoiten? Minkä tyylisistä tehtävistä pidit eniten ja mistä vähiten? Miksi?" vastaukset luokiteltuina (n = 38 vastaajaa). Oranssille kuvataan negatiivisten ja sinisellä positiivisten vastausten frekvenssejä. Vastaaja saattoi mainita useamman asian.

Vastausten perusteella vähiten pidettiin tehtävistä, joihin vastattiin tekstivastauksella tai joissa pyydettiin esittämään kirjallisia perusteluita. Tätä perusteltiin enimmäkseen sillä, että selitystehtävät olivat haastavia, eikä niihin saanut heti oikeaa vastausta. Monivalintatehtävistä ja laskutehtävistä puolestaan sekä pidettiin että ei pidetty. Vastauksista oli myös huomattavissa, että ne opiskelijat, jotka eivät pitäneet selitystehtävistä, pitivät yleensä niistä tehtävistä, joissa laskettiin tai käytettiin menetelmällisesti hyväksi laskukaavoja.

Osa opiskelijoista puolestaan kritisoi monivalintatehtäviä siitä, että ne eivät heidän mielestään auta kurssikokeessa. Muutama vastaaja piti materiaalin tehtäviä muutenkin liian yksinkertaisina. Opiskelija5 esimerkiksi kirjoitti näin:

> *En pitänyt oikeastaan ollenkaan tehtävistä, ne olivat epäselviä, lyhyitä ja pinnallisia oikeastaan suurempia sovelluksia sisältämättä. Ne eivät myöskään ollut ollenkaan sellaisia, mitä koetehtävät tulisivat olemaan.*

Vastauksesta voisi päätellä, että hän tähtää opiskelulla pääasiassa kurssikokeessa menestymiseen; Hän ei nähnyt hyötyä pelillistetyissä tehtävissä, koska sellaisia ei tulisi kokeeseen. Opiskelija6 vastasi, että ”*Parhaiten toimi vaikeammat tehtävät, joihin ei tarvitse laittaa vain oikeaa vastausta*”. Huomioitavaa on se, että nämä molemmat opiskelijat ovat kyselyssä ilmoittamansa arvosanan perusteella lahjakkaita matematiikassa. Näiden opiskelijoiden vastauksista voitaisiin tulkita, että materiaalissa ei ollut heidän mielestään tarpeeksi ylöspäin eriyttäviä tehtäviä.

Kysymys "Miten selittäisit henkilölle, joka ei ole käynyt kurssia MAA8, mitä logaritmi tarkoittaa ja mihin sitä käytetään?" olisi pitänyt muotoilla hieman paremmin, sillä yllättävän suuri osa opiskelijoista vastasi siihen pelleillen, esimerkiksi "*Selittäi-*

sin hänelle kohteliaasti geogebran ja kahvikupposen äärellä". Tämän vuoksi kysymyksellä ei pystytty selvittämään, kuinka moni oli ymmärtänyt logaritmin käsitteen. Vastauksista 50 % oli luokittelun jälkeen hyviä tai kohtalaisia. Toisaalta tämä tulos on sama kuin Likert-asteikkokysymyksissä väitteen 13 kanssa samaa mieltä olleiden osuus, joten voitaisiin arvioida, että puolet vastaajista ymmärsi, mikä on logaritmi ja mihin sitä voidaan käyttää.

Vaikka pyysin opiskelijoita kiinnittämään huomiota etenkin siihen, mitä täytyisi parantaa, materiaali ja opetuskokeilu saivat opiskelijoilta kritiikin lisäksi paljon kehuja. Esimerkiksi opiskelija4 vastasi siihen kysymykseen, jossa selvitettiin, mitkä asiat jäivät mieleen, että "*Kuinka hyvin selvästi kerrotut teoriat olivat tehty yksinkertaisen kuuluiseksi ja pelottavalta näyttävät tehtävät todella olivat oikeasti aika kätevän helppoja*". Myös vapaa sana -kohtaan tuli kehuja, esimerkiksi "*Oli ihan kiva materiaalina ja oli yksinkertaisia esimerkkejä niiden tehtävien lähellä missä niitä tarvittiin :))*"ja ”*oli kiva kokeilu, opin enemmän kuin muilla tunneilla :)*". Tällaiset palautteet ovat innostavia ja osoittivat, että ainakin osa opiskelijoista koki materiaalin hyväksi ja hyödylliseksi.

6.3.3 Havainnot

Toteutin opetuskokeilun aikana osallistuvaa havainnointia, eli keräsin tutkimusaineistoa observoimalla ja tekemällä muistiinpanoja samalla kun toimin opetustilanteiden ohjaajana. Teemat, joihin pyrin havaintoja tehdessäni keskittymään olivat

1. hankaluuksia tuottavat asiat,
2. onko havaittavissa oppimista ja
3. materiaalin käytön sujuvuus ja mielekkyys.

Pyrin tekemään havaintoja sekä tarkkailijana, että vuorovaikutuksessa opiskelijoiden kanssa.

Teemaan 1 liittyen huomasin muun muassa, että ne tehtävät, joissa piti kirjoittaa ratkaisu tai perusteluja avoimena tekstivastauksena koettiin haastaviksi ja aiheuttivat epävarmuutta. Opiskelijat kysyivät minulta, mistä voivat tietää onko vastaus oikein. Kerroin, että he voivat pyytää minua tai kurssin vastuuopettajaa keskustelemaan tehtävistä heidän kanssaan, jolloin he voivat myös kysyä asioita, jotka ovat jääneet epäselviksi. Lisäksi kerroin, että opiskelijat saavat oppitunnin jälkeen vastauksiin kirjallista palautetta, jonka avulla voivat täydentää vastauksiaan. TIM:in opettajanäkymä mahdollistaa opettajan pääsyn käsiksi opiskelijoiden vastauksiin, joten opettajana pystyin kommentoimaan ja pisteyttämään opiskelijoiden vastauksia. Samalla sain hyödyllistä tietoa opiskelijoiden osaamisen tasosta. Tein tehtäviin annetuista vastauksista havainnon, että tekstivastaustehtäviin tyydyttiin vastaamaan todella suppeasti ja epätäydellisin lausein, mutta suurin osa opiskelijoista näytti kuitenkin oivaltaneen tavoitteena olleet asiat.

Havainnoin opetuskokeilun lisäksi myös koontivaihetta, jonka kurssien vastuuopettaja piti opetuskokeilun päätteeksi opettajajohtoisena opetuksena. Opettajan kysellessä esimerkkitehtäviin ratkaisuja opiskelijoilta huomasin, että ainakin logaritmiyhtälöiden ratkaiseminen ja merkintä ln olivat jääneet osalle hieman epäselviksi.

Tämä näkyi muun muassa viittaajien vähäisessä määrässä. Logaritmiyhtälöt listattiin epäselviksi jääneisiin aiheisiin myös ennen koontivaihetta toteutetussa loppukyselyssä. Tämä saattoi johtua osaksi siitä, että kaikki opiskelijat eivät ehtineet edetä oppimateriaalissa viimeiseen lukuun, jossa logaritmiyhtälöitä käsiteltiin.

Tehtävien tekonopeudessa oli huomattavissa yllättävän suuria eroja. Osa opiskelijoista eteni materiaalissa paljon nopeammin kuin olin arvioinut. Materiaalin tehtävien jälkeen heitä ohjeistettiin tekemään oppikirjan tehtäviä logaritmeihin liittyen. Nopean etenemisen ja koontivaiheiden puuttumisen takia päädyimme vastuuopettajan kanssa siihen ratkaisuun, että materiaalin teko lopetettiin hieman suunniteltua aikaisemmin ja loput ajasta käytettiin opettajajohtoiseen kertausosioon (em. koontivaihe). Kaikki opiskelijat eivät ehtineet tehdä kaikkia materiaalin tehtäviä. Tähän vaikuttivat myös opiskelijoiden poissaolot. Yksi opiskelija esimerkiksi oli paikalla ainoastaan viimeisellä oppitunnilla, mutta halusi silti aloittaa materiaalin teon ja vastata loppukyselyyn.

Teemoihin 2 ja 3 liittyen oli mielenkiintoista havainnoida opiskelijoiden reaktiota heidän tehdessään oivalluksia materiaalin ansiosta. Näitä reaktiota herätti etenkin tutkimustehtävä 1.2, jossa tutkittiin eksponentti- ja logaritmifunktion välistä yhteyttä. Esimerkiksi, kun eräs opiskelija huomasi piirtämänsä logaritmin käyrän osuvan aiemmin piirtämiinsä eksponenttifunktion käänteisfunktion pisteisiin, hän totesi yllättyneenä ääneen, että logaritmifunktio taitaa olla eksponenttifunktion käänteisfunktio. Juuri tämä asia oli ollut tehtävässä tavoitteena oivaltaa. Lisäksi sain havaintoja oppimisesta ja ymmärtämisestä keskustellessani opiskelijoiden kanssa heidän vastauksistaan. Huomasin myös, että avun pyytäminen ja muiden opiskelijoiden kanssa keskusteleminen sujuivat tutkittavien ryhmien opiskelijoilta luontevasti.

6.3.4 Opettajan haastattelu

Kurssien vastuuopettajan haastattelu tehtiin sähköpostihaastatteluna, jonka kysymykset löytyvät liitteestä 4. Opettajan vastaukset ovat hyvin linjassa omien havaintojeni kanssa muun muassa siitä, että suurin osa opiskelijoista osallistui kokeiluun hyvällä asenteella ja motivaatiolla, mutta tehtäviin syventymisessä ja siinä, kuinka nopeasti opiskelijat tekivät materiaalin tehtäviä, näkyi paljon eroja. Joillekin opiskelijoille oli selvästi tärkeämpää suorittaa tehtävät nopeasti, kuin syventyä ajatuksella pohtimaan asioita. Tutkittavilla ryhmillä käytössä olevalla tehtäväpistejärjestelmällä oli luultavasti vaikutusta tähän. Asenne- ja motivaatioerot näkyivät etenkin perusteluja ja sanallistamista vaativien tehtävien kohdalla. Suurin osa opiskelijoista vastasi kielentämistehtäviin todella lyhyesti ja epätäydellisin lausein.

Vastuuopettajan mielestä materiaalin käytön hyviä puolia on, että materiaalin huolellinen läpikäyminen mahdollistaa melko itsenäisen tavan opiskella. Toinen hyvä puoli hänen mielestään on, että tehtävissä korostuu aiheen ja siihen liittyvien käsitteiden ymmärtäminen tyypillisempien "laske", "sievennä" tai "ratkaise" tehtävien sijaan. Tästä huolimatta hän pohti, että aivan asian ytimessä olevaan logaritmin määritelmän käyttämiseen liittyviä perustehtäviä voisi olla materiaalissa enemmän ja myös luonnollinen logaritmi voisi korostua enemmän. Myös asiantuntijakierroksella saatiin opettajilta palautetta siitä, että perinteisiä laskutehtäviä voisi olla enemmän.

En kuitenkaan vielä kehittämisvaiheessa 2 päätynyt lisäämään niitä materiaaliin, koska arvioin, että tällöin tehtäviä saattaisi olla liikaa aikatauluun nähden ja halusin materiaalin pääpainon olevan käsitteellistä ymmärrystä parantavissa tehtävissä.

Opettaja piti erityisesti tutkimustehtävästä 1.2, sillä se sopii hänen mielestään hyvin tällaiseen itsenäiseen opiskelumuotoon. Myös opiskelijat antoivat positiivista palautetta kyseisestä tehtävästä. Tehtävän 2.1. opettaja puolestaan arvioi liian haastavaksi – aivan kuten asiantuntijatkin – mutta huomautti sen olevan todella hyödyllinen niille opiskelijoille, jotka sen ymmärsivät. Opettajan arvion mukaan huonoiten toimi tehtävä 1.6, jossa täytyi etsiä tietoa luonnollisesta logaritmista ja kymmenkantaisesta logaritmista, sillä varsinkin luonnollinen logaritmi jäi tehtävästä huolimatta opiskelijoille vieraaksi.

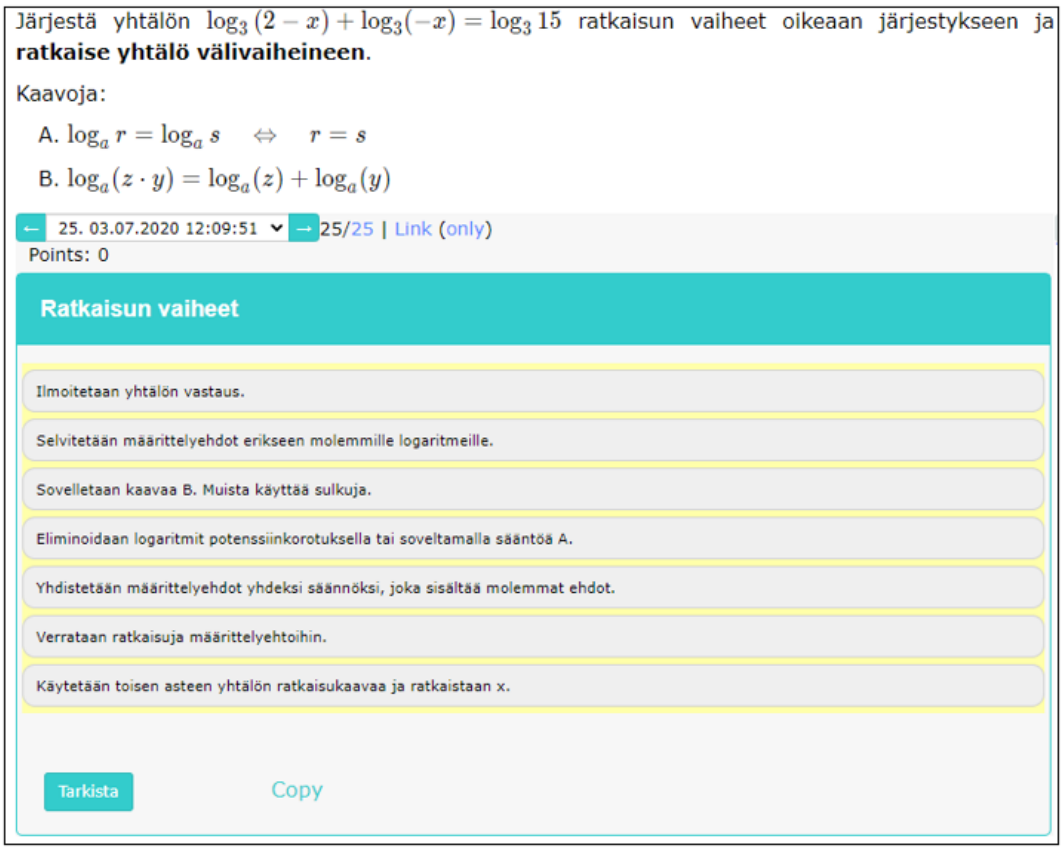
Materiaalin huonoihin puoliin opettaja listasi TIM-alustan tuomat rajoitukset syntaksiin ja sivuston ulkoasuun liittyen. TIM-alustan rajallisuus nousi esiin myös yksittäisten opiskelijoiden palautteissa. He ovat esimerkiksi tottuneet käyttämään Abitti-editoria ja olisivat toivoneet materiaalin mahdollistavan samoja asioita kuin se, esimerkiksi mahdollisuuden liittää kuvakaappaus suoraan vastausruutuun. Osa opiskelijoista kritisoi myös sivuston hitautta ja huomautti, ettei se toiminut Edge-selaimella täysin samoin kuin muilla selaimilla.

Opettaja mainitsi, että hän voisi tulevaisuudessa kuvitella käyttävänsä materiaalia kurssin aikana esimerkiksi yksittäisten opiskelijoiden nopeamman etenemisen mahdollistamiseen ja sitä kautta ylöspäin eriyttämiseen tai itsenäiseen opiskeluun esimerkiksi poissaolojen takia. Lisäksi hän huomautti, että materiaali voisi sopia myös kertaamiseen abikurssille, jolla varsinaisessa opetuksessa edetään aiheesta aiheeseen varsin nopeasti. Jos hän käyttäisi materiaalia oppitunneilla varsinaisena opetusmenetelmänä, kuten tässä kokeilussa, hän strukturoisi materiaalissa etenemisen jonkinlaisten yhteisten osuuksien avulla eli ottaisi mukaan myös opettajajohtoista opetusta. Tämä olisi varmasti hyvä idea ja tukisi etenkin niiden opiskelijoiden oppimista, jotka eivät jaksa keskittyä itsenäiseen opiskeluun kovin kauaa.

6.4 Kehittämisvaihe 3

Kehittämisvaiheessa 3 muokkasin kehittämääni oppimateriaalia vielä koko kehittämisprosessista saamieni tietojen perusteella. Tein pieniä korjauksia materiaaliin jo opetuskokeilun aikana opiskelijoiden huomatessa virheitä, kuten pisteytys- tai kirjoitusvirheitä. Esimerkiksi tehtävän 4.3 pisteytys ei toiminut ollenkaan, mikä johtui siitä, että tehtävätyypin koodi ei hyväksynyt raahauslaatikoiden matemaattisia symboleita. Tämän takia minun täytyi muokata tehtävää siten, että siirsin symbolikieliset yhtälöt tehtävän alkuun ja nimesin ne kaavoiksi A ja B. Muilta osin tehtävä pysyi samana. Korjattu tehtävä näkyy kuvassa 6.4 (vrt. kuva 5.4).

TIM-ympäristön teknisiin ongelmiin en pystynyt itse vaikuttamaan. Sivuston hitautta pyrin alun perin ehkäisemään pudotusikkunoilla, sillä sivu latautuu nopeammin, jos kaikki sisältö ei ole valmiiksi nähtävillä. Opiskelijoiden mielestä pudotusikkunat tekivät materiaalista kuitenkin hieman sekavan ja osa kysymyksistä oli vaikea löytää. Päädyin muokkaamaan materiaalia niin, että kaikki kysymykset ovat näkyvillä, mutta esimerkiksi tekstivastausruudut edelleen pudotusikkunoissa.



Kuva 6.4. Pisteytyksen korjaamiseksi muokattu tehtävä 4.3

Loppukyselyssä selvisi, että osa opiskelijoista oli ratkaissut tehtäviä arvaamalla oikean vastauksen. Tähän ongelmaan pyrin kehittämisvaiheessa vastaamaan rajoittamalla monivalintatehtävien ja kyllä-ei-tehtävien vastauskertoja. Nyt opiskelija joutuu pohtimaan vastausta tarkemmin, sillä vastauskertoja on vain yksi tai kaksi.

Koska tutkimuksessa selvisi, ettei tehtävä 1.6 toiminut kovin hyvin ja osaaminen jäi etenkin luonnollisen logaritmin osalta heikoksi, tein tehtävään pieniä muutoksia. Päädyin poistamaan tehtävästä kohdan "Listaa esimerkkejä, missä muualla kuin matematiikassa logaritmia lg tarvitaan?", koska yksi asiantuntijoista kyseenalaisti tämän tehtävän tarkoituksen. Myös opiskelijat mainitsivat tiedonetsintätehtävät niiden tehtävien joukossa, joista ei pidetty tai joiden koettiin toimineen heikoiten. Lisäksi parantelin luonnollisen logaritmin ja kymmenkantaisen logaritmin teoriaa ja lisäsin esimerkkejä sekä laskutehtäviä niihin liittyen (lisätehtävä 1.7). Tällä vastasin myös siihen toiveeseen, että materiaalissa olisi enemmän logaritmin määritelmään liittyviä mekaanisia laskutehtäviä. Lisää menetelmällistä sujuvuutta harjoittavia tehtäviä käyttäjä voi halutessaan etsiä oppikirjoista tämän materiaalin ohella.

Lopullinen kehittämistuotos on vapaasti käytettävissä osoitteessa **https://tim.jyu.fi/view/tau/toisen-asteen-materiaalit/matematiikka/kertaus/logaritmit**.

7 Yhteenveto ja pohdintaa

Tässä luvussa tehdään yhteenveto tutkimusaineiston avulla saaduista tuloksista sekä pohditaan kehittämistutkimuksen onnistumista, luotettavuutta, eettisyyttä ja jatkotutkimusmahdollisuuksia.

Kehittämistutkimuksen päätavoitteena oli luoda logaritmin oppimista ja käsitteellistä ymmärtämistä parantava oppimateriaali. Samalla pyrittiin saamaan tutkimustietoa muun muassa siitä, millaiseksi opiskelijat kokevat tutkivaa matematiikkaa ja kielentämistä hyödyntävät tehtävät ja sähköisen oppimateriaalin käytön pitkän matematiikan opiskelussa ja millaisia vaikutuksia sillä on. Tutkimuskysymykset, joihin tutkimuksessa haettiin vastauksia, olivat 1) millaisin keinoin logaritmien oppimista ja käsitteellistä ymmärtämistä voitaisiin parantaa 2) mitä mieltä asiantuntijat ovat laaditun oppimateriaalin haastavuustasosta, kattavuudesta ja helppokäyttöisyydestä ja 3) miten laadittu oppimateriaali soveltuu logaritmien opiskeluun.

7.1 Yhteenveto tutkimuksen tuloksista

Teoreettisessa ongelma-analyysissa saatiin selvitettyä, mitä asioita materiaalin avulla tulisi oppia ja millaiset oppimateriaalit tai opiskelutavat mahdollisesti parantavat matematiikan oppimista ja käsitteellistä ymmärtämistä. Analyysin tulosten perusteella päädyttiin luomaan sähköinen oppimateriaali, jossa hyödynnettiin erilaisia kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppejä sekä tutkivaa matematiikkaa. Muun muassa Weberin pilottitutkimuksesta [48] ja prosessi-objektiteorioista otettiin vaikutteita siten, että tehtävillä pyrittiin eksponentti- ja logaritmilausekkeiden ymmärtämiseen prosessien lisäksi objekteina, jotta voitaisiin edistää nimenomaan logaritmin konseptuaalista osaamista.

Asiantuntijakyselyllä saatiin selvitettyä matematiikan opetuksen asiantuntijoiden mielipiteitä kehitetystä materiaalista sekä näkökulmia siihen, millaisia muutoksia materiaaliin olisi hyvä tehdä ennen opetuskokeilua. Asiantuntijoiden mielestä materiaali oli toimiva ja kattoi kaikki oleelliset asiat logaritmeista. Kaksi tehtävää arvioitiin kuitenkin liian haastaviksi heikoimmille opiskelijoille ja myös kielentämistehtävien arveltiin tuottavan osalle haasteita.

Tutkimuskysymykseen 3 etsittiin vastauksia koko kehittämisprosessin aikana, mutta pääasiassa kehittämistuotoksen testaamista varten järjestetyssä opetuskokeilussa ja sen ohessa kerätyn tutkimusaineiston analyysissa. Tulosten tulkinnoista tehtyjä johtopäätöksiä voidaan tarkastella apukysymysten kautta.

Mitä vaikutuksia materiaalin käytöllä opiskelijoiden mielestä oli?

Loppukyselyn tuloksista tulkittiin, että vain puolet vastaajista koki ymmärtäneensä mikä on logaritmi ja mihin sitä käytetään. Tulos oli toivottua huonompi, koska oppimateriaalin avulla haluttiin parantaa etenkin logaritmin käsitteen ymmärtämistä. On kuitenkin huomioitava, että tutkimuksessa mitattiin opiskelijoiden omaa käsitystä oppimisestaan ja avointen kysymysten vastauksista huomasi, että kaikki vastaajat

eivät olleet vastanneet kysymyksiin tosissaan. Materiaalin käytön todellista vaikutusta oppimiseen ei tässä tutkimuksessa siis voitu mitata. Ei myöskään voida todeta, mitä vaikutuksia juuri materiaalin käytöllä oli, sillä oppimiseen saattoivat vaikuttaa myös esimerkiksi opiskelumuoto, muiden oppimateriaalien käyttö, poissaolot tai oppimisympäristön sosiaaliset vaikutukset.

Enemmistö opiskelijoista kuitenkin kertoi, että sai materiaalin ansiosta oivalluksia ja onnistumisen tunteita ja koki ymmärtäneensä asioita. Tästä voitaisiin tehdä johtopäätös, että kehitetty materiaali voi auttaa opiskelijoita logaritmien opiskelussa. Kielentämiseen liittyen etenkin koodinvaihtotehtävistä koettiin olleen apua, mutta eri esitysmuotojen välisten yhteyksien löytäminen jäi enemmistön mielestä vielä heikoksi. Aiempien tutkimusten tulosten tavoin opiskelijat kokivat, että kielentämistehtävät saivat pohtimaan asioita syvemmin, mutta olivat haastavia ja niitä pitäisi harjoitella enemmän. Myös tutkimuslähtöisistä tehtävistä voidaan todeta olleen hyötyä, sillä tutkimuksen mukaan niistä pidettiin eniten ja ne antoivat opiskelijalle oivaltamisen tunteita. Lisäksi enemmistö oli samaa mieltä muun muassa väitteen "Valmiiden ratkaisujen tutkiminen ja kommentoiminen auttoi minua ymmärtämään, millainen olisi hyvä koevastaus" kanssa.

Millaiseksi opettaja ja opiskelijat kokivat materiaalin käytön?

Materiaalin käytettävyyteen liittyvä kritiikki koski lähinnä TIM:in teknisiä ominaisuuksia, joihin ei tässä kehittämistutkimuksessa pystytty vaikuttamaan. Itse materiaalin käytön ohjeistus arvioitiin riittäväksi, mutta osa tehtävänannoista vaati vielä hieman selkeytystä ja materiaalin ulkoasu yksinkertaistamista. Ulkoasua selkeytettiin siirtämällä kysymykset ulos pudotusikkunoista, joista ne oli palautteen mukaan vaikea löytää. Oppimateriaalin toimiva ulkoasu on tärkeä asia muun muassa motivoinnin kannalta, sillä sekava tai levoton ulkoasu voi saada antaa huonon ensivaikutelman ja saada käyttäjän suhtautumaan oppimateriaaliin torjuvasti, vaikka sen sisältö olisi kuinka laadukasta [46, s. 188].

Enemmistö loppukyselyyn vastanneista opiskelijoista arvioi materiaalin tehtävät kivoiksi ja monipuolisiksi sekä materiaalin laajuuden sopivaksi käytettyyn aikaan nähden. Eniten pidettiin tutkimuslähtöisistä tehtävistä ja kuvaajien, applettien tai valmiiden ratkaisuiden tutkimisesta ja analysoimisesta. Monivalintatehtävät ja laskutehtävät saivat sekä puolesta- että vastaan-argumentteja. Selitys- tai perustelutehtävistä (matemaattisen ajattelun sanallistaminen) pidettiin selvästi vähiten, mikä saattoi johtua muun muassa siitä, että ne koettiin työläiksi ja vieraiksi sekä siitä, että niihin ei ollut suoraan saatavilla oikeita vastauksia. Opettajan mielestä materiaalin hyviä puolia oli sen soveltuminen itsenäiseen opiskeluun ja se, että tehtävissä korostuu aiheen ja siihen liittyvien käsitteiden ymmärtäminen.

Teoreettisessa ongelma-analyysissa sähköisten tehtävien eduksi havaittu automaattitarkastus sai positiivista palautetta myös tässä tutkimuksessa. Osa opiskelijoista mainitsi pitäneensä eniten tehtävistä, joista sai välittömän palautteen. Ne motivoivat ja antoivat opiskelijalle onnistumisen tunteita. Vastaavasti niiden tehtävien arvioitiin toimineen huonoiten, joihin oppimateriaali ei antanut oikeaa vastausta.

Itse opiskelutapaan, joka perustui ryhmien "normaalia" opetusta vahvemmin opiskelijoiden itseohjautuvuuteen ja itsenäiseen tutkimiseen, suhtauduttiin sekä positiivisesti että negatiivisesti. Osa kaipasi opettajajohtoista opetusta tai perinteisiä koetehtäviä muistuttavia tehtäviä. Osa taas kertoi, että oli kivaa opiskella matematiikkaa eri tavalla, tai että tämä opiskelutapa sopi hänelle hyvin. Kuitenkin alle puolet ilmoitti käyttävänsä mielellään vastaavan tyylistä materiaalia muidenkin aiheiden opiskelussa.

7.2 Pohdintaa

Kehittämisprosessille ja opetuskokeilulle asetettiin teoreettisen ongelma-analyysin perusteella tavoitteet, jotka on esitelty luvussa 4.8. Arvioidaan kehittämisprosessin onnistumista pohtimalla asetettujen tavoitteiden toteutumista.

Lukion opetussuunnitelman perusteiden ja aiemmissa tutkimuksissa huomattujen oppimisen haasteiden perusteella asetettiin tavoitteeksi, että opiskelija oppii tuntemaan logaritmifunktion ominaisuudet, ratkaisemaan logaritmiyhtälöitä, käyttämään teknisiä apuvälineitä logaritmifunktioiden tutkimisessa ja muodostaa kokonaiskuvan siitä, mitä ovat logaritmit ja mihin niitä käytetään. Tutkimuksen tulosten perusteella ei voida sanoa kaikkien näiden tavoitteiden täyttyneen halutulla tavalla, varsinkin kun ainoastaan puolet koki ymmärtäneensä logaritmin käsitteen, mikä oli asetettu yhdeksi kehityksen päätavoitteista. Toisaalta, kuten Pehkonenkin [32] on todennut, täydellistä ymmärtämistä ei voida koskaan saavuttaa. On myös tärkeää huomata, että tässä tutkimuksessa tutkittiin materiaalin käytön vaikutuksia mittaamalla opiskelijoiden omia käsityksiä oppimisestaan. Todellisten vaikutusten selvittäminen olisi edellyttänyt osaamisen mittaamista jonkinlaisella kokeella ja tulosten vertaamista ryhmään, joka olisi opiskellut samat asiat niin sanotussa normaalissa opetuksessa. Jatkotutkimuksena olisi mielenkiintoista tutkia materiaalin käytön vaikutuksia oppimiseen, mittaamalla esimerkiksi testiryhmän ja vertailuryhmän koemenestymistä logaritmien osalta ja tutkimalla näkyykö osaamisessa eroja esimerkiksi konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhteen. Lisäksi jatkotutkimuksissa olisi edelleen hyvä pohtia, millaisin keinoin logaritmin käsitteen ymmärrystä voitaisiin helpottaa entisestään.

Oppimateriaalin alustana käytetty TIM mahdollisti monipuolisesti sähköisen oppimateriaalin etujen hyödyntämisen ja monipuolisten ja pelillistettyjen tehtävien luomisen. Lisäksi opiskelijoilla oli mahdollisuus käyttää monia ylioppilaskokeessa sallittuja ohjelmistoja ja harjoitella sähköistä vastaamista sekä kuvaajien piirtoa. Muita ylioppilaskokeessa tarvittavia taitoja, joita materiaalin avulla harjoiteltiin, oli hyvän vastauksen piirteiden pohtiminen ja oman matemaattisen ajattelun sanallistaminen ja perusteleminen. Lisäksi opiskelijat tutustuivat heille uusiin tehtävätyyppeihin, joita myös ylioppilaskokeissa on viime vuosina ollut, esimerkiksi virheen etsintä -tehtäviin ja välivaiheiden täydentämistä vaativiin tehtäviin. Tämän kannalta joidenkin opiskelijoiden käsitys siitä, että materiaalin tehtävistä ei ole hyötyä kokeissa, oli osittain virheellinen.

Materiaalin tehtävissä hyödynnettiin yhteensä seitsemää erilaista kielentämistehtävätyyppiä, sekä vaadittiin omien havaintojen sanallistamista ja perusteluiden

esittämistä. Matematiikan kielentämistä onnistuttiin siis hyödyntämään materiaalissa kattavasti ja tutkimuksen tulosten perusteella sen koettiin auttaneen muun muassa symbolikielen merkintöjen ymmärtämisessä. Aiempien tutkimusten tavoin kielentämistehtävät koettiin haastavina ja niitä pitäisi opiskelijoiden mielestä harjoitella lisää, mutta ne saivat opiskelijan myös pohtimaan asioita syvemmin ja auttoivat opettajaa kartoittamaan osaamisen tasoa.

Myös tutkivaa matematiikkaa hyödynnettiin kattavasti tutkimustehtävissä ja opetuskokeilun rakenteessa. Tutkimustehtävistä pidettiin ja niiden kerrottiin antaneen oivaltamisen tunteita. Etenkin logaritmi- ja eksponenttifunktion yhteyden tutkiminen (tutkimus 1.2) koettiin hyödylliseksi ja toimivaksi. Teknologia-avusteisen tutkivan matematiikan ja kielentämisen todellisia vaikutuksia käsitteellisen ymmärtämisen lisääntymiseen ei tässä tutkimuksessa pystytty mittaamaan, mutta ainakin osa opiskelijoista raportoi niistä olleen hyötyä asioiden ymmärtämisessä ja ajattelun jäsentämisessä.

Opetuskokeiluun valitulla opiskelutavalla tuettiin opiskelijan itseohjautuvuutta ja roolia aktiivisena oppijana, sillä teoria opiskeltiin itse tutkimalla ja oivaltamalla opettajajohtoisen teoriaopetuksen sijaan. Opetuskokeilun järjestelyillä haluttiin tukea konstruktivistista oppimiskäsitystä, jonka mukaan rakennamme tietoa yksin ja yhdessä aiemmin opittujen asioiden pohjalta [46, s. 192]. Tavallaan opiskelutapa sai piirteitä myös suosiotaan nostavasta käänteisestä oppimisesta. Sanalla *käänteinen* viitataan niin sanotun peristeisen opetuksen käänteistämiseen, eli oppimista tarkastellaan enemmän oppijan näkökulmasta ja opettajan rooli on ohjata opiskelijaa kasvamaan itsensä opettajaksi. Tämä edellyttää opiskelijalta itseohjautuvuutta, jota edistetään antamalla hänelle enemmän vaikutusmahdollisuuksia ja vastuuta, tukemalla hänen käsitystään osaamisen tasostaan ja edistämällä sosiaalista yhteenkuuluvuutta. [40, s. 100–101]

Loppukyselyn tulosten perusteella kehitetyn materiaalin käyttö oppitunneilla mahdollisti hyvin opettajan toimimisen oppimisen ohjaajana, sillä opiskelijat saivat apua aina kun tarvitsivat. Opetuskokeilussa opettajia oli kylläkin kaksi yhden sijaan ja riittävän avun saaminen riippuu myös ryhmäkoosta, mutta joka tapauksessa materiaalin käyttö itseohjautuvasti vapautti opettajan tukemaan oppijoita yksilöinä lähikontaktissa. Vuorovaikutus luo opettajalle mahdollisuuksia esimerkiksi motivoida opiskelijaa ja tukea häntä oman osaamisen arvioinnissa ja oppimaan oppimisessa.

Artikkelissaan *Oppiminen on monen tekijän summa* Lindblom-Ylänne ja muut [23] muistuttavat, että oppiympäristöllä ja oppimateriaaleilla on erilaisia vaikutuksia eri opiskelijoihin. He ovat tutkimuksissaan huomanneet, että osa opiskelijoista on vähemmän herkkiä oppimisympäristön ja opetuksen vaikutuksille kuin muut. Nämä opiskelijat nojaavat vahvasti itsesäätelyyn, vaikka oppimisympäristö ei sitä edellyttäisikään ja tavoittelevat itselleen tärkeiden asioiden oppimista. Vahvan itsesäätelytaidon ansiosta tällainen opiskelija kykenee jo varhaisessa vaiheessa löytämään itselleen parhaiten sopivat opiskelustrategiat ja -käytänteet. Kun opiskelija tietää, minkälainen opiskeluprosessi on hänelle edullisin hyvien oppimistulosten saavuttamiseksi, hän on usein myös haluton muuttamaan opiskelukäytäntöjään. [23, s. 49–50] Tämä saattoi myös tässä tutkimuksessa aiheuttaa sen, että osa etenkin matematiikassa hyvin menestyneistä opiskelijoista vastusti opiskelumuotoa ja uudenlaisia tehtäviä

niin vahvasti. Myös Blomqvistin tutkimuksessa [3] parhaimman arvosanaluokan tytöt kokivat kielentämistehtävät turhiksi ja ylipäätään vaikeiksi ilman sen tarkempaa erittelyä.

Kuten Uusi-Hallilakin [46, s. 196] on todennut, parhaimpiin oppimistuloksiin päästäisiin todennäköisesti jonkinlaisella hybridiopetuksella. Jos sovelletaan vain yhtä oppimateriaalia tai opetustyyliä, ei pystytä huomioimaan erilaisten oppijoiden tarpeita. Tämän oppimateriaalin käyttö osoittautui toimivaksi oppimistavaksi ainakin niille opiskelijoille, jotka pitävät tutkimuslähtöisestä oppimisesta ja asioiden itse oivaltamisesta, mutta kuten vastuuopettajakin ehdotti, opetustilanteita olisi varmasti hyvä tukea opettajajohtoisilla osuuksilla. Kuten Eskelisenkin tutkimuksessa [6] todettiin, tutkivan opiskelun ja opettajajohtoisen opetuksen välille täytyisi löytää sopiva tasapaino. Kehitetyn oppimateriaalin hyödyntämisen logaritmien opiskelussa ei tarvitse tarkoittaa sen käyttämistä ainoastaan itseohjautuvasti vaan se on oppimateriaali siinä missä muutkin oppimateriaalit ja sitä tai sen osia voi hyödyntää parhaaksi näkemällään tavalla.

Jos toteuttaisin opetuskokeilun uudelleen, järjestäisin jokaisen opetuskerran lopussa Hähkiöniemen tutkivan matematiikan oppitunnin malliin sisältyvät koontivaiheet, joissa opituista asioista tehtäisiin yhteenveto opettajajohtoisessa opetustilanteessa ja opiskelijat saisivat esitellä omia ratkaisutapojaan ja siten myös kielentää omaa matemaattista ajatteluaan muille opiskelijoille. Tällä pystyttäisiin vastaamaan myös osittain opiskelijoiden toiveeseen saada enemmän mallivastauksia ja opettajajohtoista opetusta.

7.3 Luotettavuustarkastelu

Tutkimusta tehdessä on aina tärkeää pohtia myös tutkimusmenetelmän ja tulosten luotettavuutta ja eettisyyttä. Tieteellisen tutkimuksen luotettavuutta arvioidaan yleensä mittaamalla sen validiteettia ja reliabiliteettia. Validiteetilla tarkoitetaan tutkimuksen pätevyyttä, eli miten hyvin tutkimus kohdistuu siihen asiaan mitä halutaan tutkia. Reliabiliteetti puolestaan kuvaa tutkimuksen toistettavuutta ja tulosten pysyvyyttä. [18, s. 161][34, s. 18] Nämä eivät kuitenkaan ole suoraan sovellettavissa kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointiin, joka poikkeaa tyypillisestä tieteellisestä tutkimuksesta muun muassa monimenetelmällisyyden ja tutkijan roolin kannalta.

Kehittämistutkimuksen arviointiin ei ole omaa vakiintunutta käytäntöä, mutta siinä voidaan soveltaa seuraavia Design-Based Research Collectiven määrittelemiä laadukkaan kehittämistutkimuksen kriteereitä [34, s. 20]:

1. kehittämisen tulee olla kokonaisvaltaista, jolloin kehittämistuloksena saadaan sekä ohjaavia malleja ja teorioita että kuvailevia teorioita,

2. kehittämisen tulee edetä sykleittäin sisältäen jatkuvaa kehittämistä ja arviointia,

3. kehittämisessä tulee pyrkiä teorioihin, jotka ovat siirrettävissä kentälle opettajien tai muiden opetusalan ammattilaisten käyttöön,

4. kehittämisprosessiin tulee sisältyä testaamista autenttisissa olosuhteissa ja
5. kehittämistutkimuksen kaikki syklit tulee dokumentoida tarkasti. [4][35]

Kriteerien ensimmäinen ja kolmas kohta pyrittiin täyttämään niin, että kehittämistuotoksena olisi opetusalan asiantuntijoilla ja opiskelijoilla testattu oppimateriaalipaketti, sekä teoriatietoa muun muassa tutkivan matematiikan, kielentämistehtävien ja sähköisen oppimateriaalin soveltumisesta logaritmien opiskeluun. Tutkimuksen tulokset olivat hyvin linjassa aiempien tutkimusten kanssa ja kehittämistuotoksena syntynyt oppimateriaalipaketti voidaan julkaista yleiseen käyttöön. Lisäksi saatiin tietoa opiskelijoiden ja opettajien suhtautumisesta kehitettyyn oppimateriaaliin ja erityyppisiin sähköisiin tehtäviin. Vaikka kehittämistutkimuksen luotettavuutta ei yleensä pystytäkään todistamaan tilastollisesti merkittäväksi, sen yleistettävyyden ja selitysvoiman on ajateltu olevan sen käytännöllisyydessä. Kehittämistuotokset ovat yleensä toimivia, koska ne kehitetään ja testataan autenttisissa olosuhteissa. [35, s. 100]

Tämä kehittämistutkimus koostui kolmesta syklistä, joiden aikana tehtiin jatkuvaa suunnitelman päivittämistä ja oppimateriaalin kehittämistä. Arviointi toteutettiin ensimmäisessä syklissä asiantuntijakyselyn avulla ja toisessa syklissä opetuskokeilun ja varsinaisen tutkimuksen avulla. Myös kriteerien neljäs kohta täyttyi opetuskokeilussa, sillä materiaalia testattiin osana aitoa lukio-opetusta. Täytyy kuitenkin ottaa huomioon se, että testiryhmät olivat yhden lukion ja saman vastuuopettajan opiskelijoita ja otoskoko ($n = 38$) oli pieni. Kyseisen lukion sisäänpääsyraja on myös hieman keskivertoa korkeampi, joten tutkimusotos ei edusta koko perusjoukkoa, mikä huonontaa tutkimuksen validiteettia. Toisaalta asiantuntijoina toimineista opettajista kaksi pystyi arvioimaan oppimateriaalia toisen kaupungin lukion opiskelijoiden näkökulmasta, mikä parantaa hieman sen yleistettävyyttä.

Luotettavuuden parantamiseksi koko kehittämistutkimus on pyritty dokumentoimaan ja raportoimaan tässä pro gradu -tutkielmassa mahdollisimman tarkasti. Tarkalla dokumentaatiolla on pyritty myös vahvistamaan tutkimuksen toistettavuutta; Materiaalia voidaan testata uudelleen muillakin ryhmillä ja kyselylomakkeet ja haastattelun kysymykset löytyvät liitteistä. Opetuskokeilua on vaikeampi jäljitellä, mutta sitäkin on pyritty kuvailemaan kattavasti.

Tutkimuksen luotettavuutta olisi voitu vahvistaa entisestään lisäämällä syklien ja analyysien määrää sekä käyttämällä sopivia standardoituja mittareja [4][35]. Tässä tutkimuksessa mittarit kuitenkin kehitettiin itse, eikä niitä esitestattu. Kehittämistutkimuksen luotettavuutta pyritään usein vahvistamaan myös triangulaation avulla [4][35]. Tässä tutkimuksessa sovellettiin hieman sekä menetelmällistä, että aineistoon kohdistuvaa triangulaatiota. Menetelmällisessä triangulaatiossa aineistoa kerätään ja analysoidaan useammalla kuin yhdellä menetelmällä. Aineistoon kohdistuva triangulaatio puolestaan tarkoittaa, että samaa asiaa pyritään tutkimaan erilaisten aineistojen avulla. [18, s. 21][35] Tässä tutkimuksessa muun muassa oppimateriaalin soveltumista logaritmien opiskeluun pyrittiin tutkimaan asiantuntijakierroksen kyselyllä, loppukyselyllä, havainnoimalla, tehtävien ratkaisujen tarkastelemalla ja opettajan sähköpostihaastattelulla, joista saatiin sekä määrällistä että laadullista tutkimusaineistoa.

Kun tutkimuksessa sovelletaan useampia eri menetelmiä, sen luotettavuutta on käytännössä arvioitava kunkin käytetyn menetelmän omilla luotettavuuskriteereillä [18, s. 166]. Kvalitatiivista eli laadullista aineistoa analysoitaessa sisällönanalyysin keinoin virheriski on yleensä määrällistä aineistoa suurempi, koska sisällönanalyysi perustuu lähinnä tutkijan tekemiin tulkintoihin. Loppukyselyn avoimien kysymysten laadullista tutkimustietoa pystyttiin kvantifioimaan luokittelemalla ja laskemalla luokkien frekvenssejä, mikä systematisoi analyysia. On silti tärkeää huomioida, että luokittelut ja laskutkin ovat tutkijan konstruktioita. Muun muassa tutkijan omilla intresseillä voi olla vaikutusta laskemistapaan ja laskemisen kohteiden valintaan. [37] Laadullisen aineiston analysoinnissa yleinen ongelma onkin, että sama tutkimusaineisto voi tuottaa erilaisia tulkintoja [18, s. 117]. Yleistyksiä tehdessä virhettä aiheuttaa usein muun muassa sosiaalisen tapahtuman ainutlaatuisuus. Kaikki tässä tutkimuksessa saatu tutkimustieto on jollain tapaa sosiaalisesti konstruoitua.

Yhtenä tieteellisen tutkimuksen perusedellytyksenä pidetään tutkijan objektiivisuutta. Tämä ei kuitenkaan koske kehittämistutkimusta, jossa tutkija osallistuu ilmiön toimintaan. [18, s. 49] Tässäkin tutkimuksessa toimin itse sekä tutkijana että opettajana ja tutkimuksen osallistuvana havainnoijana. Kun tutkija on osallistuva, objektiivisuus on mahdotonta, mutta tulosten analysoinnissa ja kehittämistutkimuksen raportoinnissa siihen on kuitenkin pyritty.

Loppukyselyn tulosten luotettavuutta heikensi esimerkiksi opiskelijoiden vastaamismotivaatio ja pelleily vastausten suhteen. Jos toteuttaisin tutkimuksen uudelleen, kiinnittäisin muun muassa tähän enemmän huomiota, sillä unohdin vielä ennen kyselyä painottaa vastausten tärkeyttä ja virallisuutta. Kanasen [18, s. 49] mukaan eräs kehittämistutkimuksen ongelma on, että sen tavoitteiden mitattavuus on yleensä huono. Tässä tutkimuksessa mitattiin pääasiassa opiskelijoiden ja opettajan omia mielipiteitä ja käsityksiä, mikä ei ole luotettavin mittaustapa esimerkiksi tutkittaessa materiaalin vaikutuksia oppimisen kannalta.

7.4 Eettiset näkökulmat

Tutkimusprosessissa täytyy huomioida myös tutkimuksen eettiset näkökulmat. Tutkimukseen liittyvät eettiset kysymykset voivat koskea tutkimuskohteen tai tutkimusmenetelmien valintaa, tutkimusaineiston hankintaa, tiedon luotettavuutta, tutkittavien kohtelua, tutkimustulosten vaikutuksia tai tiedeyhteisön sisäisiä toimintaperiaatteita [21]. Jotta tieteellinen tutkimus olisi eettisesti hyväksyttävää, luotettavaa ja uskottavaa, tutkimus on suoritettava hyvän tieteellisen käytännön edellyttämällä tavalla. Tutkimusetiikan näkökulmasta hyvän tieteellisen käytäntöön kuuluu noudattaa tiedeyhteisön tunnustamia toimintatapoja, soveltaa eettisesti kestäviä tiedonhankinta-, tutkimus- ja arviointimenetelmiä ja noudattaa avoimuutta ja vastuullista tiedeviestintää tutkimuksen tulosten julkaisemisessa. Lisäksi tutkijan on otettava muiden tutkijoiden työ huomioon, annettava heidän saavutuksilleen niille kuuluva arvo ja kunnioitettava sitä asianmukaisella viittaustekniikalla. [45, s. 6]

Kun tutkimus kohdistuu ihmisiin, laki ja ihmisarvon suojelua koskevat normit velvoittavat huolehtimaan tutkittavien yksityisyyden suojaamisesta ja siitä, ettei tutkittaville aiheudu tutkimuksesta haittaa, vahinkoa, vaaraa tai moraalista vääryyttä.

Tutkittavien on myös oltava tietoisia osallisuudestaan tutkimukseen ja osallistumisen on oltava vapaaehtoista ja perustuttava riittävään tietoon tutkimuksesta ja sen tarkoituksista. Ihmisarvon kunnioittaminen on eettisesti kestävän tutkimuksen yleinen lähtökohta. [21][45]

Tätä tutkimusta tehdessä on huomioitu kaikki edellä mainitut tutkimuksen eettisyyteen liittyvät seikat. Opetuskokeilun ja tutkimuksen järjestämiseen pyydettiin lupa lukion rehtorilta ja kurssien vastuuopettajalta, minkä jälkeen opiskelijoilta pyydettiin suostumus tutkimukseen osallistumisesta ja tutkimusaineiston käytöstä. Alaikäisten opiskelijoiden osalta lupa tutkimukseen osallistumisesta täytyi pyytää heidän huoltajiltaan. Suostumukset pyydettiin ennen opetuskokeilun järjestämistä Wilma-tiedotteen välityksellä (liite 2). Tiedotteessa informoitiin huoltajia ja tutkimuksen kohdehenkilöitä asianmukaisesti osallistumisen vapaaehtoisuuden lisäksi tutkimuksen tarkoituksista, sisällöstä, ajankohdasta, käytettävistä tutkimusmenetelmistä ja osallistujien henkilötietojen salaamisesta sekä aineiston tuhoamisesta tutkimuksen julkaisemisen jälkeen. Kaikki kerätty tutkimusaineisto säilytetään niin, ettei ulkopuolisilla ole siihen pääsyä, eikä osallistujien henkilöllisyyttä voida liittää aineiston tietoihin. Yksityisyys on huomioitu myös raportoinnissa, sillä vastaajia ei voida tunnistaa tekstistä, eikä yksityiskohtaisia tietoja tutkitusta koulusta tai tutkimusryhmistä mainita.

7.5 Lopuksi

Tämän kehittämistutkimuksen tuotoksena syntyi sähköinen oppimateriaali, jota voidaan hyödyntää logaritmien opetuksessa tai itseopiskelussa. Vaikka materiaali kehitettiin vuonna 2015 julkaistujen lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaiselle kurssille MAA8 Juuri- ja logaritmiyhtälöt, sitä voidaan helposti käyttää myös uuden opetussuunnitelman kursseilla logaritmien opiskeluun tai pitkän matematiikan kertauskurssilla, kuten testiryhmien vastuuopettaja ehdotti. Asiantuntijakierroksella ja opetuskokeilussa saadut tulokset olivat positiivisia ja innostavia.

Tämän kehittämistutkimuksen tuloksena voitaisiin todeta, että yhdistelemällä tutkivaa matematiikkaa kielentämistehtäviin ja sähköisen oppimateriaalin mahdollistamiin vuorovaikutteisiin ja monimediaisiin oppimisaihioihin on mahdollista luoda toimiva oppimateriaali. Kehittämistuotoksena syntynyt materiaali soveltuu logaritmien itseohjautuvaan opiskeluun, mutta erilaisten oppijoiden huomioimiseksi opiskelua olisi hyvä tukea opettajajohtoisella opetuksella tai jonkinlaisella yhteenvetoa tekevällä materiaalilla.

Teknologia on tuonut opetuksen suunnitteluun opettajalle aiempaa enemmän vaihtoehtoja. Painettujen oppimateriaalien rinnalle ovat tulleet sähköiset oppimateriaalit, jotka voivat olla monimediaisia ja vuorovaikutteisia. Lisäksi opettaja voi myös luoda itse oppimateriaalia tai hyödyntää sosiaalista mediaa opetuksessa [46]. Silti on aina aiheellista kysyä, millainen on hyvä oppimateriaali. Hyvä oppimateriaalin ottaa huomioon erilaiset oppimistyylit ja tarjoaa kaiken tasoisille oppijoille sopivasti haastetta. Vaikka hyvä oppimateriaali olisi innostava ja motivoiva, oleellisinta on kuitenkin se, millainen oppimateriaali tuottaa parhaita tuloksia.

Matematiikan oppimateriaalitutkimus on viimevuosikymmeninä keskittynyt enimmäkseen jo olemassa oleviin oppimateriaaleihin ja yllättävän vähän niiden suunnitteluja laatimisprosesseihin [7, s. 635–644]. Toistaiseksi on myös julkaistu erittäin vähän tutkimustietoa siitä, millaisia vaikutuksia oppimateriaalien sähköistymisellä ja sähköisten oppimateriaalien uusilla tehtävätyypeillä on matematiikan oppimiseen. Oppimateriaalit ja niiden luomisprosessit muuttuvat ja kehittyvät jatkuvasti, mikä edelleen vahvistaa sitä tarvetta, että tutkimusta oppimateriaalien kehittymisestä ja kehittämisestä olisi tärkeää tehdä lisää. Tämä on syytä huomioida jatkotutkimusmahdollisuuksia pohdittaessa. Etenkin lukion matematiikan oppimateriaalien ja opetusmenetelmien kehittämistutkimuksia on julkaistu niin vähän digitalisaation ja ylioppilaskokeiden sähköistymisen jälkeen, että niitä koskeville kehittämistutkimuksille olisi mielestäni tarvetta.

Yhtenä kehittämistutkimuksen etuna on se, että tutkija syventyy kehittämisprosessin aikana tutkimuksen prosesseihin, tarpeisiin ja kontekstiin ja kehittää samalla kokonaisvaltaisesti omaa osaamistaan. [35, s. 100]. Koenkin kehittäneeni tämän prosessin aikana omaa osaamistani lukiomatematiikan sisältöjen ja lukiopedagogiikan osalta huomattavasti. Sen lisäksi, että oma osaamiseni eksponentti- ja logaritmifunktioihin liittyen vahvistui, koen, että myös intoni oppimateriaalien kehittämiseen ja tutkivana opettajana toimimiseen vahvistui. Olen tämän prosessin aikana ymmärtänyt, kuinka tärkeää on rakentaa opetus oppijalähtöiseksi ja sellaiseksi, missä oppija opettaa opettajaa toimimaan parempana oppimisen ohjaajana.

Kiitokset

Suuret kiitokset asiantuntijakierrokseen osallistuneille asiantuntijoille ja opetuskokeilun mahdollistaneelle opettajalle. Kiitos osallistumiseni Tampereen yliopiston koordinoimaan oppimateriaalihankkeeseen mahdollistaneille henkilöille ja työkavereille. Lisäksi haluan kiittää tutkimukseen osallistuneita opiskelijoita, graduohjaajiani Pentti Haukkasta ja Jorma Joutsenlahtea Tampereen yliopistosta sekä kaikkia graduni tekemiseen vaikuttaneita läheisiäni.
Kiitos!

Lähteet

[1] Aksela, M. & Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä. Teoksessa Pernaa, J. (toim.), *Kehittämistutkimus opetusalalla* (s. 181–200). Opetus 2000. Jyväskylä: PS-kustannus.

[2] Alfaro, H. (2018). *Appealing Multimodal Languages to Access First Year University Students' Understanding of Mathematical Concepts in Costa Rica*. Faculty of Education, Master's thesis in education. Tampereen yliopisto.

[3] Blomqvist, M. (2015). *Kielentämistehtävät lukion lyhyessä matematiikassa*. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto.

[4] Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8.

[5] Edelson, D. (2002). Design Research: What We Learn When We Engage in Design. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 105–121.

[6] Eskelinen, S. (2015). *Opiskelijoiden kokemuksia teknologiaavusteisista tutkivan matematiikan tehtävistä derivaatan oppimisessa*. Pro Gradu -tutkielma. Itä-Suomen yliopisto.

[7] Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 633–646.

[8] Grossman, S. I. (1992). *Calculus*. Fifth edition. Saunders Collage Publishing.

[9] Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää?. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 50–83). 2. painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

[10] Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An indroductory analysis. Teoksessa Hiebert, J. (toim.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

[11] Hähkiöniemi, M. (toim.) (2011). *Geogebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa: tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta*. Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos. Saatavilla osoitteessa http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-4623-4

[12] Hähkiöniemi, M. (2018). Derivaatan ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen ja opetus. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 110–130). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

[13] Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa Virta, A. & Marttila, O. (toim.), *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta: ainedidaktinen symposium 7.2.2003* (s. 188–196). Turun opettajankoulutuslaitos.

[14] Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä - 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto, Opettajankoulutuslaitos. Acta Electronica Universitatis Tamperensis 411.

[15] Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P., E. & Sormunen, K. (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* (s. 3–15). Itä-Suomen yliopisto. Saatavilla osoitteessa http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-61-0266-5

[16] Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–431). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

[17] Juuti, K. & Lavonen, J. (2012). Design-tutkimukseen osallistuvien opettajien rooli tutkimuksen eri vaiheissa. Teoksessa Pernaa, J. (toim.), *Kehittämistutkimus opetusalalla* (s. 45–67). Opetus 2000. Jyväskylä: PS-kustannus.

[18] Kananen, J. (2012). *Kehittämistutkimus opinnäytetyönä*. Jyväskylän ammattikorkeakoulun julkaisuja 134. Jyväskylän ammattikorkeakoulu.

[19] Koivisto, P. (2018). *Analyysi A. Raja-arvo ja jatkuvuus*. Informaatiotieteiden yksikön raportteja 66/2018. Tampereen yliopisto. Luettu 11.6.2019 osoitteessa https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/104779/978-952-03-0929-9.pdf

[20] Koivunen, V. (2015). *Logaritmin opetus ja sen kehittäminen*. Pro gradu - tutkielma. Helsingin yliopisto.

[21] Kuula, A. (2011). *Tutkimusetiikka. Aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys.* E-kirja. Tampere: Vastapaino.

[22] Leinonen, J. (2018). *Matematiikan ymmärtämisestä: käsitteistä käytäntöön*. Akateeminen väitöskirja. Lapin yliopisto, Kasvatustieteiden tiedekunta. Acta Universitatis Lapponiensis 371.

[23] Lindblom-ylänne, S., Hailikari, T. & Postareff, L. (2014). Oppiminen on monen tekijän summa. Teoksessa Ruuska, H., Löytönen, M. & Rutanen, A. (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 47–56). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[24] Linnusmäki, J. (2015). *Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla*. Diplomityö. Tampereen teknillinen yliopisto.

[25] Matemaattisten aineiden verkkokurssit lukioon ja ammatilliseen koulutukseen. Luettu 4.8.2020 osoitteessa https://urly.fi/1jcD

[26] Miinala, H., Salimäki, H., Vuorinen, M. (1983). *Uuden lukion matematiikka, laaja oppimäärä 2*. Neljäs painos. Helsinki: WSOY.

[27] Myllykoski, T. J., Mattila, P., Ali-Löytty, S., Kaarakka, T. & Viro, E. (2018). Yliopistomatematiikan Sähköisten Tehtävien ja Matemaattisen Ajattelun Kehittäminen. *FMSERA Journal, 2*(1), 46–55. Luettu 9.7.2019 osoitteessa https://journal.fi/fmsera/article/view/69887

[28] Opetushallitus (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Määräykset ja ohjeet 2015:48. Luettu 6.6.2019 osoitteessa https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

[29] Opetushallitus (2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. Määräykset ja ohjeet 2019:2a. Luettu 9.6.2020 osoitteessa https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

[30] Opetushallitus. Tietoa lukion opetussuunnitelman perusteiden uudistumisesta. Luettu 29.1.2020 osoitteessa https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/tietoa-lukion-opetussuunnitelman-perusteiden-uudistumisesta

[31] Pehkonen, E. (1979). *Matematiikan peruskurssi 2 korkeakouluja varten*. Helsinki: Kirjayhtymä.

[32] Pehkonen, E. (2000). Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylä. *Kasvatus-lehti, 31*(4), 375–381. Suomen kasvatustieteellinen seura. Saatavilla osoitteessa http://urn.fi/URN:NBN:fi:ELE-1372740

[33] Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä Tapahtuu, 21*(6), 35–38. Saatavilla osoitteessa https://journal.fi/tt/article/view/57322

[34] Pernaa, J. (2012). Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa Pernaa, J. (toim.), *Kehittämistutkimus opetusalalla* (s. 9–26). Opetus 2000. Jyväskylä: PS-kustannus.

[35] Pernaa, J., Aksela, M. & Västinsalo, J. (2010). Kemian mallit ja visualisointi -kurssin yhteisöllinen uudistaminen malliteoriaan pohjautuvalla kehittämistutkimuksella. Teoksessa Aksela, M., Pernaa, J. & Rukajärvi-Saarela, M. (toim.), *Tutkiva lähestymistapa kemian opetukseen: V Valtakunnalliset kemian opetuksen päivät -symposiumkirja* (s. 96–114). Kemian opetuksen keskus, Kemian laitos, Helsingin yliopisto. Saatavilla osoitteessa https://helda.helsinki.fi/handle/10138/306401

[36] Ruth, O. & Ratvio, R. (2018). Ensikokemuksia digitaalisista ylioppilaskirjoituksista. Teoksessa Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.), *Sähköistyvä koulu - Oppiminen ja oppi-materiaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 52–63). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[37] Saaranen-Kauppinen, A. & Puusniekka, A. (2006). *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto* [verkkojulkaisu]. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. Luettu 29.6.2020 osoitteessa https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/

[38] Sarikka, H. (2014). *Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena*. Matematiikan diplomityö. Tampereen teknillinen yliopisto.

[39] Suominen, R. (2018). Millaista digikoulutusta opettajat tarvitsevat?. Teoksessa Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.), *Sähköistyvä koulu - Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 171–186). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[40] Toivola, M. (2018). Käänteinen oppiminen – Kääntyykö koulutyö päälaelleen? Teoksessa Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.), *Sähköistyvä koulu - Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 98–116). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[41] Tossavainen, T. (2014). Tulevaisuuden oppimateriaalit. Teoksessa Ruuska, H., Löytönen, M. & Rutanen, A. (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 187–197). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[42] Tossavainen, T. (2014). Uutta ja vanhaa lukion matematiikan opetuksessa. Teoksessa Ruuska, H., Löytönen, M. & Rutanen, A. (toim.), *Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 129–139). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[43] Tossavainen, T. (2018). Tulevaisuuden oppikirja – asiaproosaa vai automaattikaleidoskooppi?. Teoksessa Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.), *Sähköistyvä koulu - Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 158–170). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[44] Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.) (2018). Pieni oppimateriaalisanasto. Teoksessa Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.), *Sähköistyvä koulu, oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 230–233). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[45] Tutkimuseettinen neuvottelukunta (2012). Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. Tutkimuseettisen neuvottelukunnan ohje 2012. Luettu 8.7.2020 osoitteessa https://tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf

[46] Uusi-Hallila, T. (2018). Opettaja oppimateriaalivalintojen edessä. Teoksessa Tossavainen, T. & Löytönen, M. (toim.), *Sähköistyvä koulu - Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (s. 187–196). Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

[47] Vainionpää, J. (2006). *Erilaiset oppijat ja oppimateriaalit verkko-opiskelussa*. Akateeminen väitöskirjat. Tampereen yliopisto, Opettajankoulutuslaitos. Acta Universitatis Tamperensis.

[48] Weber, K. (2002). *Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions*. Murray State University. Department of Mathematics and Statistics. USA. Luettu 26.6.2020 osoitteessa https://eric.ed.gov/?id=ED477690

[49] YTL, https://www.ylioppilastutkinto.fi/

[50] YTL. Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet. Julkaistu 3.2.2020. Luettu 7.8.2020 osoitteessa https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikan_koe.pdf

Liite 1: Asiantuntijakyselyn kysymykset

(Nämä kysymykset jokaiselle materiaalin osiolle erikseen)

Väite	eri mieltä	en osaa arvioida	samaa mieltä	Selitys, parannusehdotus tms.
Ohjeistus on selkeästi ymmärrettävä.				
Tehtävän rakenne on hyvä.				
Tehtävän haastavuustaso on sopiva.				
Tehtävän tavoite välittyy/ Tehtävän osat tuntuvat merkityksellisiltä.				

Mahdollisia muita huomioita:

Kokonaisuus

Väite	eri mieltä	en osaa arvioida	samaa mieltä	Selitys, parannusehdotus tms.
Materiaali on helppokäyttöinen.				
Materiaali on linjassa opetussuunnitelman kanssa.				
Kaikki tärkeät asiat logaritmeista tulee käsiteltyä. (Huom. derivaatta on rajattu tarkoituksella pois.)				
Materiaali on laajuudeltaan soveltuva noin yhden viikon pituiseen pitkän matematiikan opetuskokonaisuuteen.				

Vapaa sana:

Liite 2: Tiedote opiskelijoille ja huoltajille

Hyvät opiskelijat ja vanhemmat!

Opiskelen Tampereen yliopistossa matemaattisten aineiden opettajaksi ja teen pro gradu - tutkielmaa logaritmien oppimisesta. Tutkimustani varten olen kehittänyt sähköisen oppimateriaalipaketin, jonka tavoitteena on parantaa logaritmin käsitteen ymmärtämistä. Idea materiaalin kehittämiseen syntyi siitä, että logaritmi on tunnetusti yksi lukion pitkän matematiikan haastavimmista käsitteistä ja ylioppilaskokeissa on viimevuosina esiintynyt entistä enemmän käsitteenymmärrystä vaativia tehtäviä.

Tutkimuskohteenani ovat pitkän matematiikan opiskelijat, jotka suorittavat kurssia MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot. Kehitettyä opetusmateriaalia käytetään Tampereen yliopiston normaalikoulun lukiossa kurssin MAA8 opetuksessa 14.1.-20.1.2020. Tutkimukseen kuuluu opiskelijan tekemien kirjallisten tehtävien analysointi sekä kyselylomaketutkimus, jolla selvitetään opiskelijoiden mielipiteitä materiaalin käytöstä ja toimivuudesta. Kyselyyn osallistuminen on vapaaehtoista ja pyydänkin lupaa opiskelijoiden vastausten käyttämiseen tutkimuksessani. Pyydän lisäksi lupaa opiskelijoiden tekemien kirjallisten tehtävien sekä logaritmeihin liittyvien kurssikoevastausten analysoimiseen. Tutkimusaineiston analysoinnilla pyritään selvittämään, millaisia vaikutuksia materiaalin käytöllä on ja miten materiaalia voitaisiin mahdollisesti parantaa. Opiskelijoiden nimiä tai mitään tuntomerkkejä ei julkaista tutkimuksen raportoinnin yhteydessä, eikä yksittäisiä vastauksia voida tunnistaa. Tutkimusaineisto tuhotaan tutkimuksen julkaisun jälkeen.

Jos huoltaja ei toivo alaikäisen opiskelijan osallistuvan tutkimukseen, pyydän huoltajaa ilmoittamaan siitä Joonas Muotkalle Wilma-viestillä. Täysi-ikäinen opiskelija voi päättää itse osallistuuko tutkimukseen.

Olen saanut luvan tutkimuksen tekemiseen rehtorilta ja kurssin opettajalta ja toivoisinkin, että mahdollisimman moni opiskelija voisi osallistua tutkimukseen. Tutkimukseen osallistuminen ei lisää opiskelijan työmäärää. Mikäli teillä on tutkimukseen liittyen kysyttävää, voi minuun ottaa yhteyttä sähköpostitse.

Tampereen yliopistossa tutkielmani ohjaajana toimii yliopiston lehtori Jorma Joutsenlahti (jorma.joutsenlahti@tuni.fi).

Tampereella 12.12.2019

Ystävällisin terveisin,

Miisa Kortesmäki

miisa.kortesmaki@tuni.fi

Liite 3: Loppukysely

Loppukysely logaritmimateriaalista

*Pakollinen

1. Sukupuoli

   Merkitse vain yksi soikio.

   - mies
   - nainen
   - muu
   - en halua vastata

2. Sain tehtyä materiaalin tehtävistä

   Merkitse vain yksi soikio.

   - alle puolet, eli en ehtinyt osioon 3
   - lähes kaikki
   - kaikki

3. Osasin tehdä myös *-merkityt tehtävät 2.1 ja 3.1

   Merkitse vain yksi soikio.

   - kyllä
   - en
   - vain toisen

4. Yleisin kurssiarvosanani matematiikassa lukion aikana

Merkitse vain yksi soikio.

- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10

5. Valitse alta kaikki ne vaihtoehdot, joita käytit apuna, kun teit materiaalin tehtäviä

Valitse kaikki sopivat vaihtoehdot.

	valitse
TI-Nspire	☐
Abitin matikkaeditori	☐
Geogebra	☐
Muistikirja	☐
Oppikirja	☐
Google	☐
OneNote	☐
Kämmenlaskin tai puhelimen laskin	☐

6. Valitse jokaisen väitteen oikealta puolelta vaihtoehto joka vastaa parhaiten mielipidettäsi väitteestä. *

Merkitse vain yksi soikio riviä kohden.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Materiaalin käyttö oli helppoa				
Materiaalin laajuus oli sopiva käytettyyn aikaan nähden				
Tehtävät olivat kivoja				
Tehtävänannot olivat selkeitä				
Ymmärsin, mitä kussakin tehtävässä oli tavoitteena oppia				
Tehtävät olivat monipuolisia				
Pidin tutkimuslähtöisistä tehtävistä, joissa teoria opittiin esim. tekemällä itse havaintoja				
Tykkään tehdä interaktiivisia tehtäviä, joissa tutkitaan kuvaajia tai applettia				
Olisin tarvinnut enemmän mallivastauksia				
Käyttäisin mielelläni vastaavan tyylistä materiaalia muidenkin matematiikan aiheiden opiskelussa				
Materiaalin käyttö itseohjautuvasti oli minulle sopiva opiskelumuoto				
Sain apua aina kun tarvitsin				
Koen ymmärtäneeni, mitä ovat logaritmit ja mihin niitä tarvitaan				

Ymmärsin eksponenttifunktion ja logaritmifunktion yhteyden				
Koin kokeilun aikana oivalluksia tai onnistumisen tunteita				
Onnistuin löytämään yhteyksiä kuvien, symbolikielen ja/tai luonnollisen kielen ilmausten väliltä (esim. kuvaajien tulkinta tai viimeinen tehtävä)				
Koen oppineeni logaritmitunneilla paremmin kuin normaaleilla matematiikan oppitunneilla				
Logaritmien osuus tuntui minusta vaikeammalta kuin muu pitkä matematiikka tähän asti				
Valmiiden ratkaisujen tutkiminen ja kommentoiminen auttoi minua ymmärtämään, millainen olisi hyvä koevastaus				
Perusteluiden kirjoittaminen on mielestäni helppoa				
Koen että asiat jäivät paremmin mieleeni, kun niitä ei annettu valmiina sääntöinä vaan ne täytyi selvittää itse				
Välillä en ymmärtänyt tehtävää, mutta sain oikean vastauksen kokeilemalla				
Perusteluiden liittäminen osaksi tehtävää on turhaa				
Logaritmilausekkeiden kirjoittaminen sanalliseen muotoon auttoi minua				

ymmärtämään mitä
merkinnät tarkoittavat

7. Tehtäviin sisältyi kielentämistehtäviä, joissa mm. pyydettiin selittämään asioita omin sanoin, kirjoittamaan omia havaintoja, analysoimaan valmiita ratkaisuja tai esittämään perusteluja. Tällaiset tehtävät *

Merkitse vain yksi soikio riviä kohden.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä
saivat minut pohtimaan asioita syvemmin				
olivat helppoja				
olivat turhia				
olivat liian työläitä				
jättivät asiat minulle epäselviksi				
eivät auttaneet minua oppimaan				
pitäisi harjoitella enemmän				

8. Mitkä asiat jäivät sinulle erityisesti mieleen materiaalin ansiosta? *

9. Mitkä asiat jäivät epäselviksi?

10. Millaiset tehtävät toimivat mielestäsi parhaiten ja mitkä heikoiten? Minkä tyylisistä tehtävistä pidit eniten ja mistä vähiten? Miksi? (voit viitata tehtäviin tehtävänumerolla) *

11. Miten selittäisit henkilölle, joka ei ole käynyt kurssia MAA8, mitä logaritmi tarkoittaa ja mihin sitä käytetään? *

12. Vapaa sana

Google ei ole luonut tai hyväksynyt tätä sisältöä.

Google Forms

Liite 4: Opettajan haastattelun kysymykset

Opettajan sähköpostihaastattelu

1. Miten arvioisit kokeilun onnistuneen?
    a. Miten kokeilu opiskelijoiden osalta sujui?
    b. Kuinka paljon aikaa kokeilulle olisi jälkikäteen ajateltuna ollut järkevää varata?
    c. Mitä asioita tekisit toisin?

2. Mitä hyviä puolia näet materiaalin käytössä?

3. Mitä huonoja puolia näet materiaalin käytössä?

4. Mitä mieltä olet materiaalin kattavuudesta, toimivuudesta ja haastavuustasosta? Jäikö joitain tärkeitä asioita käsittelemättä tai lian vähäiseen rooliin?

5. Minkä asioiden uskot jääneen oppilaille erityisesti mieleen materiaalin ansiosta?

6. Mitkä materiaalin tehtävistä toimivat mielestäsi
    a. parhaiten
    b. heikoiten?
    c. Muita tehtäväkohtaisia huomioita?

7. Materiaali julkaistaan lopuksi opettajien ja opiskelijoiden vapaaseen käyttöön. Arveletko tulevaisuudessa käyttäväsi hyödyksi tätä materiaalia tai jotain sen osaa opettaessasi logaritmeja? Jos, niin miten?

8. Vapaa sana:

Kiitos vastauksista ja tutkimuksen mahdollistamisesta!