Robin Hamdi

Yläkoulun matematiikan kertaavan intensiivikurssin rakentaminen kehittämistutkimuksena

Teknis-luonnontieteellinen tiedekunta
Diplomityö
Kesäkuu 2020

Tiivistelmä

Robin Hamdi: Yläkoulun matematiikan kertaavan intensiivikurssin rakentaminen kehittämistutkimuksena
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2020

Peruskoulun suorittaneiden oppilaiden algebran ja lukuteorian taidot ovat heikentyneet merkittävästi, minkä vuoksi toisen asteen koulutuksen matematiikan oppimisvaikeudet ovat hyvin yleisiä. Modernin motivaatioteorian mukaan peleihin ja pelillistämiseen liittyvät elementit, kuten kilpailu ja roolitus, lisäävät matematiikan oppilaiden motivaatiota ja suoriutumista matemaattisten ongelmien ratkaisussa.

Tässä opinnäytetyössä kehitettiin yhdeksäsluokkalaisille suunnattu toiminnallinen matematiikan kertauskurssi, joka oli aihepiirisisällöltään pääosin yläkoulun algebraa ja lukuteoriaa. Kertauskurssin järjestävä taho oli Tampereen LUMATE-keskus. Kurssilla oli kaksi opettajaa, joista toinen oli tämän opinnäytetyön tekijä. Opettajien vastuulla oli opettamisen lisäksi kurssin materiaalin laadinta, johon kuului kurssin oppikirja, Kahoot-visat sekä matematiikka-aiheiset oppimispelit. Kurssille osallistui yhteensä 14 Tampereen yhdeksäsluokkalaista.

Kertauskurssin oppimateriaali luotiin kahden syklin kehittämistutkimuksena. Ensimmäisessä syklissä oppilailta kerättiin tutkimusaineistoa, jonka avulla selvitettiin, millainen vaikutus kurssilla oli oppilaiden matematiikan osaamiseen ja motivoitumiseen. Lisäksi oppilailta kerättiin laadittuun materiaaliin liittyviä parannusehdotuksia. Toisessa syklissä kertauskurssille laadittu parannettu versio oppikirjasta lähetettiin kolmelle peruskoulun matematiikan opettajalle arvioitavaksi. Arvioinnin perusteella kurssin oppikirjaa kehitettiin ja siitä julkaistiin lopullinen versio.

Avainsanat: Matematiikan opetus, kehittämistutkimus, kertauskurssi, polynomit, motivaatio, pelillisyys

Abstract

Robin Hamdi: Constructing an intensive course of upper comprehensive school mathematics by design-based research
Master of Science Thesis
Tampere University
Masters Degree Programme in Science and Engineering
June 2020

According to modern motivation theory, the elements relating to games and gamification such as competition and roles increase the motivation of students in mathematics and farther their performing in solving mathematical problems. Students' knowledge of algebra and number theory has decreased, which is why learning difficulties in mathematics are very common in secondary school.

In the thesis, a functional refresher course was planned for students of the ninth grade. The basis of the course was built on lower secondary school level in algebra and number theory. The course was organised by LUMATE centre of Tampere. Two teachers planned and executed the course and one of them is the writer of this thesis. On teachers' responsibility was to create the course material, which consisted of the textbook used in the course, Kahoot-quizzes and mathematic learning games. 14 students attended the course in total.

The refresher course was developed as design-based research in two cycles. In the first cycle, the research material was collected from the students to analyse the effect of the course on their skills in mathematics and their learning motivation. Also, the students gave development suggestions based on the material they used in the course and a revised version of the textbook was created. In the second cycle, the revised textbook was sent for evaluation to three mathematics teachers of a comprehensive school. Based on teachers' evaluation the textbook was revised again, and a final version was published.

Keywords: Math teaching, design-based research, refresher course, polynomial, motivation, gamification

Alkusanat

Tämä opinnäytetyö sai alkunsa syksyllä 2018, kun luin Elina Viron lähettämän sähköpostiviestin. Viestissä Elina kertoi, että tarjolla on diplomityö, jossa tulisi luoda matematiikan kurssi yhdeksäsluokkalaisille. Tarjous oli itselleni erittäin mieluisa, sillä matematiikasta ja opetuksesta kiinnostuneena pääsin yhdistämään nämä molemmat viimeisessä yliopistosuorituksessani.

Tämä opinnäytetyö tehtiin yhteistyössä toisen maisterivaiheen opiskelijan Ykä Lähteenmäen, työn ohjaajien Elina Viron, Terhi Kaarakan ja Jorma Joutsenlahden sekä LUMATE-keskuksen Susanna Petäjistön, Eeva Mäkelän ja Laura Salkosen kanssa. Haluan kiittää heitä kaikkia kannustuksesta ja kertauskurssin ideoimisesta. Lisäksi työn ohjaajia haluan kiittää kärsivällisyydestä, ammattitaitoisuudesta sekä opettavaisista opinnäytetyön palavereista. Lähteenmäkeä haluan kiittää hyvästä yhteistyöstä ja vertaistuesta, josta oli paljon apua kertauskurssin ja opinnäytetyön aikana.

Kiitos Virolle ja opetusharjoittelija kollegoille matematiikan pelillistämisideoista. Marianne Timgrenin ehdottoma matematiikka-aiheinen Afrikan tähti -peli oli oppilaiden mielestä koko kurssin viihdyttävin aktiviteetti.

Kiitos ystävilleni, jotka ovat kannustaneet minua suoriutumaan elämän vaikeista etapeista, joihin myös tämä opinnäytetyö kuului. Kiitän Matias Vullia, Oskari Valkamoa, Isto Turusta, Paavo Heikkilää ja Niklas Kandelinia heidän kielioppiin tarjoamasta avusta. Kiitos Matti Vaattovaaralle, joka auttoi työn kuvien ja taulukoiden koodien kanssa. Lisäksi kiitän kaveriyhteisöistäni Multisillan Rivieraa, Viinikan Palloa ja Kultahippua, joiden kanssa olen saanut ainutlaatuisia kokemuksia elämäni aikana.

Erityisesti kiitän perhettäni ja Jukka Männistöä. He ovat suurin syy sille, miksi kiinnostuin matematiikasta ja sen opettamisesta.

Sisältö

Lyhenteet ja merkinnät

$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko
$\mathbb{Z}$	Kokonaislukujen joukko
$\mathbb{Q}$	Rationaalilukujen joukko
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko
$R[x]$	Kaikkien R-kertoimisten polynomien muodostama joukko
R	Rengas
K	Kunta
$f(x)$	Polynomifunktio

1 Johdanto

Matematiikka peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (2014) on jaettu kuuteen eri osaamistavoitteista ja oppisisällöistä koostuvaan sisältöön: ajattelun taidot ja menetelmät, luvut ja laskutoimitukset, algebra, funktiot, geometria, tietojenkäsittely sekä tilastot ja todennäköisyys. Matematiikan kumulatiivisesta luonteesta johtuen sisällöt eivät ole irrallisia, ja eri sisältöjen hallitsemisesta on hyötyä muissa sisällöissä. [20]

Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2015) mukaan kaksi ensimmäistä matematiikan kurssia oppimäärästä riippumatta pitävät sisällään luvut, polynomit sekä yhtälöt. Lisäksi lukiomatematiikan jatkokursseilla ei voi välttyä näiden kahden ensimmäisen kurssin oppisisällöiltä. [16] Näin ollen oppilas, jolla on selviä puutteita peruskoulun jälkeen kyseisillä osa-alueilla, joutuu käyttämään aikaa kyseisten aihepiirien kertaamiseen lukion alussa.

Jatko-opinnoissa esiintyvät matematiikan oppimisvaikeudet johtuvat opetushallituksen raportin (2013) mukaan algebran ja lukuteorian heikosta osaamisesta [2]. Peruskoulun algebran aihepiireihin kuuluvat muun muassa polynomien sieventäminen ja ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen [20]. Heikosti hallussa olevat polynomit aiheuttavat myös oppimisvaikeuksia yhtälöiden ratkaisemisessa [26]. Tämä on ongelmallista johtuen matematiikan kumulatiivisesta luonteesta sekä lukion opetussuunnitelman perusteiden (2015) yhtälöpainotteisuudesta [16].

Ecclesin motivaatioon perustuva odotusarvoteoria tukee opetushallituksen raporttia jatko-opintoihin liittyvistä oppimisvaikeuksista. Yksilön, joka lukion alussa omaa heikot algebran ja lukuteorian taidot, voi olla vaikea muodostaa positiivista minäkuvaa osaamisestaan. Tämä puolestaan voi varjostaa oppilaan motivoitumista koko lukion ajan. [2, 3]

Tässä työssä rakennettiin kehittämistutkimuksena yläkoululaisille suunnattu matematiikan toiminnallinen kertauskurssi ja kertausmateriaali, joka koostui lukuteoriasta ja algebrasta. Kyseiset matematiikan osa-alueet valittiin siksi, että yksi kertauskurssin tehtävistä on madaltaa jatko-opintoihin liittyvää matematiikan kynnystä. Prosessin aikana kurssi toteutettiin kerran ja oppilailta kerättiin palaute. Oppilailta kerätyn palautteen lisäksi oppimateriaalia kehitettiin peruskoulun matematiikan opettajien palautteen pohjalta.

Tämän tutkimuksen tarkoitus oli löytää vastaus seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

(1) Millä tavoin kertauskurssi vaikuttaa osallistujien matematiikan osaamiseen?

(2) Millä tavoin kertauskurssi vaikuttaa osallistujien matematiikan motivaatioon?

(3) Miten kurssille laadittua materiaalia voisi kehittää?

Luvun 3.3 motivaatioteorioiden perusteella oppilaan motivoituminen oppimiseen on yhtä tärkeää kuin itse oppiminen. Tämän vuoksi tutkimuskysymyksissä keskityttiin oppilaan motivoitumiseen ja oppimiseen. Oppiminen ja motivoituminen kulkevat käsi kädessä, sillä motivoituneessa tilassa oleva oppilas oppii paremmin kuin tilanteessa, jossa motivaatiota ei ole [3].

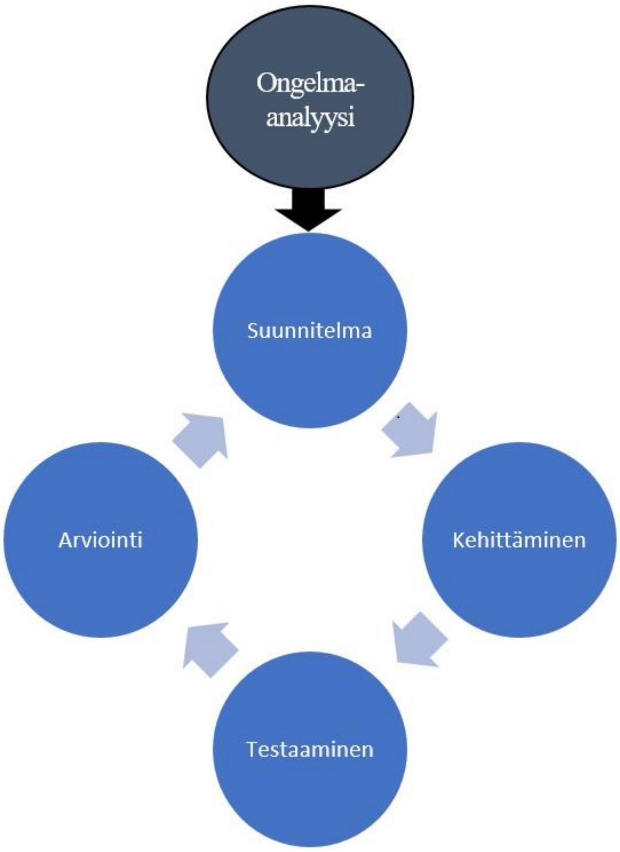
2 Kehittämistutkimus

Luvun sisältö perustuu Johannes Pernaan toimittamaan *Kehittämistutkimus opetusalalla* -kirjaan [19]. Kirjassa esitellään kehittämistutkimuksen teoreettinen tausta ja käydään teoriaa läpi käytännön esimerkeillä.

Kehittämistutkimus (design-tutkimus) on monitieteellinen tutkimusmenetelmä. Ann Brown ja Alan Collins julkaisivat kehittämistutkimuksen ensimmäiset tutkimusartikkelit vuonna 1992, jonka jälkeen tietoisuus menetelmästä ja sen suosio ovat olleet opetusalalla kasvussa. 1990-luvun aikana alan artikkeleita julkaistiin vain muutamia kymmeniä, kun taas vuoteen 2010 mennessä niitä oli julkaistu jo lähes 400. [19, s. 7-26]

Kehittämistutkimusta voidaan hyödyntää myös muualla kuin opetusalalla, kuten esimerkiksi palveluiden tai tuotteiden kehittämisessä. Opetusalalla kehittämistutkimuksen tarkoituksena on kehittää opetusta aidoista oppimistilanteista syntyvien ongelmien avulla. Aidolla ongelmalla tarkoitetaan sitä, että tutkimus suoritetaan siinä ympäristössä, jossa ongelma tyypillisesti ilmenee. Esimerkiksi ympäristönä voi olla luokkahuone ja sen oppilaat. Yleensä tilanteet ovat hyvin pienelle ryhmälle kohdennettuja ja tilanteiden pohjalta on määrä kehittää toimivia ratkaisuja isommalle ryhmälle. Tällaista toimivaa ratkaisua kutsutaan kehittämistuotokseksi ja se voi olla esimerkiksi kurssi, oppikirja tai tutkimuskohteen teorian kehittäminen. [19, s. 7-26]

Johtuen kehittämistutkimuksen monitieteellisyydestä, menetelmälle ei vielä tänäkään päivänä ole olemassa yksiselitteistä määritelmää tai nimitystä. Esimerkiksi Juuti ja Lavonen käyttävät nimitystä design-tutkimus. Pernaa esittelee useita eri kehittämistutkimuksen määritelmiä, joiden näkemykset ovat ristiriitaisia. Ristiriitaisuus johtuu siitä, onko kehittämistutkimuksen määrä kehittää teoriaa, luodaanko teorian pohjalta uutta teoriaa vai voivatko nämä molemmat toteutua samanaikaisesti. Kuitenkin Edelsonin mukaan kaikkia kehittämistutkimuksia yhdistää nelivaiheinen prosessi, joka voidaan esittää Kuvan 2.2 avulla. [19, s. 27-43]



Kuva 2.1 *Kehittämistutkimuksen syklinen prosessi [6, 19][s. 19]*

(1) Kehittämistutkimus alkaa aina ongelma-analyysillä, jonka tarkoituksena on selvittää kehittämisen kohteena olevan ongelman mahdollisuudet ja haasteet.

(2) Tutkimussuunnitelma luodaan, kun kehittämistavoitteet ovat selvät. Suunnitelma sisältää kaiken oleellisen tiedon tutkimuksen etenemisen kannalta. Tällaisia ovat muun muassa ympäristö, kohderyhmä sekä itse kehitettävänä oleva tuotos. Suunnitelma on joustava ja sitä yleensä päivitetään kehittämistutkimuksen edetessä.

(3) Suunnitelma toteutetaan käytännössä sen hetkisellä kehittämisen kohteena olevalla pohjalla.

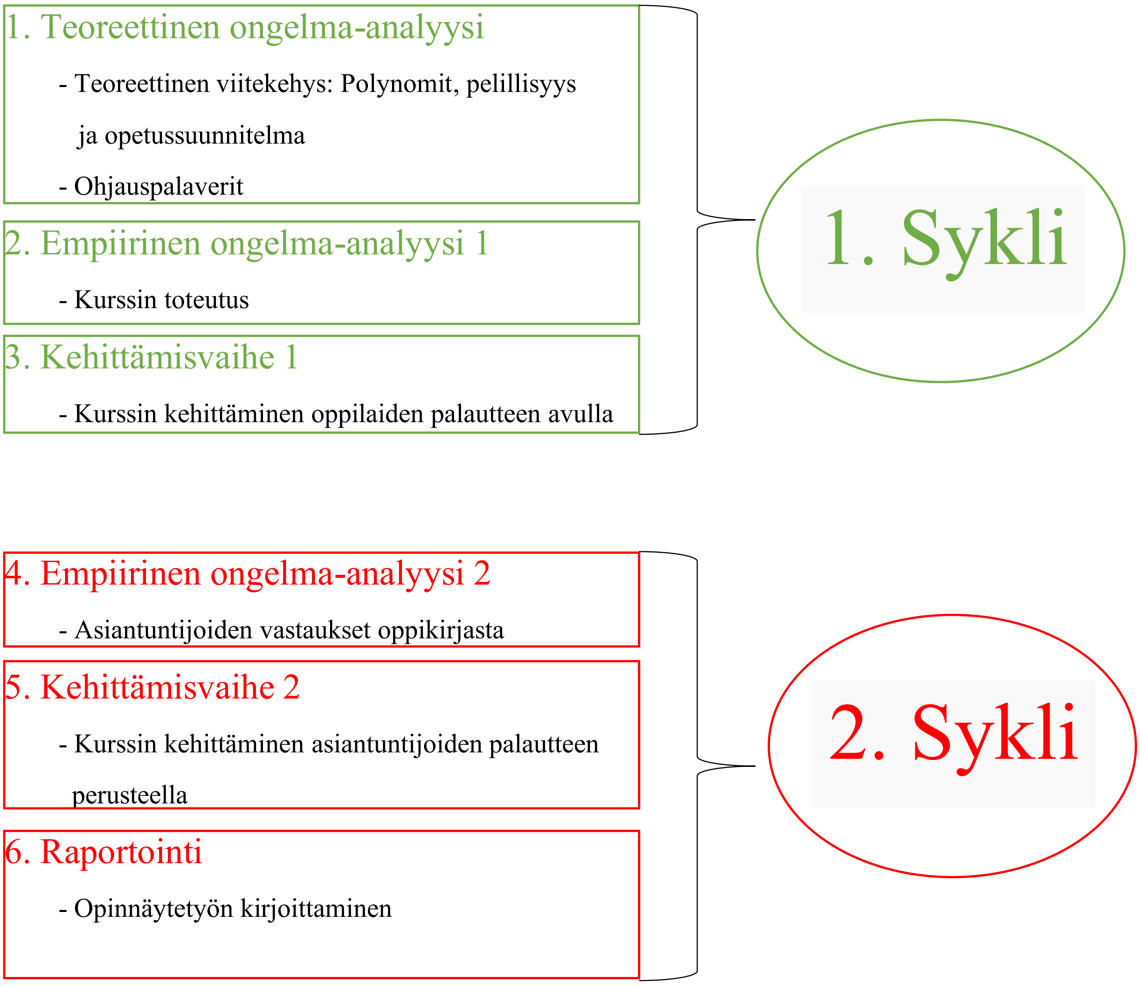
(4) Kehittämistutkimuksen yksittäisen syklin lopuksi arvioidaan suunnitellulla menetelmällä kohteen kehittämisen tarpeet. Arviointi voi pohjautua niin kvalitatiiviseen kuin kvantitatiiviseen menettelyyn.

Kehittämistutkimuksen vahvuutena voidaan pitää sitä, että tutkimuksen aikana on mahdollista hyödyntää niin kvantitatiivisia kuin kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä, minkä vuoksi kehittämistutkimusta voidaan pitää monitieteellisenä. Tutkimuksen aikana tehtyjä kvalitatiivisia havaintoja voidaan täydentää kvantitatiivisten mittausten avulla. Kehittämistutkimukseen osallistuvien joukko on yleensä pieni, mutta tutkimuksen tulos yleistetään koskemaan suurempaa joukkoa, minkä vuoksi kehittämistutkimusta kritisoidaan. [19]

Pro gradu -tutkimuksissa kehittämistutkimus sisältää yleensä vähintään kaksi sykliä, joissa syklien lukumäärä riippuu muun muassa työn tekijän arvosana- ja aikatavoitteista. Tämä opinnäytetyö on lähimpänä kahden syklin kehittämistutkimusta, jota Pernaa kuvailee seuraavasti:

(1) Teoreettinen ongelma-analyysi
(2) Empiirinen ongelma-analyysi 1
(3) Kehittämisvaihe 1
(4) Empiirinen ongelma-analyysi 2, jossa alustavaa kehittämistuotosta testataan mahdollisimman autenttisella kohderyhmällä (esim. opettajat tai oppilaat)
(5) Kehittämisvaihe 2, jossa tuotosta kehitetään suoritetun arvioinnin pohjalta
(6) Raportointi

Kuvassa 2.2 on malli, joka kuvastaa tämän opinnäytetyön kehittämistutkimuksen rakennetta:



Kuva 2.2 *Kahden syklin kehittämistutkimusmalli, jota käytettiin tämän opinnäytetyön puitteissa.*

Ensimmäinen sykli sisälsi kurssin suunnittelemisen ja toteuttamisen, sekä kehitystyön oppilailta saadun palautteen perusteella. Toisessa syklissä asiantuntijoille lähetettiin palautekysely kurssille laaditusta oppikirjasta, mistä saatiin lisää kehittämisen kohteita oppikirjaan liittyen.

3 Teoreettinen viitekehys

3.1 Polynomit

Suomen peruskoulussa opetettava matematiikka alkaa luonnollisista luvuista ja niille määritettävistä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuista [20, s. 129]. Lukualue laajennetaan peruskoulun aikana reaalilukuihin ja näihin liittyvät perustelut ovat hyvin käytännönläheisiä. Jo ensimmäinen lukualueen laajennus luonnollisista luvuista kokonaislukuihin vaatii oppilaalta matemaattisen ajattelun ponnistuksia, sillä kutsuihan René Descarteskin (1596-1650) negatiivisia lukuja aikoinaan "vääriksi luvuiksi" [17]. Negatiiviset luvut voidaan koulumatematiikassa perustella esimerkiksi velan tai lämpötilan avulla. Vastaavasti "järjetön" irrationaaliluku $\sqrt{2}$ voidaan konkretisoida pinta-alaltaan kahden suuruisen neliön avulla.

Lähes poikkeuksetta peruskoulumatematiikassa käsiteltävät struktuurit pitävät sisällään lukuja eli voidaan sanoa, että oppilas tietää aina konkreettisesti, mikä hänen käsittelemänsä matemaattinen olio on. Kuitenkin polynomit ja niiden sieventäminen vaativat ajattelun viemistä jälleen uudelle tasolle, sillä ne pitävät sisällään termin kertoimen lisäksi myös tuntemattoman, niin sanotun muuttujaosan. Polynomien yhteenlasku voidaan konkretisoida esimerkiksi hedelmien avulla, mutta tämän hyvin yleisen ajattelutavan vaarana on myöhemmin polynomien välisen tulon ymmärtäminen. Mitä esimerkiksi on omena · päärynä? Polynomien sieventäminen poikkeaa aiemmin opitusta siinä, että laskutoimitusta suoritettaessa oppilas ei ymmärrä mitä on trinomien $3x^2+x+7$ ja $-x^2-2x-3$ välinen summa, vaikka osaisi sieventää sen oikein. Ehkä tämän vuoksi oppilas ei saa vastaavanlaista tarttumapintaa polynomien summasta kuin lukujen 7 ja 3 välisestä summasta.

3.1.1 Polynomin määritelmä äärellisenä summana

Seuraavat kappaleet 3.1.1 – 3.1.4 perustuvat Jokke Häsän ja Johanna Rämön *Johdatus abstraktiin algebraan* -kirjaan [9]. Tämän vuoksi kyseisissä luvuissa viitataan vain muihin lähteisiin. Määritellään aluksi rengas, jotta voidaan tutkia polynomeja abstraktimmalla tasolla.

Määritelmä 3.1. Joukko R varustettuna laskutoimituksilla summa $+$ ja tulo $\cdot$ on *rengas*, jos seuraavat ehdot täyttyvät kaikilla $x, y, z \in R$.

(R1) R on suljettu laskutoimituksien $+$ ja $\cdot$ suhteen eli $x + y \in R$ ja $x \cdot y \in R$.

(R2) Summa on liitännäinen eli $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(R3) Summa on vaihdannainen eli $x + y = y + x$.

(R4) Summalla on neutraalialkio eli on olemassa sellainen $0 \in R$, jolle on voimassa $x + 0 = 0 + x = x$.

(R5) Summalla on käänteisalkio eli kaikilla $x \in R$ on olemassa sellainen $-x \in R$, jolle on voimassa $x + (-x) = -x + x = 0$.

(R6) Tulo on liitännäinen eli $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

(R7) Tulolla on neutraalialkio eli on olemassa sellainen $1 \in R$, jolle on voimassa $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

(R8) Summalle ja tulolle on voimassa osittelulait eli $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ja $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Tässä yhteydessä merkintä 0 viittaa siis laskutoimituksen $+$ neutraalialkioon, eikä reaalilukuun 0. Vastaavasti merkintä 1 viittaa laskutoimituksen $\cdot$ neutraalialkioon, eikä reaalilukuun 1. Jos myös renkaan laskutoimitus $\cdot$ on vaihdannainen eli kaikilla $x, y \in R$ on voimassa $x \cdot y = y \cdot x$, niin rengasta kutsutaan *vaihdannaiseksi renkaaksi.*

Edellisessä renkaan määritelmässä mielivaltaisella renkaan alkiolla ei välttämättä ole olemassa laskutoimituksen $\cdot$ käänteisalkiota. Renkaan alkiota a kutsutaan *yksiköksi*, jos alkiolla a on olemassa laskutoimituksen $\cdot$ käänteisalkio a^{-1}. Toisin sanoen, jos $a \in R$ on yksikkö, niin on olemassa sellainen a^{-1}, jolle

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Ennen polynomien laskutoimituksien ja ominaisuuksien määrittämistä on syytä määritellä itse polynomien joukko.

Määritelmä 3.2. Olkoon R vaihdannainen rengas ja x *tuntematon.* Tällöin yhden tuntemattoman R-kertoiminen polynomi P määritellään äärellisenä summana

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_k \in R$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. *Polynomin termi* on $a_k x^k$, *termin kerroinosa* a_k, *termin muuttujaosa* x^k sekä n polynomin aste. Joukosta, joka sisältää kaikki R-kertoimiset polynomit käytetään merkintää $R[x]$.

Polynomien yleisten määritelmien määrittäminen äärellisten polynomien avulla on kuitenkin hankalaa, sillä yhteenlaskemalla ja kertomalla polynomeja keskenään saadaan eri asteisia polynomeja. Siksi on käytännöllisempää esittää yhteenlasku sellaisten äärettömien polynomien avulla, joiden summan loppuosien kertoimet ovat nollia jostain indeksistä $n \in \mathbb{N}$ alkaen. Indeksi n vastaa tässä esitysasussa polynomin astelukua. Määritellään seuraavaksi polynomien summa.

Määritelmä 3.3. Olkoon polynomit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ja $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Tällöin polynomien P ja Q *summa* määritellään vastinkomponenttien summana

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)x^k = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$$

Polynomien tulossa voidaan ajatella, että toista polynomia kerrotaan ensimmäisellä polynomilla, minkä jälkeen saman asteluvun omaavat termit voidaan koota yhteen osittelulain mukaisesti.

Määritelmä 3.4. Olkoon polynomit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_i x^i$ ja $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_j x^j$. Tällöin polynomien P ja Q *tulo* määritellään seuraavasti

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + ..., \end{aligned}$$

missä $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, $i + j = k$ sekä $b_{k-i} = 0$, kun $k - i < 0$.

3.1.2 Polynomin määritelmä äärettömänä jonona

Kuten edellisessä luvussa huomattiin, niin yksinkertaisimmatkaan laskutoimitukset Määritelmän 3.2 avulla lausuttuina eivät ole sieviä. Vastaavasti kuin yläkoululaisellakin ongelmia tuottaa erityisesti polynomin tuntemattomat tekijät eli käytännössä polynomin asteluku. Tämän vuoksi määritellään polynomit järjestettyinä ja äärettöminä lukujonoina ilman tuntematonta tekijää.

Määritelmä 3.5. Olkoon R vaihdannainen rengas. Tällöin *R-kertoiminen polynomi* on ääretön jono

$$(a_k) = (a_0, a_1, a_2, \dots),$$

missä $a_k \in R$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ sekä on olemassa sellainen luonnollinen luku n, että $a_k = 0$, kun $k \geq n$. Polynomit $(a_k) = (a_0, a_1, a_2, ...)$ ja $(b_k) = (b_0, b_1, b_2, ...)$ ovat yhtä suuret täsmälleen silloin, kun vastinkertoimet ovat yhtä suuret eli toisin sanoen $a_k = b_k$, kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Esitetään polynomien laskutoimitukset Määritelmän 3.5 avulla. Polynomien summa määritellään jonoesityksen avulla seuraavasti.

Määritelmä 3.6. Olkoon (a_k) ja (b_k) R-kertoimisia polynomeja. Tällöin polynomien (a_k) ja (b_k) *summa* on

$$(a_k) + (b_k) = (c_k), \text{ missä } c_k = a_k + b_k \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Polynomien *tulo* määritellään jonoesityksen avulla seuraavasti.

Määritelmä 3.7. Olkoon (a_k) ja (b_k) R-kertoimisia polynomeja. Tällöin polynomien (a_k) ja (b_k) tulo on

$$(a_k) \cdot (b_k) = (c_k), \text{ missä } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Lause 3.1. *Olkoon polynomit $P = (a_k)$ ja $Q = (b_k)$ sellaiset, että niiden kertoimet kuuluvat renkaaseen R. Tällöin $P + Q$ ja PQ ovat R-kertoimisia polynomeja.*

Todistus. On osoitettava, että laskutoimituksen tuloksen kaikki kertoimet ovat renkaan R alkioita. Lisäksi on myös osoitettava, että on olemassa jokin indeksi, jonka jälkeen laskutoimituksen tuloksen kertoimet ovat nollia.

Osoitetaan ensin, että yhteenlaskun tulos on polynomi. Jos $a_k, b_k \in R$, niin myös $c_k = a_k + b_k \in R$, kaikilla $k \in \mathbb{N}$, sillä R on rengas ja renkaan laskutoimitus $+$ on suljettu. Koska P ja Q ovat polynomeja, niin on olemassa luonnolliset luvut n, m, joille $a_k = 0$, kun $k \geq n$ ja $b_k = 0$, kun $k \geq m$. Valitaan M, joka on näistä luvuista suurempi eli $M = \max(n, m)$. Tällöin $a_k = b_k = 0$ kaikilla $k \geq M$. Kun $k \geq M$, niin $c_k = a_k + b_k = 0 + 0 = 0$. Joten $(c_k) = (a_k) + (b_k)$ on polynomi.

Osoitetaan seuraavaksi, että kertolaskun tulos on polynomi. Olkoon (a_i) ja (b_j) polynomeja sekä $k = i + j$. Koska $a_i, b_j \in R$, niin $a_i b_{k-i} \in R$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, sillä kertolasku on suljettu laskutoimitus renkaassa. Kertolaskun kertoimet ovat muotoa $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, missä summan yleinen termi kuuluu renkaaseen R. Koska renkaassa summa on suljettu, niin $c_k \in R$. Koska P on polynomi, niin on olemassa luonnollinen luku n, jolle $a_i = 0$, kun $i \geq n$. Nyt $a_i b_j = 0$, kun $i \geq n$, joten myös $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0$, kun $i \geq n$. Joten PQ on R-kertoiminen polynomi. □

3.1.3 Polynomin aste

Rengasta $(R, +, \cdot)$, jossa yhteenlaskun neutraalialkio on sama kuin tulon neutraalialkio eli $0 = 1$, kutsutaan *nollarenkaaksi.*

Määritelmä 3.8. Olkoon D sellainen vaihdannainen rengas, että D ei ole nollarengas. Olkoon lisäksi, jos $a, b \in D$ ja $ab = 0$, niin $a = 0$ tai $b = 0$. Tällöin rengasta kutsutaan *kokonaisalueeksi.*

Polynomin aste määräytyy sen muuttujan eksponentin mukaan, jonka jälkeen kertoimet ovat nollia. Tämän vuoksi asteluku on käytännöllistä määrittää äärellisen summan avulla.

Määritelmä 3.9. Olkoon $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ polynomi, missä a_n kuuluu renkaaseen R ja $a_n \neq 0$. Lukua n kutsutaan polynomin *asteeksi* ja merkitään $\deg(P(x)) = n$.

Polynomia, jonka $\deg(P(x)) = 0$ ja $P(x) \neq 0$ kutsutaan *yksiköksi.* Nollapolynomin $0 = (0, 0, 0, ...)$ astetta ei määritellä tässä yhteydessä, mutta todettakoon, että joissakin kirjallisuudessa saatetaan määritellä, että $\deg(0) = -1$.

Lause 3.2. *Olkoon R kokonaisalue ja $P(x), Q(x) \in R[x]$, mutta ne eivät ole nollapolynomeja. Tällöin polynomeille on voimassa $P(x)Q(x) \neq 0$ ja $\deg(P(x)Q(x)) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x))$.*

Todistus. Koska $P(x), Q(x) \in R[x]$, niin ne ovat muotoa

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_mx^m,$$

missä $a_m \neq 0$ ja

$$Q(x) = b_0 + b_1x^1 + ... + b_nx^n,$$

missä $b_n \neq 0$.

Määritelmän 3.9 mukaan $\deg(P(x)) = m$ ja $\deg(Q(x)) = n$. Määritelmän 3.4 avulla voidaan polynomien $P(x)$ ja $Q(x)$ tulo sieventää muotoon

$$^{*)}P(x)Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + ... + a_mb_nx^{m+n}.$$

Koska $P(x)$ ja $Q(x)$ eivät ole nollapolynomeja, niin $a_m \neq 0$ ja $b_n \neq 0$. R on kokonaisalue, josta seuraa, että $a_m b_n \neq 0$. Joten $P(x)Q(x) \neq 0$ ja Määritelmän 3.9 mukaan $\deg(P(x)Q(x)) =^{*)} m + n =^{3.9} \deg(P(x))+\deg(Q(x))$. □

3.1.4 Polynomin jaollisuus

Tutkitaan seuraavaksi polynomin jaollisuutta tapauksessa, missä polynomin kerroinrengas on kunta. Kunta määritellään seuraavasti.

Määritelmä 3.10. Olkoon $R \neq 0$ vaihdannainen rengas. Tällöin R on *kunta*, jos sen nollasta poikkeavilla alkioilla on olemassa käänteisalkio kertolaskun suhteen. Näin ollen kaikilla nollasta poikkeavilla alkioilla $a \in R$ on olemassa sellainen a^{-1}, jolle

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Nyt voidaan määritellä jaollisuuden polynomeille, joiden kerroinrenkaana on kunta. Merkintä $R[x]$ tarkoittaa *kaikkien R-kertoimisten polynomien muodostamaa joukkoa.*

Määritelmä 3.11. Olkoon K kunta ja olkoon polynomit $P(x), S(x) \in K[x]$. Tällöin polynomi $P(x)$ on *jaollinen* polynomilla $S(x)$, jos on olemassa sellainen $Q(x) \in K[x]$, jolle $P(x) = Q(x)S(x)$.

Kun polynomi $S(x)$ jakaa polynomin $P(x)$, niin voidaan merkitä lyhyesti $S(x)|P(x)$. Polynomia $S(x)$ voidaan kutsua myös polynomin $P(x)$ *tekijäksi.*

Lause 3.3. *Olkoon K kunta ja $P(x), S(x) \in K[x]$, missä $S(x)$ ei ole nollapolynomi. Jos $S(x)$ jakaa polynomin $P(x)$, niin*

(1) $cS(x)$ jakaa polynomin $P(x)$ kaikilla $c \in K$, missä $c \neq 0$.

(2) $\deg(S(x)) \leq \deg(P(x))$.

Todistus.

(1) Oletetaan, että $S(x)$ jakaa polynomin $P(x)$ ja $c \in K$, missä $c \neq 0$. Koska $S(x)|P(x)$, niin on olemassa sellainen $Q(x) \in K[x]$, jolle $P(x) = Q(x)S(x)$. Näin ollen

$$P(x) = Q(x)S(x) = 1 \cdot Q(x)S(x) = cc^{-1}Q(x)S(x) = cS(x)c^{-1}Q(x)$$

Nyt siis on olemassa sellainen $c^{-1}Q(x) \in K[x]$, jolle $P(x) = cS(x)c^{-1}Q(x)$, joten $cS(x)$ jakaa polynomin $P(x)$.

(2) Oletetaan, että $S(x)$ jakaa polynomin $P(x)$. Koska $S(x)$ jakaa polynomin $P(x)$, niin on olemassa sellainen $Q(x) \in K[x]$, jolle $P(x) = Q(x)S(x)$. Lauseen 3.2 nojalla $\deg(P(x)) = \deg(S(x)) + \deg(Q(x))$, joten

$$\deg(S(x)) = \deg(P(x)) - \deg(Q(x)).$$

Koska polynomin aste on luonnollinen luku, niin $\deg(S(x)) \leq \deg(P(x))$.

□

Määritelmä 3.12. Olkoon K kunta ja olkoon $(a_k) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$ polynomi, missä $P(x) \in K[x]$. Tällöin polynomi $P(x)$ on *vakiopolynomi*, jos $a_k = 0$, kun $k \neq 0$.

Kaikki polynomit ovat jaollisia nollasta poikkeavilla *vakiopolynomeilla*, minkä vuoksi polynomin jaottomuuden määritelmässä näitä ei huomioida.

Määritelmä 3.13. Olkoon K kunta ja olkoon polynomit $P(x), S(x) \in K[x]$. Tällöin polynomi $P(x)$ on *jaoton*, jos $\deg(P(x)) = 1$ tai ei ole olemassa sellaista polynomia $Q(x) \in K[x]$, jolle $P(x) = Q(x)S(x)$.

Kokonaislukujen jaollisuutta voidaan tutkia *jakoyhtälön* avulla. Jakoyhtälön merkitys on keskeinen myös polynomien jaollisuuden tutkimisessa. Kokonaisluvut toteuttavat seuraavan jakoyhtälön.

Lause 3.4. *Olkoon $\mathbb{Z}$ kokonaislukujen joukko ja $a, b \in \mathbb{Z}$ sekä $b > 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut q ja r, joille on voimassa ehdot*

$$a = bq + r \text{ ja } 0 \leq r < b.$$

Lauseen todistus sivuutetaan tässä yhteydessä, mutta sen löytää Thomaksen kirjasta [8, s. 5-7]. Polynomeille, joiden kerroinrenkaana on kunta, voidaan määritellä vastaavanlainen jakoyhtälö kuin kokonaisluvuille. Näiden välinen eroavaisuus on se, että ehto $0 \leq r < b$ ilmaistaan polynomeilla asteen avulla. Merkintöjen vastaavuudet ovat $a = P(x)$, $b = S(x)$, $q = Q(x)$ *ja* $r = R(x)$.

Lause 3.5. *Olkoon* K *kunta ja* $P(x), S(x) \in K[x]$ *sekä* $S(x) \neq 0$. *Tällöin on olemassa yksikäsitteiset polynomit* $Q(x), R(x) \in K[x]$, *joille on voimassa*

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \textit{ ja } R(x) = 0 \textit{ tai } \textit{deg}(R(x)) < \textit{deg}(S(x)).$$

Lausetta [3.5] kutsutaan *polynomien jakoyhtälöksi.* Jos $R(x) = 0$, niin sanotaan, että polynomi $Q(x)$ jakaa polynomin $P(x)$. Jos $R(x) \neq 0$, niin polynomia $R(x)$ kutsutaan *jakojäännökseksi.* Polynomia $Q(x)$ kutsutaan *osamääräksi.*

Todistus. [8, s. 92-93] Todistetaan ensin, että on olemassa polynomit $Q(x)$ ja $R(x)$. Todistus voidaan jakaa kahteen osaan, missä ensimmäisessä osassa oletetaan, että $P(x) = 0$ tai $\deg(P(x)) < \deg(S(x))$. Toisessa osassa oletetaan, että $P(x) \neq 0$ tai $\deg(P(x)) \leq \deg(S(x))$.

Oletetaan, että $P(x) = 0$ tai $\deg(P(x)) < \deg(S(x))$. Valitaan $Q(x) = 0$ ja $R(x) = P(x)$. Tällöin $P(x) = Q(x)S(x) + R(x) = 0 \cdot S(x) + P(x) = P(x)$. Eli saadaan identtisesti tosi yhtälö $P(x) = P(x)$, jonka on voimassaolo ei riipu oletuksesta $\deg(P(x)) < \deg(S(x))$. Näin ollen on olemassa polynomit $Q(x)$ ja $R(x)$, jotka toteuttavat jakoyhtälön $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$ ja $R(x) = 0$.

Oletetaan, että $P(x) \neq 0$ ja $\deg(S(x)) \leq \deg(P(x))$. Polynomien olemassaolot voidaan todistaa induktion avulla, kun tutkitaan jaettavaa $P(x)$. Jos $\deg(P(x)) = 0$, niin myös $\deg(S(x)) = 0$. Tällöin $P(x) = a$ ja $S(x) = b$ joillakin nollasta poikkeavilla alkioilla $a, b \in K$. Koska K on kunta, niin b on yksikkö ja $a = b(b^{-1}a) + 0$. Tällöin lause on tosi, kun $Q(x) = b^{-1}a$ ja $R(x) = 0$. Tehdään induktio-oletus, jossa lause on tosi, kun jaettavan P aste on pienempää kuin n. Eli oletetaan, että on olemassa sellaiset $Q(x), R(x) \in K[x]$, joille on voimassa

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \text{ ja } R(x) = 0 \text{ tai } \deg(R(x)) < \deg(S(x)),$$

missä $\deg(P(x)) < n$. Nyt täytyy osoittaa, että väite pitää paikkansa myös kun $\deg(P(x)) = n$. Merkitään jaettavaa polynomia

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

missä $a_n \neq 0$. Vastaavasti merkitään jakajaa

$$S(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0,$$

missä $b_m \neq 0$ ja oletetaan, että $m \leq n$. Koska K on kunta ja $b_m \neq 0$, niin b_m on yksikkö. Jakokulmassa jakamalla polynomi $P(x)$ polynomilla $S(x)$ saadaan ensimmäisestä jaosta

$$\begin{array}{r|l} & a_n b_m^{-1} x^{n-m} \\ \cline{2-2} S(x) = b^m x^m + ... + b_1 x + b_0 & P(x) = a^n x^n + ... + a_1 x + a_0 \\ & a^n x^n + a_n b_m^{-1} b_{m-1} x^{n-1} + ... \\ \cline{2-2} & P_1(x) = P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} S(x) \end{array} \quad [28].$$

Koska $a_n b_m^{-1} x^{n-m}$ ja $P(x)$ ovat saman asteisia polynomeja sekä niillä on yhteinen korkeimman asteen kerroin a_n, niin erotuspolynomi $P_1(x)$ on asteeltaan pienempi kuin n. Jaetaan seuraavaksi polynomi $P_1(x)$ polynomilla $S(x)$. Koska polynomin $P_1(x)$ aste on pienempi kuin n, niin voidaan käyttää induktio-oletusta. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa polynomit $Q(x)$ ja $R(x)$, joille on voimassa

$$\begin{aligned} &P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} S(x) = S(x)Q(x) + R(x) \\ &\text{ja } R(x) = 0 \text{ tai } \deg(R(x)) < \deg(S(x)). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} &P(x) = S(x)(a_n b_m^{-1} x^{n-m} + Q(x)) + R(x) \\ &\text{ja } R(x) = 0 \text{ tai } \deg(R(x)) < \deg(S(x)). \end{aligned}$$

Nyt väite on tosi, kun $Q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + Q(x)$. Induktion nojalla väite on siis tosi eli on olemassa polynomit $Q(x)$ ja $R(x)$ kaikilla jaettavilla $P(x)$ ja nollasta poikkeavilla jakajilla $S(x)$.

Osoitetaan vielä, että $Q(x)$ ja $R(x)$ ovat yksikäsitteiset. Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että on olemassa polynomit $Q_2(x)$ ja $R_2(x)$, joille on voimassa

$$P(x) = Q_2(x)S(x) + R_2(x) \text{ ja } R_2(x) = 0 \text{ tai } \deg(R_2(x)) < \deg(S(x)).$$

Tällöin

$$Q(x)S(x) + R(x) = P(x) = Q_2(x)S(x) + R_2(x),$$

mistä sieventämällä saadaan

$$S(x)(Q(x) - Q_2(x)) = R_2(x) - R(x).$$

Jos $Q(x) - Q_2(x)$ on nollasta poikkeava, niin Lauseen 3.2 nojalla yhtälön vasemman puoleisen lausekkeen aste on $\deg(S(x)) + \deg(Q(x) - Q_2(x))$, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin $\deg(S(x))$. Toisaalta $\deg(R_2(x)) < \deg(S(x))$ ja $\deg(R(x)) < \deg(S(x))$, minkä vuoksi $\deg(R_2(x) - R(x)) < \deg(S(x))$. Tämän vuoksi myös yhtälön oikean puoleinen lauseke on asteeltaan suurempi tai yhtä kuin $\deg(S(x))$. Nyt yhtälön vasemman puoleisen lausekkeen aste on suurempi kuin oikeanpuoleisen, mistä seuraa ristiriita. Tämän vuoksi $Q(x) - Q_2(x) = 0$ ja $Q(x) = Q_2(x)$. Koska yhtälön vasemman puolen tulon tekijöistä toinen on nolla, täytyy myös yhtälön vasemman puoleisen lausekkeen olla nolla. Koska vasen puoli on nolla, niin $R_2(x) - R(x) = 0$, joten myös $R_2(x) = R(x)$. Täten polynomit $Q(x)$ ja $R(x)$ ovat yksikäsitteisiä.

$\square$

3.1.5 Polynomin juuret ja tekijöihin jako

Seuraavat kappaleet 3.1.5 − 3.1.6 perustuvat Thomas Hungerfordin *Abstract Algebra: An Introduction* -kirjaan [8]. Tämän vuoksi kyseisissä luvuissa viitataan muihin lähteisiin, kun viittaus ei ole Hungerfordin teoksesta.

Muotoa $a_nx^n + ... + a_1x + a_0$ olevat R-kertoimiset polynomit liitetään kuvaukseen $P : R \to R$ ehdolla

$$P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0,$$

missä $x \in R$ ja R on vaihdannainen kunta. Näin indusoitua kuvausta P kutsutaan *polynomifunktioksi.*

Polynomin juurien (nollakohdat) avulla voidaan polynomi jakaa alemman asteen termeihin. Määritellään seuraavaksi polynomin juuret.

Määritelmä 3.14. Olkoon R vaihdannainen rengas ja $P(x) \in R[x]$. Alkiota $a \in R$ kutsutaan polynomin $P(x)$ *juureksi*, jos $P(a) = 0$.

Alkio a on polynomin juuri, jos indusoitu funktio P liittää kunnan alkion a kunnan yhteenlaskun neutraalialkioon.

Lause 3.6. *Olkoon R kunta, polynomi $P(x) \in R[x]$ ja alkio $a \in R$. Kun $P(x)$ jaetaan polynomilla $x - a$, niin jakojäännös on $P(a)$.*

Todistus. Jakoyhtälön 3.5 nojalla $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$, missä $R(x) = 0$ tai $\deg(R(x)) < \deg(x - a)$. Koska $\deg(x - a) = 1$, niin täytyy olla $\deg(R(x)) = 0$. Eli $R(x)$ on yksikkö, joten on olemassa $c \in R$, joka toteuttaa ehdon $R(x) = c$. Tällöin $P(x) = (x - a)Q(x) + c$, joten sijoittamalla a polynomiin P saadaan $P(a) = (a - a)Q(a) + c = 0 + c = c$. Näin ollen $R(x) = c = P(a)$.

□

Seuraavaksi voidaan esittää polynomien tekijöiden jaon ja juurien välinen yhteys.

Lause 3.7. *Olkoon K kunta, polynomi $P(x) \in K[x]$ ja alkio $a \in K$. Tällöin alkio a on polynomin $P(x)$ juuri, jos ja vain jos $(x - a)$ on polynomin $P(x)$ tekijä joukossa $K[x]$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että a on polynomin $P(x)$ juuri. Jakoyhtälön (3.5) nojalla polynomi $P(x)$ voidaan esittää muodossa $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$. Lauseen (3.6) nojalla, kun polynomi $P(x)$ jaetaan polynomilla $x - a$, niin jakojäännös on $P(a)$. Joten, $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$. Koska, a on polynomin $P(x)$ juuri, niin $P(a) = 0$. Tällöin $P(x) = (x - a)Q(x)$ toisin sanoen $(x - a)$ on polynomin $P(x)$ tekijä.

Todistetaan seuraavaksi väite toiseen suuntaan eli oletetaan, että $x - a$ on polynomin $P(x)$ tekijä. Koska $x - a$ on polynomin $P(x)$ tekijä, niin voidaan kirjoittaa Määritelmän 3.11 nojalla $P(x) = (x - a)S(x)$. Sijoitetaan a polynomiin $P(x)$, jolloin saadaan $P(a) = (a - a)S(x) = 0$. Koska $P(a) = 0$, niin a on polynomin $P(x)$ juuri.

□

Gaussin todistaman algebran peruslauseen nojalla tiedetään, että jos polynomin aste on suurempi tai yhtä suuri kuin 1, niin polynomilla ainakin yksi juuri. Tämän lauseen seurauksena polynomeilla, joiden kerroinrengas on kompleksilukujen joukko, on voimassa, että juuria voi olla enemmän, täsmälleen n kappaletta. [17] Kerroinrengas ei välttämättä ole kompleksilukujen muodostama joukko, vaan se voi olla esimerkiksi reaalilukujen joukko. Tällöin algebran peruslauseen seuraus ei ole voimassa. Tämän vuoksi muotoillaan hieman rajoitetumpi algebran peruslauseen seuraus polynomeille.

Seuraus 3.1. Olkoon K kunta ja $P(x)$ nollasta poikkeava n-asteinen polynomi joukossa $K[x]$. Tällöin polynomilla $P(x)$ on korkeintaan n juurta joukossa K.

Todistus. Jos polynomilla $P(x)$ on juuri a_1 kunnassa K, niin Lauseen 3.7 nojalla, on olemassa sellainen polynomi $H_1(x) \in K[x]$, joka toteuttaa ehdon $P(x) = (x - a_1)H_1(x)$. Vastaavasti, jos polynomilla $H_1(x)$ on juuri $a_2 \in K$, niin on olemassa sellainen polynomi $H_2(x) \in K[x]$, joka toteuttaa ehdon $H_1(x) = (x - a_2)H_2(x)$. Nyt polynomi $P(x)$ voidaan esittää muodossa

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)H_2(x).$$

Todistus voidaan jakaa tästä eteenpäin kahteen osaan. Näistä ensimmäisessä oletetaan, että polynomilla $H_n(x)$ on olemassa juuri kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toistetaan tätä prosessia n-kertaa, jolloin

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)H_n(x).$$

Lauseen 3.2 nojalla

$$\begin{aligned}\deg(P(x)) &= \deg(x - a_1) + \deg(x - a_2) + ... + \deg(x - a_n) + \deg(H_n(x))\\ &= 1 + 1 + ... + 1 + \deg(H_n(x))\\ &= n + \deg(H_n(x))\end{aligned}$$

Koska $P(x)$ on n-asteen polynomi, niin $n = n + \deg(H_n(x))$. Tästä seuraa, että $H_n(x)$ on yksikkö, eli $H_2(x) = c$, jollakin $c \in K$. Nyt voidaan kirjoittaa polynomi $P(x)$ uudestaan tämän tiedon avulla

$$P(x) = c(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n).$$

Näin ollen polynomin $P(x)$ juuret ovat $a_1, a_2, ..., a_n$ ja niitä on täsmälleen n kappaletta.

Oletetaan seuraavaksi, että alkaen indeksistä $k \in \mathbb{N}$, polynomilla H_k ei ole olemassa juurta joukossa K. Tällöin vastaavasti polynomi $P(x)$ voidaan esittää muodossa

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_k)H_k(x),$$

missä polynomilla $H_k(x)$ ei ole olemassa juurta. Tällöin

$$\begin{aligned}\deg(P(x)) &= \deg(x - a_1) + \deg(x - a_2) + ... + \deg(x - a_k) + \deg(H_k(x)) \\ &= 1 + 1 + ... + 1 + H_k(x) \\ &= k + H_k(x).\end{aligned}$$

Koska $P(x)$ on n-asteen polynomi, niin tästä seuraa $n = k + H_k(x)$. Joten $k \leq n$ eli polynomilla $P(x)$ on korkeintaan n juurta.

□

Lauseen 3.6 avulla voidaan johtaa yhtälön ratkaisemisen kannalta keskeinen seuraus. Jos tiedetään, että polynomi on jaoton ja se on asteluvultaan kaksi tai korkeampi, niin voidaan tämän tiedon avulla päätellä, että polynomilla ei ole olemassa juuria.

Seuraus 3.2. Olkoon K kunta ja $P(x) \in K[x]$, missä polynomin aste $\deg(P(x)) \geq 2$. Tällöin jos polynomi $P(x)$ on jaoton joukossa $K[x]$, niin polynomilla $P(x)$ ei ole olemassa juuria kunnassa K.

Todistus. Olkoon $a \in K$. Jos polynomi $P(x)$ on jaoton, niin sillä ei ole olemassa tekijää $(x - a) \in K[x]$. Kuitenkin, Lauseen 3.6 nojalla a ei ole polynomin juuri ja koska a oli mielivaltainen kunnan K alkio, niin polynomilla $P(x)$ ei ole juuria kunnassa K.

□

Seurauksen 3.2 ja Lauseen 3.2 avulla voidaan vielä johtaa toisen tai kolmannen asteen polynomeille keskeinen tulos, jonka mukaan edellisen seurauksen väite pätee myös toiseen suuntaan: Jos polynomilla ei ole olemassa juuria, niin polynomi on jaoton.

Seuraus 3.3. Olkoon K kunta ja $P(x) \in K[x]$, missä $\deg(P(x)) = 2$ tai $\deg(P(x)) = 3$. Tällöin polynomi $P(x)$ on jaoton joukossa $K[x]$, jos ja vain jos polynomilla $P(x)$ ei ole olemassa juuria kunnassa K.

Todistus. Oletetaan ensin, että polynomi $P(x)$ on jaoton. Tällöin Seurauksen 3.2 nojalla polynomilla ei ole juuria kunnassa K.

Oletetaan sitten, että polynomilla $P(x)$ ei ole juuria kunnassa K. Tällöin polynomilla ei ole ensimmäisen asteen polynomitekijöitä joukossa $K[x]$, sillä jokaisella ensimmäisen asteen polynomilla $ax + b$ on olemassa juuri $x = -a^{-1}b \in K$. Näin ollen, jos polynomi $P(x)$ voidaan jakaa tekijöihin $Q(x)$ ja $S(x)$, niin kumpikaan näistä polynomeista ei ole ensimmäisen asteen polynomi. Lauseen 3.2 nojalla $\deg(P(x)) = \deg(Q(x)) + \deg(S(x))$. Jos $\deg(P(x)) = 2$, niin täytyy olla $\deg(Q(x)) = 0$ ja $\deg(S(x)) = 2$ tai $\deg(Q(x)) = 2$ ja $\deg(S(x)) = 0$, sillä $Q(x)$ ja $S(x)$ eivät ole ensimmäisen asteen polynomeja. Vastaavasti, jos $\deg(P(x)) = 3$, niin täytyy olla $\deg(Q(x)) = 0$ ja $\deg(S(x)) = 3$ tai $\deg(Q(x)) = 3$ ja $\deg(S(x)) = 0$. Tällöin toinen polynomin $P(x)$ polynomitekijöistä on yksikkö, joten polynomilla $P(x)$ ei ole olemassa polynomitekijöitä.

$\square$

3.1.6 Polynomien suurin yhteinen tekijä

Tiedetään, että kahden kokonaisluvun *suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi* kutsutaan suurinta mahdollista kokonaislukua, joka jakaa nämä molemmat. Kokonaislukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää merkitään $\mathrm{syt}(a, b)$. Polynomeille ei ole määritelty vastaavanlaista suuruusvertailua kuin kokonaisluvuille, mutta eräs polynomin ominaisuuksia kuvaava luku on polynomin aste. Voidaan määritellä vastaavanlaisella ideologialla kuin kokonaisluvuillekin polynomien suurimman yhteisen tekijän. Tällöin ajatellaan, että polynomien suurin yhteinen tekijä on asteluvultaan suurin mahdollinen polynomi, joka jakaa polynomit. Tämän ajattelun ongelmana on kuitenkin se, että näin määritelty polynomien suurin yhteinen tekijä ei ole yksikäsitteinen. Jos $H(x)$ jakaa polynomit $P(x)$ ja $S(x)$, niin Lauseen 3.3 nojalla myös asteluvultaan saman suuruinen polynomin monikerta $cH(x)$ jakaa polynomit $P(x)$ ja $S(x)$. Määritellään tämän vuoksi *pääpolynomi* seuraavasti.

Määritelmä 3.15. Olkoon K kunta ja $P(x) \in K[x]$. Polynomi

$$H(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

on pääpolynomi, jos korkeimman asteen kerroin $a_n = 1$.

Nyt voidaan määritellä polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurimman yhteisen tekijän, joka on pääpolynomi $H(x)$.

Määritelmä 3.16. Olkoon K kunta sekä $P(x), S(x), C(x) \in K[x]$, missä $P(x)$, $S(x)$ ja $C(x)$ eivät ole nollapolynomeja. Polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurin yhteinen tekijä on korkeimman asteen pääpolynomi $H(x)$, joka jakaa molemmat polynomit $P(x)$ ja $S(x)$. Toisin sanoen polynomi $H(x)$ on polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurin yhteinen tekijä, jos ehdot

(1) $H(x)$ on pääpolynomi

(2) polynomi $H(x)$ jakaa polynomin $P(x)$ ja polynomi $H(x)$ jakaa polynomin $S(x)$

(3) jos polynomi $C(x)$ jakaa polynomin $P(x)$ ja polynomi $C(x)$ jakaa polynomin $S(x)$, niin polynomi $C(x)$ jakaa polynomin $H(x)$ ja $\deg(C(x)) \leq \deg(H(x))$

ovat voimassa.

Vastaavasti kuin kokonaisluvuillakin, polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurinta yhteistä tekijää merkitään $\text{syt}(P(x), S(x))$. Polynomeilla $P(x)$ ja $S(x)$ on olemassa ainakin yksi suurin yhteinen tekijä, sillä polynomi 1 on kaikkien polynomien tekijä. Seuraavaksi osoitetaan, että pääpolynomin avulla määritelty suurin yhteinen tekijä on yksikäsitteinen.

Lause 3.8. *Olkoon K kunta ja $P(x), S(x) \in K[x]$, missä $P(x)$ ja $S(x)$ eivät ole nollapolynomeja. Tällöin, jos polynomeilla $P(x)$ ja $S(x)$ on olemassa suurin yhteinen tekijä $H(x)$, niin se on yksikäsitteinen.*

Todistus. [28, s. 18-19] Tehdään vastaoletus, että $H_1(x)$ ja $H_2(x)$ ovat polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurimmat yhteiset tekijät. Koska $H_2(x)$ on polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurin yhteinen tekijä, niin $H_2(x)$ jakaa polynomin $P(x)$ ja $H_2(x)$ jakaa polynomin $S(x)$. Toisaalta myös $H_1(x)$ on polynomien $P(x)$ ja $S(x)$ suurin yhteinen tekijä, joten Määritelmän 3.16 mukaan $H_2(x)$ jakaa polynomin $H_1(x)$. Vastaavalla päättelyllä myös $H_1(x)$ jakaa polynomin $H_2(x)$. Tällöin Määritelmän 3.11 mukaan on olemassa polynomit $Q_1(x), Q_2(x) \in K[x]$, joille on voimassa

$$H_1(x) = Q_1(x)H_2(x)$$

ja

$$H_2(x) = Q_2(x)H_1(x).$$

□

Sijoitetaan $H_2 = Q_2(x)H_1(x)$ jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$H_1(x) = Q_1(x)H_2(x) = Q_1(x)Q_2(x)H_1(x).$$

Näin ollen $Q_1(x)Q_2(x) = 1$, koska $K[x]$ on kokonaisalue, joten $Q_1(x)Q_2(x)$ on vakiopolynomi eli

$$\deg(Q_1(x)Q_2(x)) = \deg(1) = 0.$$

Toisaalta Määritelmän 3.2 mukaan

$$\deg(Q_1(x)Q_2(x)) = \deg(Q_1(x)) + \deg(Q_2(x)) = 0.$$

Koska polynomin aste on luonnollinen luku, niin $\deg(Q_1(x)) = \deg(Q_2(x)) = 0$ eli polynomit $Q_1(x)$ ja $Q_2(x)$ ovat myös vakiopolynomeja. Koska polynomit $H_1(x) = Q_1(x)H_2(x)$ ja $H_2(x) = Q_2(x)H_1(x)$ ovat pääpolynomeja, niin näiden korkeimman asteen termin täytyy olla $1 \in K$. Näin ollen $Q_1(x) = Q_2(x) = 1$, josta seuraa, että $H_1(x) = Q_1(x)H_2(x) = 1H_2(x) = H_2(x)$. Tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten $\text{syt}(P(x), S(x))$ on yksikäsitteinen.

Todistuksessa oletettiin, että tällainen pääpolynomi $H(x)$ on olemassa, jolloin se on yksikäsitteinen. Kuitenkin, olemassaolo ei ole välttämätön yksikäsitteisyyden kannalta, vaan voidaan osoittaa, että polynomeilla $P(x), S(x) \in K[x]$ on aina olemassa Määritelmän 3.16 mukainen suurin yhteinen tekijä $H(x)$. Todistus sivuutetaan tässä yhteydessä, johtuen siitä, että se vaatisi usean työn kannalta epäkeskeisen apulauseen. Kuitenkin Thomaksen kirjassa [8, s. 97-98] on edellä mainittu todistus.

3.2 Opetussuunnitelman perusteet

Kappaleet 3.2.1 ja 3.2.2 pohjautuvat opetussuunnitelman perusteisiin. Ensimmäinen kappale kuvaa perusopetuksen (2014) [20] ja jälkimmäinen lukion (2015) [16] opetussuunnitelman perusteiden matematiikkaosioita. Tutkitaan seuraavaksi kyseisten opetussuunnitelmien perusteet ja tunnistetaan niistä ne teemat sekä sisällöt, jotka ovat olleet materiaalin ja kurssin laadinnan kannalta keskeisessä asemassa. Lukion opetussuunnitelmassa pääpaino on yhteisellä avauskurssilla sekä tästä seuraavilla lyhyen ja pitkän oppimäärän kursseilla.

3.2.1 Vuosiluokkien 7-9 matematiikka perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Oppilaiden väliset yksilölliset erot alkavat vuosiluokilla 7-9 näkyä voimakkaammin kuin aiemmin, minkä vuoksi tarjolla olevan opetuksen tulee ottaa kunkin yksilön tarpeet huomioon jatko-opintoja ajatellen. Opettajan tulee kyetä olemaan ymmärtäväinen ja tarjota monimuotoinen oppimisympäristö. Näin opetuksesta voidaan saada opiskelumotivaatiota vahvistava kokemus. [20, s. 280]

Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Oppimista voidaan tukea esimerkiksi hyödyntämällä teknologiaa ja oppimispelejä. Opetussuunnitelma painottaa myös poikkitieteellisyyttä, jossa matematiikkaa voidaan hyödyntää. [20]

Yläasteen matematiikka jaetaan kuuteen osaan: ajattelun taidot ja menetelmät, luvut ja laskutoimitukset, algebra, funktiot, geometria, tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys. Ajattelun taidot ja menetelmät -osio sisältää sääntöjen ja riippuvuuksien etsimistä ja esittämistä, matemaattisen tekstin tulkitsemista ja tuottamista, todistamisen perusteet, väitelauseiden totuusarvojen päättelemistä sekä ohjelmointia. Kyseinen sisältöalue korostaa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaista matematiikan loogista ja täsmällistä ajattelua. [20]

Lukujen ja laskutoimitusten osio koostuu reaalilukuihin liittyvistä peruslaskutoimituksista, joita hyödynnetään prosentti-, potenssi- ja neliöjuurilaskennassa. Potenssilaskennassa eksponentti pidetään kokonaislukuna ja neliöjuurilaskennassa perehdytään käsitteeseen neliöjuuri ja sen käyttöön. Lisäksi osiossa tutkitaan lukujen jaollisuutta ja lukujen jakamista alkutekijöihin. Tätä osiota voidaan pitää jatkon kannalta erityisen tärkeänä, sillä sen matematiikkaa hyödynnetäänkin muissa sisältöalueissa. [20]

Algebraosio koostuu polynomilausekkeista ja niiden peruslaskutoimituksista 3.3, ensimmäisen asteen yhtälöistä ja epäyhtälöistä, vaillinaisista toisen asteen yhtälöistä sekä yhtälöparin graafisesta ja algebrallisesta ratkaisemisesta. Lisäksi algebraosuudessa hyödynnetään verrantoa ja tutkitaan lukujonoja. [20]

Sisällöistä funktio-osio sisältää yhteneväisyyksiä edellä mainitun algebraosuuden kanssa. Ero algebraosuuteen on siinä, että funktio-osiossa painotetaan graafisen esitystavan termistöä kuten suora, paraabeli, kulmakerroin, vakiotermi sekä nollakohta. Lisäksi painotus on algebraosioon verrattuna enemmän yhtälöiden graafisessa esitystavassa.

Geometriassa perehdytään tasogeometriaan, tason trigonometriaan sekä avaruusgeometriaan. Aiemmin opittua hyödynnetään myös tässä sisältöalueessa. Esimerkiksi verrannon avulla voidaan tutkia eri tasokuvioiden välistä yhdenmuotoisuutta ja pythagoraan lauseen hyödyntäminen vaatii muun muassa yhtälön ratkaisutaitoja sekä potenssi- ja juurioppia. [20]

Viimeisessä sisältöalueessa keskitytään tilastojen keräämiseen ja analysoimiseen. Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys -sisältöalueen keskeisiä käsitteitä ovat muun muassa keskiarvo, frekvenssi sekä mediaani. Lisäksi sisältöalueessa on myös maininta todennäköisyyksien laskemisesta. [20]

3.2.2 Matematiikka lukion kursseilla MAY1, MAA2, MAB2, MAA3 ja MAB3

Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2015) mukaan, lukion matematiikka koostuu yhteensä 13:sta matematiikan pitkän oppimäärän kurssista ja kahdeksasta lyhyen oppimäärän kurssista. Pitkän oppimäärän kursseista 10 ja lyhyen oppimäärän kursseista kahdeksan ovat pakollisia. Pitkän ja lyhyen oppimäärän suorittavien matematiikka on aihepiirisisällöiltään vastaavanlainen ensimmäisten kolmen kurssin suhteen. [16]

Lukion matematiikka alkaa yhteisellä kurssilla MAY1 luvut ja yhtälöt, jonka jälkeen oppilaat siirtyvät lyhyeen tai pitkään matematiikan oppimäärään. Yhteiskurssin keskeisiksi sisällöiksi nimetään luvut, prosenttilaskenta, potenssi, verrannollisuus, funktio, ensimmäisen asteen yhtälö, yhtälöpari, neliö- ja kuutiojuuri sekä toisen ja kolmannen asteen potenssiyhtälö ja potenssifunktio. [16] Nämä ovat yläkoulun kertaamista tai aiemmin opitun syventämistä [20].

Matematiikan lyhyen oppimäärän valinneet siirtyvät kurssille MAB2 lausekkeet ja yhtälöt, jonka keskeisiä sisältöjä ovat ensimmäisen ja toisen asteen yhtälö sekä aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja summa [16]. Uutena oppisisältöinä yläkouluun ja kurssiin MAY1 verrattuna voidaan pitää toisen asteen yhtälöä sekä lukujonoja ja näiden summia [16, 20].

Pitkän oppimäärän lukijat suorittavat kurssin MAY1 jälkeen kurssin MAA2 funktiot ja yhtälöt, jonka sisältö koostuu polynomeista 3.1, ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöistä 3.1.5, potenssifunktioista ja -yhtälöistä, rationaalifunktioista ja -yhtälöistä sekä juurifunktioista ja -yhtälöistä. Uusia aihepiirejä ovat toisen asteen yhtälö, rationaalifunktiot ja -yhtälöt sekä juurifunktiot ja -yhtälöt. Lisäksi muita sisältöjä voidaan pitää aiemmin opitun laajentamisena, sillä esimerkiksi polynomien kohdalla opetellaan polynomien tekijöihin jakoa polynomin nollakohtien avulla. [16, 20]

Lyhyen oppimäärän kolmas kurssi MAB3 on geometriasta. Geometriakurssin keskeisiä sisältöjä ovat kuvioiden yhdenmuotoisuus, suorakulmaisen kolmion trigonometria, Pythagoraan lause, pinta-ala ja tilavuus sekä geometrian soveltaminen koordinaatistossa. Vastaavasti myös pitkän oppimäärän kolmas kurssi MAA3 on nimeltään geometria. Pitkän oppimäärän geometrian keskeisiä sisältöjä ovat kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus, sini- ja kosinilause, ympyrä sekä kuvioiden ja kappaleiden mittojen ja kulmien laskeminen. Ero näiden kahden oppimäärän välissä tulee siinä, että pitkässä oppimäärässä esimerkiksi käsite yhdenmuotoisuus laajennetaan toisesta ulottuvuudesta kolmanteen ulottuvuuteen. [16]

3.3 Motivaatio ja oppiminen

Tämä luku pohjautuu Katariina Salmela-Aron toimittamaan *Motivaatio ja oppiminen* -teokseen [3]. Motivaatiota pidetään yhtenä merkittävimmistä tekijöistä, kun käydään läpi eri oppimismenestymiseen vaikuttavia tekijöitä. Kun oppilas kokee opiskelunsa merkitykselliseksi, hän suoriutuu paremmin kuin tilanteessa, jossa opiskelu koetaan merkityksettömäksi. Vastaavasti kuten oppimismenestys, myös motivaatio ei ole yksiselitteinen. Käydään seuraavaksi läpi muutama Salmela-Aron mainitsema motivaatioteoria. Teoriat ovat moderneja, mikä näkyy niiden yhteisöllisyyden ja tunteiden korostamisessa. [3]

Suosituimpana [3] motivaatioteoriana voidaan pitää Ryanin ja Decin psykologista *itsemääräämisteoriaa*, jota sovelletaan muun muassa koulutuksessa, työelämässä sekä urheilussa. Teoria keskittyy siihen, kuinka hyvin yksilön sosiaalinen ympäristö tukee perustarpeiden saavuttamista. Teorian mukaan yksilön perustarpeita ovat kompetenssi, yhteenkuuluvuus ja autonomia. Kompetenssi on yksi tutkituimmista psykologian ongelmista ja itsemääräytymisteoriassa kompetenssi tarkoittaa yksilön tarvetta suoriutua hyvin yksilölle tärkeissä asioissa. Teoriassa yhteenkuuluvuudella viitataan siihen, että yksilö kokee itsensä merkitykselliseksi muille. Autonomiassa motivaation kohteena olevan asian tulee olla vapaaehtoista. Kun yksilön edellä mainitut perustarpeet ovat kunnossa, niin motivaation kohteeseen liittyvien tavoitteiden saavuttamista voidaan pitää ihanteellisena. [23]

Salmela-Aron mukaan toinen keskeinen motivaatioteoria on Ecclesin *odotusarvoteoria*. Teorian mukaan yksilön motivoituminen tehtävään riippuu siitä, kuinka hyvin yksilö uskoo suoriutuvansa tehtävästä ja kuinka tärkeänä hän tehtävää pitää. Minäkäsitystä pidetään teoriassa keskeisenä. Jos opiskelija mielestään omaa riittävän kompetenssin suoritettavaan tehtävään, tehtävästä suoriutuminen on todennäköisempää kuin tilanteessa, jossa yksilö ei luota itseensä. [3]

Kolmas Salmela-Aron nimeämä teoria on Dweckin *tavoiteorientaatioteoria*. Dweckin teoriassa oppijat voidaan jakaa minäsuuntautuneisiin tai tehtäväsuuntautuneisiin oppijoihin. Näiden oppijatyyppien erona on se, että tehtäväorientoitunut oppija motivoituu itse tehtävästä ja minäsuuntautunut oppija haluaa osoittaa olevansa tehtävässä parempi kuin muut. Dweckin mukaan motivaation ja pitkäjänteisemmän opiskelemisen kannalta tehtäväsuuntautunut oppija on parempi oppija. Dweck selittää tämän sillä, että tehtäväsuuntautunut oppija uskoo kykyjen olevan opittuja ja ymmärtää näiden kykyjen oppimisen vaativan suurta panostusta. Toisaalta Dweckin mukaan minäsuuntautunut oppija pitää kykyjä luontaisina, minkä vuoksi minäsuuntautunut oppija luovuttaa helposti vastoinkäymisten ilmentyessä. [3]

Neljäs Salmela-Aron mainitsema teoria on Salmela-Aron ja Upadyayan *vaatimusten ja voimavarojen merkitys oppimiselle ja hyvinvoinnille*. Teorian mukaan oppijan vaatimusten ja resurssien suhde määrittää oppijan motivoitumisen ja hyvinvoinnin. Liian suuret vaatimukset oppijan voimavaroihin nähden vaikeuttavat tulevaisuudessa oppijan oppimista ja hyvinvointia. Toisaalta tietty vaatimustaso on oltava, että voidaan saavuttaa vaadittu oppi. Kuitenkin oppijoiden resurssit ovat yksilökohtaiset, minkä vuoksi myös vaatimustasojen on oltava yksilökohtaisia. [25, 3]

3.4 Pelillisyys ja pelillistäminen

Tilastokeskuksen vuoden 2017 raportin mukaan vuodesta 1990 lähtien pelaaminen ja erityisesti videopelaaminen on lisääntynyt merkittävästi. Vielä 90-luvun alussa vain lasten ja nuorten aktiviteettina pidetty videopelaaminen on yleistynyt laajemmin väestörakenteeseemme: 90-luvun alussa noin 13 % väestöstä harrasti ainakin kerran vuodessa videopelaamista, kun taas vuonna 2017 vastaava lukema on noin 55 % väestöstämme. Kun tarkastelujoukkona on $10 - 14$ vuotiaat, niin peräti 98 %

tästä ikäryhmästä pelaa ainakin kerran kuukaudessa videopelejä. [1] Lisäksi peruskoulun opetussuunnitelmassa on viitteitä, jotka puoltavat esimerkiksi matematiikan opetuksessa oppimispelejä [20]. Näin ollen on perusteltua *pelillistää* ja tuoda pelinomaisuutta erityisesti peruskoulun oppitunneille [1, 20].

Erään pelillistämisen (engl. gamification) määritelmän mukaan pelillistämisellä tarkoitetaan videopeleistä tuttujen elementtien integroimista ei-pelilliseen ympäristöön. Näiden elementtien yhtenäistämisen päätarkoituksena on madaltaa kynnystä ei-pelillisestä aktiviteetista suoriutumiseen. [5] Videopeleistä tutut elementit kuten kilpailullisuus, pisteet, roolit sekä tavoitteellisuus usein lisäävät ei-pelillisen aktiviteetin viihdearvoa sekä auttavat motivoitumaan aktiviteettiin aiempaa paremmin [22, 29, 10].

Akateemisesti pelillistämisellä on olemassa useita eri määritelmiä riippuen kontekstista. Ihmisen ja tietokoneen välisessä vuorovaikutuksessa pelillistämisellä tarkoitetaan pelisuunnittelemiseen kuuluvien elementtien käyttöä ei-pelillisessä kontekstissa. Palveluiden mainostamisessa pelillistämisestä puhuttaessa viitataan prosessiin, jonka tarkoituksena on motivoida käyttäjää pelillisten kokemusten avulla. Yritystoiminnassa pelillisyys tarkoittaa pelillisten elementtien ja pelin suunnittelemiseen käytettävien tekniikoiden käyttöä ei-pelillisessä kontekstissa. [13, s. 28-29]

Pelillisyys ja pelit voidaan jakaa kahteen kategoriaan, joista ensimmäinen on *viihdepelien* kategoria. Kategoria pitää sisällään tavallisen nuorten suosiman pelaamisen, jossa pelillisyyden arvo on sen tarjoamassa viihteellisyydessä. [29]

Toisena kategoriana voidaan pitää *hyötypelejä* (engl. serious games), jotka voivat peruselementeiltään olla vastaavanlaisia kuin viihdepelit. Kuitenkin hyötypelin arvo on sen tarjoamassa konkreettisessa arkielämän hyödyssä. Molemmissa pelityypeissä voi kehittyä paremmaksi, mutta hyötypelin tarjoama taito on aina sovellettavissa arkielämään toisin kuin viihdepeleissä. [29]

Opetuksessa helpointa on käyttää tai muokata jo valmiina olevia hyötypelejä, jotka vastaavat opetettavaa oppisisältöä. Vastuu pelien tekemisestä voidaan siirtää myös oppilaille, sillä tämä parantaa oppilaiden motivaatiota, osaamista sekä ryhmätyötaitoja [22, 7]. Lisäksi oppilaat saattavat tietää opettajaa paremmin tarjolla olevista hyötypeleistä, joten oppilaiden toiveiden kuunteleminen on hyödyllistä. Käytettävä peli voi sisältää viihdepelillisyydestä tuttuja elementtejä kuten kilpailullisuuden, pisteytyksen, palkinnot sekä viihteellisyyden. [22]

4 Syklin 1 kehittämistuotoksen kuvaus

Tässä luvussa esitellään ensimmäisen syklin kehittämistuotos ja kuvaillaan, miten kehittämistuotokseen päädyttiin. Ennen tutkimusta luotiin LUMATE:n [27] järjestämä matematiikan kertauskurssi yhdeksäsluokkalaisille, jota kehitettiin kehittämistutkimukselle tyypillisin ottein. Tutkimus alkoi palaverilla, johon osallistuivat tutkimuksen tekijän lisäksi toinen maisterivaiheen opiskelija ja kurssin suunnittelija Ykä Lähteenmäki, työn ohjaajat sekä LUMATE-keskuksen Susanna Petäjistö, Eeva Mäkelä ja Laura Salkonen. Ennen palaveria tiedettiin, että tarkoitus on järjestää yhdeksäsluokkalaisille suunnattu matematiikan kertauskurssi. Palaverin aikana sovittiin myös yksityiskohtaisemmin opinnäytetyöstä. Kertauskurssin lukujärjestys on Taulukossa 4.1.

Taulukko 4.1 *Matematiikan kertauskurssin lukujärjestys.*

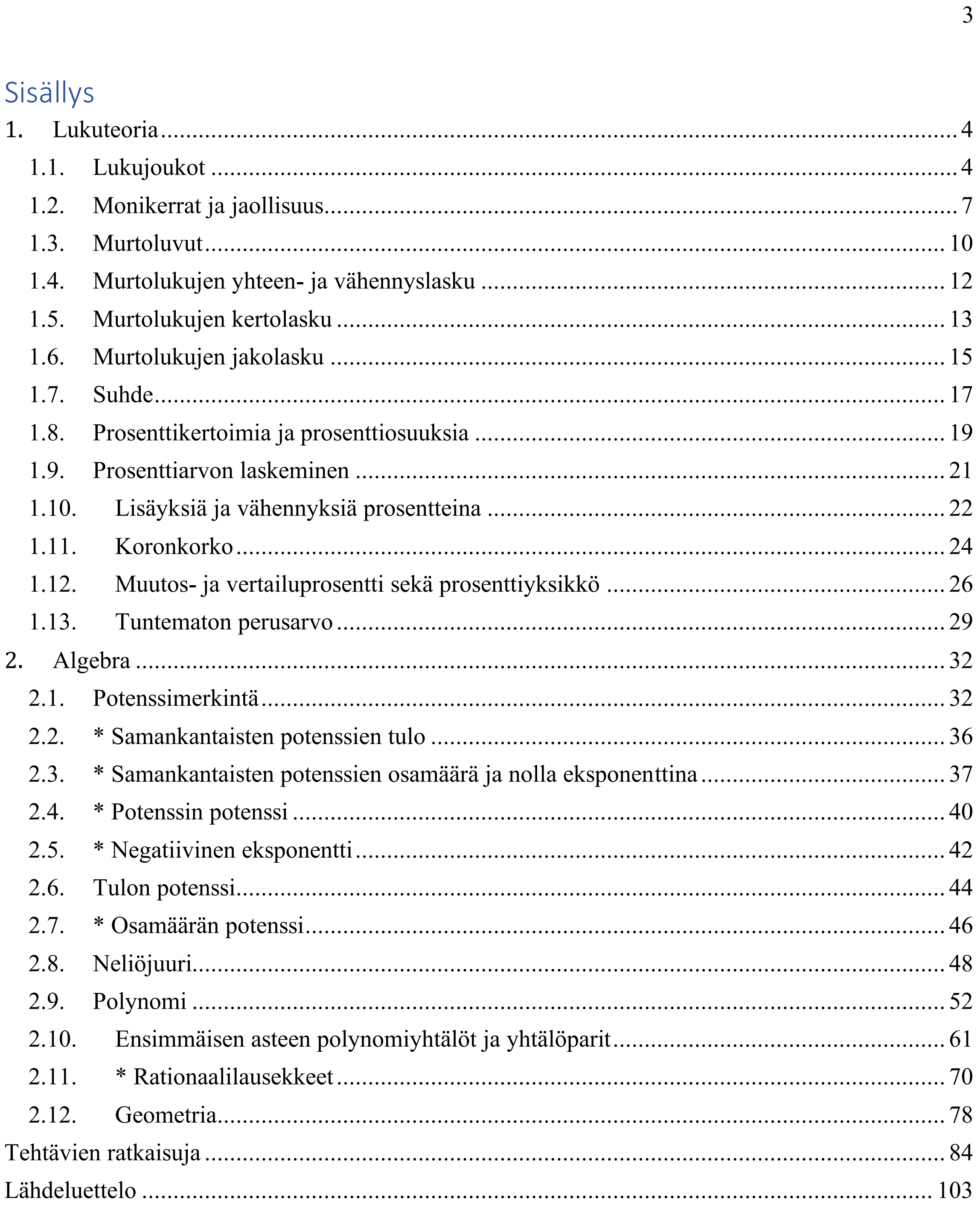
25.2 - 1.3.2019	09.00 - 11.45	12.30 - 15.00
Maanantai (Ykä)	Esittelyt, tutustumiset, lukujoukot sekä suuruusvertailua	Kerto- ja jakolasku, monikerrat ja jaollisuus sekä luvun jakaminen tekijöihin
Tiistai (Ykä)	Murtoluvut	Suhde ja prosentit
Keskiviikko (Robin)	Potenssit	Juuret
Torstai (Robin)	Polynomilausekkeet	Yhtälöt ja yhtälöpari
Perjantai (Robin)	Rationaalilausekkeet	Pelivara ja yhteenveto

Kertauskurssin järjestämisajankohdaksi sovittiin hiihtolomaviikko ja oppituntien aihepiirisisältö valittiin Taulukon 4.1 mukaiseksi. Päivän aikana pidettiin noin 10 minuutin taukoja tunnin välein sekä yksi 45 minuutin ruokailutauko aamu- ja päiväosioiden välissä kello 11.45 - 12.30. Perjantain toinen osuus vietettiin oppilaiden toiveiden mukaisesti: Muutama oppilas halusi pelata Kahootia [11], osa oppilaista halusi kokeilla uusia oppimispelejä sekä loput halusivat käydä läpi aihepiirejä, joita eivät olleet kurssin aikana ehtineet opettelemaan. Taulukon 4.1 päiväyksen vieressä oleva nimi viittaa kyseisen päivämäärän materiaalin päävastuussa olleeseen opettajaan. Oppitunnit järjestettiin oppilaille tutussa ympäristössä eli tavallisessa luokkahuoneessa Tampereen yliopiston normaalikoulun lukion tiloissa. Tilaisuudet pidettiin kiireettöminä, mikä ilmenee esimerkiksi siitä, että tauotukset eivät olleet täsmällisiä tai kotitehtäviä ei ollut. Itsemääräämisteorian mukaan motivoitumisen perusedellytyksenä on vapaaehtoisuus [23] , joka oli kurssin aikana korostettu teema.

Kurssimateriaalina käytettiin Hamdin ja Lähteenmäen laatimia Kahoot-visoja, toiminnallisia aktiviteetteja sekä oppikirjaa. Materiaalin laadinnassa on hyödynnetty peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmia [20, 16], jotka kannustavat oppimispelien hyödyntämiseen opetuksessa, sekä tutkimuksia [22, 29, 10, 3], jotka puoltavat pelillisyyden lisäävän opiskelumotivaatiota. Kuvassa 4.1 on kurssille laaditun oppikirjan kansilehti.

Kuva 4.1 *Oppikirjan kansilehden teemaksi on valittu hiihto, joka on hiihtoloman vuoksi ajankohtainen teema. [18]*

Oppikirjan aihepiirisisältö koostuu peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014) matematiikasta, joskin kirjan tarkoitus ei ollut kokonaan kerrata peruskoulun matematiikkaa. Jatko-opinnoissa esiintyvät matematiikan oppimisvaikeudet johtuvat opetushallituksen raportin mukaan algebran ja lukuteorian heikosta osaamisesta [2], minkä vuoksi näitä aihepiirejä on selvästi painotettu kurssilla ja oppikirjassa. Kirja sisältää myös tähtimerkittyjä (*) osioita, jotka ovat lukion opetussuunnitelman perusteiden (2015) mukaan lukion alussa käytäviä aihepiirejä. Kuvassa 4.2 on kirjan sisällysluettelo.



3

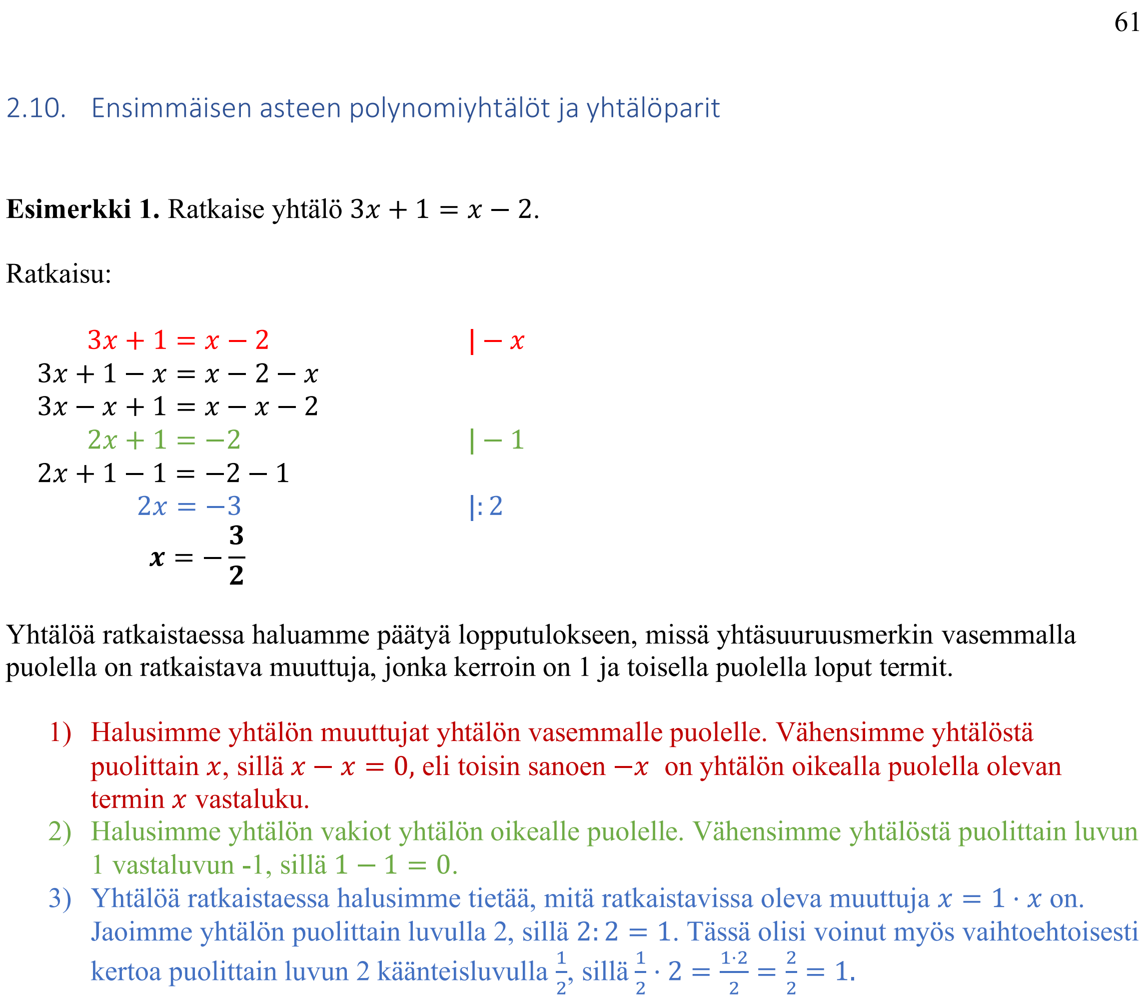
Sisällys

1. Lukuteoria 4
    1.1. Lukujoukot 4
    1.2. Monikerrat ja jaollisuus 7
    1.3. Murtoluvut 10
    1.4. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku 12
    1.5. Murtolukujen kertolasku 13
    1.6. Murtolukujen jakolasku 15
    1.7. Suhde 17
    1.8. Prosenttikertoimia ja prosenttiosuuksia 19
    1.9. Prosenttiarvon laskeminen 21
    1.10. Lisäyksiä ja vähennyksiä prosentteina 22
    1.11. Koronkorko 24
    1.12. Muutos- ja vertailuprosentti sekä prosenttiyksikkö 26
    1.13. Tuntematon perusarvo 29
2. Algebra 32
    2.1. Potenssimerkintä 32
    2.2. * Samankantaisten potenssien tulo 36
    2.3. * Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponenttina 37
    2.4. * Potenssin potenssi 40
    2.5. * Negatiivinen eksponentti 42
    2.6. Tulon potenssi 44
    2.7. * Osamäärän potenssi 46
    2.8. Neliöjuuri 48
    2.9. Polynomi 52
    2.10. Ensimmäisen asteen polynomiyhtälöt ja yhtälöparit 61
    2.11. * Rationaalilausekkeet 70
    2.12. Geometria 78

Tehtävien ratkaisuja 84
Lähdeluettelo 103

Kuva 4.2 *Kertauskurssin oppikirjan aihepiirisisältö.*

Kirjan materiaali noudattaa hyvin perinteistä oppikirjan kaavaa, jossa kunkin luvun aloittaa teoriaosuus. Teoriaosuuden tarkoituksena on auttaa oppilasta sisäistämään aihepiirisisältö. Teoriaosuudet ovat peruskoululle tyypillisesti esimerkkivoittoisia, minkä tarkoituksena on varmistaa oppilaiden suoriutuminen laskutehtävistä. Kuvassa 4.3 on esimerkki kirjan teoriaosuudesta.



2.10. Ensimmäisen asteen polynomiyhtälöt ja yhtälöparit

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $3x + 1 = x - 2$.

Ratkaisu:

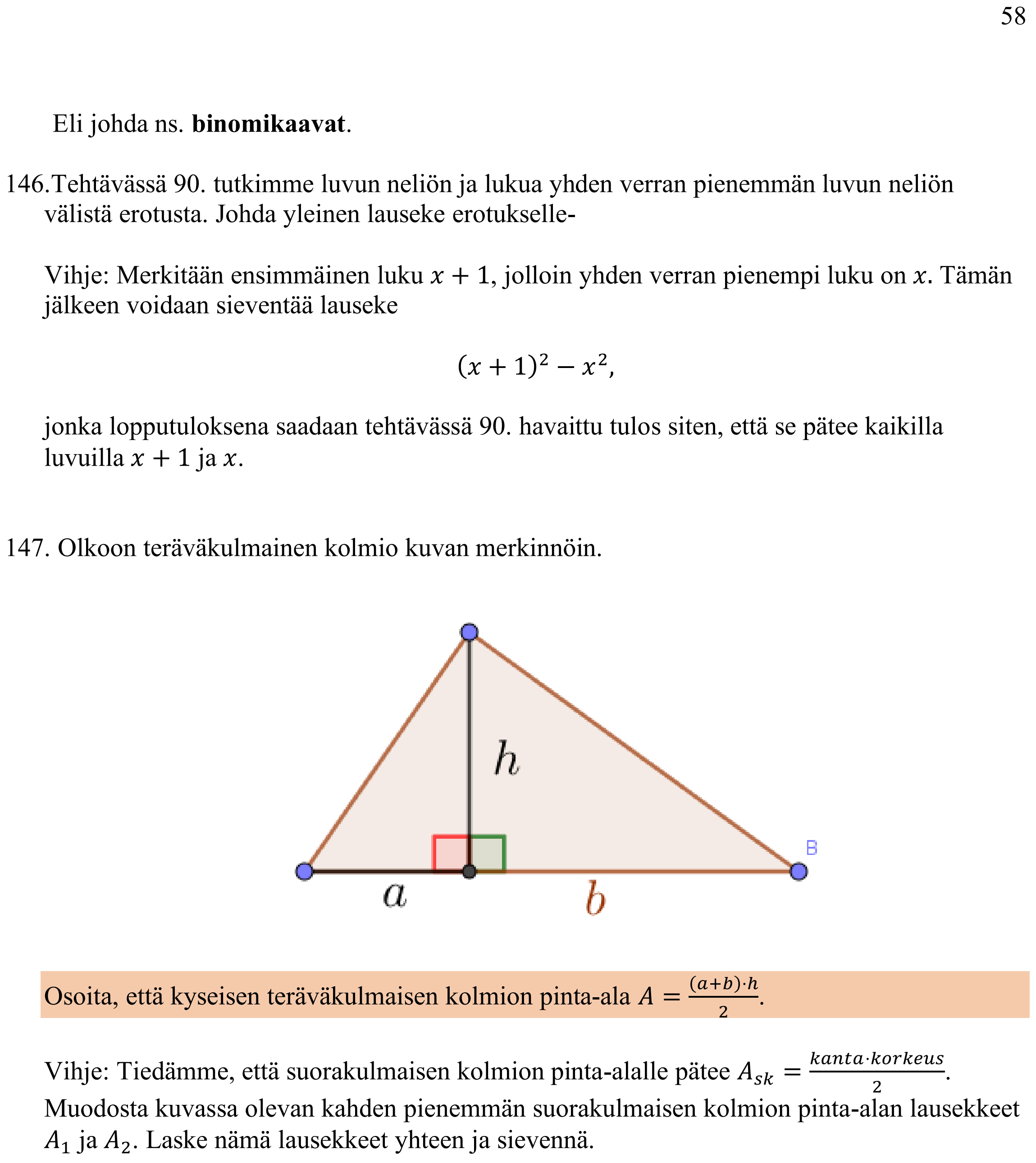
$$\begin{aligned} 3x + 1 &= x - 2 && \mid -x \\ 3x + 1 - x &= x - 2 - x && \\ 3x - x + 1 &= x - x - 2 && \\ 2x + 1 &= -2 && \mid -1 \\ 2x + 1 - 1 &= -2 - 1 && \\ 2x &= -3 && \mid : 2 \\ \boldsymbol{x} &= -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} && \end{aligned}$$

Yhtälöä ratkaistaessa haluamme päätyä lopputulokseen, missä yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on ratkaistava muuttuja, jonka kerroin on 1 ja toisella puolella loput termit.

1) Halusimme yhtälön muuttujat yhtälön vasemmalle puolelle. Vähensimme yhtälöstä puolittain x, sillä $x - x = 0$, eli toisin sanoen $-x$ on yhtälön oikealla puolella olevan termin x vastaluku.
2) Halusimme yhtälön vakiot yhtälön oikealle puolelle. Vähensimme yhtälöstä puolittain luvun 1 vastaluvun -1, sillä $1 - 1 = 0$.
3) Yhtälöä ratkaistaessa halusimme tietää, mitä ratkaistavissa oleva muuttuja $x = 1 \cdot x$ on. Jaoimme yhtälön puolittain luvulla 2, sillä $2 : 2 = 1$. Tässä olisi voinut myös vaihtoehtoisesti kertoa puolittain luvun 2 käänteisluvulla $\frac{1}{2}$, sillä $\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Kuva 4.3 *Oppikirjan luvun Ensimmäisen asteen polynomityhtälöt ja yhtälöparit ensimmäinen sivu.*

Tehtävien vaikeustaso rakennettiin siten, että heikoimmat opiskelijat pystyvät suoriutumaan kunkin kappaleen alkupään tehtävistä. Toisaalta kunkin kappaleen lopussa on myös muutama haastavampi tehtävä osaavammille oppilaille. Oppilaan motivoitumisen kannalta on tärkeää, että oppilas huomaa pystyvänsä suoriutumaan uuden oppikirjan tuomista haasteista. Hyvä suoriutuminen helpoista tehtävistä voi näkyä myös parempana haastavien tehtävien suorittamisena [3]. Kuvassa 4.4 on kirjan *Polynomi* -luvun haastavampia osoitustehtäviä.



58

Eli johda ns. **binomikaavat**.

146.Tehtävässä 90. tutkimme luvun neliön ja lukua yhden verran pienemmän luvun neliön välistä erotusta. Johda yleinen lauseke erotukselle-

Vihje: Merkitään ensimmäinen luku $x + 1$, jolloin yhden verran pienempi luku on x. Tämän jälkeen voidaan sieventää lauseke

$$(x + 1)^2 - x^2,$$

jonka lopputuloksena saadaan tehtävässä 90. havaittu tulos siten, että se pätee kaikilla luvuilla $x + 1$ ja x.

147. Olkoon teräväkulmainen kolmio kuvan merkinnöin.

Osoita, että kyseisen teräväkulmaisen kolmion pinta-ala $A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

Vihje: Tiedämme, että suorakulmaisen kolmion pinta-alalle pätee $A_{sk} = \frac{kanta \cdot korkeus}{2}$. Muodosta kuvassa olevan kahden pienemmän suorakulmaisen kolmion pinta-alan lausekkeet A_1 ja A_2. Laske nämä lausekkeet yhteen ja sievennä.

Kuva 4.4 *Kappaleen Polynomi toinen tehtäväsivu, jonka tehtäviä voidaan pitää kyseisen kappaleen haastavimpina tehtävinä yhdeksäsluokkalaisen näkökulmasta.*

Oppikirja suunniteltiin ensisijaisesti peruskoulun matematiikan kertaamiseen, mutta Kuvan 4.4 tehtävät ovat esimerkki siitä, että kurssin tarkoitus oli myös madaltaa jatko-opintoihin liittyvää kynnystä. Kuvassa 4.4 olleen tehtävän 147. tarkoitus oli myös integroida peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaista geometriaa polynomilaskentaan. Kuvassa 4.5 on esimerkki siitä, millaisia kurssin Kahoot-visa -tehtävät olivat.

Jäätelötuutti on suora ympyräkartio. Mikä sen tilavuus on?

▲ $V=\pi r^2h$

◆ $V=1/2\pi r^2h$

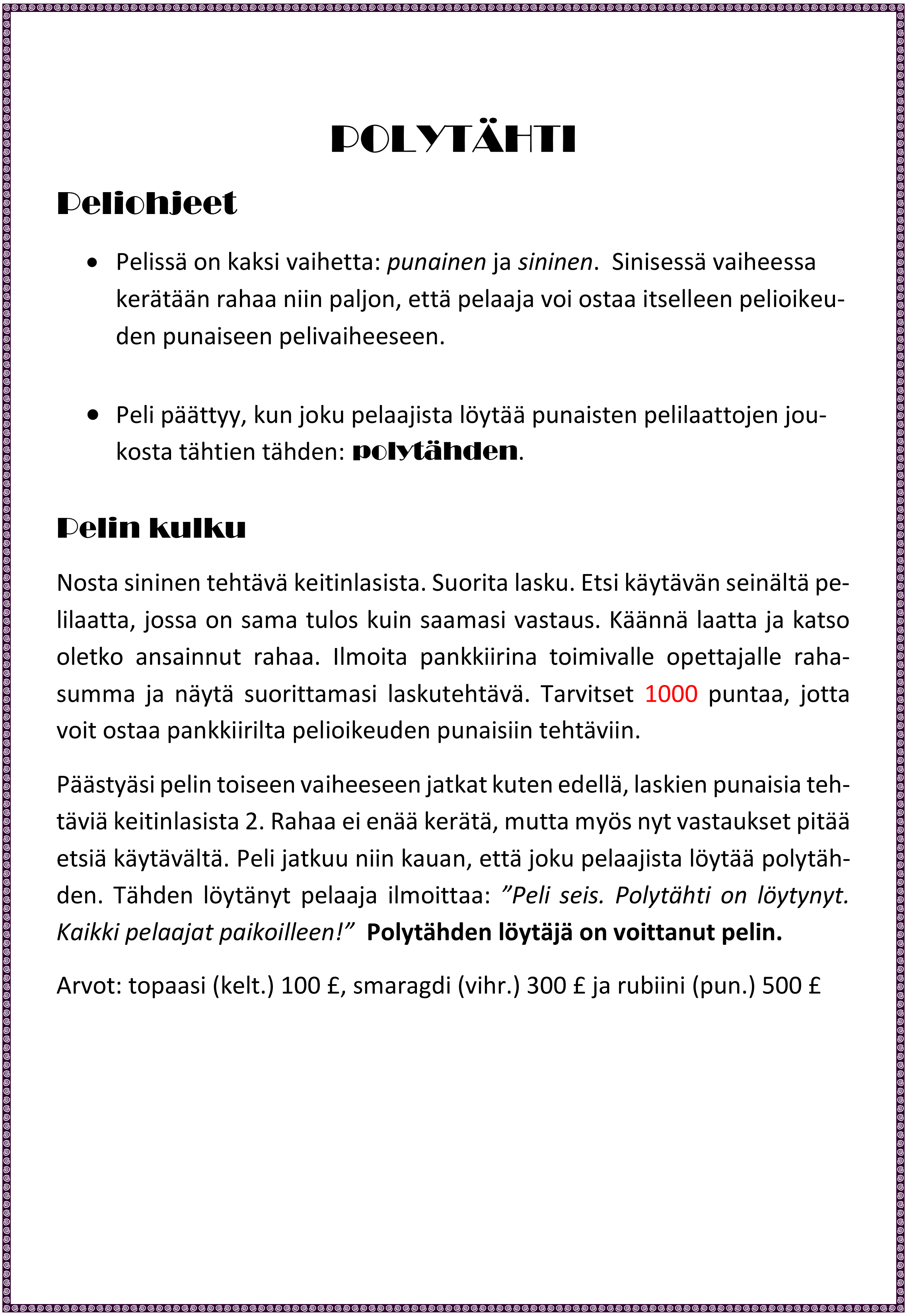
● $V=1/3\pi r^2h$

■ $V=\pi rh^3$

Kuva 4.5 *Lopputasotestin kymmenes kysymys. Testi suoritettiin Kahoot-visana.[21, 11]*

Kurssilla järjestettiin Kahoot-visoja, joiden suorittamiseen kului aikaa noin 5-15 minuuttia visaa kohden. Kahoot-visoja käytettiin pääosin kertauksena oppituntien alussa sekä myös oppilaiden osaamisen kartoittamiseen, sillä Kahootilla pystyi seuraamaan oppilaiden vastauksia. Kahootin pelillisten elementtien avulla yritettiin motivoida oppilaita [22, 29, 10].

Kurssilla järjestettiin oppimispelejä, joiden tarkoitus oli Kahootin tapaan saada oppilaat motivoitumaan matematiikkaan. Kuvassa 4.6 on polynomiaiheisen Afrikan tähti -pelin ohjeistus.



POLYTÄHTI

Peliohjeet

- Pelissä on kaksi vaihetta: *punainen* ja *sininen*. Sinisessä vaiheessa kerätään rahaa niin paljon, että pelaaja voi ostaa itselleen pelioikeuden punaiseen pelivaiheeseen.

- Peli päättyy, kun joku pelaajista löytää punaisten pelilaattojen joukosta tähtien tähden: **polytähden**.

Pelin kulku

Nosta sininen tehtävä keitinlasista. Suorita lasku. Etsi käytävän seinältä pelilaatta, jossa on sama tulos kuin saamasi vastaus. Käännä laatta ja katso oletko ansainnut rahaa. Ilmoita pankkiirina toimivalle opettajalle rahasumma ja näytä suorittamasi laskutehtävä. Tarvitset 1000 puntaa, jotta voit ostaa pankkiirilta pelioikeuden punaisiin tehtäviin.

Päästyäsi pelin toiseen vaiheeseen jatkat kuten edellä, laskien punaisia tehtäviä keitinlasista 2. Rahaa ei enää kerätä, mutta myös nyt vastaukset pitää etsiä käytävältä. Peli jatkuu niin kauan, että joku pelaajista löytää polytähden. Tähden löytänyt pelaaja ilmoittaa: *”Peli seis. Polytähti on löytynyt. Kaikki pelaajat paikoilleen!”* **Polytähden löytäjä on voittanut pelin.**

Arvot: topaasi (kelt.) 100 £, smaragdi (vihr.) 300 £ ja rubiini (pun.) 500 £

Kuva 4.6 *Alkuperäisestä murtotähdestä muokattu polynomiaiheinen Afrikan tähti -peli.*

Vastaavalla 4.6 konseptilla pelattavia matematiikka-aiheisia pelejä luotiin oppilaiden pyynnöstä alkuperäisen murtotähden ja muokatun polytähden lisäksi myös potensseista ja neliöjuurista. Konsepti säilyi muuten samana, mutta laskut vaihdettiin aihepiirin mukaan. Pelit sisälsivät pelinomaisia piirteitä, kuten pisteytys, kilpailullisuus, roolit, satunnaisuus sekä tavoitteellisuus [29]. Kahootin tapaan oppilaiden oppimista pystyi pelien aikana seuraamaan aktiivisesti, joskin se oli hieman hankalampaa johtuen pelien satunnaisuudesta sekä vastausten tallentumattomuudesta.

5 Kehittämistutkimuksen menetelmä ja tulokset

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tutkimusmenetelmä sekä vastataan tutkimuskysymyksiin oppilaiden ja asiantuntijoiden palautteiden perusteella. Kehittämistutkimus koostui kahdesta syklistä, joista ensimmäisessä analysoitiin oppilaiden palaute koko kurssiin liittyen. Toisessa syklissä selvitettiin opettajien näkemys kurssille laaditusta oppikirjasta kyselylomakkeen avulla ja kehitettiin kirjaa tämän perusteella. Vastaajat ovat anonymiteetin vuoksi numeroituja.

5.1 Tutkimusmenetelmä

Tutkimuksessa käytettiin useita eri aineistoja, mistä voidaan käyttää nimitystä *aineistotriangulaatio* [24]. Tutkimuksessa kerätty aineisto on tiivistetty Taulukkoon 5.1.

Taulukko 5.1 *Kooste tutkimuksen toteutuksesta.*

	Aineisto	Tavoite
Sykli 1 (oppilaat)	Alkukysely, lähtö- ja lopputasotesti, loppukysely sekä oppilaiden suullinen palaute	Tutkimuskysymykset 1-3
Sykli 2 (opettajat)	Oppikirjan arviointilomake	Tutkimuskysymys 3

Kurssin alussa järjestettiin lähtötasotesti, jonka tuloksia verrattiin kurssin lopussa järjestettyyn vastaavaan lopputasotestiin. Testit järjestettiin Kahootilla ja ne sisälsivät 16 monivalintakysymystä (1-4). Testien aihepiirit olivat pääosin kurssilla käytyjä asioita, mutta sisälsivät myös aihepiirisisältöjä, joita ei kurssin aikana ehditty käymään. Testien avulla pyrittiin selvittämään, millä tavoin kertauskurssi vaikutti osallistujien matematiikan osaamiseen. Lähtö- ja lopputasotesteihin osallistui 10 oppilasta.

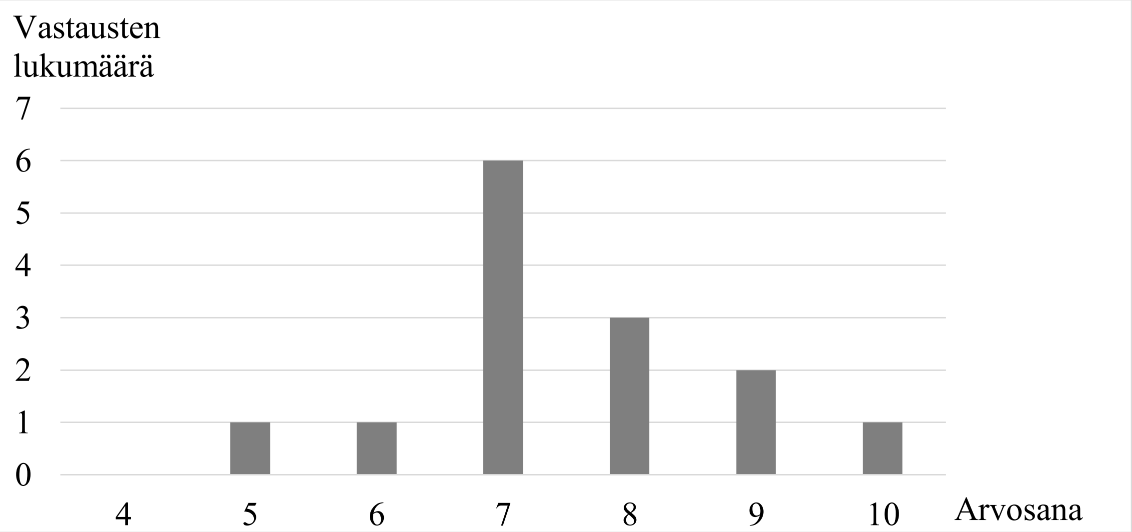
Oppilaat tekivät kurssin alussa alkukyselyn, jonka avulla selvitettiin, millaisena yhdeksäsluokkalainen kokee kertauskurssin kurssin alussa. Alkukysely sisälsi neljä avointa kysymystä. Alkukyselyyn vastanneita oppilaita oli 14. Lisäksi kurssin lopussa järjestettiin laajempi loppukysely, joka sisälsi 20 Likert-asteikollista (1-5) ja viisi avointa kysymystä. Loppukyselyllä selvitettiin, millä tavoin kertauskurssi vaikutti osallistujien matematiikan motivaatioon ja osaamiseen sekä miten kurssille laadittua materiaalia voisi kehittää. Loppukyselyyn vastasi 13 oppilasta.

Oppilailta kerättiin myös suullista palautetta, joiden avulla selvitettiin vastausta kaikkiin tutkimuskysymyksiin. Suullista palautetta ei kerätty yhtä järjestelmällisesti kuin edellä mainittuja palautteita, vaan palaute kertyi oppilaiden huomautuksista sekä keskusteluista oppilaiden kanssa.

Kurssin jälkeen laadittu oppikirja lähetettiin kolmen asiantuntijan arvioitavaksi. Asiantuntijat vastasivat oppikirjan arviointilomakkeella, joka sisälsi 11 Likert-asteikollista (1-5) ja neljä avointa kysymystä. Sekä opettajien arviointilomakkeen että oppilaiden palautteen avulla oppikirjan kehityskohteet havaittiin ja kurssia parannettiin.

5.2 Kertauskurssin vaikutus oppilaiden matematiikan osaamiseen

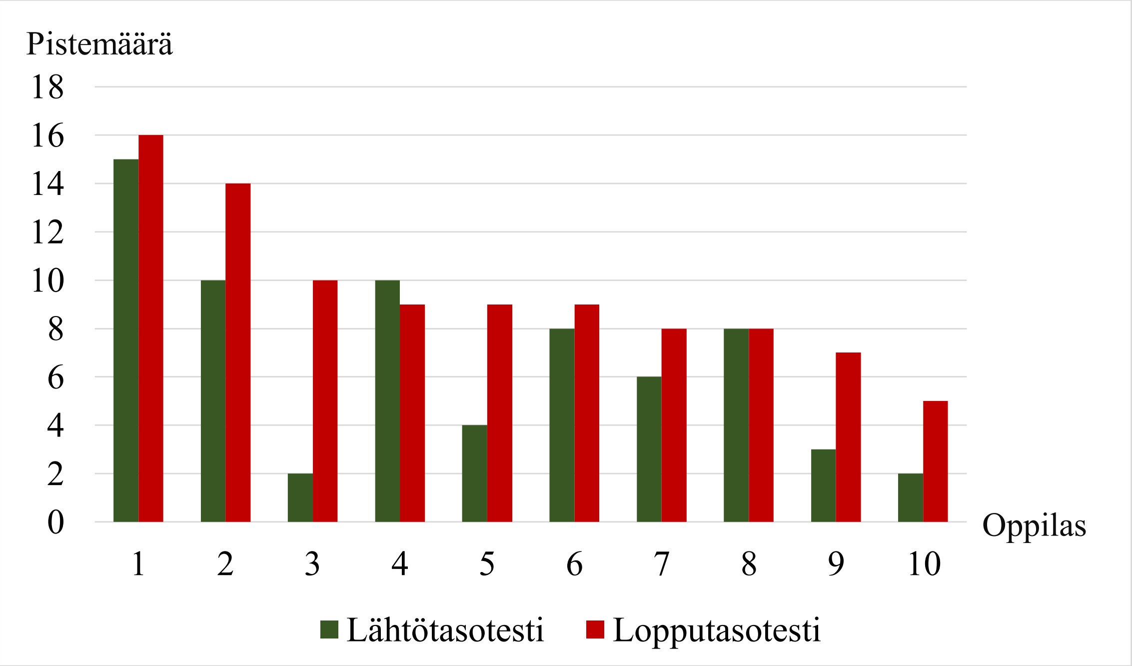
Kurssin osallistujien viimeisimmän todistuksen matematiikan arvosanat esitetään Kuvassa 5.1. Arvosanajakauma on kerätty 14:ltä oppilaalta kurssiosallistumisen yhteydessä.



Kuva 5.1 *Oppilaiden viimeisimmän todistuksen matematiikan arvosanajakauma.*

Arvosanajakauman moodi on arvosana 7 ja aritmeettinen keskiarvo on $7,5$. Arvosanajakauman perusteella ryhmä oli osaamiseltaan heterogeeninen ja tasoltaan tyydyttävää (arvosana 7) keskimäärin osaavampi.

Kurssin aikana suoritettujen alku- ja lopputasotestien tulokset esitetään Kuvassa 5.2. Oppilaat on anonymiteetin vuoksi numeroitu vaaka-akselille yhdestä kymmeneen.



Kuva 5.2 *Lähtö- ja lopputasotestien tulokset. Testeissä oli 16 kysymystä, joista sai yhden pisteen oikeasta vastauksesta ja nolla pistettä väärästä vastauksesta.*

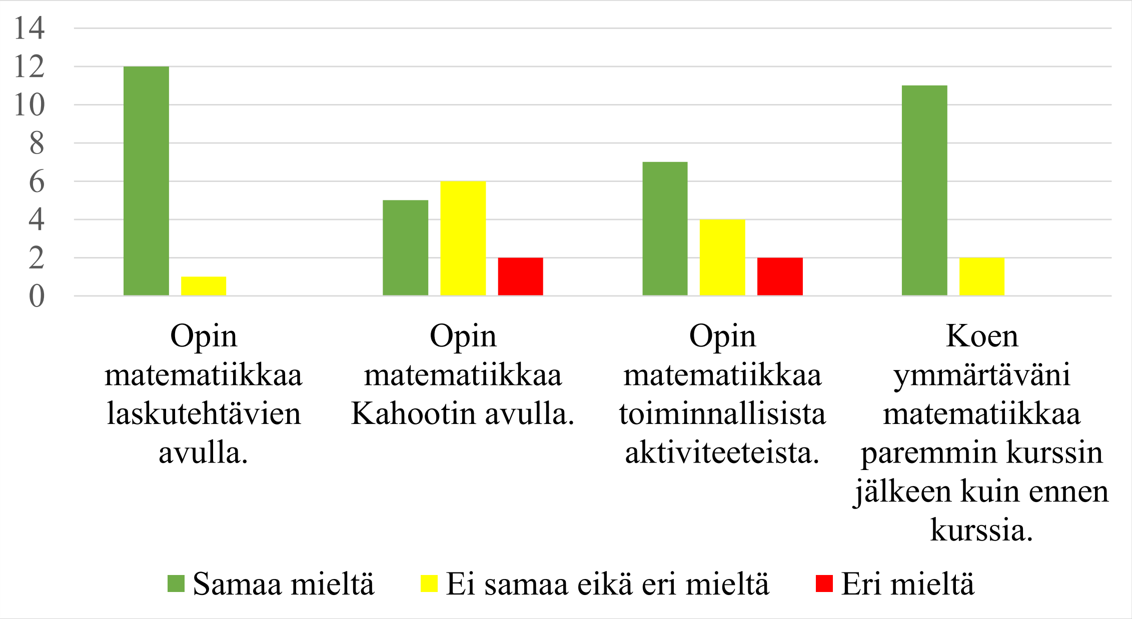
Kahdeksan oppilasta suoriutui lopputasotestistä paremmin kuin alkutasotestistä, yhden oppilaan suorituksissa ei ollut muutosta ja yksi oppilaista suoriutui heikommin lopputasotestissä.

Studentin t-testi on yksi tehokkaimmista testeistä kahden toisistaan riippumattoman otoksen vertailuun. T-testin luotettavuuden edellytyksenä ovat iso otoskoko ja aineiston normaalijakautuneisuus. T-testin sijaan voidaan käyttää Wilcoxonin järjestyslukutestiä, joka on yksi tehokkaimmista jakaumasta riippumattomista testeistä. Wilcoxonin testissä ei tarvitse olettaa aineiston normaalijakautuneisuutta eikä otoskoon tarvitse olla suuri, minkä vuoksi Wilcoxonin testin käyttö t-testin sijaan on perusteltua Kuvan 5.2 aineiston analysoimessa. [12] Lähtö- ja lopputasotestien keskiarvot sekä Wilcoxonin testin p-arvo on koottu Taulukoon 5.2.

Taulukko 5.2 *Lähtö- ja lopputasotestien oikeiden vastausten lukumäärän keskiarvo sekä Wilcoxon testin p-arvo.*

Lähtötasotestin keskiarvo	Lopputasotestin keskiarvo	p-arvo
$6,8$	$9,5$	$0,015$

Aineiston nollahypoteesinä pidetään tulosta, jonka mukaan oppilaiden matematiikan osaamisessa ei tapahtunut muutosta. Wilcoxonin testin p-arvo on tunnusluku, jonka suuruus vastaa nollahypoteesin voimakkuutta. Kuvan 5.2 aineiston Wilcoxonin testin p-arvo $0,015$ on merkittävästi pienempi kuin nollahypoteesin rajana pidetty $0,05$, minkä vuoksi nollahypoteesi voidaan hylätä [4]. Taulukon 5.2 perusteella oppilaiden matematiikan osaaminen parantui kurssin aikana merkittävästi, mitä voidaan pitää luotettavana testituloksena $p-$arvon perusteella. Kuvassa 5.3 on loppukyselyn Likert-asteikollisien kysymyksien oppimiseen liittyvä tutkimusaineisto.



Kuva 5.3 *Loppukyselyn matematiikan osaamiseen liittyvät Likert-asteikolliset kysymykset.*

Kuvan 5.3 perusteella oppilaista selvä enemmistö kokee kurssin vaikuttaneen positiivisesti heidän matematiikan osaamiseen, ja suurin vaikuttava tekijä on ollut kurssin aikana lasketut laskutehtävät. Kahoot-visoja ja toiminnallisia aktiviteetteja ei pidetty oppimisen kannalta yhtä merkittävinä kuin laskutehtäviä, mutta toiminnallisia aktiviteetteja pidettiin osaamisen kannalta tärkeämpänä kuin Kahoot-visoja. Taulukkoon 5.3 on teemoiltetu vastaukset avoimeen kysymykseen: "Mitä opit kurssilla?"

Taulukko 5.3 *Oppilaiden loppukyselyn teemoitellut vastaukset kysymykseen: "Mitä opit kurssilla?"*

Teema	Frekvenssi	Esimerkkisitaatti
Yksittäinen aihe	6	"Opin suhteiden käsittelyä." (oppilas 12)
Vanhat aiheet	4	"Kurssilla ei ollut paljoa uutta asiaa, mutta tehtävät olivat hyviä." (oppilas 12)
Koko kurssisisältö	3	"no kaikki mitä käytiin läpi" (oppilas 4)

Yksittäinen aihe -teeman oppilaat nimesivät yhden tai useamman kurssin aikana opitun aiheen. Yksittäisistä aiheista suhde esiintyi eniten oppilaiden vastauksissa.

Vanhat aiheet -teeman oppilaat tunnistivat kurssilla käydyn matematiikan yläkoulun kertaavaksi. *Koko kurssisisältö* -teeman oppilaat kertoivat, että oppivat koko kurssisisällön. Jokaisen teeman vastaukset olivat oppimisen kannalta positiivisia.

Suullisen palautteen perusteella muutama opiskelija tunnisti prosenttilaskennan ja suhteen vanhan kertaamiseksi, mutta kokivat näiden harjoittelemisen olleen paikallaan, sillä laskurutiinia näistä aiheista ei ollut. Eräs oppilas ihmetteli polynomien sieventämisen 3.1.1 yksinkertaisuutta, vaikka oli aiemmin kokenut polynomit hyvin vaikeaksi. Yleisesti oppilaiden suullisesta palautteesta havaittiin, että oppilaiden matematiikan osaamisen taso oli kehittynyt paremmin kuin he osasivat itse odottaa.

5.3 Kertauskurssin vaikutus oppilaiden matematiikan motivaatioon

Oppilailta kysyttiin alkukyselyn toisena kysymyksenä, miksi he ovat osallistuneet kurssille. Tämän kysymyksen teemoitellut vastaukset ovat Taulukossa 5.4.

Taulukko 5.4 *Alkukyselyn oppilaiden vastaukset kysymykseen: "Miksi olet kurssilla?"*

Teema	Frekvenssi	Esimerkkisitaatti
Matematiikan osaaminen	9	"Oppimassa paremmin matikkaa" (oppilas 2)
Vanhemmat	5	"faija laitto" (oppilas 7)

Suurin osa vastaajista ilmoitti kurssille osallistumissyyksi matemaattisten taitojensa kehittämisen. Viiden vastaajan vanhemmat olivat heidät kurssille pakottaneet, minkä vuoksi itsemääräämisteorian nojalla näiden viiden opiskelijan motivoiminen olisi haastavaa.

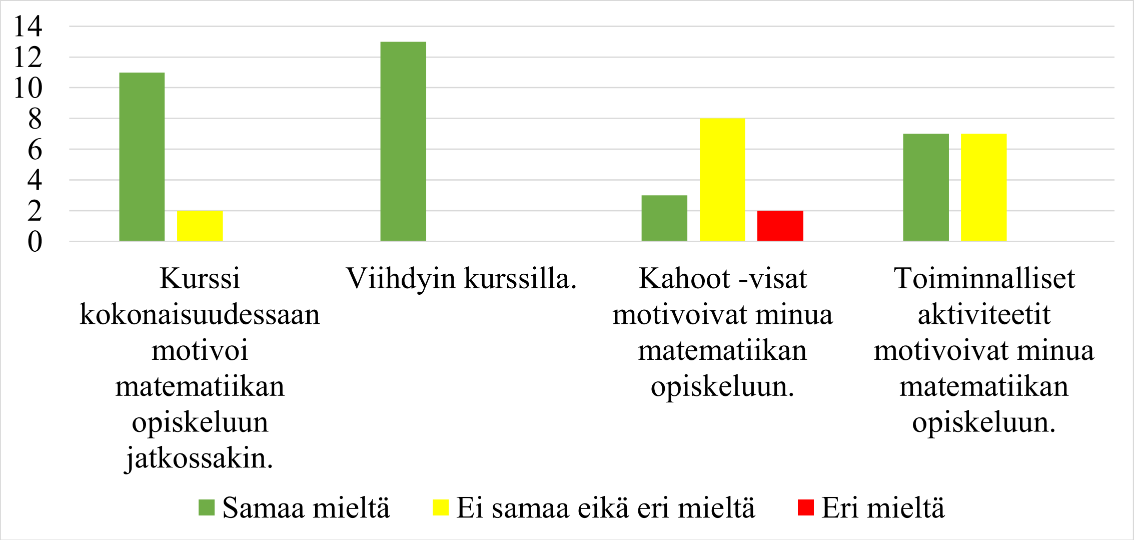
Alkukyselyn kolmannen kysymyksen avulla selvitettiin oppilaiden näkemyksiä matematiikasta. Kolmannen kysymyksen vastaukset on teemoiteltu Taulukkoon 5.5.

Taulukko 5.5 *Oppilaiden vastaukset kysymykseen: "Mikä on mielipiteesi matematiikasta?"*

Teema	Frekvenssi	Esimerkkisitaatti
Kiinnostuksen puute	6	"Ei osaa, ei jaksa, ei kiinnosta" (oppilas 1)
Neutraalit ilmaisut	4	"ei ole lempiaineeni, mutta olisi kivempi osata sitä" (oppilas 3)
Mielenkiintoisuus	4	"tykkään matikasta." (oppilas 6)

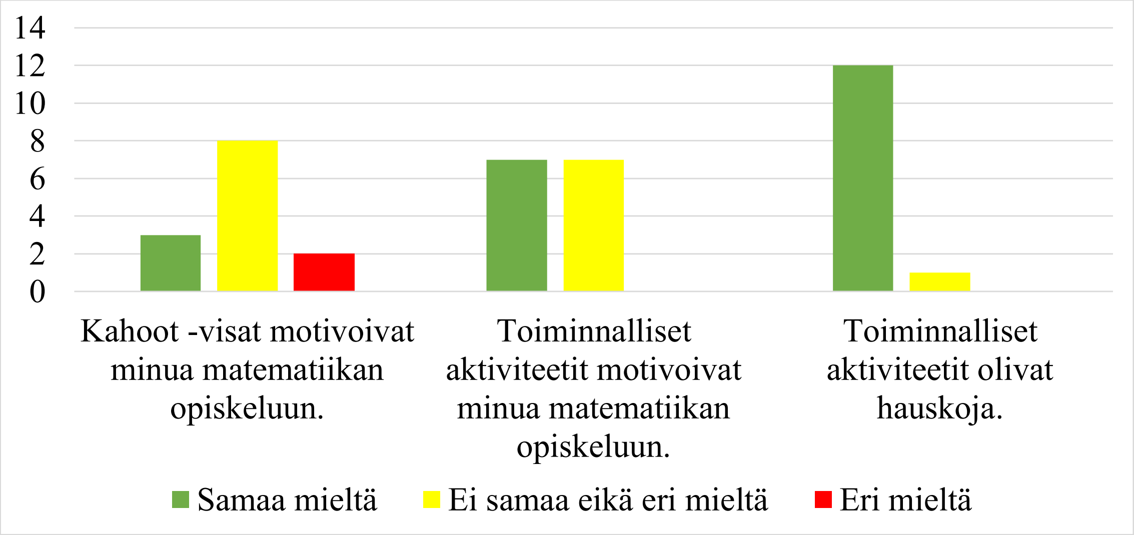
Teemojen *Kiinnostuksen puute* ja *Neutraalit ilmaisut* -vastaajia yhdistää se, että heidän minäkäsityksen mukaan heidän matematiikan taidot ovat puutteellisia. Odotusarvoteorian mukaan näillä oppilailla on ongelmia motivoitua kurssin matematiikkaan. Näiden teemojen mukaisesti vastanneiden ero on siinä, että *Neutraalit ilmaisut* -oppilas haluaa kehittää matematiikan osaamistaan *Kiinnostuksen puute* -oppilaasta poiketen. Teeman *Mielenkiintoisuus* -oppilas on kiinnostunut matematiikasta ja haluaa oppia matematiikkaa.

Kuvaan 5.4 on kerätty loppukyselyn Likert-asteikolliset kysymykset kurssin kokonaiskuvasta, joiden oletetaan riippuvan oppilaan motivaatiosta.



Kuva 5.4 *Loppukyselyn Likert-asteikolliset kysymykset kurssin kokonaiskuvasta. Tarkasteltavana on kokonaiskuva motivaation kannalta.*

Kaikki vastaajat kokivat kurssin viihdyttävänä, ja kurssilla oli vastausten perusteella positiivinen vaikutus oppilaiden matematiikan motivaatioon. Kurssin oppituntien välisiä tauotuksia voidaan ainakin määrällisesti pitää sopivina. Kurssilla opetettavien aihepiirien opetustahti jakoi mielipiteitä. Kuvaan 5.5 on kerätty loppukyselystä Likert-asteikollisia kysymyksiä, jotka vastaavat oppilaiden näkemykseen pelillisyyden hyödyntämisestä motivoinnissa.



Kuva 5.5 *Loppukyselyn Likert-asteikolliset kysymykset kurssin pelillisyydestä.*

Yhtä vastaajaa lukuunottamatta kaikki oppilaat kokivat toiminnalliset aktiviteetit viihdyttäviksi, joka oli pelillisyysteorian mukaan odotettu tulos. Myönteisten vastausten lukumäärä väheni, kun oppilailta kysyttiin toiminnallisten aktiviteettien vaikutusta heidän motivaatioonsa. Motivaation kannalta toiminnalliset aktiviteetit koettiin Kahoot-visoja hyödyllisemmiksi.

Taulukkoon 5.6 on teemoiteltu oppilaiden vastaukset kysymykseen: "Mikä oli kurssilla parasta ja mikä huonointa?" Vastausten avulla täydennetään aiemmin tutkittuja Likert-asteikollisten kysymyksien vastauksia.

Taulukko 5.6 *Oppilaiden vastaukset loppukyselyn avoimeen kysymykseen: "Mikä oli kurssilla parasta ja mikä huonointa?"*

Teema	Frekvenssi	Esimerkkisitaatti
Kahoot	5	"Kahootit oli parasta" (oppilas 4)
Matematiikan laskutehtävät	3	"Parasta oli vaikeat tehtävät" (oppilas 12)
Toiminnalliset aktiviteetit	3	"parasta oli tauot ja kaikki tähtipelit" (oppilas 1)
Oppimisympäristö	3	"Parasta oli rento työympäristö. Tunnit voisivat olla pidempiä." (oppilas 5)

Oppilaat sisällyttivät vastauksiinsa kurssin parhaan asian, mutta kukaan ei nimennyt kurssilta huonointa asiaa. Teemoihin *Matematiikan laskutehtävät*, *Toiminnalliset aktiviteetit* tai *Oppimisympäristö* luokiteltiin kolmen eri oppilaan vastaukset. Aiempiin Likert-asteikollisiin vastauksiin 5.3 ja 5.4 verrattuna teema *Kahoot* esiintyi esimerkiksi teemaa *Toiminnalliset aktiviteetit* enemmän.

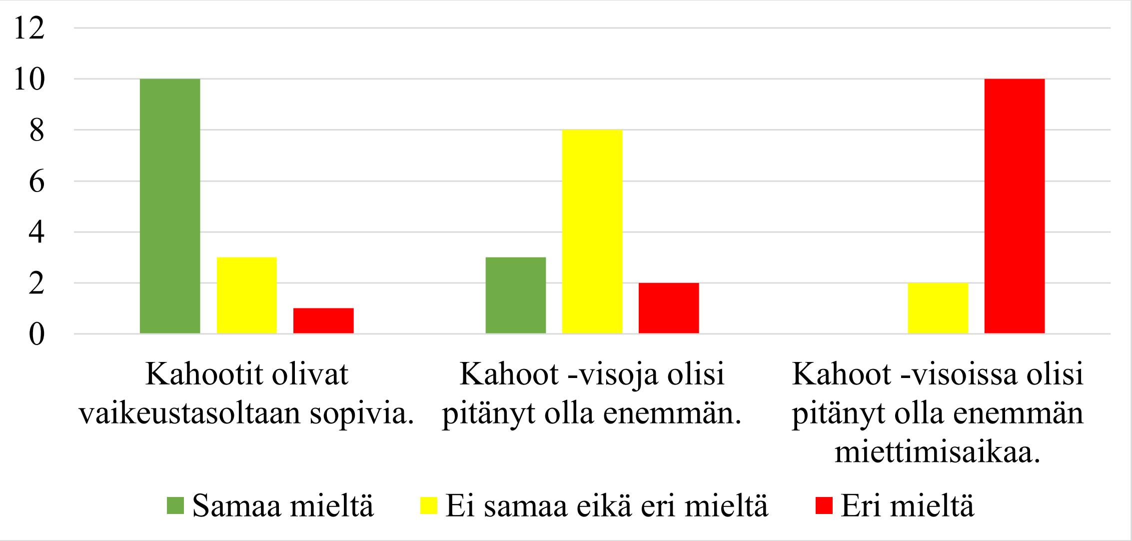
Kurssin aikana havaittiin, että erityisesti lahjakkaammat oppilaat motivoituivat haastavista laskutehtävistä. Osaavammat oppilaat saattoivat esimerkiksi jättää taukoja käyttämättä, kun jokin haastava laskutehtävä oli keskeneräinen. Toisaalta heikoimmat opiskelijat vaikuttivat motivoituvan toiminnallisista aktiviteeteista ja Ka-hoot-visoista.

5.4 Kehitysehdotukset kurssimateriaalille

Luvussa 5.4.1 tarkastellaan oppilaiden antama palaute kurssin materiaalista. Vastaavasti luvussa 5.4.2 käydään läpi asiantuntijoiden antama palaute kurssille laaditusta oppikirjasta.

5.4.1 Sykli 1: Oppilaiden palaute materiaalista

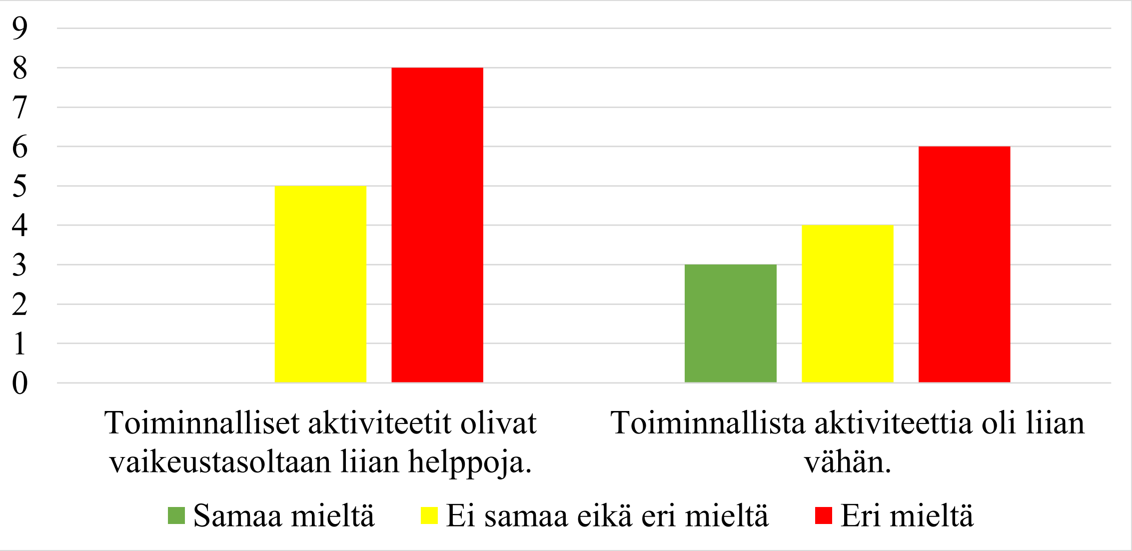
Kuvaan 5.6 on kerätty loppukyselyn Likert-asteikollisten kysymyksien vastaukset Kahoot-visojen parantamiseen liittyen.



Kuva 5.6 *Loppukyselyn Likert-asteikollisten kysymyksien vastaukset Kahoot-visojen kehittämisestä.*

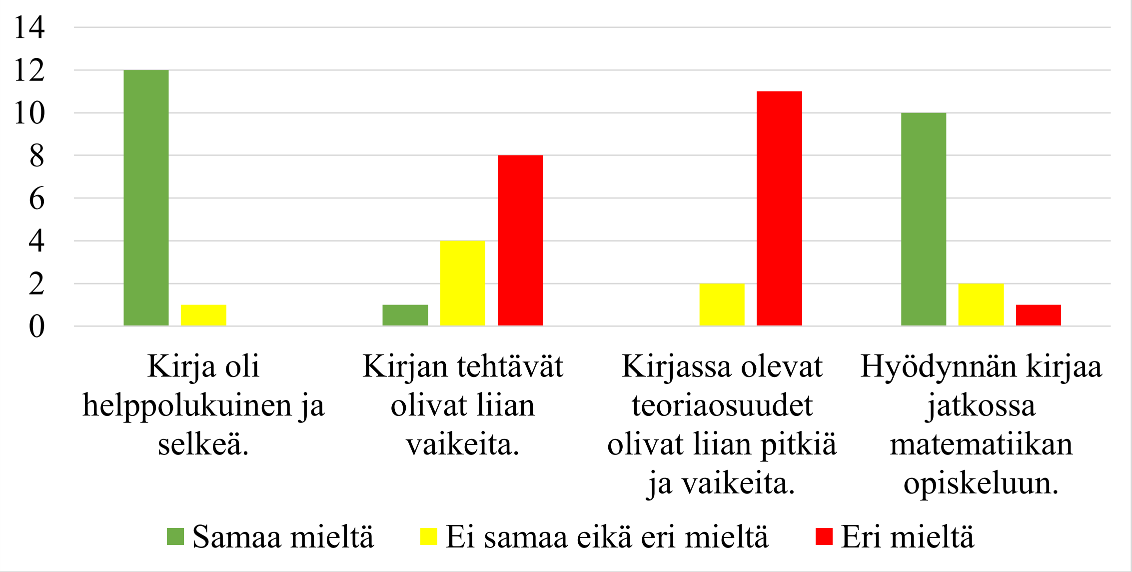
10 vastanneista piti Kahoot-visoja vaikeustasoltaan sopivina ja kolme vastaajaa ei ollut samaa eikä eri mieltä. Vastausten perusteella ei voida sanoa, olisivatko nämä kolme oppilasta halunneet vaikeampia vai helpompia visoja. 10 vastanneista oli sitä mieltä, että Kahoot-visojen miettimisaikaa ei tulisi kasvattaa. Toisaalta yksi vastanneista olisi toivonut enemmän miettimisaikaa ja kaksi vastanneista ei osannut sanoa. Vastanneista kolme toivoi Kahoot-visoja enemmän, toisaalta kaksi vastanneista toivoi niitä vähemmän. Loput kahdeksan eivät ottaneet kantaa Kahoot-visojen

määrään. Kuvaan 5.7 on kerätty loppukyselyn Likert-asteikollisten kysymyksien vastaukset toiminnallisten aktiviteettien parantamiseen liittyen.



Kuva 5.7 *Loppukyselyn Likert-asteikollisten kysymyksien vastaukset toiminnallisten aktiviteettien kehittämisestä.*

Palautteen perusteella toiminnalliset aktiviteetit eivät olleet helppoja eikä niitä ollut määrällisesti liian vähän. Kuvaan 5.8 on kerätty loppukyselyn Likert-asteikollisten kysymyksien vastaukset kurssille laaditun oppikirjan kehittämiseen liittyen.



Kuva 5.8 *Loppukyselyn Likert-asteikollisten kysymyksien vastaukset kurssille laaditun oppikirjan kehittämisestä.*

Palautteen perusteella kirja oli esitysasultaan selkeä ja siinä ei ollut yhdeksäsluokkalaisen mielestä liian paljon vaikeaa teoriaa. Kirjan tehtävät eivät olleet enemmistön mielestä liian vaikeita. Yleisestikin oppilaat pitivät kirjaa käyttökelpoisena myös tulevaisuudessa, sillä yksi vastanneista ei käyttäisi kirjaa jatkossa. Taulukossa 5.7 on teemoiteltu oppilaiden kurssin kehittämiseen liittyvät ehdotukset.

Taulukko 5.7 *Oppilaiden vastaukset kysymykseen: "Mitä kurssissa pitäisi muuttaa?"*

Teema	Frekvenssi	Esimerkkisitaatti
Ei kehitettävää	8	"KAIKKI ON OK, EI TARVITSE MUUTTAA MITÄÄN" (oppilas 6)
Toiminnalliset aktiviteetit	3	"Vaikeustasoissa oli vähän liian jyrkkää vaihtelua. esim. tähtipelit oli ok ja domino oli todella vaikea" (oppilas 13)

Kahdeksan vastaajan mielestä kurssi tulisi järjestää tulevaisuudessa juuri tällaisenaan. Kolmen vastaajan mielestä kurssin toiminnalliset aktiviteetit kaipasivat kehittämistä. Erään vastaajan mielestä oppimispelien vaikeustason suhteen tulisi olla huolellisempi ja toisen vastaajan mielestä näitä oppimispelejä olisi voinut olla enemmän.

Oppilaat huomauttivat keskustelujen yhteydessä, että kurssille laadittu oppikirja olisi pitänyt nitoa. Lisäksi kurssille laaditussa oppikirjassa oli virheitä lasku- ja teoriaosuuksissa. Yksi kirjan sivuista ei myöskään mahtunut tulostettuun versioon.

5.4.2 Sykli 2: Asiantuntijoiden palaute oppikirjasta

Taulukkoon 5.8 on kerätty asiantuntijoiden antama Likert-asteikollinen palaute kurssille laaditusta oppikirjasta.

Taulukko 5.8 *Asiantuntijoiden Likert-asteikollinen palaute oppikirjasta.*

Väittämä	Samaa mieltä	Ei samaa eikä eri mieltä	Eri mieltä
Kirjan vaikeustaso on liian vaikea.	2	0	1
Kirjan teoriaosuudet ovat liian pitkiä.	1	1	1
Kirja innostaa opiskelemaan matematiikkaa jatkossakin.	0	0	3
Kirjan tehtävät ovat monipuolisia.	2	1	0
Teoriaosuudet tukevat hyvin laskutehtävien tekemistä.	3	0	0
Laskutehtävät ovat liian vaikeita.	2	0	1
Teoria on hyvin kohdennettu yhdeksäsluokkalaisille.	1	0	2
Teoriaosuudet ovat liian suppeita.	0	0	3
Kirja on visuaalisesti miellyttävä.	1	1	1
Kirjaan on valittu kertauksen kannalta oleelliset aihepiirit.	1	0	2
Kirja on helppolukuinen ja selkeä.	2	0	1

Asiantuntijat olivat yksimielisesti sitä mieltä, että kirja ei innosta yhdeksäsluokkalaista matematiikan opiskeluun ja kirjan teoriaosuudet tukevat laskutehtävien tekemistä hyvin. Muiden kirjaan liittyvien kehittämisehdotuksien suhteen ei oltu täysin yksimielisiä. Kahden asiantuntijan mielestä kirja on vaikeustasoltaan liian vaikea, teoriaosuus ei ole kohdennettu hyvin yhdeksäsluokkalaiselle sekä kirjan aihepiirivalinta vaatii kehittämistä.

Tarkastellaan seuraavaksi asiantuntijoiden antamat avoimien kysymyksien vastaukset. Taulukossa 5.9 on vastaukset kysymykseen: "Missä kirja ei onnistunut?"

Taulukko 5.9 *Asiantuntijoiden vastaukset kysymykseen "Missä kirja ei onnistunut?"*

Asiantuntija	Vastaus
A1	"Kertauksen kannalta aihepiirien valinta on mielestäni outo. Yläkoulun opettajana kertaisin viimeisimpänä potenssilaskentaa noin syvällisesti. Osio 1:sen aihepiirit ovat ihan järkeviä. Geometria ja funktiot puuttuvat. Potenssilaskennasta riittää yläkoulussa varsin hyvin potenssilaskennan peruskäsitteet."
A2	"Joissakin kohdin tuntui olevan "liian"matemaattinen lähestymistapa esimerkiksi tehtävien ratkaisuissa. Joillekin tämä toimii, jotkut saattaisivat haluta yksinkertaisempaa lähestymistapaa."
A3	"Monessa kohdassa kirja tuntuu liikkuvan enemmänkin lukiotasoisen ajattelijan tasolla kuin yläkouluikäisen. On joitain asioita, jotka eivät kuulu yläkoulun oppimäärään kuten Pascalin kolmio, rationaaliyhtälötja binomien väliset kertolaskut. Myös teoriaosuudet ovat välillä melko kirjainvoittoisia yläkouluikäisen luettavaksi, kuten s. 174 murtolukujen laskusäännöt."

Ensimmäisen asiantuntijan vastauksen perusteella oppikirjassa käsiteltiin liian syvällisesti potensseja. Potensseja käsittelevät luvut voisi korvata geometriaan ja funktioon liittyvillä luvuilla. Toisen asiantuntijan vastauksesta ilmenee, että kirjan matematiikka esitetään liian matemaattisesti. Kolmannen asiantuntijan vastaus tukee toisen asiantuntijan vastausta. Lisäksi kolmannen asiantuntijan mukaan kirjan ylöspäin eriyttävät osiot kuten rationaaliyhtälöt eivät kuulu yhdeksäsluokkalaiselle suunnatulle matematiikan kertauskurssille. Taulukossa 5.10 on asiantuntijoiden vastaukset kysymykseen: "Miten parantaisit kirjaa?"

***Taulukko 5.10** Asiantuntijoiden vastaukset kysymykseen: "Miten parantaisit kirjaa?"*

Asiantuntija	Vastaus
A1	"Visuaalisesti. On ikävälukea kirjaa, jonka teoriaosuudet on pääosin kopioitu avoimesta oppikirjasta pikselimössönä. Miksi käyttäisin tätä oppikirjaa, kun samat asiat on hieman eri järjestyksessä avoimessa oppikirjassa. Tämä oppikirja vaikuttaa lähinnä sen karsitulta kopiolta, mutta asianmukaiset lähdemerkinnät avoimeen oppikirjaan on jätetty merkitsemättä. Yksi lähdemerkintä tokin löytyy, mutta suoria kopioita on myös muista avoimista oppikirjoista kuin 9. luokan kirjasta. Avoimesta oppikirjasta kopioidut osat/yo-koetehtävät olisi ehdottomasti pitänyt kirjoittaa edes itse, että teoriaosuusksista/tehtävistä saisi paremmin selvää."
A2	"Käytännön esimerkit ja tehtävät, kuten Hakametsän kaukalon koko olivat mielestäni mielenkiintoisia, joten niitä voisi olla kirjassa enemmän."
A3	"Helpottaisin vähän tehtäviä ja helpottaisin teoriaosuuksien luettavuutta. Lisäisin algebra-osioon joidenkin yläkoulussa käsiteltyjen kuvioin ja kappaleiden tilavuuden tai pinta-alan kaavat otsikoiden ne Algebran soveltamiseksi ja ne voisivat löytyä esim. laskutehtävistä. Kirja voisi olla jopa hieman lyhyempi, jotta oppilas jaksaisi paremmin tarttua siihen eikä työmäärän paljous toisaalta karkottaisi laiskempia ja toisaalta uuvuttaisi ahkerampia."

Ensimmäisen asiantuntijan vastauksen perusteella kirjaa tulisi parantaa visuaalisesti. Kirjaan kopioidut osat kuten yo-tehtävät tulisi kirjan tekijän kirjoittaa itse sekä myös lähdeviitteet täytyy tarkistaa. Toisen asiantuntijan mielestä kirjassa voisi olla käytännön esimerkkejä, koska nämä lisäävät motivaatiota. Kolmannen asiantuntijan mukaan teoriaosuuksien luettavuutta tulisi parantaa. Lisäksi kirjaan voisi lisätä algebraosuuteen kappaleen geometriasta.

5.5 Tutkimuksen luotettavuus

Tässä kehittämistutkimuksessa otoskoko ($n = 14$) oli pieni, mutta oppilailta saatua tutkimusaineistoa oli paljon. Pienen otoskoon vuoksi tuloksien yleistettävyys on kyseenalainen. Lisäksi Deden mukaan pieni otoskoko suhteutettuna datan määrään aiheuttaa ongelmia datan puolueettomassa ja objektiivisessa analysoimisessa.

[19] Oppilasryhmä oli arvosanajakaumaltaan tyydyttävä 5.1, minkä ei pitäisi antaa etulyöntiasemaa tuloksien mielekkyyteen 3.3.

Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden mittarina voidaan pitää tutkimuksen siirrettävyyttä [15]. Ryhmässä oli luokkahuonerakenne, jossa keskiverto-oppilaita oli enemmän ja vastaavasti heikommin ja paremmin osaavia vähemmän. Luokan heterogeenisyyden perusteella, tuloksia voidaan pitää luotettavina ja siirrettävinä myös eri tasoiselle ryhmälle. Oppilaiden vastaukset oppimisesta, motivoitumisesta ja viihtyvyydestä olivat positiiviset. Eroavaisuudet tulivat siinä, mitä oppilaat haluaisivat painotettavan kurssilla enemmän.

Muutama oppilaista oli samasta koulusta kuin vierustoveri ja osa oppilaista tunsi toisensa. Toisaalta suurin osa oppilaista oli entuudestaan toisilleen vieraita, mikä saattoi selittää sen, että kurssilla oli rauhallinen tunnelma. Oppilaat eivät ujostelleet toisiaan ja pystyivät kommunikoimaan myös vieraiden oppilaiden kanssa, minkä perusteella pelillistetetty oppimisympäristö on mahdollista luoda myös toisilleen vieraille ihmisille.

Tieteellistä tutkimuksen luotettavuutta voidaan arvioida reliabiliteetin avulla. Reliabiliteetti tarkoittaa sitä, että kuinka luotettavia ja toistettavia tutkimuksen tulokset ovat [19]. Oppilaiden antamalla henkilökohtaisella palautteella oli anonymiteetti, minkä vuoksi palautetta voidaan pitää luotettavana. Toisaalta Kahoot-visojen avulla saadut oppimistulokset eivät olleet valvottuja koetilaisuuksia, joten oppilaat ovat voineet saada kaverilta apua näihin esimerkiksi katsomalla vierustoverin puhelinta. Lisäksi Kahoot-visat poikkeavat tavallisesta kokeesta johtuen muun muassa monivalintojen satunnaisuudesta. Tämän vuoksi Kahootin käyttö osaamisen mittarina on kyseenalaista. Lyhyellä aikavälillä tutkimus on luotettava ja toistettava, mutta esimerkiksi opetussuunnitelman muutokset täytyy huomioida tutkimusta toistettaessa.

Kurssilla vallinnut positiivinen ilmapiiri voi vääristää tuloksia oppimisen kannalta, vaikka oppilaat kokivat ympäristön motivoivaksi. Toisaalta itsemääräämisteorian mukaan tietynlainen vapaaehtoisuus on välttämätöntä hyvän motivoitumisen kannalta ja hyvä motivaatio on välttämätöntä oppimisen kannalta [23, 3]. Oppimistulokset olisivat voineet olla parempia lyhyellä aikavälillä, jos kurssi olisi ollut järjestelmällisempi ja sisältänyt kotitehtäviä. Kuitenkin Salmela-Aron mukaan tämä ei välttämättä olisi tarjonnut pitkän aikavälin hyötyä oppilaiden hyvinvoinnin, motivoitumisen ja oppimisen kannalta [25]. Kurssin aikataulu ei ole verrattavissa tavalliseen matematiikan opetuksen peruskoulurytmiin, jossa oppilas opiskelee matematiikkaa muutaman tunnin viikossa.

5.6 Jatkokehittäminen ja jatkotutkimus

Oppilaat huomauttivat kirjassa esiintyneistä laskuvirheistä, jotka on ensimmäisen syklin jälkeen korjattu. Lisäksi teoriaosuuksissa oli myös virheitä, jotka on jälkeen päin korjattu. Asiantuntijoiden palautteessa ja oppilaiden huomautuksissa ihmeteltiin, miksei kurssilla ollut geometriaa. Yksi asiantuntijoista ehdotti, että kirjan loppuun voisi lisätä kappaleen algebran soveltamisesta geometriassa. Tämän palautteen ja oppilaiden huomautusten innoittamana kirjan algebraosioon on lisätty luku *Geometria*. Osion tarkoituksena on kerrata muutama pinta-alaan ja tilavuuteen liittyvä kaava sekä soveltaa kurssilla aiemmin opittuja asioita kuten polynomilausekkeiden sieventäminen, potenssit ja juuri.

Oppilaiden palautteen perusteella pelillisyyttä oli sopivasti, mutta pelien vaikeustason suhteen olisi syytä olla tarkempi. Tähtipelit sellaisenaan olivat sopivan tasoisia, mutta esimerkiksi potenssidominoa pidettiin liian vaikeana. Dominopelin vaikeustasoa voidaan pitää lukion yhteiskurssin potenssit -aihepiirin kanssa yhtenevänä, ja peliin liittyvien dominopalojen löytäminen sekä yhdistäminen veivät kokonaisuudessaan liian paljon aikaa.

Oppikirjan puutteelliset lähdeviittaukset korjattiin asiantuntijoiden palautteen perusteella. Microsoft Word havaittiin epäsopivaksi valinnaksi matematiikan oppikirjan tuottamiseen. Kirjan olisi saanut helpommin ja siistimmin tuotettua esimerkiksi LaTeX:n tai TIM:n [14] avulla. TIM on oppimisalusta, joka on tarkoitettu opettajien oppimateriaalin tallentamiseen ja oppilaiden materiaalin käyttöön sähköisessä muodossa. Lisäksi jos kirja olisi tuotettu TIM:llä, niin kirjaan olisi voinut myös lisätä interaktiivisia ja automaattisesti tarkistettavia tehtäviä. Näiden avulla oppilaiden suoriutumista kurssin aikana olisi ollut helpompi seurata. Tästä saisi myös hyvän jatkotutkimuksen, jossa voitaisiin tutkia esimerkiksi sähköisen ja tavallisen materiaalin välisiä eroavaisuuksia.

Oppikirjan sisältö vaikutti perustellulta, kun ottaa huomioon opetushallituksen raportin, jossa todettiin suurimmiksi toisen asteen opiskelijoiden ongelmiksi algebran ja lukuteorian taidot [2]. Kuitenkin asiantuntijoiden palautteeseen perustuen voidaan miettiä, voisiko esimerkiksi funktioille tai geometrialle antaa hieman isomman painotuksen. Vastaavasti olisi syytä miettiä, voisiko muutaman oppikirjan luvun poistaa kuten esimerkiksi peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014) ylittävän osuuden potensseista. Tulevat opetussuunnitelman muutokset tulee huomioida tulevaisuudessa.

Jatkotutkimukset voisi vastaavasti suorittaa kehittämistutkimukselle tyypillisesti syklimuodossa. Seuraava sykli voisi olla se, että kurssin oppiainesisältö säilyisi tällaisenaan, mutta kurssin tehtävät vietäisiin TIM:n ja muutettaisiin siellä automaattisesti tarkistettaviksi. Toisaalta seuraava sykli voisi olla vastaava kurssitoteutus, jossa aihepiirisisältöjä muokattaisiin ehdotusten mukaisiksi. Vaihtoehtoisesti seuraavaan sykliin voitaisiin lisätä nämä molemmat edellä mainitut elementit.

6 Yhteenveto

Tässä opinnäytetyössä kehitettiin kehittämistutkimukselle tyypillisin ottein yhdeksäsluokkalaisille kohdennettu toiminnallinen matematiikan kertauskurssi ja kurssin materiaali. Kurssin aihepiirisisältö koostui pääosin lukuteoriasta ja algebrasta, sillä nämä aihepiirit ovat olleet ongelmallisimpia toisen asteen opiskelijoille [2]. Materiaali sisälsi Kahoot-visoja, matematiikan oppimispelejä sekä kurssille suunnitellun oppikirjan.

Kurssin tavoitteena oli lisätä oppilaan motivaatiota matematiikkaa kohtaan, jotta oppilas suoriutuisi paremmin tulevaisuudessa matematiikan opinnoistaan [23, 3, 25]. Motivaatiota lähdettiin hakemaan pelillisyyden kautta, sillä tutkimusten mukaan matematiikan oppimispelit voidaan kokea tavallista matematiikan opetusta viihdyttävämmäksi ja motivoivammaksi [22, 29, 10, 13]. Toiminnallisuus näkyi kurssilla Kahoot-visoina [11] ja matematiikan oppimispeleinä, joita olivat muun muassa matematiikka-aiheinen lautapeli ja domino.

Kurssin kehittämiseen kerättiin dataa oppilaiden suorittamista lähtö- ja lopputasotesteistä, alkukyselystä sekä palautelomakkeesta. Lisäksi kolme asiantuntijaa antoivat palautetta oppikirjasta. Palautelomakkeet sisälsivät Likert-asteikollisia (1-5) ja avoimia kysymyksiä. Oppilaiden alkukyselyn perusteella kyseessä ollut ryhmä ei ollut aluksi motivoitunut hiihtolomalla järjestettävästä matematiikan kertauskurssista. Useampi oppilaista mainitsi, että heidän vanhempansa olivat pakottaneet kertauskurssille. Tällainen pakonomaisuus ei lisää oppilaiden motivaation lähtötasoa [23]. Kuitenkin kurssilla järjestettyjen alku- ja lopputasotestien perusteella oppilaiden osaaminen kasvoi. Oppilaiden mukaan suurin yksittäinen tekijä oppilaiden osaamisen kasvulle oli kurssin aikana suoritetut laskutehtävät. Motivaatioon vaikuttavina tekijöinä voidaan pitää kurssin positiivista ilmapiiriä sekä pelillisyyttä. Oppimisen, motivaation 3.3 sekä pelillisyyden 3.4 välistä suhdetta tukee työn teorian lisäksi oppilaiden antama palaute.

Asiantuntijoiden mukaan matematiikan kertaavalle intensiivikurssille on kysyntää. Kuitenkin oppikirjan aihepiirisisältöjen valinta, visuaalisuus sekä vaikeustaso vaativat hiomista. Esimerkiksi potenssien algebrasta useampi luku voitaisiin korvata funktioilla, jolloin oppikirjan sisältö vastaisi paremmin Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) matematiikan sisältöaluetta. Oppikirjassa tulisi olla enemmän helpompia tehtäviä, jolloin heikompitasoisemmat oppilaat saisivat paremmin osaamistaan vastaavia haasteita. Oppikirja muistuttaa luonteeltaan tarjolla olevia oppikirjoja, minkä vuoksi esimerkiksi omaperäisiä syventäviä tehtäviä tulisi olla enemmän. Toisaalta oppikirja on visuaalisesti huonompi kuin tarjolla olevat oppikirjat, joten visuaalisuutta voisi parantaa siirtämällä kirjan Microsoft Wordista TIM:iin.

Lähdeluettelo

[1] Suomen virallinen tilasto (SVT): Vapaa-ajan osallistuminen [verkkojulkaisu]. *Digipelaaminen 2017, 1. Digitaalisten pelien pelaaminen nelinkertaistunut 25 vuodessa.* Helsinki: Tilastokeskus. Saatavissa (viitattu 18.4.2020): `https://www.stat.fi/til/vpa/2017/02/vpa_2017_02_2019-01-31_kat_001_fi.html`.

[2] Jari Metsämuuronen (toim.) *Petusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012.* Saatavissa (viitattu 25.5.2018): `http://karvi.fi/app/uploads/2014/09/OPH-0113.pdf`. 2013.

[3] K. Salmela-Aro et al. *Motivaatio ja oppiminen.* PS-kustannus, 2018.

[4] P. DeLucca ja D. Raghavarao. ”Effect of investigator bias on the significance level of the Wilcoxon rank-sum test”. *University of Oxford* (2000), s. 108–111.

[5] Sebastian Deterding et al. ”Gamification. Using Game-Design Elements in Non-Gaming Contexts”. Teoksessa: *CHI 11 Extended Abstracts on Human Factors in Computing Systems.* CHI EA 11. Vancouver, BC, Canada: Association for Computing Machinery, 2011, s. 2425–2428.

[6] D.C. Edelson. ”Design research: What we learn when we engage in design”. *The Journal of the Learning Sciences* 11.No. 1 (2002), s. 105–121.

[7] P. Felicia. *How can digital games be used to teach the school curriculum?* Waterford Institute of Technology., 2011.

[8] T.W. Hungerford. *Abstract Algebra: An Introduction.* Saint Louis University, 2014.

[9] J. Häsä ja J. Rämö. *Johdatus abstraktiin algebraan.* Helsinki: Gaudeamus, 2012.

[10] L. Blair K. Kapp ja R. Mesch. *The Gamification of Learning and Instruction Fieldbook: Ideas into Practice.* San Francisco, CA: Wiley, 2014.

[11] *Kahoot.* Saatavissa (viitattu 25.5.2018): `http://kahoot.com`.

[12] H. Kainulainen. *Klusteroitunut aineisto kahden ryhmän vertailussa.* Pro gradu -tutkielma, Tampereen Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Tampere, 2008. Saatavissa (viitattu 10.6.2020): `https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/78753/gradu02342.pdf?sequence=1&isAllowed=y`.

[13] J. Koivisto. *Gamification.* Väitöskirja, Tampereen Yliopisto, Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta, Tampere, 2017. Saatavissa (viitattu 25.4.2020): `http://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/102270/978-952-03-0550-5.pdf?sequence=7&isAllowed=y`.

[14] V. Lappalainen ja V. Tirronen. *TIM.* Saatavissa (viitattu 3.5.2020): `http://tim.jyu.fi/`. Jyväskylän yliopisto.

[15] Y.S. Lincoln ja E.G. Guba. *Naturalistic Inquiry.* Sage Publication, 1985.

[16] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.* Helsinki: Opetushallitus, 2015.

[17] J. Merikoski. *Kompleksiluvuista ja kvaternioista.* Saatavissa (viitattu 15.4.2019): `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2001/3/merikoski/`. 2001.

[18] Saarijärven nuorisotalo. *Hiihtoloma.* Saatavissa (viitattu 2.5.2020): `http://www.saarijarvennuorisotalo.com/wp-content/uploads/2017/02/hiihtoloma-2017.jpg`.

[19] J. Pernaa et al. *Kehittämistutkimus opetusalalla.* PS-kustannus, 2013.

[20] *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* Helsinki: Opetushallitus, 2016.

[21] Pingviini. *Tuotteet.* Saatavissa (viitattu 25.5.2018): `http://www.pingviini.fi/`.

[22] S. Rahikainen. *Pelit ja pelinomaisuus perusopetuksessa.* Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Tietotekniikan laitosa, Jyväskylä, 2016. Saatavissa (viitattu 19.4.2020): `https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/52262/1/URN%3ANBN%3Afi%3Ajyu-201612115030.pdf`.

[23] R. Ryan ja E. Deci. *Self-determination theory: Basic psychological needs in motivation, development and wellness.* The Guilford Press, 2017.

[24] A. Saaranen-Kauppinen ja A. Puusniekka. *KvantiMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto. Triangulaatio.* Saatavissa (viitattu 22.5.2020): `https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/kvali/L2_3_2_4.html`.

[25] K. Salmela-Aro ja K. Upadyaya. *School burnout and engagement in the context of demands-resources model.* British Journal of Educational Psychology, 2013, 137-151.

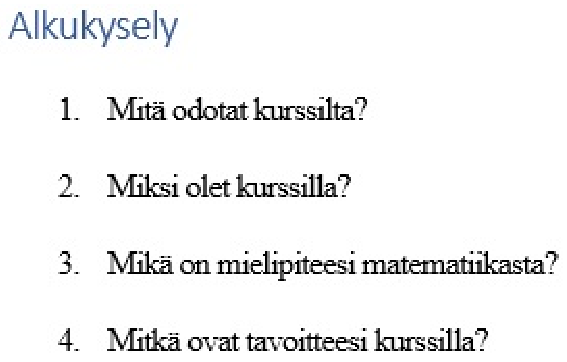
[26] A. Taipale. *Matematiikan, lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksien päällekäistyminen nuoruusiässä.* Pro gradu -tutkielma, Joensuun yliopisto, Kasvatustieteiden tiedekunta, Joensuu, 2010. Saatavissa (viitattu 13.12.2019): `http://epublications.uef.fi/pub/urn_isbn_978-952-219-309-4/urn_isbn_978-952-219-309-4.pdf`.

[27] *Tampereen LUMATE-keskus*. Saatavissa (viitattu 20.4.2020): `https://www.lumate.fi/`.

[28] J. Vilen. *Polynomirenkaista*. Pro gradu -tutkielma, Tampereen Yliopisto, Informaatiotieteiden tiedekunta, Tampere, 2005. Saatavissa (viitattu 4.6.2019): `https://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/92649/gradu00507.pdf?sequence=1`.

[29] Anna Vättö. *Pelillistäminen hyvinvoinnin tukena*. Opinnäytetyö, Tampereen ammattikorkeakoulu, Mediatuottamisen koulutusohjelma, Tampere, 2018. Saatavissa (viitattu 19.4.2020): `https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/149422/Vatto_Anna.pdf`.

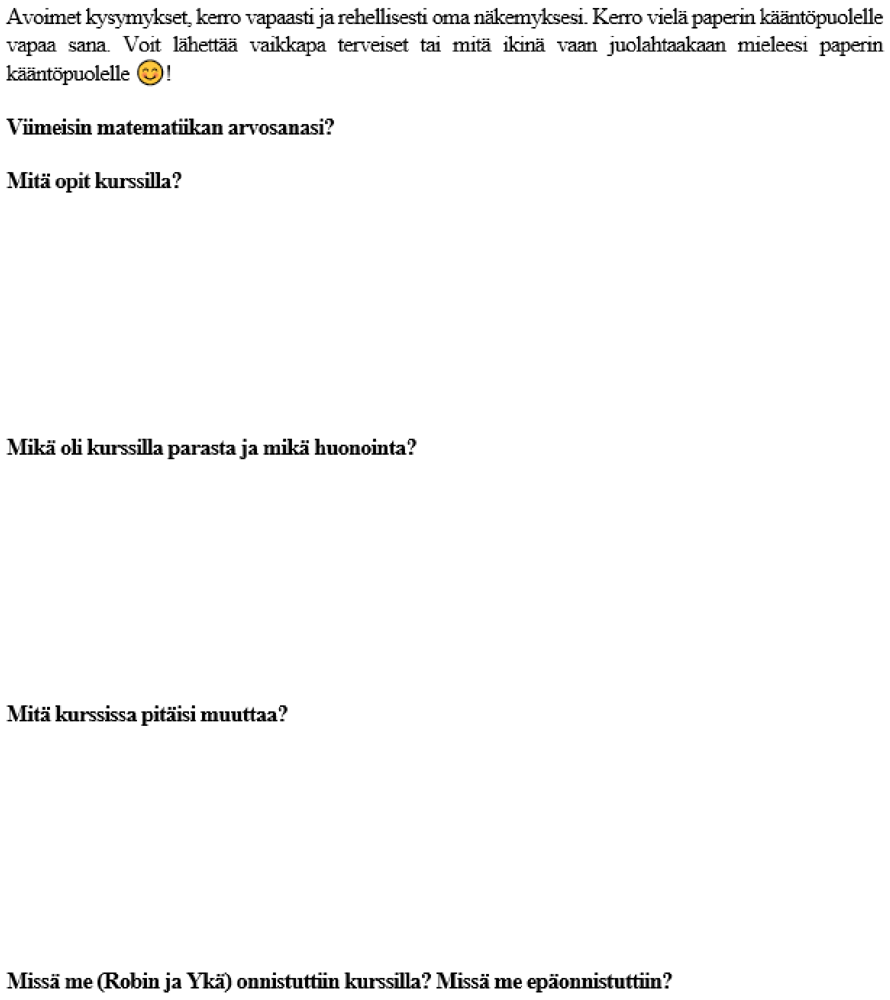
Liite A. Oppilaiden alkukysely



Alkukysely

1. Mitä odotat kurssilta?
2. Miksi olet kurssilla?
3. Mikä on mielipiteesi matematiikasta?
4. Mitkä ovat tavoitteesi kurssilla?

Liite B. Oppilaiden avoin loppukysely



Avoimet kysymykset, kerro vapaasti ja rehellisesti oma näkemyksesi. Kerro vielä paperin kääntöpuolelle vapaa sana. Voit lähettää vaikkapa terveiset tai mitä ikinä vaan juolahtaakaan mieleesi paperin kääntöpuolelle 😊!

Viimeisin matematiikan arvosanasi?

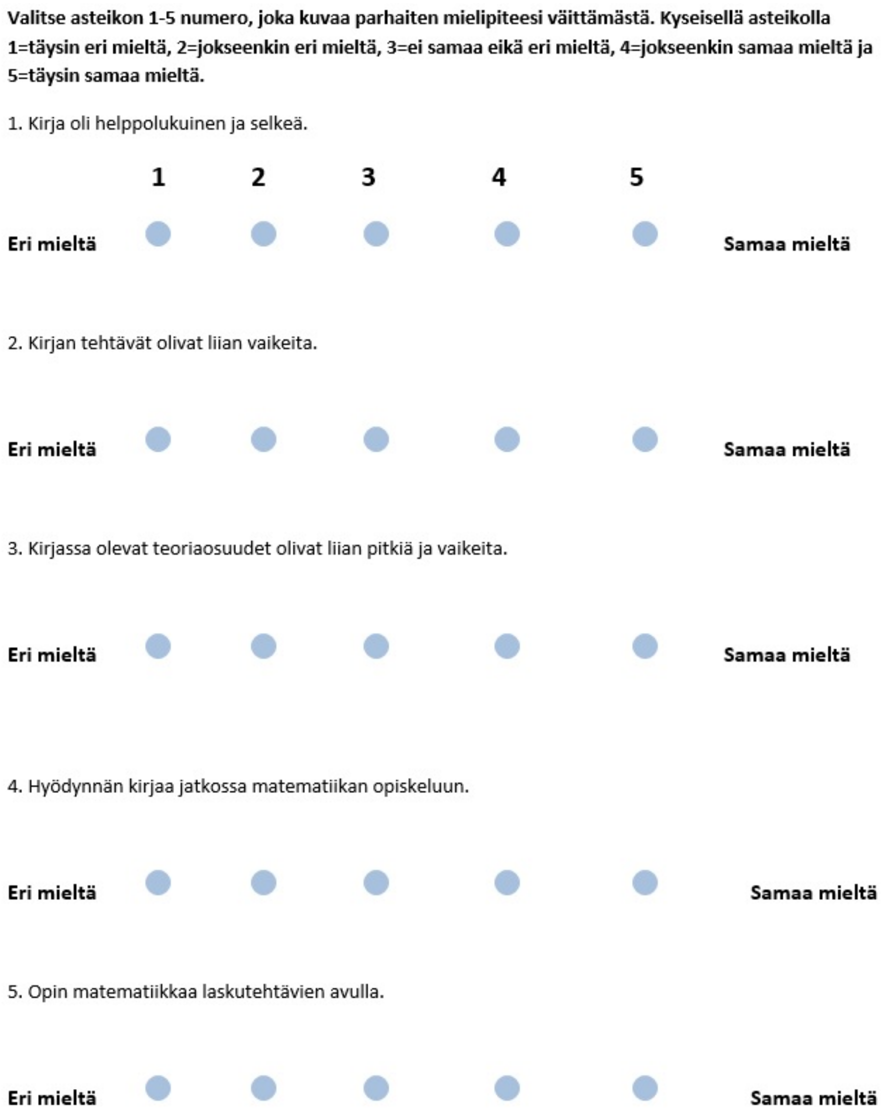
Mitä opit kurssilla?

Mikä oli kurssilla parasta ja mikä huonointa?

Mitä kurssissa pitäisi muuttaa?

Missä me (Robin ja Ykä) onnistuttiin kurssilla? Missä me epäonnistuttiin?

Liite C. Oppilaiden Likert-asteikollinen loppukysely



Valitse asteikon 1-5 numero, joka kuvaa parhaiten mielipiteesi väittämästä. Kyseisellä asteikolla 1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=ei samaa eikä eri mieltä, 4=jokseenkin samaa mieltä ja 5=täysin samaa mieltä.

1. Kirja oli helppolukuinen ja selkeä.

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä	○	○	○	○	○	**Samaa mieltä**

2. Kirjan tehtävät olivat liian vaikeita.

Eri mieltä	○	○	○	○	○	**Samaa mieltä**

3. Kirjassa olevat teoriaosuudet olivat liian pitkiä ja vaikeita.

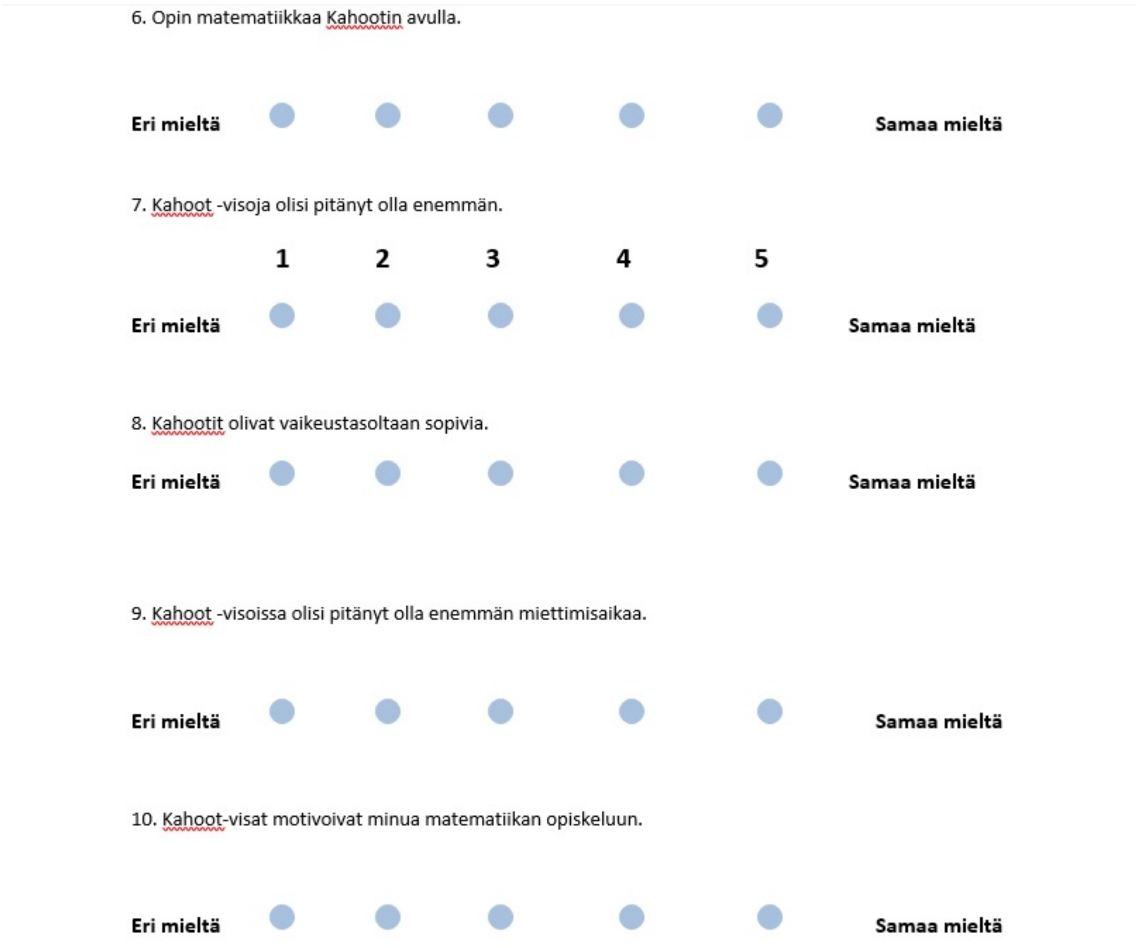
Eri mieltä	○	○	○	○	○	**Samaa mieltä**

4. Hyödynnän kirjaa jatkossa matematiikan opiskeluun.

Eri mieltä	○	○	○	○	○	**Samaa mieltä**

5. Opin matematiikkaa laskutehtävien avulla.

Eri mieltä	○	○	○	○	○	**Samaa mieltä**



6. Opin matematiikkaa Kahootin avulla.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

7. Kahoot -visoja olisi pitänyt olla enemmän.

1 2 3 4 5

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

8. Kahootit olivat vaikeustasoltaan sopivia.

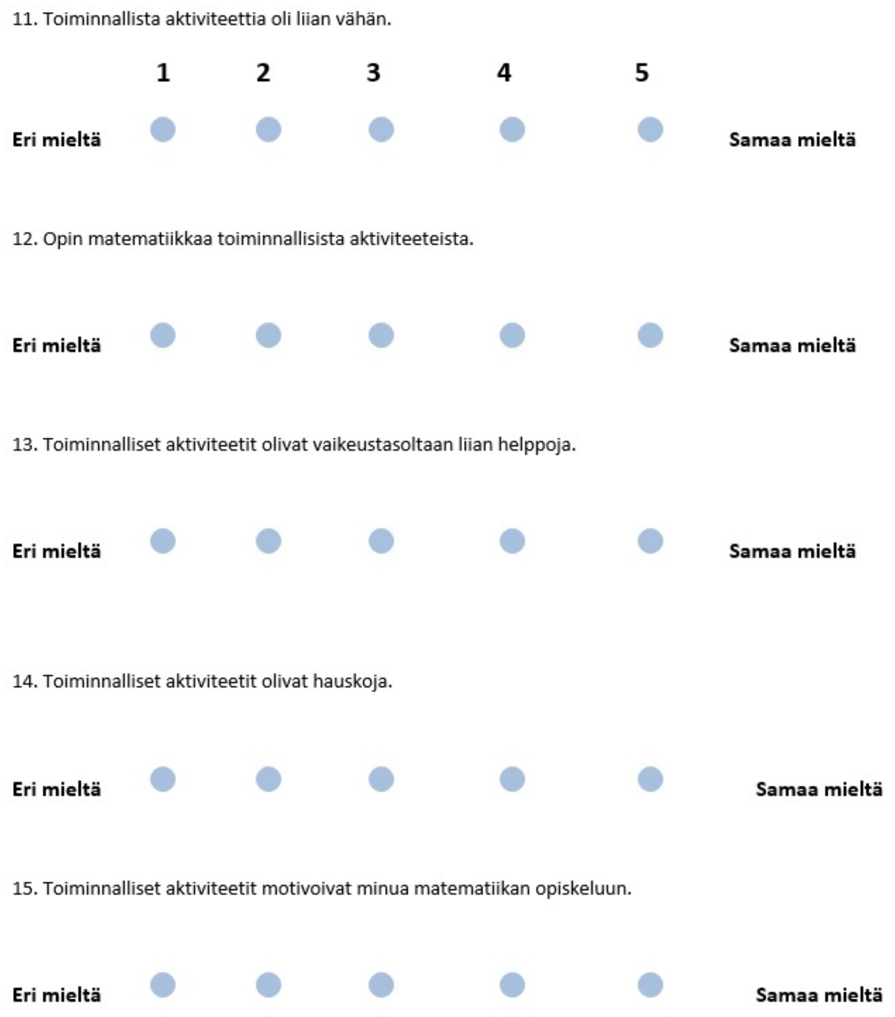
Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

9. Kahoot -visoissa olisi pitänyt olla enemmän miettimisaikaa.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

10. Kahoot-visat motivoivat minua matematiikan opiskeluun.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**



11. Toiminnallista aktiviteettia oli liian vähän.

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä	○	○	○	○	○	**Samaa mieltä**

12. Opin matematiikkaa toiminnallisista aktiviteeteista.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

13. Toiminnalliset aktiviteetit olivat vaikeustasoltaan liian helppoja.

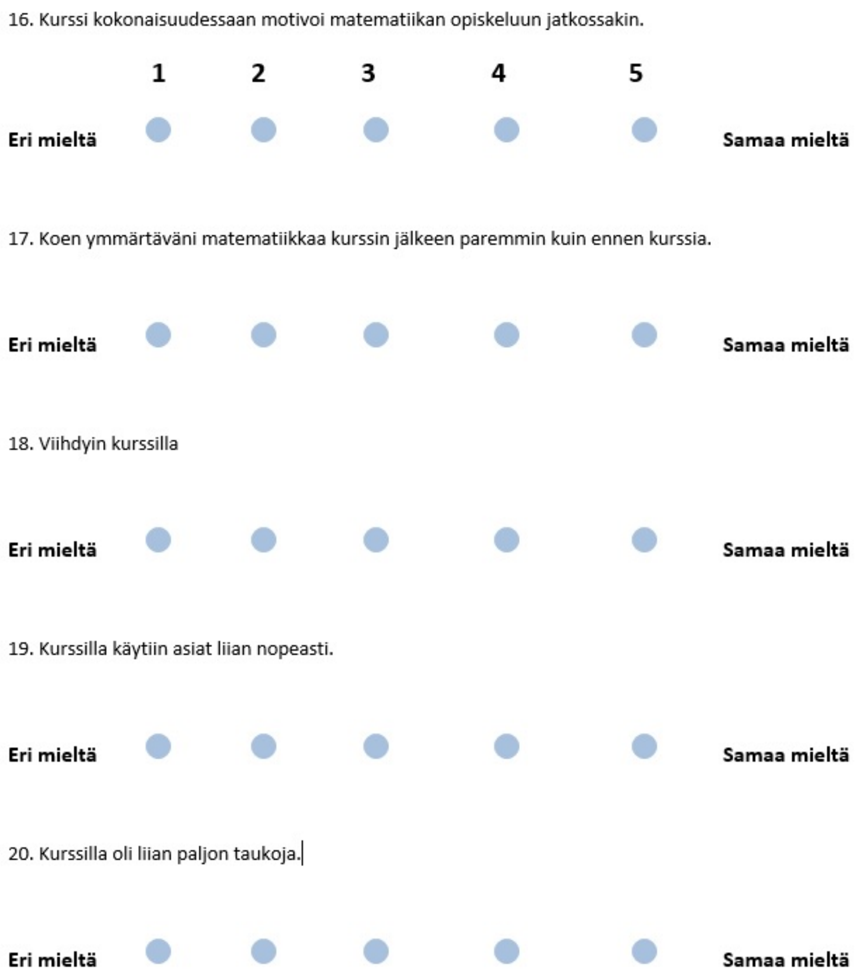
Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

14. Toiminnalliset aktiviteetit olivat hauskoja.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

15. Toiminnalliset aktiviteetit motivoivat minua matematiikan opiskeluun.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**



16. Kurssi kokonaisuudessaan motivoi matematiikan opiskeluun jatkossakin.

1 2 3 4 5

Eri mieltä ● ● ● ● ● **Samaa mieltä**

17. Koen ymmärtäväni matematiikkaa kurssin jälkeen paremmin kuin ennen kurssia.

Eri mieltä ● ● ● ● ● **Samaa mieltä**

18. Viihdyin kurssilla

Eri mieltä ● ● ● ● ● **Samaa mieltä**

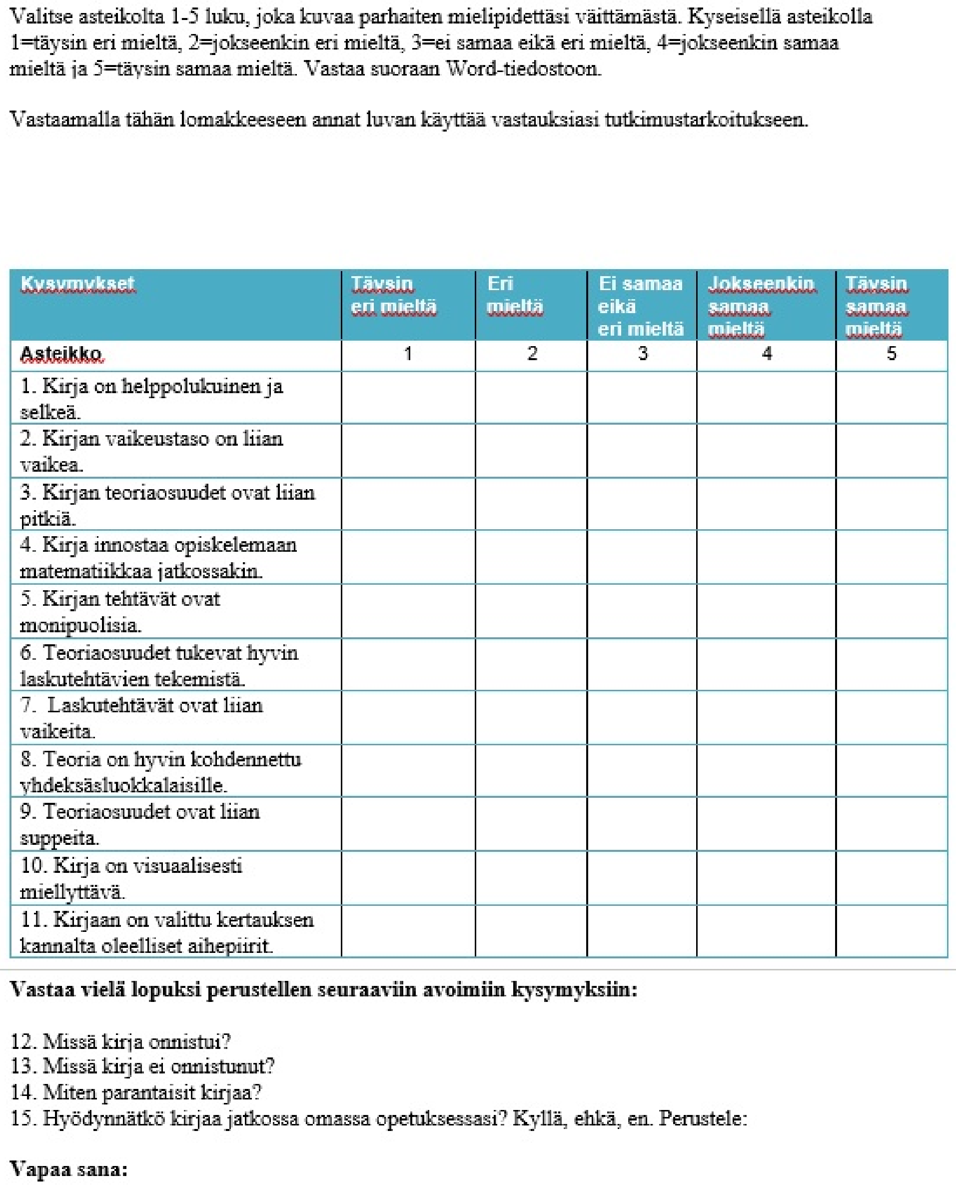
19. Kurssilla käytiin asiat liian nopeasti.

Eri mieltä ● ● ● ● ● **Samaa mieltä**

20. Kurssilla oli liian paljon taukoja.

Eri mieltä ● ● ● ● ● **Samaa mieltä**

Liite D. Opettajien palautelomake



Valitse asteikolta 1-5 luku, joka kuvaa parhaiten mielipidettäsi väittämästä. Kyseisellä asteikolla 1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=ei samaa eikä eri mieltä, 4=jokseenkin samaa mieltä ja 5=täysin samaa mieltä. Vastaa suoraan Word-tiedostoon.

Vastaamalla tähän lomakkeeseen annat luvan käyttää vastauksiasi tutkimustarkoitukseen.

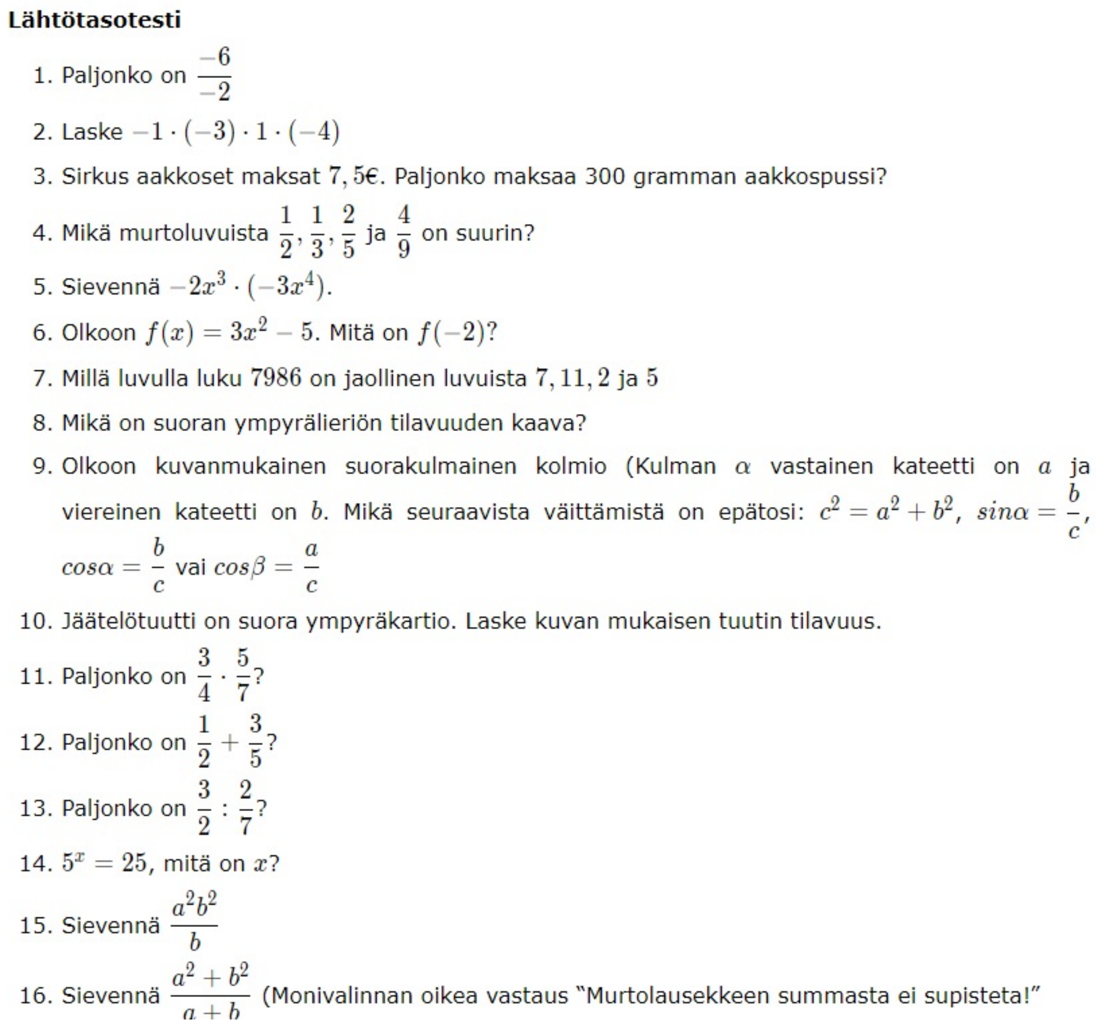
Kysymykset	Täysin eri mieltä	Eri mieltä	Ei samaa eikä eri mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Asteikko	1	2	3	4	5
1. Kirja on helppolukuinen ja selkeä.					
2. Kirjan vaikeustaso on liian vaikea.					
3. Kirjan teoriaosuudet ovat liian pitkiä.					
4. Kirja innostaa opiskelemaan matematiikkaa jatkossakin.					
5. Kirjan tehtävät ovat monipuolisia.					
6. Teoriaosuudet tukevat hyvin laskutehtävien tekemistä.					
7. Laskutehtävät ovat liian vaikeita.					
8. Teoria on hyvin kohdennettu yhdeksäsluokkalaisille.					
9. Teoriaosuudet ovat liian suppeita.					
10. Kirja on visuaalisesti miellyttävä.					
11. Kirjaan on valittu kertauksen kannalta oleelliset aihepiirit.					

Vastaa vielä lopuksi perustellen seuraaviin avoimiin kysymyksiin:

12. Missä kirja onnistui?
13. Missä kirja ei onnistunut?
14. Miten parantaisit kirjaa?
15. Hyödynnätkö kirjaa jatkossa omassa opetuksessasi? Kyllä, ehkä, en. Perustele:

Vapaa sana:

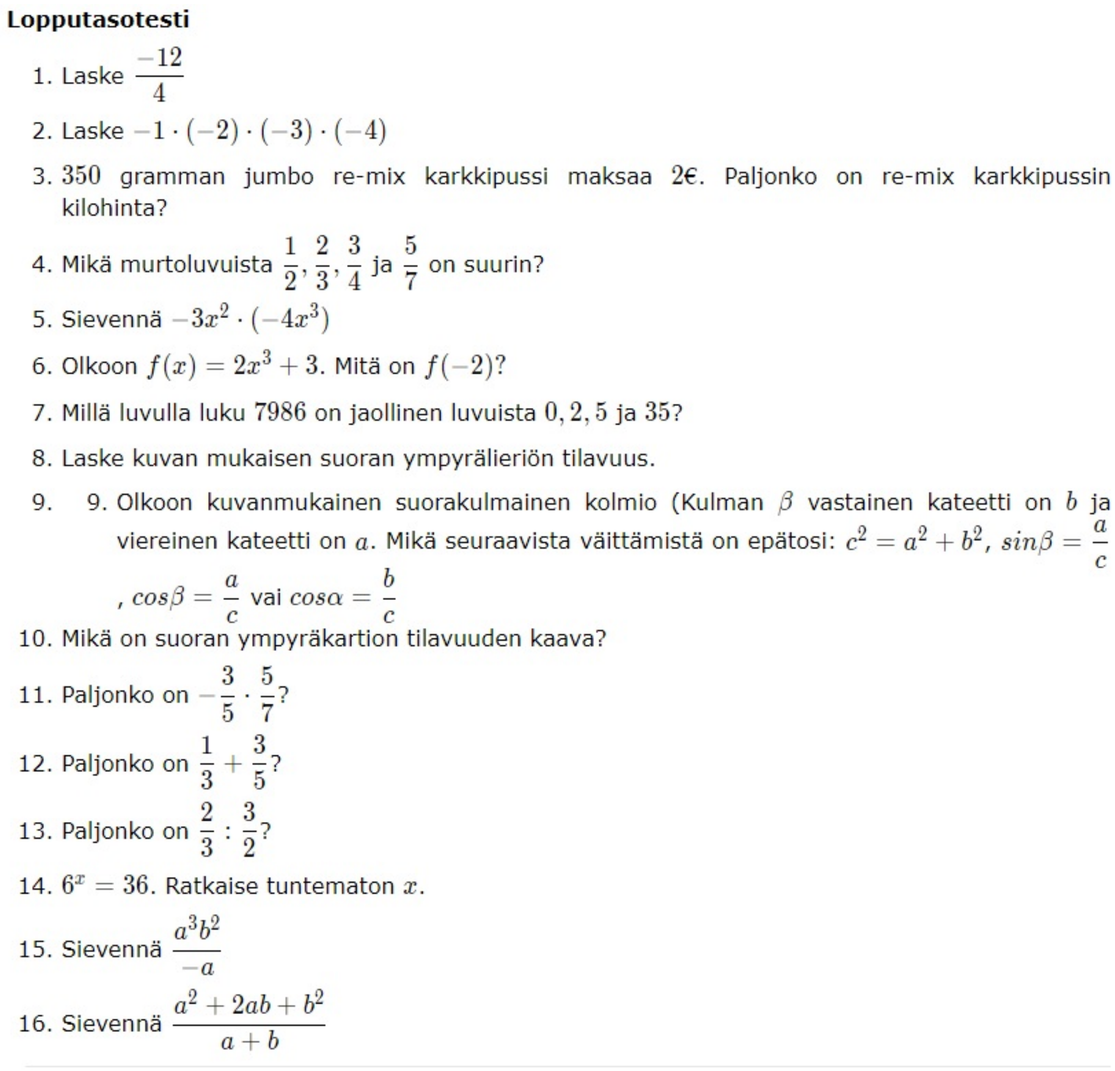
Liite E. Lähtötasotestin kysymykset



Lähtötasotesti

1. Paljonko on $\frac{-6}{-2}$
2. Laske $-1 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot (-4)$
3. Sirkus aakkoset maksat $7,5€$. Paljonko maksaa 300 gramman aakkospussi?
4. Mikä murtoluvuista $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ ja $\frac{4}{9}$ on suurin?
5. Sievennä $-2x^3 \cdot (-3x^4)$.
6. Olkoon $f(x) = 3x^2 - 5$. Mitä on $f(-2)$?
7. Millä luvulla luku 7986 on jaollinen luvuista $7, 11, 2$ ja 5
8. Mikä on suoran ympyrälieriön tilavuuden kaava?
9. Olkoon kuvanmukainen suorakulmainen kolmio (Kulman α vastainen kateetti on a ja viereinen kateetti on b. Mikä seuraavista väittämistä on epätosi: $c^2 = a^2 + b^2$, $sin\alpha = \frac{b}{c}$, $cos\alpha = \frac{b}{c}$ vai $cos\beta = \frac{a}{c}$
10. Jäätelötuutti on suora ympyräkartio. Laske kuvan mukaisen tuutin tilavuus.
11. Paljonko on $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$?
12. Paljonko on $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$?
13. Paljonko on $\frac{3}{2} : \frac{2}{7}$?
14. $5^x = 25$, mitä on x?
15. Sievennä $\frac{a^2b^2}{b}$
16. Sievennä $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ (Monivalinnan oikea vastaus "Murtolausekkeen summasta ei supisteta!"

Liite F. Lopputasotestin kysymykset



Lopputasotesti

1. Laske $\frac{-12}{4}$
2. Laske $-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$
3. 350 gramman jumbo re-mix karkkipussi maksaa $2€$. Paljonko on re-mix karkkipussin kilohinta?
4. Mikä murtoluvuista $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{7}$ on suurin?
5. Sievennä $-3x^2 \cdot (-4x^3)$
6. Olkoon $f(x) = 2x^3 + 3$. Mitä on $f(-2)$?
7. Millä luvulla luku 7986 on jaollinen luvuista $0, 2, 5$ ja 35?
8. Laske kuvan mukaisen suoran ympyrälieriön tilavuus.
9. 9. Olkoon kuvanmukainen suorakulmainen kolmio (Kulman β vastainen kateetti on b ja viereinen kateetti on a. Mikä seuraavista väittämistä on epätosi: $c^2 = a^2 + b^2$, $sin\beta = \frac{a}{c}$, $cos\beta = \frac{a}{c}$ vai $cos\alpha = \frac{b}{c}$
10. Mikä on suoran ympyräkartion tilavuuden kaava?
11. Paljonko on $-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$?
12. Paljonko on $\frac{1}{3} + \frac{3}{5}$?
13. Paljonko on $\frac{2}{3} : \frac{3}{2}$?
14. $6^x = 36$. Ratkaise tuntematon x.
15. Sievennä $\frac{a^3b^2}{-a}$
16. Sievennä $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$

Liite G. Oppikirja

Matematiikkaa ysiluokkalaisille hiihtolomalla

Johdanto

Peruskoulun matematiikka tarjoaa periaatteellisesti hyvän pohjan toisen asteen opintoihin, mutta se opetetaan yleensä usealle vuodelle pilkottuina pieninä paloina. Tällöin voi olla hankala luoda itselleen selkeitä eri aihealueiden välisiä yhteyksiä sekä soveltaa oppimaansa, jotka ovat äärimmäisen tärkeitä taitoja jatkon kannalta. Tutkimusten perusteella yksi keskeisin tekijä oppisisällön oppimisen kannalta on motivaatio kyseistä oppisisältöä kohtaa, jonka vuoksi meille on kunniatehtävä saada sinut innostumaan vielä enemmän tästä aiemmin sirpaleisesta matematiikasta.

Olemme pyrkineet rajaamaan oppikirjan sisällön hieman juhlallisestikin nimettynä 'lukuteoriaan' ja 'algebraan', jotta oppikirjan kokonaisuus säilyisi selkeänä. Syy sille, miksi oppikirja painottuu juuri näihin aihepiireihin on se, että juuri näiden aihepiirien sisältä on kokemuksen perusteella löytynyt kaikkein eniten vaikeuksia. Lisäksi, kyseiset matematiikan päähaarat esiintyvät jatkuvasti myös muillakin matematiikan osa-alueilla kuten geometriassa ja funktio-opissa, joten onkin perusteltua väittää, että hyvä lukuteorian ja algebran osaaminen takaa myös hyvän muiden alueiden osaamisen.

Kertauskurssin tarkoitus on vahvistaa sinun matemaattista osaamista. Konkreettisemmin lausuttuna tavoitteena on se, että kurssin suoritettuasi keväällä järjestettävä matematiikan valtakunnallinen koe sujuu vähintään tavoitteiden mukaisesti. Lisäksi, koska matematiikkaa esiintyy jatko-opinnoissa valinnoista riippumatta, niin on kurssin myös tarkoitus madaltaa jatko-opintoihin liittyvää kynnystä. Kirja ei siis kokonaisuudessaan kata koko peruskoulun matematiikan sisältöä, mutta se toimii hyvänä tukena itse kertauskurssilla, jolla on tarkoitus perehtyä myös muihin matematiikan osa-alueisiin kuin lukuteoriaan ja algebraan. Kirja sisältää myös tähtimerkittyjä (*) osioita, jotka ovat lukion alussa käytäviä aihepiirejä, mutta eivät ole välttämättömiä peruskoulun matematiikan osaamisen kannalta.

Kirjan luvut ovat rakenteeltaan hyvin samanlaiset: Ensin käydään aihepiirikohtainen teoria ja esimerkit läpi. Tämän jälkeen tehdään harjoitustehtävät, joihin löytyy kirjan loppuosasta vastaukset. Vastauksia suositellaan katsottavaksi vasta sen jälkeen, kun tehtävä on ratkaistu tai jos tehtävää on mietitty riittävän pitkä aika! Haluamme korostaa sitä, että matematiikassa tärkeintä ei ole se, että saa oikean vastauksen mahdollisimman nopeasti, vaan se, että ymmärretään ne välivaiheet mitä kautta kyseiseen vastaukseen on päädytty. Ei kannata ahdistua, vaikkei jokin tehtävä ratkeaisikaan heti, sillä kokemuksen perusteella juuri sellaiset tehtävät ovat olleet meille matematiikan opiskelijoille oppimisen kannalta kaikkein opettavaisimpia! Siksi suosittelemmekin tehtäviä tehdessä kirjaamaan välivaiheet ylös, sillä näitä tullaan myös jatkossakin tarvitsemaan kuten matematiikan valtakunnallisissa koetehtävissä ja jatko-opinnoissa.

Näiden mietteiden pohjalta toivotamme sinulle opettavaisia ja innostavaisia hetkiä matematiikan parissa!

- Terveisin Robin Hamdi ja Ykä Lähteenmäki

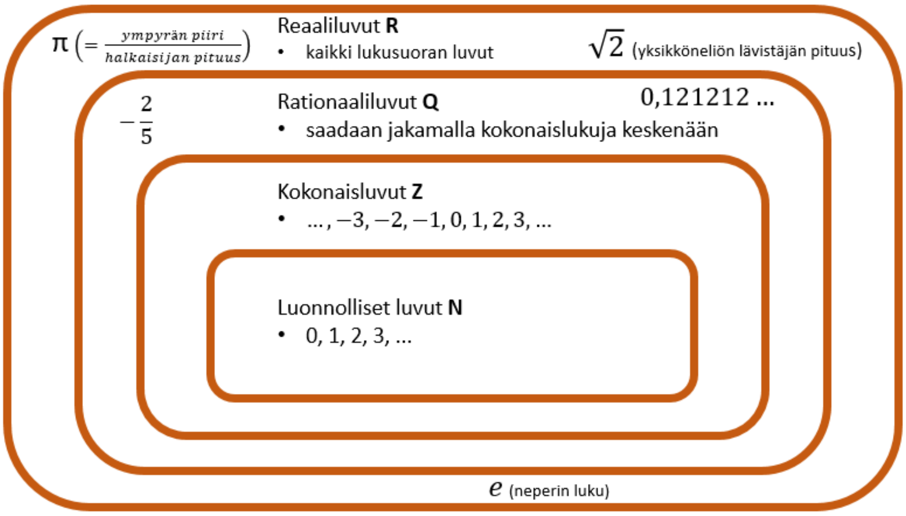
Sisällys

1. Lukuteoria

Lukuteoria on yksi vanhimmista matematiikan aloista, sillä sen juuret ulottuvat kauas menneisyyteen aina 4 000 vuoden päähän. Lukuteoriaa on pitkään pidetty matemaatikkojen harrastamana teoreettisena huvitteluna, mutta nykyään sen tuottamia tietoja käytetään hyväksi muun muassa salauksessa. (Lähde: Wikipedia)

1.1. Lukujoukot

Matematiikassa erilaiset luvut voidaan luokitella eri lukujoukkoihin seuraavasti:



(Lähde: opinnot.net)

Rationaalilukujen joukossa ($\mathbb{Q}$) sen jäsenet voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Osamäärän esittäminen ei aina ole helppoa, jos luku on desimaalimuodossa (esim. 0,125 = $\frac{1}{8}$ tai jopa päättymätön 0,3333… = $\frac{1}{3}$). Lisäksi, jos desimaaleissa toistuu jokin numero tai numerosarja äärettömän monta kertaa peräkkäin, on kyseessä rationaaliluku.

Reaalilukujen joukossa ($\mathbb{R}$) on rationaalilukujen lisäksi irrationaaliluvut. Irrationaalilukuja ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

Huom! Suomen kielessä sanat "luku" ja "numero" tarkoittavat eri asiaa. Numero tarkoittaa numeromerkkejä 0-9. Numeroita voi verrata aakkosiin: aakkosista muodostetaan sanoja ja numeroista lukuja. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Mihin lukujoukkoihin luku kuuluu?

a) -2

b) $\frac{3}{7}$

c) 0,4

d) 6,3573067205…

Ratkaisu:

a) Ainakin reaalilukuihin, sillä niihin kuuluu kaikki luvut. Lisäksi rationaalilukuihin, sillä -2 voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä ($\frac{-2}{1}$). -2 kuuluu myös kokonaislukuihin, muttei luonnollisiin lukuihin.

b) Reaalilukuihin ja rationaalilukuihin.

c) Reaalilukuihin ja rationaalilukuihin (Luku 0,4 voidaan esittää osamääränä $\frac{2}{5}$).

d) Ainoastaan reaalilukuihin, koska kyseessä on päättymätön ja jaksoton desimaaliluku, eikä sitä voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

Harjoitustehtäviä

1. Mitkä keltaisen laatikon luvuista ovat
   a) luonnollisia lukuja?
   b) rationaalilukuja?
   c) kokonaislukuja?

$\frac{1}{3}, -3, 12, -5, \frac{8}{4}, 8, -\frac{5}{6}$

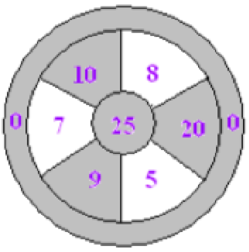
2. Merkitse

a) luku, joka kuuluu reaalilukuihin, muttei rationaalilukuihin.
b) luku, joka kuuluu rationaalilukuihin, muttei kokonaislukuihin.
c) luku, jonka desimaaliesitys on vähintään 4 merkkiä pitkä, ja joka voidaan esittää myös kahden kokonaisluvun osamääränä.

3. Mistä lukujoukoista luvut on otettu? Valitse suppein.
a) -3, -2, 0, 2, 6, 10, 15
b) 2, 4, 6, 8, 10, 12
c) -6, 0, *pii*, $\frac{3}{7}$

4. Muodosta sellainen laskulauseke kahdeksan kahdeksikon avulla, jonka tulos on 1000.

5. Oheiseen tikkatauluun heitetään kolme tikkaa. Kaikki tikat jäävät tauluun. Ilmoita kaikki mahdollisuudet, joilla saadaan tulokseksi 25. (Peruskoulun matematiikkakilpailu 11.11.1999)



1.2. Monikerrat ja jaollisuus

Luvun monikerta saadaan, kun luku kerrotaan luonnollisella luvulla. Monikerroista muodostuu kyseisen luvun kertotaulu. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

a) Luvun 2 monikertoja ovat 2, 4, 6, 8, 10, 12, … kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 2.
b) Luvun 5 monikertoja ovat 5, 10, 15, 20, 25, … kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 5.

Luku on *jaollinen* toisella luvulla, jos lukujen *jakojäännös* on nolla, eli tulos on kokonaisluku. Jos luku ei ole *jaollinen* toisella luvulla, jakolaskusta jää *jakojäännös*.

Luvulla jaollisia ovat vain kyseisen luvun monikerrat. Joka toinen kokonaisluku on jaollinen kahdella. Joka kolmas kokonaisluku on jaollinen kolmella jne.

Lukujen jaollisuussääntöjä:
Jokainen luku on jaollinen luvulla *yksi* ja *itsellään*. Lisäksi luku on jaollinen

- *kahdella*, jos sen viimeinen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8.
- *kolmella*, jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella 3, 6, 9, …
- *viidellä*, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
- *kuudella*, jos luku on jaollinen sekä kahdella että kolmella.
- *yhdeksällä*, jos luvun numeroiden summa on yhdeksän monikerta 9, 18, 27, …
- *kymmenellä*, jos sen viimeinen numero on 0. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 2.

a) 1 024 on jaollinen kahdella, koska sen viimeinen numero on 4.
b) 12 345 on jaollinen kolmella, koska $\frac{1+2+3+4+5}{3} = \frac{15}{3} = 5$.
c) 6 725 on jaollinen viidellä, koska sen viimeinen numero on 5.
d) 246 on jaollinen kuudella, koska sen viimeinen numero on 6 ja $\frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$.
e) 3 456 on jaollinen yhdeksällä, koska $\frac{3+4+5+6}{9} = \frac{18}{9} = 2$.
f) 6 732 543 247 610 on jaollinen kymmenellä, koska sen viimeinen numero on 0.

Harjoitustehtäviä

6. Luettele lukujen kolme seuraavaa monikertaa
a) 0
b) 1
c) 8
d) 12

7. Ympyröi luvut, jotka ovat jaollisia yhdeksällä.

$$46, 108, 54, 127, 162$$

8. Ympyröi luvut, jotka ovat jaollisia luvulla 11.

$$66, 132, 100, 121, 145$$

9. Erään luvun numeroiden summa on 12.
a) Muodosta kaksi tällaista lukua.
b) Mitä voit sanoa tällaisten lukujen jaollisuudesta?

10. Erään luvun numeroiden summa on 18.
a) Muodosta kaksi tällaista lukua.
b) Mitä voit sanoa tällaisten lukujen jaollisuudesta?

11. Muodosta kuusinumeroinen luku, joka on jaollinen
a) neljällä
b) kuudella
c) yhdeksällä

12. Ympyröi oikea vaihtoehto

a) Kahden parillisen luvun summa on parillinen / pariton luku.

b) Kahden parittoman luvun summa on parillinen / pariton luku.

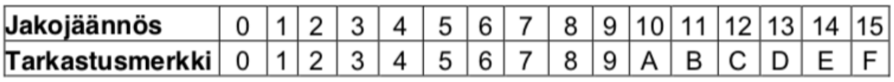
c) Parillisen ja parittoman luvun summa on parillinen / pariton luku.

d) Parillisen ja parittoman luvun tulo on parillinen / pariton luku.

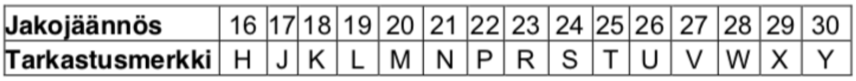
13. Mikä luonnollinen luku on kysymyksessä?
1. vihje: Se on pienempi kuin 100.
2. vihje: Se on jaollinen viidellä.
3. vihje: Se on parillinen.
4. vihje: Kun se jaetaan seitsemällä, on jakojäännös 4.

14. Henkilötunnus muodostuu syntymäajasta, yksilönumerosta ja tarkistusmerkistä. Syntymäajan jäljessä oleva merkki kertoo syntymävuosisadan. Henkilöllä, joka on syntynyt 1800-luvulla, se on plusmerkki (+), 1900-luvulla syntyneillä se on yhdysmerkki (-) ja 2000-luvulla syntyneillä A-kirjain. Yksilönumerossa on kolme numeroa, sillä erotetaan toisistaan henkilöt, joilla on sama syntymäaika. Yksilönumero on miehillä pariton ja naisilla parillinen.

Henkilötunnuksen viimeinen merkki on tarkistusmerkki. Se muodostuu siten, että muodostetaan syntymäajasta ja yksilönumerosta yhdeksännumeroinen luku. Jaetaan tämä luku 31:llä ja katsotaan jakojäännöksen perusteella viimeinen henkilötunnuksen merkki oheisesta taulukosta. (Lähde: luntti.net)



Jakojäännös	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Tarkastusmerkki	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F



Jakojäännös	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Tarkastusmerkki	H	J	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y

Onko kyseessä mies vai nainen, mikä on syntymävuosi ja tarkistusmerkki, jos henkilön henkilötunnuksen alkuosa on

a) 220390-025
b) 171279-122
c) 101202A541
d) 121199+452
e) Tarkista oma tarkistusmerkkisi muodostamalla syntymäajastasi ja yksilönumerosta yhdeksännumeroinen luku ja jaa se 31:llä.

1.3. Murtoluvut

Kumman valitset: Kaksi palaa ensimmäisestä kakusta vai kolme palaa toisesta?

Nimityksiä:

osoittaja

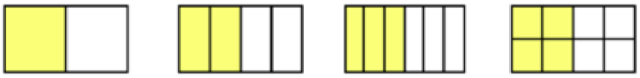
Murtoluku $\frac{3}{5}$

nimittäjä

Sekaluku $3\frac{1}{4}$ → murto-osa

→ kokonaisosa

Murtoluvut voivat olla keskenään yhtä suuret, vaikka niillä olisikin eri nimittäjät. Esimerkiksi seuraavat murtoluvut ovat keskenään yhtä suuria:



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

Kun murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla, sen arvo pysyy samana. Tällöin puhutaan laventamisesta. Laventaminen merkitään murtoluvun vasempaan yläkulmaan.

$$ {}^{2)}\frac{1}{3} \overset{(\cdot\,2)}{\underset{(\cdot\,2)}{=}} {}^{3)}\frac{2}{6} \overset{(\cdot\,3)}{\underset{(\cdot\,3)}{=}} \frac{6}{18} $$

Voitaisiin laventaa edelleen.

Murtoluvun arvo pysyy samana, jos sen osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla. Tällöin puhutaan supistamisesta. Supistaminen merkitään murtoluvun oikeaan yläkulmaan.

$$ \frac{16^{(4}}{24} \overset{(:4)}{\underset{(:4)}{=}} \frac{4^{(2}}{6} \overset{(:2)}{\underset{(:2)}{=}} \frac{2}{3} $$

Ei voida supistaa enempää.

Huom! Nollalla ei voi laventaa eikä supistaa! (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Järjestetään murtoluvut $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ ja $\frac{1}{2}$ suuruusjärjestykseen.

Lavennetaan murtoluvut ensin samannimisiksi. Koska murtolukujen pienin yhteinen nimittäjä on 8, murtoluvut lavennetaan siten, että kunkin nimittäjäksi tulee 8.

$\frac{^{2)}3}{4} = \frac{6}{8}$ Lavennetaan luvulla 2.

$\frac{7}{8}$ Ei tarvitse laventaa, nimittäjässä on luku 8.

$\frac{^{4)}1}{2} = \frac{4}{8}$ Lavennetaan luvulla 4.

Nyt murtoluvut voidaan helposti laittaa suuruusjärjestykseen: $\frac{4}{8}, \frac{6}{8}$ ja $\frac{7}{8}$

Vastaus supistetussa muodossa: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ja $\frac{7}{8}$.

Harjoitustehtäviä

15. Muunna sekaluvuksi

a) $\frac{10}{3}$
b) $\frac{13}{5}$
c) $\frac{50}{7}$
d) $\frac{132}{18}$

16. Lavenna samannimisiksi.

a) $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{15}$
c) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{4}{9}$
d) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{9}{11}$

1.4. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Esimerkki 3.

Lasketaan $-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$.

$$-\frac{^{4)}2}{5}-\frac{^{5)}3}{4}=-\frac{8}{20}-\frac{15}{20}=\frac{-8-15}{20}=\frac{-23}{20}=-1\frac{3}{20}$$

Huom! Muista siirtää edessä oleva miinusmerkki osoittajaan, kun suoritat osoittajien laskutoimitukset.

Harjoitustehtäviä

17. Muodosta ja laske lukujen $\frac{5}{6}$ ja $\frac{2}{3}$
a) summa
b) erotus.

18. Laske
a) lukujen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{6}$ summa
b) lukujen $\frac{9}{10}$ ja $\frac{7}{8}$ erotus.

19. Vähennä lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ erotus lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ summasta.

20. Laske
a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$
b) $\frac{8}{b}-\frac{3}{b}$
c) $\frac{12}{2y}-\frac{10}{2y}$

21. Laske
a) $\frac{3}{a}+\frac{4}{2a}$
b) $\frac{1}{5x}+\frac{1}{10x}$
c) $\frac{4}{3y}-\frac{1}{2y}$

1.5. Murtolukujen kertolasku

Esimerkki 1.

Kerrotaan luku $\frac{3}{4}$ luvulla $\frac{5}{7}$.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{15}{28}$ Kerrotaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

Esimerkki 2.

$4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{48^{(2}}{10} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

Muutetaan ensin kokonaisluvut ja sekaluvut epämurtoluvuiksi.

Harjoitustehtäviä

22. Laske
a) $\frac{1}{2} \cdot 2$
b) $5 \cdot \frac{1}{5}$
c) $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9}$
d) $\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{5}{7}$

23. Laske
a) $\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{6}$
b) $1\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{7}$

24. Keksi kertolasku, jonka tulos on
a) $\frac{4}{5}$
b) $1\frac{1}{2}$
c) $-\frac{7}{8}$

25. Laske, paljonko on
a) neljäsosa 48 eurosta.
b) viidesosa 950 grammasta
c) kolme seitsemäsosaa 54 kilogrammasta?

26. Paavolla on pussillinen kolikoita. Hän antaa niistä $\frac{1}{8}$ äidilleen ja jäljelle jääneistä kolikoista hän antaa puolet veljelleen. Isä saa jääneistä $\frac{2}{7}$, jolloin Paavolle jää 25 kolikkoa. Paljonko kolikoita oli alun perin?

27. Järveen on pystytetty pylväs. Pylväästä puolet on maan alla pohjassa, kaksi viidesosaa vedessä ja 70 senttimetriä veden pinnan yläpuolella. Kuinka pitkä pylväs on kokonaisuudessaan?

1.6. Murtolukujen jakolasku

Luku (myös murtoluku) jaetaan siten, että se kerrotaan jakajan käänteisluvulla. Esim. $4 : 2 = 4 \cdot \frac{1}{2}$

Murtoluvun käänteisluku saadaan vaihtamalla osoittaja ja nimittäjä keskenään. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina 1.

Huom! Nollalla ei ole käänteislukua. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Muodostetaan lukujen 2 ja $\frac{4}{5}$ käänteisluvut.

$2 \xRightarrow{käänteisluku} \frac{1}{2}$ tulo: $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{4}{5} \xRightarrow{käänteisluku} \frac{5}{4}$ tulo: $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$

Esimerkki 2.

Jaetaan luku $\frac{1}{4}$ luvulla $\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ Kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

Harjoitustehtäviä

28. Laske
a) $2 : \frac{1}{2}$
b) $3 : \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2} : 5$

29. Laske
a) $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$
b) $\frac{5}{8} : \frac{8}{5}$

30. Laske murtolukujen $\frac{4}{9}$ ja $\frac{5}{6}$
a) summa
b) erotus
c) tulo
d) osamäärä

31. Keksi jakolasku, jonka tulos on
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $-\frac{2}{3}$

32. Jos $\frac{3}{4}$ kakkua jaetaan tasan neljälle hengelle, kuinka suuren osan kakkua kukin saa?

33. Keksi jakolasku, jonka tulos on
a) $-\frac{5}{6}$
b) $-2\frac{1}{3}$

1.7. Suhde

Suhdetta käytetään samoissa yksiköissä olevien suureiden vertaamiseen. Esimerkiksi erääseen urheiluseuraan kuuluvien tyttöjen ja poikien suhde on 4:5. Jos tytöt ja pojat jaettaisiin pienempiin mahdollisiin ryhmiin siten, että ryhmissä olisi ainoastaan joko tyttöjä tai poikia ja ryhmiä olisi oltava yhtä monta, muodostaisivat tytöt neljän ja pojat viiden hengen ryhmiä. Suhde ei kerro montako tyttöä, poikaa tai jäsentä seurassa on kaikkiaan. Suhteen perusteella voidaan kuitenkin tehdä seuraavat päätelmät:

- Tyttöjen määrä on jaollinen neljällä
- Poikien määrä on jaollinen viidellä
- Kaikkien jäsenten lukumäärä on jaollinen yhdeksällä

Kahden suureen tai luvun *suhde* on luku, joka ilmoittaa, kuinka monta kertaa jälkimmäinen sisältyy edelliseen. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Kerrostalon korkeus on 35 m ja omakotitalon 5 m. Lasketaan talojen korkeuksien välinen suhde.

$\frac{35\ m}{5\ m} = 7$ Kerrostalon korkeus on seitsemänkertainen omakotitalon korkeuteen verrattuna.

$\frac{5\ m}{35\ m} = \frac{1}{7}$ Omakotitalon korkeus on yksi seitsemäsosa kerrostalon korkeudesta.

Usein suhdelaskuissa käytetään jakomerkkinä kaksoispistettä.

$$35\ m : 5\ m = 7$$

Keskenään jaettavien suureiden yksikkö on sama, joten ne supistuvat pois. Suhteen arvolla ei ole siis yksikköä. Jos suhteen jäsenet eivät ole samassa yksikössä, on ne ennen arvon laskemista muutettava toisiaan vastaaviksi

Huom! Suhde ilmoitetaan yleensä sellaisessa muodossa, että sen molemmat jäsenet ovat kokonaislukuja. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Harjoitustehtäviä

34. Mikon pituus on 192 cm ja hänen poikansa Villen pituus on 120 cm. Laske pituuksien välinen suhde.

35. Kirsikoista $\frac{2}{9}$ on pilaantuneita. Mikä on pilaantuneiden ja pilaantumattomien kirsikoiden suhde?

36. Jos tarjottimella olevien mansikka- ja vadelmaleivosten suhde on 7:6, voiko leivoksia olla yhteensä 80 kappaletta?

37. Ilmoita väritettyjen ja värittämättömien alueiden pinta-alojen suhde.

a)

b)

c)

38. Laske suhteiden arvot.
a) 12 cm : 5 m
b) 3 kg : 210 g

39. 39-vuotiaalla äidillä on 13-vuotias poika. Mikä on äidin ja pojan ikävuosien suhde
a) tällä hetkellä
b) kymmenen vuotta sitten
c) kymmenen vuoden kuluttua?

40. Karkkipussissa on salmiakkeja ja hedelmäkarkkeja suhteessa 4:5. Kuinka suuri prosentuaalinen osuus on hedelmäkarkkeja?

41. Televisiokuvan korkeuden suhde leveyteen on nykyisin 3 : 4. Uudessa suunnittelussa teräväpiirtotelevisiossa (HDTV) se olisi 9 : 16. Ajatellaan, että nykysysteemillä kuvattu ohjelma näytettäisiin uudella kuvaruudulla. Kuinka suuri osa kuvaruudusta on jätettävä reunoiltaan mustaksi, jotta pystysuunta tulisi kokonaan näkyviin? Kuinka suuri osa kuva-alasta joutuisi puolestaan kuvaruudun ulkopuolelle, jos kuva levitettäisiin koko ruudun levyiseksi? (yo syksy 1996)

42. Kahdelle henkilölle jaetaan 400 euroa suhteessa 2:3. Laske osuudet.

43. Naudan ja possun jauhelihaa sekoitetaan suhteessa 2:1. Mikä tulee seosjauhelihan kilohinnaksi, jos naudan jauheliha maksaa 7,60e ja possun 5,20e?

44. Kolmion kulmien astelukujen suhteet ovat 2:3:5. Kuinka suuria kulmat ovat?

45. Leevi ja Eevi jakavat 480 euroa siten, että Leevin osuus on 30 % suurempi kuin Eevin. Paljonko rahaa kumpikin saa?

46. Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun niitä on sekoitettava suhteessa 1:3 ja halutaan 6,0 litraa mehua? (yo syksy 1993)

47. Jouko, Tapio ja Matti tekevät urakan, josta he saavat yhteensä 9000 euroa. Jouko on tehnyt urakan eteen töitä 140 tuntia, Tapio 160 tuntia ja Matti 200 tuntia. Tapion tuntipalkka on 10 % korkeampi kuin Joukon ja Matin puolestaan 10 % korkeampi kuin Tapion. Laske miesten palkkiot.

48. Desinfiointiliuosta sisältävän astian kyljessä on ohje: Väkevyys 40 % - laimenna ennen käyttöä 5-prosenttiseksi liuokseksi. Missä suhteessa liuosta ja vettä on sekoitettava ja kuinka paljon niitä on kaadettava 10 litran sankoon, että sanko tulisi täyteen 5-prosenttista liuosta? (yo syksy 1997)

1.8. Prosenttikertoimia ja prosenttiosuuksia

Prosentteja on käytetty 1600-luvun lopulta lähtien muun muassa verojen, korkojen ja tappioiden laskemisessa. Prosentin idea on kuitenkin peräisin jo Rooman keisari Augustuksen (63 eaa. – 14 jaa.) ajoilta. Hän määräsi kaikista huutokaupattavista tarvikkeista veroa, joka oli 1/100 tuotteen hinnasta. Prosentti nimitys tulee latinan sanasta *per centum*, sataa kohden tai *pro centum*, sadasta.

Prosentti on sadasosa.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Desimaalilukuna tai murtolukuna merkittyä prosenttia sanotaan *prosenttikertoimeksi*. *Prosenttiluku* saadaan prosenttikertoimesta siirtämällä pilkkua kaksi askelta oikealle. Yleensä vastauksissa ja tehtävänannoissa käytetään prosenttilukuja, mutta itse laskut suoritetaan prosenttikertoimien avulla. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Pentillä on 24 Facebook-ystävää listallaan, joista 6 on ulkomaalaista. Laske ulkomaalaisten ystävien prosenttiosuus kaikista ystävistä.

prosenttikerroin

$$\frac{6}{24} = 0{,}25 = 25\ \%$$

perusarvo prosenttiluku

Vastaus: Pentin Facebook-ystävistä 25 % on ulkomaalaisia.

Harjoitustehtäviä

49. Ylämäkeä varoittavassa liikennemerkissä prosenttiluku 7 % kuvaa mäen jyrkkyyttä (eli jokaisella 100 metrillä on nousua 7 metriä). Mikä on mäen jyrkkyys prosentteina, jos
a) 200 metrillä on nousua 30 m?
b) 150 metrillä on nousua 18 m?
c) 500 metrillä on nousua 500 metriä?

50. Autokauppias myi auton 41 600 eurolla. Palkkiona hän sai itse 624 euroa. Montako prosenttia palkkio on myyntihinnasta?

51. Montako prosenttia pienemmän suorakulmion pinta-ala on suuremman pinta-alasta?

52. Artun palkasta kolmasosa menee veroihin, viidesosa ruokaan ja kuudesosa vuokraan. Montako prosenttia jää jäljelle?

1.9. Prosenttiarvon laskeminen

Yleensä prosenteilla laskettaessa on prosenttiluvut ensiksi muutettava murtoluku- tai desimaalimuotoon. Prosentti eli *prosenttiarvo* lasketaan tietystä luvusta siten, että kerrotaan perusarvo prosenttikertoimella. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Prosenttiarvo

p prosenttia luvusa a on $\frac{p}{100} \cdot a$

Esimerkki 1.

Lasketaan, paljonko on 20 % luvusta 150.

$\frac{20}{100} \cdot 150 = 0{,}2 \cdot 150 = 30$ Prosenttiluku 20 % muunnetaan desimaalilukumuotoon.

Harjoitustehtäviä

53. Ihmisen kehossa on keskimäärin 64 % vettä. Montako kilogrammaa on vettä henkilössä, joka painaa
    a) 49 kg
    b) 82 kg

54. Vesimelonin vesipitoisuus on 99 %. Montako litraa vettä on vesimelonissa, joka painaa 8,5 kg?

55. Autoilija havaitsi tienvarressa olevasta näyttötaulusta todellisen nopeutensa olevan 92 km/h, kun auton nopeusmittari näytti 100 km/h. Mikä on auton todellinen nopeus, kun nopeusmittari näyttää 85 km/h? Nopeusmittarin näytön virheprosentin oletetaan olevan sama kaikilla nopeuksilla. (yo syksy 1999)

1.10. Lisäyksiä ja vähennyksiä prosentteina

Prosentuaalisen lisäyksen ja vähennyksen laskeminen

Kun perusarvo a kasvaa p %, on lopputulos $\left(\frac{100+p}{100}\right) * a$.

Kun perusarvo a pienenee p %, on lopputulos $\left(\frac{100-p}{100}\right) * a$.

Esimerkki 1.

Jäätelöbaarissa jäätelöannoksen veroton hinta on 4 e. Jäätelöannokseen on lisättävä arvolisävero (22 %). Paljonko on jäätelöannoksen verollinen myyntihinta?

Ratkaisu:

Jäätelöannoksen verollinen hinta on 100 % + 22 % = 122 % verottomaan hintaan verrattuna. Jäätelöannoksen hinta kasvaa siis 1,22-kertaiseksi. Jäätelöannoksen verollinen hinta saadaan kertomalla prosenttikerroin ja alkuperäinen hinta keskenään:

$$\left(\frac{100+22}{100}\right) \cdot 4e = 1{,}22 \cdot 4e = 4{,}88e$$

Esimerkki 2.

Lumilaudan alkuperäinen hinta on 400 e. Urheiluvälinekaupassa on alennusmyynti ja kaikista tuotteista ostaja saa 20 % alennuksen. Paljonko on lumilaudan alennettu hinta?

Ratkaisu:

$$\left(\frac{100-20}{100}\right) \cdot 400e = 0{,}8 \cdot 400e = 320e$$

Harjoitustehtäviä

56. Kirjakaupan kirjan alkuperäinen myyntihinta oli 39,80 e. Teppo sai kirjan hinnasta henkilökunta-alennusta 20 %. Paljonko Teppo maksoi kirjasta?

57. Aurinkolasien alkuperäinen hinta oli 93 e ja alennettu hinta 69,75 e. Montako prosenttia aurinkolasien hintaa oli alennettu?

58. Asunto-osakeyhtiö nosti asuntojen yhtiövastikkeita 8,5 %. Kuinka suureksi muodostui 64,5 neliömetrin suuruisen asunnon yhtiövastike, kun neliömetriltä oli aiemmin maksettu 2 euroa kuukaudessa? (yo kevät 2000)

1.11. Koronkorko

Esimerkki 1.

Pankkitilin vuotuinen korko on 2 %. Lasketaan, kuinka suureksi 1000 euron talletus kasvaa kahdeksassa vuodessa?

Kyseessä on lisäys prosenttina, joten laskutoimitus suoritetaan, kuten edellisessä kappaleessa opittiin.

Talletus 1. vuoden jälkeen $1{,}02 \cdot 1000e = 1020e$

Talletus 2. vuoden jälkeen $1{,}02 \cdot 1020e = 1020e = 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1000e = 1{,}02^2 \cdot 1000e = 1040{,}4e$

Talletus 3. vuoden jälkeen $1{,}02 \cdot 1040{,}4e = 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1000e = 1{,}02^3 \cdot 1000e \approx 1061{,}21e$

Edellisen perusteella nähdään, että talletus 8. vuoden jälkeen on

$$1{,}02^8 \cdot 1000e \approx 1174{,}66e$$

Pääoma *n* vuoden jälkeen, kun vuotuinen korko on *p* prosenttia ja alkupääoma on *a*:

$$p = (1 + \frac{p}{100})^n \cdot a$$

Esimerkki 2.

Freda jätti Tealle perinnöksi 118 022, 23 euron talletuksen, jotka oli sijoitettu kymmeneksi vuodeksi 12 % vuosikorolla. Paljonko talletuksen arvo oli alun perin?

$$118\,022{,}23 = (1 + \frac{12}{100})^{10} \cdot a$$

$$118\,022{,}23 = 1{,}12^{10} \cdot a$$

$$1{,}12^{10} \cdot a = 118\,022{,}23 \quad | \quad : 1{,}12^{10}$$

$$a = \frac{118\,022{,}23}{1{,}12^{10}}$$

$$a \approx 38\,000\ e$$

Harjoitustehtäviä

59. Pankkitilin vuotuinen korko on 2 %. Kuinka suureksi 1000 e talletus kasvaa
a) vuodessa
b) kolmessa vuodessa?

60. Monenko vuoden kuluttua 450 euron arvoinen postimerkki on arvoltaan ainakin 900 euroa, jos postimerkin arvo nousee vuosittain 7,5 %?

1.12. Muutos- ja vertailuprosentti sekä prosenttiyksikkö

Muutosprosentti

Kun lasketaan, montako prosenttia jokin on muuttunut (eli kasvanut tai vähentynyt),
- Lasketaan ensin muutoksen suuruus.
- Sitten lasketaan, montako prosenttia muutos on alkuperäisestä arvosta. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Elokuvalipun hintaa korotettiin 5 eurosta 6,5 euroon. Montako prosenttia elokuvalipun hinta nousi?

Hinnan nousu euroina:

$$6{,}5e - 5e = 1{,}5e$$

Hinnan nousu prosentteina:

$$\frac{1{,}5e}{5e} = 0{,}3 = 30\ \%$$

Vastaus: Elokuvalipun hinta nousi 30 %.

Vertailuprosentti

Kun lasketaan, montako prosenttia jokin luku on suurempi tai pienempi kuin jokin toinen luku, niin
- Lasketaan ensin lukujen erotus
- Verrataan erotusta kuin-sanan jälkeiseen lukuun. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 2.

Eveliinan pituus on 156 cm ja Tonin 182 cm. Kuinka monta prosenttia

a) Toni on pidempi kuin Eveliina?

Pituusero senttemetreinä: $182\ cm - 156\ cm = 26\ cm.$

Pituusero prosentteina: $\frac{26\ cm}{156\ cm} \approx 0{,}17 = 17\ \%.$

b) Eveliina on lyhyempi kuin Toni?

Pituusero prosentteina: $\frac{26\ cm}{182\ cm} \approx 0{,}14 = 14\ \%.$

Huom! Vertailuprosentti lasketaan samalla tavalla kuin muutosprosentti, mutta muutosprosentissa verrataan aina siihen arvoon, joka oli ajallisesti ensiksi. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Prosenttiyksikkö

Esimerkki 3.

Ydinvoiman kannatus laski 47 prosentista 34 prosenttiin. Montako

a) prosenttiyksikköä kannatus laski?

$$47 - 34 = 13$$

b) prosenttia kannatus laski?

$$\frac{13}{47} \approx 28\,\%$$

Vastaus: Kannatus laski a) 13 prosenttiyksikköä. b) 28 %.

Harjoitustehtäviä

61. Lentolipun hinta nousi 922 eurosta 1250 euroon, montako
a) euroa lentolipun hinta nousi?
b) prosenttia lentolipun hinta nousi?

62. Montako prosenttia
a) 6 on suurempi kuin 5?
b) 5 on pienempi kuin 6?

63. Taidekauppias osti taulun 420 eurolla. Myydessään sen hän sai siitä 30 euroa vähemmän. Montako prosenttia oli tappio?

64. Puolueen kannatus nousi 9 prosentista 10,5 prosenttiin. Montako
a) prosenttia kannatus nousi?
b) prosenttiyksikköä kannatus nousi?

65. Palkka nousi peräkkäisinä vuosina 5 %, 3,8 % ja 6,1 %.
a) Kuinka suureksi 1250 euron palkka oli kasvanut kaikkien korotusten jälkeen?
b) Montako prosenttiyksikköä korotus oli yhteensä?

66. Maailman pisin ihminen oli Agnus McCaskill, joka oli 236 cm mittainen kuollessaan Kanadassa v. 1863. Puolestaan lyhyin ihminen oli intialainen Gul Mohammed. Vuonna 1990 Gul oli 57 cm pituinen ja painoi 17 kg. Kuinka monta prosenttia
a) Gulin pituus oli Agnuksen pituudesta?
b) Agnus oli Gulia pidempi?
c) Gul oli Agnusta lyhyempi?

67. Tanssiryhmässä oli aluksi 12 tanssijaa. Montako prosenttia tanssijoiden määrä kasvoi tai väheni, kun se kasvoi ensin

a) 100 % ja väheni sitten 25 %?
b) 50 % ja väheni sitten 50 %?
c) 200 % ja väheni sitten 75 %?

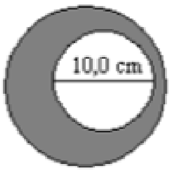
68. Henkilön bruttopalkka nousi 1170 eurosta 1300 euroon ja samalla veroprosentti nousi 25 %:sta 28 %:iin. (Bruttopalkalla tarkoitetaan palkkaa, josta ei ole vähennetty veroja. Nettopalkasta verot on vähennetty.) Montako
a) euroa nettopalkka nousi?
b) prosenttia nettopalkka nousi?

69. Henkilö osti viikon alussa 4,20 markalla litran maitotölkin, josta hän ehti käyttää 8 dl ennen maidon happanemista. Seuraavalla viikolla hän osti kaksi puolen litran maitotölkkiä 2,50 markalla kappale käyttäen kaiken maidon. Kummalla viikolla käytetty maito tuli hänelle edullisemmaksi ja kuinka monta prosenttia? (yo kevät 1995)

70. Parturi- ja kampaamoveromaksut muodostuvat verottomasta hinnasta ja arvonlisäverosta, joka on 22 % palvelun verottomasta hinnasta. Hiusten leikkaus maksoi 23 euroa. Kuinka suuri tämä maksu olisi ollut, jos arvonlisävero olisi ollut 10 prosenttiyksikköä pienempi? (yo syksy 2000)

71. Erääseen oppilaitokseen valittiin oppilaita seuraavasti. Osastolle A valittiin tyttöjä 300 hakijasta 48 ja poikia 20 hakijasta 3 ja osastolle B tyttöjä 20 hakijasta 4 ja poikia 600 hakijasta 114. Osoita, että kummallakin osastolla tyttöjen hyväksymisprosentti oli 1 prosenttiyksikön verran suurempi, mutta että siitä huolimatta koko oppilaitoksessa poikien hyväksymisprosentti oli suurempi kuin tyttöjen. (yo kevät 1995)

72. Laske värjätyn alueen ala, kun pienemmän ympyrän ala on 40,0 % suuremman ympirän alasta.
(pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen 1994)



1.13. Tuntematon perusarvo

Prosenttilaskennassa on oltava tarkkana siitä, mikä on perusarvo, johon prosentuaalinen muutos kohdistuu. Luvun muuttuessa useita kertoja peräkkäin on perusarvona kulloinkin muutoksen kohteena ollut arvo. Joissakin tehtävissä perusarvo ei ole tiedossa, tällöin sitä merkitän jollakin kirjainvakiolla ja laskut suoritetaan muuten tavalliseen tapaan. (Lähde: avoinoppikirja)

Esimerkki 1.

Mistä luvusta 20 % on 37?

Ratkaisu:

Merkitään perusarvoa kirjaimella *a* ja muodostetaan yhtälö:

$$0{,}2 \cdot a = 37 \quad | \quad : 0{,}2$$

$$a = \frac{37}{0{,}2}$$

$$a = 185$$

Esimerkki 2.

Tietokoneen hintaa alennettiin ensin 10 % ja myöhemmin vielä 15 %. Alennuksen jälkeen tietokone maksoi 1071 euroa. Paljonko tietokone maksoi alun perin?

Ratkaisu:

Merkitään tietokoneen alkuperäistä hintaa *x*:llä ja muodostetaan yhtälö:

10 % halvempi tuotteen hinta saadaan kertomalla alkuperäinen hinta luvulla 0,9 ja vastaavasti 15 % lisäalennus huomioidaan kertomalla edellinen hinta luvulla 0,85.

$$0{,}85 \cdot 0{,}9 \cdot x = 1071\ e$$

$$0{,}765x = 1071\ e$$

$$x = 1400\ e$$

Vastaus: Tietokoneen hinta oli ennen alennuksia 1400 euroa.

Esimerkki 3.

Lukuun lisätään ensin 25 % ja sitten siitä vähennetään 50 %. Montako prosenttia saatu luku on alkuperäisestä luvusta?

Ratkaisu:

Perusarvoa eli alkuperäistä lukua ei nyt tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella a.

25 % korotus saadaan voimaan kertomalla perusarvo luvulla 1,25 ja 50 % lisävähennys huomioidaan kertomalla muuttunut perusarvo luvulla 0,50.

$$0{,}50 \cdot 1{,}25 \cdot a = 0{,}625a$$

Lasketaan lopuksi, montako prosenttia tämä on alkuperäisestä luvusta.

$$\frac{0{,}625a}{a} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$$

Vastaus: Luku on 62,5 % alkuperäisestä luvusta.

Harjoitustehtäviä

73. Mistä luvusta
a) 28 on 100 %?
b) 8 on 2 %?

74. Kuinka suuri on tontin kokonaispinta-ala, kun 32 % siitä on niittyä ja loput 4,5 hehtaaria on metsää?

75. Tuotteen hinta laski 8 %, minkä jälkeen hinta oli 1150 e. Mikä oli tuotteen hinta ennen alennusta?

76. Puhelimen hinta nousi ensin 5 % ja sitten vielä 10 %. Montako prosenttia hinta nousi kaikkiaan?

77. Suomen EU-äänestyksessä annettiin KYLLÄ-ääniä 57 % ja EI-ääniä 43 % äänestysprosentin ollessa 71 %. Kuinka monta prosenttia KYLLÄ-äänien määrästä oli äänioikeutettujen määrästä? (yo kevät 1996)

78. Kirjan myyntihinta saadaan lisäämällä kirjan perushintaan 12 % arvonlisävero. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 22,30 euroa, perushintaa alennettiin 4,20 eurolla. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta? (yo syksy 1995)

79. Autoilija ajoi ajassa 2 h 40 min matkamittarinsa mukaan 205 km. Matkamittari näytti 5 % todellista matkaa suurempaa lukemaa. Mikä oli autoilijan keskinopeus? (yo syksy 1995)

80. Eräällä laivalinjalla matkustajamäärä väheni 23 % edellisvuodesta. Kuinka monta prosenttia matkustajamäärän pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin entiseen määrään? (yo kevät 1995)

81. Tuotteen myyntihinta laski 8 %. Myyntipalkkio, joka oli 25 % myyntihinnasta, nostettiin samalla 31 %:iin uudesta myyntihinnasta. Nousiko vai laskiko myyntipalkkio? (yo syksy 1997)

82. Vuonna 1995 erään pesujauheen markkinaosuus oli 15 %. Vuonna 1996 tämän pesuaineen myynti kasvoi 20 % ja pesujauheiden kokonaismyynti kasvoi 10 %. Mikä oli kyseessä olevan pesujauheen markkinaosuus vuonna 1996? (yo syksy 1998)

2. Algebra

Sana algebra juontaa juurensa arabiankielisestä sanasta ’al-jabr’. Persialainen matemaatikko Al-Khowarizm, jonka nimestä johtuu sana algoritmi, käytti kirjassansa 800-luvulla kyseistä sanaa al-jabr. Kyseinen kirja käsitteli erityisesti polynomiyhtälöitä ja niiden ratkaisemista, jonka vuoksi tällainen yhtälöihin liittyvä algoritmimaisuus liitetään helposti algebraan. Algebraa, kuten myös lukuteoriaa sekä geometriaa, on kuitenkin esiintynyt läpi matematiikan historian jo huomattavasti aiemminkin, jo muinaisen Babylonian (n. 2 000 eaa.) aikoihin.

Nykypäivänä algebra voidaan historiansa mukaan jakaa kolmeen eri kategoriaan: klassinen, moderni sekä abstrakti algebra. Klassinen algebra kulkee käsi kädessä koulumatematiikan kanssa, sillä sen voidaan katsoa käsittelevän reaali- ja kompleksilukujen (Kompleksiluvut ovat reaaliluvuista seuraava lukualue, joita esimerkiksi sähköinsinöörit käyttävät työssään päivittäin.) yhtälöitä, joihin liitetään perinteiset laskutoimitukset kuten summa ja tulo. Kuten nimitys reaalilukukin kertoo, reaalisten yhtälöiden (eli siis yhtälö, missä ratkaistava muuttuja on reaaliluku) hyödyntäminen reaalimaailman ongelmissa on merkittävä ja jokainen yksilö törmää näihin varmasti päivittäin, vaikkei sitä tiedostaisikaan. Esimerkiksi päivittäisestä bussilla matkustamisesta ja mukana olevasta bussikortin saldosta voinee muodostaa ensimmäisen asteen polynomiyhtälön, josta voidaan ratkaista, kuinka monta reissua kortissa on vielä jäljellä, jos tiedetään kortin saldo sekä yksittäisen reissun hinta. Ilmiöihin, joiden välistä yhteyttä matematiikkaan on hankalampi löytää, liittyy mahdollisesti hieman peruskoulun ylittävää matematiikkaa, mutta mitä enemmän oppii sen paremmin rakentuu ymmärrys miksi juuri kyseinen matematiikan rakenne/työkalu on olemassa.

2.1. Potenssimerkintä

Potenssi on kertolaskun lyhennetty merkitsemistapa silloin, kun samaa lukua kerrotaan itsellään useamman kerran. Merkinnässä x^n

- x on kantaluku eli tulon tekijä
- n on eksponentti eli tekijöiden lukumäärä. (Lähde: luntti.net)

Eksponentti vaikuttaa ainoastaan siihen lukuun, jonka oikeaan yläkulmaan se on kirjoitettu. Jos vaikutusaluetta halutaan laajentaa, on käytettävä sulkeita. Potenssissa $(-2)^4$ on kantalukuna -2, jolloin $(-2)^4 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{4\,kpl} = 16$. Jos potenssimerkinnästä jätetään sulkeet pois ja merkitään -2^4, on potenssin kantalukuna 2, jolloin $-2^4 = -(2^4) - \left(\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{4\,kpl}\right) = -(16) = -16.$

Kantaluku on merkittävä sulkeisiin, jos

- tulon tekijä on negatiivinen
- tulon tekijänä on summa, erotus, tulo, osamäärä tai potenssi.

Potenssin merkkisääntö:

Jos potenssin x^n kantaluku x on negatiivinen ja eksponentti n on

- parillinen, potenssin arvo on positiivinen
- pariton, potenssin arvo on negatiivinen. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1. Laske

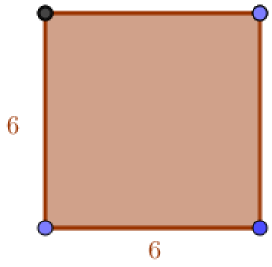
a) $(-3)^2 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{2\,kpl} = 9$ parillinen määrä kerrottavia

b) $(-2)^3 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{3\,kpl} = -8$ pariton määrä kerrottavia

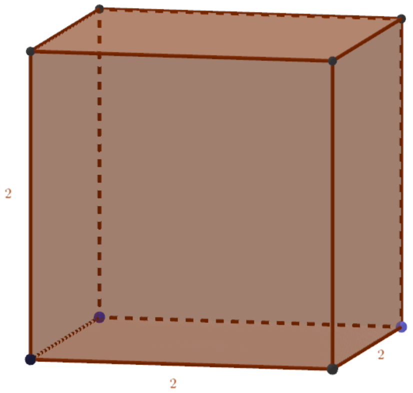
c) $-5^2 = -(5^2) = -(\underbrace{5\cdot 5}_{2\,kpl}) = -25$ kyseessä ei ole negatiivisen luvun potenssi

Esimerkki 2. Laske

a) neliön, jonka sivun pituus on 6 pinta-ala.



b) kuution, jonka särmän pituus on 2 tilavuus.



Ratkaisu:

a) Neliön pinta-ala saadaan kannan ja korkeuden tulona, joka voidaan ilmaista potenssin avulla:

$$A = 6^2 = 6\cdot 6 = 36$$

b) Kuution tilavuus saadaan pohjan (neliö) pinta-alan ja korkeuden tulona, joka voidaan ilmaista potenssin avulla:

$$V = 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$$

Huom! Luvun toista potenssia sanotaan luvun neliöksi. Luvun kolmatta potenssia taas luvun kuutioksi.

Harjoitustehtäviä

83. Merkitse tulot potenssimerkintää käyttäen
a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $-10 \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$
c) $a \cdot a \cdot a$

84. Merkitse potenssit tuloiksi
a) 100^1
b) b^3
c) 4^a, missä $a = 5$

85. Tosi vai epätosi? Perustele.
a) $-6^2 = 36$
b) $5^1 = 1$
c) $(-3)^2 = 9$

86. Ympyröi potenssimerkintöjen kantaluvut
a) $(-3)^2$
b) -2^4
c) a^9

87. Laske
a) $(-2)^5$
b) -3^2
c) $(-1)^{2018}$
d) $(-1)^{2019}$

88. Kirjoita potenssimuodossa, ei tarvitse sieventää.
a) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
c) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
d) $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{7}$
e) $(1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x)$

89. Merkitse potenssiksi ja laske luvun -5
a) neliö
b) kuutio.

90. Laske
a) $8^2 - 7^2$
b) $4^2 - 3^2$

c) $6^2 - 5^2$

d) Mitä havaitset? Miten voit laskea ilman laskinta $1000^2 - 999^2$

91. Mitkä kaksi luonnollista lukua on kyseessä?
1. vihje: Luvut ovat pienempiä kuin 10.
2. vihje: Lukujen erotus on 1.
3. vihje: Suurempi luku voidaan kirjoittaa muodossa joku luku potenssiin 2.
4. vihje: Pienempi luku voidaan kirjoittaa muodossa joku luku potenssiin 3.

92. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle.
a) $7^x = 49$
b) $10^x = 10\,000$
c) $x^2 = 64$
d) $2^x = 8$

2.2. * Samankantaisten potenssien tulo

Tulossa $4^2 \cdot 4^3$ on molempien potenssien kantaluku sama. Merkintää kutsutaankin *samankantaisten potenssien tuloksi*.

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2\ kpl} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4)}_{3\ kpl} = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$$

Samankantaiset potenssit kerrotaan keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen. Kantaluku pysyy samana.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a) $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$
b) $x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6$
c) $a^3 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^6 = a^{3+2} \cdot b^{1+6} = a^5 b^7$

Ainoastaan samankantaiset potenssit voidaan merkitä yhdellä potenssilla.

d) $3a^4 \cdot (-2a^3) = 3 \cdot (-2) \cdot a^4 \cdot a^3 = -6a^{4+3} = -6a^7$

Harjoitustehtäviä

93.Merkitse ja sievennä potenssien tulo.
a) $6x^3$ ja x^2
b) $3x^2$ ja $4x$
c) x^4 ja $5x^4$

94.Sievennä.
a) $6 \cdot x \cdot 4 \cdot x$
b) $2 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot (-4)$

95.Sievennä.
a) $2a^6b^4 \cdot 5a^2b^6$
b) $x^7y^9 \cdot xy$

2.3. * Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponenttina

Osamäärää $\frac{4^5}{4^2}$ kutsutaan *samankantaisten potenssien osamääräksi.*

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{\overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}^{5\ kpl}}{\underbrace{4 \cdot 4}_{2\ kpl}} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^{5-2} = 4^3 = 64$$

Samankantaiset potenssit jaetaan keskenään siten että osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti. Kantaluku pysyy samana.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssi.

a) $\frac{(-4)^7}{(-4)^5} = (-4)^{7-5} = (-4)^2 = 16$

b) $\frac{y^7}{y^3} = y^4$

c) $\frac{a^3 \cdot a^4 \cdot a^6}{a^2 \cdot a^5} = \frac{a^{3+4+6}}{a^{2+5}} = \frac{a^{13}}{a^7} = a^{13-7} = a^6$

Esimerkki 2.

Sievennetään potenssit.

a) $\frac{3x^4}{x} = 3x^{4-1} = 3x^3$

b) $\frac{-3^8}{3^5} = -3^{8-5} = -3^3 = -27$

c) $\frac{6a^4b^2}{3ab} = \frac{6}{3}a^{4-1}b^{2-1} = 2a^3b^1 = 2a^3b$

Tarkastellaan seuraavaksi jakolaskua $\frac{4^3}{4^3}$ kahdella eri tavalla. Sievennetään lauseke samankantaisten potenssien osamäärän avulla.

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 \text{ ja } \frac{4^3}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 1$$

Koska molemmat toimenpiteet ovat sallittuja, on lopputuloksien oltava yhtä suuret eli $4^0 = 1$.

Jos eksponenttina on nolla, on potenssin arvo aina 1. Kantalukuna ei kuitenkaan saa olla nolla, sillä nollalla ei saa jakaa.

$$a^0 = 1, \text{ kun } a \neq 0.$$

Esimerkki 3.

Sievennetään potenssit.

a) $99^0 = 1$
b) $-45^0 = -1$
c) $(-9274)^0 = 1$
d) 0^0 ei ole määritelty

Harjoitustehtäviä

96.Laske.
a) $5 \cdot 3^0$
b) $(\frac{10}{5})^0$
c) $0^4 \cdot 4^0$

97.Laske.
a) $\frac{2^9}{2^7}$

b) $\frac{9^8}{9^9}$

c) $-\frac{7^3}{7^5}$

d) $\frac{(-5)^4}{5^5}$

98.Laske.
a) 5^0
b) $(-17)^0$
c) -6^0
d) $x^0 + y^0 + z^0$, missä $x, y, z \neq 0$
e) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^0$, missä $a \neq 0$

99.Merkitse ja sievennä potenssien $6x^3$ ja x^2
a) tulo
b) osamäärä.

100. Laske $\frac{(-3)^{2019}}{(-3)^{2017}}$

101. Sievennä.

a) $\frac{b^2 \cdot b^4}{b^3}$

b) $\frac{c \cdot c^3 \cdot c^5}{c \cdot c^2}$

102.Sievennä.

a) $\frac{3x^2}{7x \cdot x}$

b) $\frac{x^4 \cdot y}{2x^2 \cdot 3x^2}$

103.Sievennä.

a) $\frac{15a^8b^7}{5a^3b}$

b) $\frac{4a^5b^{11}c^9}{32a^4b^6c^2}$

2.4. * Potenssin potenssi

Merkinnällä $(3^2)^4$ tarkoitetaan *potenssin potenssia*. Eksponenttina on luku 4 ja kantalukuna on sulkeiden sisältö eli 3^2. Käsitellään kantalukuna olevaa potenssia samoin kuin yksittäistä lukuakin. Potenssimerkintä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(3^2)^4 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{4\,kpl} = 3^{2+2+2+2} = 3^{4\cdot 2} = 3^8$$

Kyseessä on ennestään tuttu samankantaisten potenssien tulo.

Potenssi korotetaan potenssiin siten, että eksponentit kerrotaan keskenään. Kantaluku pysyy samana.

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

(Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a) $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$
b) $16(a^2)^2 = 16 \cdot a^{2\cdot 2} = 16a^4$

c) $2^{3^2} = 2^9 = 512$

Kyseessä ei ole potenssin potenssi, vaan eksponentin potenssiin korotus!

Esimerkki 2.

Mihin potenssiin luku 3 on korotettava, jotta vastaus olisi yhtä suuri kuin luku 9^5? Eli ratkaise yhtälö $3^x = 9^5$.

Ratkaisu:

Potenssin 9^5 kantalukuna on 9, joka saadaan luvun kolme potenssina seuraavasti: $3^2 = 9$. Sijoittamalla tämä yhdeksikön paikalle ja sieventämällä saadaan: $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$.

Vastaus: Luku 3 on korotettava potenssiin 10.

Harjoitustehtäviä

104.Sievennä.

a) $(10^2)^3$
b) $(y^4)^2$
c) $(100^{99})^0$
d) $(1^4)^2$
e) $(5^2)^{\frac{1}{2}}$

105.Sievennä.

a) $(k^4)^{10}$
b) $x^3(x^4)^6$
c) $(\frac{t^{14}}{t^5})^{11}$

106.Ilmoita luvut kahden potensseina (esim. $4^3 = 2^{jotain}$).

a) 4^3
b) 8^7
c) 16^{16}

107.Luvut 27 ja 81 ovat luvun kolme potensseja eli $3^3 = 27$ ja $3^4 = 81$. Anna tehtävien vastaukset luvun 3 potensseina.

a) $27 \cdot 81$
b) 27^2
c) $27 \cdot 81^3$
d) $\frac{81^5}{27^3}$

108.Sievennä.

$$\frac{6a(b^4)^2}{4(b^2)^3} \cdot \frac{2(a^2)^3}{3b^2(a^2)^2}$$

2.5. * Negatiivinen eksponentti

Esimerkki 1.

1) Supistamalla saadaan

$$\frac{4^3}{4^5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{4^2}$$

2) Toisaalta osamäärän potenssin laskusäännöllä saadaan

$$\frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2}$$

Merkitsemällä nämä yhtäsuuriksi saadaan

$$\frac{4^3}{4^5} = \frac{4^3}{4^5}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

Potenssin *negatiivinen eksponentti* tarkoittaa kantaluvun käänteisluvun vastaavaa positiivista potenssia.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, kun\ a \neq 0$$

Esimerkki 2.

a) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

b) $\frac{3^2}{3^4} = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Esimerkki 3.

Kirjoitetaan negatiivisen eksponentin avulla.

a) $\frac{1}{7} = 7^{-1}$

b) $\frac{5x}{y^2} = 5x \cdot \frac{1}{y^2} = 5xy^{-2}$

c) $\frac{1}{2a^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{1}{2}a^{-4}$

Harjoitustehtäviä

109. Mitkä laatikon lausekkeista on lausekkeen x^{-2} kanssa yhtä suuret, kun $x \neq 0$.

$$\boxed{-\frac{x}{2}, -x^2, -2x, -\frac{2}{x}, \frac{1}{x^2}, -\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{x^2}}$$

110. Sievennä yhdeksi murtoluvuksi.

a) $3^{-1} + 4^{-1}$
b) $5^{-1} \cdot 3^{-2}$

111. Tosi vai epätosi? Jos epätosi, niin miksi?

a) $(3^2)^3 < (3^3)^2$
b) $(9^5)^0 > (9^4)^{-1}$
c) $(2^3)^4 = (4^4)^2$

112.Laske $3^0 - 3^{-2}$. (yo kevät 1975)

2.6. Tulon potenssi

Jos potenssin kantalukuna on tulo $(4 \cdot 3)^2$, on kyseessä *tulon potenssi*, joka voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä noudattaen $(4 \cdot 3)^2 = (12)^2 = 144$. Tulon potenssilla on olemassa myös laskusääntönsä, jolla päädytään samaan lopputulokseen.

$$(4 \cdot 3)^2 = \underbrace{(4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3)}_{2\ kpl} = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

Tulon potenssi on tekijöiden tulo $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

(Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
b) $(5a^3b)^2 = 5^2 \cdot a^6 \cdot b^2 = 25a^6b^2$

Esimerkki 2.

Merkitään yhtenä potenssina.

a) $2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$
b) $16x^2y^2 = 4^2x^2y^2 = (4xy)^2$

Harjoitustehtäviä

113.Sievennä
a) $(-4a)^2$
b) $(3a)^5$
c) $(-10)^3$
d) $(10x^3y^4)^2$.

114.Merkitse yhtenä potenssina
a) $3^2 \cdot 5^2$
b) $4^5 \cdot 25^5$.

115.Sievennä

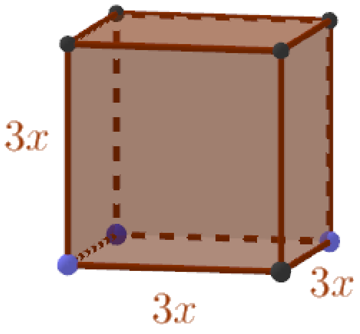
$$(x^4y)^2 \cdot (x^2y^3)^4.$$

116.Sievennä

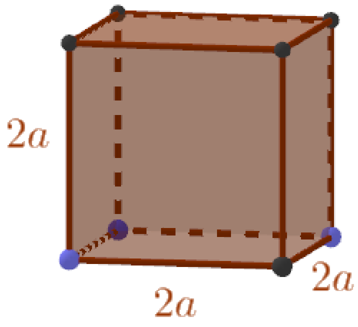
$$\frac{(a^7b^5)^2}{(a^4b^2)^3}.$$

117.Muodosta ja sievennä kuutioiden tilavuuksien lausekkeet

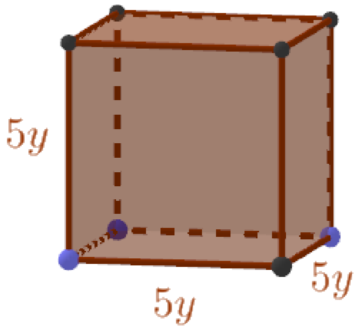
a)



b)



c)



118.Sievennä

$$\frac{(3a^4b^3)^2}{(a^2b^3)^3}\cdot\frac{(a^2b^2)^3}{9(a^2\mathrm{b})^2}.$$

2.7. * Osamäärän potenssi

Jos potenssin kantalukuna on osamäärä $(\frac{12}{3})^2$, kutsutaan merkintää *osamäärän potenssiksi*. Potenssin arvo voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä käyttäen $(\frac{12}{3})^2 = (4)^2 = 16$ tai korottamalla ensin sekä osoittaja että nimittäjä toiseen potenssiin.

$$(\frac{12}{3})^2 = \underbrace{\frac{12}{3} \cdot \frac{12}{3}}_{2\ kpl} = \frac{12 \cdot 12}{3 \cdot 3} = \frac{12^2}{3^2} = \frac{144}{9} = 16$$

Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

(Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

a) $\left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{6^2} = \frac{x^2}{36}$

b) $\left(\frac{2a^3a^2}{bb^5}\right)^4 = \left(\frac{2a^{3+2}}{b^{1+5}}\right)^4 = \left(\frac{2a^5}{b^6}\right)^4 = \frac{(2a^5)^4}{(b^6)^4} = \frac{2^4a^{5\cdot4}}{b^{6\cdot4}} = \frac{16a^{20}}{b^{24}}$

Esimerkki 2.

Lasketaan lausekkeet sieventämällä ensin yhdeksi potenssiksi

$$\frac{16^3}{8^3} = \left(\frac{16}{8}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Harjoitustehtäviä

119.Sievennä

a) $\left(\frac{2x}{5}\right)^2$

b) $\left(\frac{-3x}{4}\right)^2$

120.Muodosta ja sievennä lukujen $5m^3n^4$ ja $5m^2n$ osamäärän neliö.

121.Sievennä

a) $\frac{(-1)^4}{(-1)^{21}}$

b) $\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^6}$

122.Sievennä

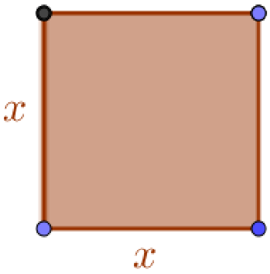
a) $\frac{8^3}{2^6}$

b) $\frac{7^{15}}{49^8 * 7}$

123.Sievennä, ilmoita vastaus ilman negatiivista potenssia.

$$(\frac{2a^4}{3b})^{-2}$$

2.8. Neliöjuuri



Esimerkki 1.

a) Olkoon neliön pinta-ala $A = 9$. Mikä on neliön sivun pituus?
b) Olkoon neliönmuotoisen lattian pinta-ala $A = 16m^2$. Mikä on lattian sivun pituus?

Ratkaisu:

a)

Neliön pinta-ala saadaan sivun neliönä, eli nyt tulee pohtia sitä, että mikä luku x toteuttaa yhtälön $x^2 = 9$.

Tiedämme, että $3^2 = 9$ ja toisaalta $(-3)^2 = 9$. Siispä $\boldsymbol{x = 3}$ tai $x = -3$. Kuitenkin, sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku, joten vain $x = 3$ kelpaa nyt yhtälön ratkaisuksi.

Vastaus: Sivun pituus on 3.

b)

Vastaavasti kuin edellä, mutta nyt otamme myös yksiköt huomioon vastauksessa. Mikä luku toteuttaa yhtälön $x^2 = 16\,m^2$. Tiedämme, että $(4\,m)^2 = 16\,m^2$ ja toisaalta $(-4m)^2 = 16\,m^2$, joten
$x = 4\,m$ tai $x = -4\,m$. Negatiivinen sivun pituus ei kelpaa, joten

Vastaus: Sivun pituus on 4 $\boldsymbol{m}$.

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö

a) $x^2 = 9$
b) $x^2 = 16$
c) $x^2 = -4$

Ratkaisu:

a) $\boldsymbol{x = 3}$ **tai** $\boldsymbol{x = -3}$, sillä $3^2 = 9$ tai $(-3)^2 = 9$.
b) $\boldsymbol{x = 4}$ **tai** $\boldsymbol{x = -4}$, sillä $4^2 = (-4)^2 = 16$.
c) **Ei ratkaisua,** sillä luvun x eksponentti on nyt parillinen luku 2. Tiedämme, että reaaliluku korotettuna parilliseen potenssiin on positiivinen reaaliluku.

Neliöjuuri vastaa kysymykseen, mikä luku x täytyy korottaa neliöön (toiseen potenssiin), jotta se olisi luku positiivinen luku a. Eli yhtälön $a = x^2$ ratkaisu, missä emme huomioi negatiivista ratkaisua.

$$\sqrt{a} = x, missä$$
$$1)\ a \geq 0$$
$$2)\ x \geq 0$$

1) Miksi $a \geq 0$?

   Tiedämme, ettei minkään luvun x parillinen potenssi voi olla negatiivinen luku, kuten esimerkin 2. c)-kohdassa huomasimme.

2) Miksi $x \geq 0$? Eli miksi emme hyväksy myös negatiivista ratkaisua?

   Voisimme siis määritellä, että esimerkiksi $\sqrt{9} = 3$ tai $\sqrt{9} = -3$, sillä $3^2 = (-3)^2 = 9$. Kuitenkin, neliöjuuren (reaaliluvuilla) määritelmässä on tehty **valinta**, että **neliöjuuri on vain ja ainoastaan positiivinen** ratkaisu. Tämä **valinta** on tehty siksi, että neliöjuuri olisi yksikäsitteinen, eli voidaan sanoa yksikäsitteisesti, että $\sqrt{9} = 3$.

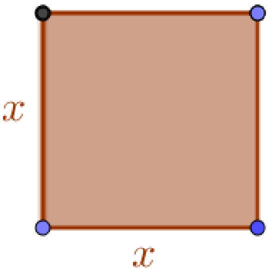
!Huom! Vaikka neliöjuuri onkin yksikäsitteinen, niin esimerkiksi yhtälön $x^2 = 9$ ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, vaan $x = \sqrt{9} = 3$ tai $x = -\sqrt{9} = 3$.

Esimerkki 3. Neliön pinta-ala on $15m^2$. Mikä on neliön sivun pituus?

Ratkaisu:

$$x = \sqrt{15} = 3{,}872983 \approx 3{,}9 \text{ (m)}$$

Vastaus: Neliön sivun pituus on noin 3,9 m.



1) Tulon neliöjuurelle pätee $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

2) Osamäärän neliöjuurelle pätee $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, missä $b \neq 0$. Sillä

1) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$
2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$

!Huom! $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, sillä esimerkiksi $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mutta $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Esimerkki 4. Sievennä

a) $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
c) $\sqrt{8}\sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

Harjoitustehtäviä

124.Onko väite tosi? Jos ei niin miksi?

a) $\sqrt{10} = 5$
b) $\sqrt{49} = -7$
c) $\sqrt{36} = 6$
d) $\sqrt{18} = 9$

125.Laske

a) $\sqrt{1}$
b) $\sqrt{0}$
c) $\sqrt{121}$

126.Omakotitalon tontti on neliön muotoinen ja sen pinta-ala on $1600\ m^2$. Paljonko aitaa tarvitaan tontin aitaamiseen, kun tuloaukoksi jätetään 3 m?

127.Arvioi ilman laskinta, mitä kokonaislukua lähinnä on

a) $\sqrt{26}$
b) $\sqrt{48}$
c) $\sqrt{80}$

128.Mikä luku on juurrettava, kun neliöjuuren arvo on

a) Yhtä suuri kuin juurrettava,
b) Puolet juurrettavasta
c) Kolminkertainen juurrettavaan verrattuna?

129.Laske ja ilmoita vastaus murtolukuna

a) $\sqrt{\frac{9}{25}}$
b) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

130.Laske

a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
b) $\sqrt{9 + 16}$

131. Laske

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16}$
b) $\sqrt{4 \cdot 16}$

132.Laske

a) $\sqrt{2 + \sqrt{4}}$
b) $\sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{81} - 5}$

133. Laske lausekkeen (toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan toinen ratkaisu) $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ arvo ilman laskinta, kun a = 1, b = 2 ja c = -8.

134.Laske lausekkeen $\sqrt{a^2+b^2}$ tarkka arvo, kun $a = 2$ ja $b = \frac{8}{3}$. (yo kevät 1984)

135.Laske lausekkeen $\sqrt{1-a^2}$ tarkka arvo, kun

a) $a = \frac{1}{2}$
b) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(yo syksy 1987)

136. Minkä positiivisen luvun neliöjuuri on luku $\sqrt{5} - 2$? Anna vastaus sekä tarkkana arvona, että likiarvona kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. (yo syksy 1994)

2.9. Polynomi

Ennen kuin siirrymme polynomeihin, on hyvä tiedostaa reaalilukujen laskulait (ns. reaalilukujen kunta-aksioomat), jotka mahdollistavat oikeaoppisen sieventämisen.

Yhteenlaskun vaihdantalaki:

$$\boldsymbol{a+b=b+a}$$

Yhteenlaskun liitäntälaki:

$$\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c}$$

Toisin sanoen **yhteenlaskun laskujärjestyksellä ei ole väliä** eli voimme laskea reaalilukuja yhteen haluamassamme järjestyksessä. Esimerkiksi $1+2+3=3+2+1=6$.

Vastaavat laskulait pätevät myös kertolaskulle.

Kertolaskun vaihdantalaki:

$$\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$$

Kertolaskun liitäntälaki:

$$\boldsymbol{a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot b\cdot c,}$$

Voimme siis suorittaa reaalilukujen välillä **kertolaskut haluamassamme järjestyksessä**. Esimerkiksi $2\cdot4\cdot7=8\cdot7=7\cdot8=56$ ja toisaalta $2\cdot4\cdot7=2\cdot28=28\cdot2=56$.

Usein laskulausekkeessa on kuitenkin sekä yhteen- että kertolaskuja samanaikaisesti.

Yhteen- ja kertolaskun osittelulait:

$$\boldsymbol{a\cdot(b+c)=ab+ac}$$
$$\boldsymbol{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c}$$

Kertoimen ja muuttujaosan tuloa sanotaan termiksi, esimerkiksi termissä $-10x^2$ kerroin on -10 ja muuttujaosa on x^2.

Polynomi on **lauseke**, mikä muodostuu **termien** yhteenlaskusta. Polynomin muuttujien eksponenttien täytyy olla **positiivisia kokonaislukuja.** Jos muuttujia on vain yksi, niin polynomin **asteluku** määräytyy sen muuttujan mukaan, jolla on suurin eksponentti. Jos termejä on kolme tai vähemmän, niin tällöin polynomia voidaan kutsua **monomiksi** (1)**, binomiksi** (2) tai **trinomiksi** (3).

Esimerkki 1.

a) Polynomin $2x^{13} - 4x^{11} + 5x + 11$ **asteluku** on **13**.
b) $-7x^2$ on **toisen asteen** monomi.
c) $7y + 3x = 7y^1 + 3x^1$ on **ensimmäisen asteen** binomi.
d) $4x^6 + 17y^2 + 5 = 4x^6 + 17y^2 + 5$ on **kuudennen asteen** trinomi.
e) $7 = x^0$ on **nollannen asteen** polynomi. $(x \neq 0)$

Polynomien yhteenlasku

Polynomin termejä kutsutaan **samanmuotoisiksi**, jos niiden muuttujaosat ovat samat. Samanmuotoisten termien välillä voidaan suorittaa yhteenlasku (sekä vähennyslasku), joka edesauttaa polynomin sieventämisessä. Yleensä polynomin termit järjestetään asteluvultaan suurimmasta pienimpään.

Esimerkki 2. Laske polynomien $2x^2 - 3x + 3$ ja $-5x + 1$ välinen

a) summa.
b) erotus.

Ratkaisu:

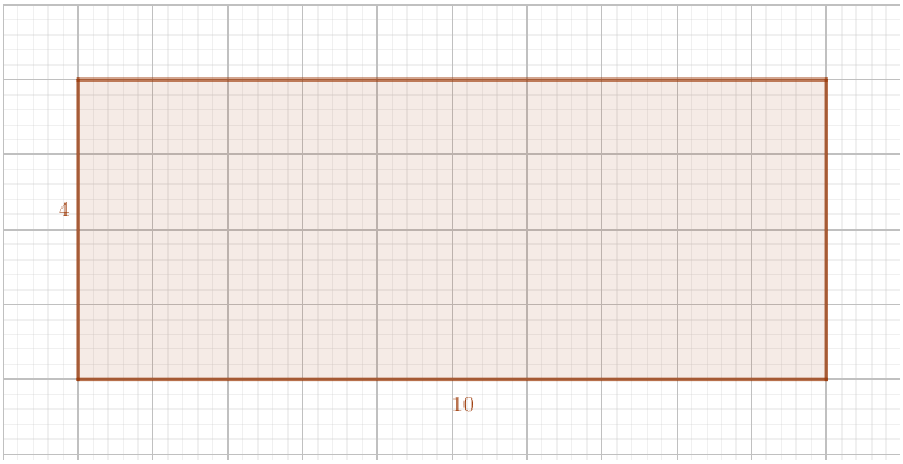
a) $2x^2 - 3x + 3 + (-5x + 1) = 2x^2 - 3x + 3 - 5x + 1$ | Poistetaan sulut
$= 2x^2 - 3x - 5x + 3 + 1$ | Samanmuotoiset termit peräkkäin
$= 2x^2 + (-3 - 5)x + 4$ | *) Lasketaan kerroinosat yhteen
$= 2x^2 - 8x + 4$

*) Kyseessä on tosiaankin yhteenlasku, sillä voimme ajatella kahden luvun välisen vähennyslaskun vastaavan yhteenlaskua, jossa ensimmäiseen lukuun lisätään toisen luvun vastaluku:
$-3 \cdot x - 5 \cdot x = -3 \cdot x + (-5) \cdot x = \big(-3 + (-5)\big) \cdot x = -8x.$

b) $2x^2 - 3x + 3 \mathbf{- (-5x + 1)} = 2x^2 - 3x + 3 + 5x - 1$
$= 2x^2 - 3x + 5x + 3 - 1$
$= 2x^2 + (-3 + 5)x + 3 - 1$
$= 2x^2 + 2x + 2$

Huom! Nyt sulkeita poistettaessa sulkujen edessä oli miinusmerkki, jolloin sulkujen sisällä olevien termien etumerkit vaihtuvat vastakkaismerkkisiksi.

Esimerkki 3. Laske suorakulmion



a) pinta-ala
b) piiri

Ratkaisu:

a) Merkitään pinta-alan lauseketta kirjaimella $\boldsymbol{A}$ (englanniksi $\boldsymbol{A}$rea). Koska suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, niin

$$A = 4 \cdot 10 = 40.$$

b) Suorakulmion piiri on sen sivujen pituuksien summa. Koska kyseessä on suorakulmio, niin sen vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret. Merkitään piirin lauseketta kirjaimella $\boldsymbol{p}$, jolloin

$$p = 4 + 10 + 4 + 10 = 28.$$

Esimerkki 4. Laske suorakulmion

a) pinta-ala
b) piiri

Ratkaisu:

a) Merkitään pinta-alan lauseketta kirjaimella A. Koska suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, niin

$$\boldsymbol{A = xy}.$$

b) Suorakulmion piiri on sen sivujen pituuksien summa. Koska kyseessä on suorakulmio, niin sen vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret. Merkitään piirin lauseketta kirjaimella p, jolloin

$$\boldsymbol{p} = x + y + x + y = x + x + y + y = \boldsymbol{2x + 2y}.$$

Muodostimme siis kaavat suorakulmion pinta-alalle ja piirille, joiden avulla voimme laskea vaivattomasti eri kokoisten suorakulmioiden pinta-aloja ja piirejä! Esimerkiksi, jos suorakulmion leveys $x = 20$ ja korkeus $y = 300$, niin pinta-ala $A(x, y) = A(20{,}300) = 20 \cdot 300 = 6000$ ja piiri $p(x, y) = p(20{,}300) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 300 = 640$.

Polynomien kertolasku (eli tulo)

- Monomien välisessä kertolaskussa (**monomi** · **monomi**) kertoimet kerrotaan keskenään ja muuttujaosat keskenään. Esimerkiksi
  $2a \cdot 3a^2 = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 = 6 \cdot a^{1+2} = 6a^3$.
- **Monomi** · **binomi** voidaan sieventää yhteen- ja kertolaskun osittelulain avulla. Esimerkiksi.
  $4(2a + 3) = 4 \cdot 2a + 4 \cdot 3 = 8a + 12$.
- **Binomi** · **binomi** voidaan sieventää vastaavasti yhteen- ja kertolaskun osittelulain avulla, mutta lakia joudutaan käyttämään nyt useamman kerran. Esimerkiksi
  $$\begin{aligned}(a + 3)(a - 2) &= a \cdot (a - 2) + 3 \cdot (a - 2)\\ &= a \cdot a + a \cdot (-2) + 3 \cdot a + 3 \cdot (-2)\\ &= a^2 - 2a + 3a - 6\\ &= a^2 + a - 6\end{aligned}$$

Esimerkki 5. Sievennä $(3a-5)(2a^2-a+4)$.

Ratkaisu:

$(3a-5)(2a^2-a+4)$
$= 3a\cdot(2a^2-a+4)-5\cdot(2a^2-a+4)$ *
$= 3a\cdot 2a^2+3a\cdot(-a)+3a\cdot 4-5\cdot 2a^2-5\cdot(-a)-5\cdot 4$
$= 6a^3-3a^2+12a-10a^2+5a-20$ **
$= 6a^3-3a^2-10a^2+12a+5a-20$
$= 6a^3-13a^2+17a-20$

*) Tämä välivaihe ei ole välttämätön. Se on tässä sen vuoksi, että sieventämisessä käytettävän yhteen- ja kertolaskun osittelulaki ilmenee selvemmin.
**) Yhteenlaskun vaihdantalaki eli voidaan vaihtaa laskujärjestystä kokoamalla samanmuotoiset termit peräkkäin.

Esimerkki 6. Sievennä $(x+1)(x-2)(x+4)$.

Ratkaisu:

$(x+1)(x-2)(x+4)$
$= \left(x\cdot(x-2)+1\cdot(x-2)\right)\cdot(x+4)$ *
$= (x^2-2x+x-2)\cdot(x+4)$
$= (x^2-x-2)\cdot(x+4)$
$= x^2\cdot(x+4)-x\cdot(x+4)-2\cdot(x+4)$
$= x^3+4x^2-x^2-4x-2x-8$
$= x^3+3x^2-6x-8$ **

*) Muista kirjoittaa kertolaskun $(x+1)\cdot(x-2)$ tulos sulkeiden sisälle!
**) Vastaavaan lopputulokseen olisimme päätyneet myös sillä, että olisimme laskeneet ensin oikean puoleisen tulon sulkeiden sisällä eli $(x+1)\cdot\left(x\cdot(x+4)-2\cdot(x+4)\right)$ ja sieventäneet tämän loppuun.

Harjoitustehtäviä

137.Sievennä polynomit asteluvun mukaisesti (suurimmasta pienimpään).
a) $2x + x^2 + 1$
b) $5y + 2 + 3y^2 + 4y^6$
c) $-3 + 3y^2 + x^2$
d) $-5x^3 + 4y^5 + 7 + 2x^9 + 133$

138. Laske funktion $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ arvo, kun
a) $x = 1$
b) $x = -1$
c) $x = 2$
d) $x = -3$.

139. Sievennä.
a) $x \cdot 5 \cdot x \cdot 4$
b) $y \cdot 2 \cdot x \cdot (-2)$
c) $-4 \cdot (-b) \cdot (-2) \cdot (-a) \cdot (-a)$
d) $\frac{4}{5}x\frac{5}{4}y \cdot 2z$

140. Avaa sulkeet.

a) $8(a + b)$
b) $-2(a - b)$
c) $5(-3a - 4b)$
d) $- 2(-6a + 5b)$

141.Laske binomien $7a - 1$ ja $-2a + 3$
a) summa.
b) erotus.

142.Sievennä.
a) $a(a + 3)$ b)$3a(5 + 4a)$
c) $6a(a - 6)$ d) $(a^2 - a)a$

143.Sievennä.
a) $(x + 1)(x + 3)$ b) $(n - 1)(n + 2)$
c) $(2 - 2y)(3y - 4)$ d) $(a + b)(x - a)$

144.Sievennä.
a) $(x + 5)(2x^2 - 3x + 4)$
b) $(3a^2 - a + 6)(a - 2)$
c) $(a + 4)2a(3a - 1)$

145.Sievennä.

a) $(a + b)^2$
b) $(a - b)^2$
c) $(a + b)(a - b)$

Eli johda ns. **binomikaavat**.

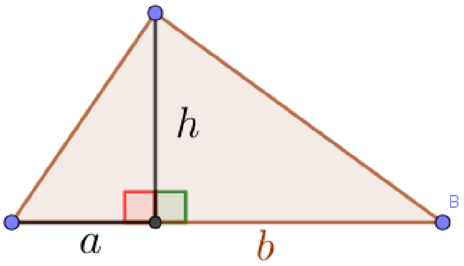
146.Tehtävässä 90. tutkimme luvun neliön ja lukua yhden verran pienemmän luvun neliön välistä erotusta. Johda yleinen lauseke erotukselle-

Vihje: Merkitään ensimmäinen luku $x + 1$, jolloin yhden verran pienempi luku on x. Tämän jälkeen voidaan sieventää lauseke

$$(x + 1)^2 - x^2,$$

jonka lopputuloksena saadaan tehtävässä 90. havaittu tulos siten, että se pätee kaikilla luvuilla $x + 1$ ja x.

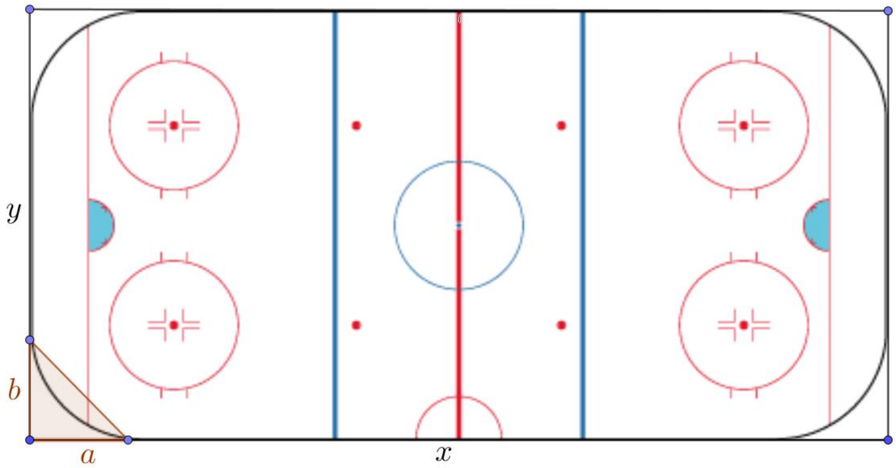
147. Olkoon teräväkulmainen kolmio kuvan merkinnöin.



Osoita, että kyseisen teräväkulmaisen kolmion pinta-ala $A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

Vihje: Tiedämme, että suorakulmaisen kolmion pinta-alalle pätee $A_{sk} = \frac{kanta\cdot korkeus}{2}$. Muodosta kuvassa olevan kahden pienemmän suorakulmaisen kolmion pinta-alan lausekkeet A_1 ja A_2. Laske nämä lausekkeet yhteen ja sievennä.

148. Jääkiekkokaukalon pinta-alasta saa melko hyvän arvion, kun arvioi sen olevan suorakulmio. Vielä paremman arvion saa siten, että arvioi kaukalon ulkopuolelle jäävän pinta-ala osuuksien muodostuvan kolmioista ja vähentää suorakulmion pinta-alasta.



a) Muodosta jääkiekkokaukalon pinta-alan funktio $A_S(x, y)$, kun oletetaan jääkiekkokaukalon olevan suorakulmio.
b) Muodosta ylimenevän osuuden (kaikki kolmiot!) pinta-ala funktio $A_K(a, b)$.
c) Muodosta kaukalon pinta-alan funktio $A(x, y, a, b)$, kun otamme huomioon nämä ylimenevät osuudet.
d) Laske Hakametsän kaukalon pinta-ala A. Hakametsän kentän sivujen pituudet ovat $60\ m$ ja $28m$. Lisäksi, kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden sivujen pituudet ovat $6\ m$.

* Pascalin kolmion avulla voidaan määrittää binomikaavat myös korkeampiasteisille polynomeille.

KERTOIMET	KORKEIMMAN ASTEEN TERMIN ASTELUKU
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5

Esimerkiksi:

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$\begin{aligned}(2a-3b)^5 &= \big(2a+(-3b)\big)^5\\ &= 1(2a)^5 + 5(2a)^4(-3b) + 10(2a)^3(-3b)^2 + 10(2a)^2(-3b)^3\\ &+ 5(2a)^1(-3b)^4 + 1(-3b)^5\\ &= 32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5\end{aligned}$$

- Pascalin kolmiosta luetaan ensin mihin eksponenttiin binomilauseke korotetaan, ylin taso vastaa eksponenttia 0 ja kasvaa aina yhdellä mentäessä kolmiota alaspäin.

- Tämän jälkeen termien kertoimet voidaan lukea suoraan kolmiosta ja muuttujaosien eksponentit pienenevät tai kasvavat yhdellä riippuen kummasta termistä on kyse.

149.Hyödynnä Pascalin kolmiota ja sievennä seuraavat binomien eksponentit

a) $(x+2)^5$

b) $(2x-7)^3$

2.10. Ensimmäisen asteen polynomiyhtälöt ja yhtälöparit

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $3x + 1 = x - 2$.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
3x + 1 &= x - 2 && |-x \\
3x + 1 - x &= x - 2 - x \\
3x - x + 1 &= x - x - 2 \\
2x + 1 &= -2 && |-1 \\
2x + 1 - 1 &= -2 - 1 \\
2x &= -3 && |:2 \\
\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Yhtälöä ratkaistaessa haluamme päätyä lopputulokseen, missä yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on ratkaistava muuttuja, jonka kerroin on 1 ja toisella puolella loput termit.

1) Halusimme yhtälön muuttujat yhtälön vasemmalle puolelle. Vähensimme yhtälöstä puolittain x, sillä $x - x = 0$, eli toisin sanoen $-x$ on yhtälön oikealla puolella olevan termin x vastaluku.
2) Halusimme yhtälön vakiot yhtälön oikealle puolelle. Vähensimme yhtälöstä puolittain luvun 1 vastaluvun -1, sillä $1 - 1 = 0$.
3) Yhtälöä ratkaistaessa halusimme tietää, mitä ratkaistavissa oleva muuttuja $x = 1 \cdot x$ on. Jaoimme yhtälön puolittain luvulla 2, sillä $2:2 = 1$. Tässä olisi voinut myös vaihtoehtoisesti kertoa puolittain luvun 2 käänteisluvulla $\frac{1}{2}$, sillä $\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Yhtälöparit

Esimerkki 2. Määritä suorien $y_1 = 3x + 1$ ja $y_2 = x - 2$ leikkauspisteen koordinaatit.

Ratkaisu:

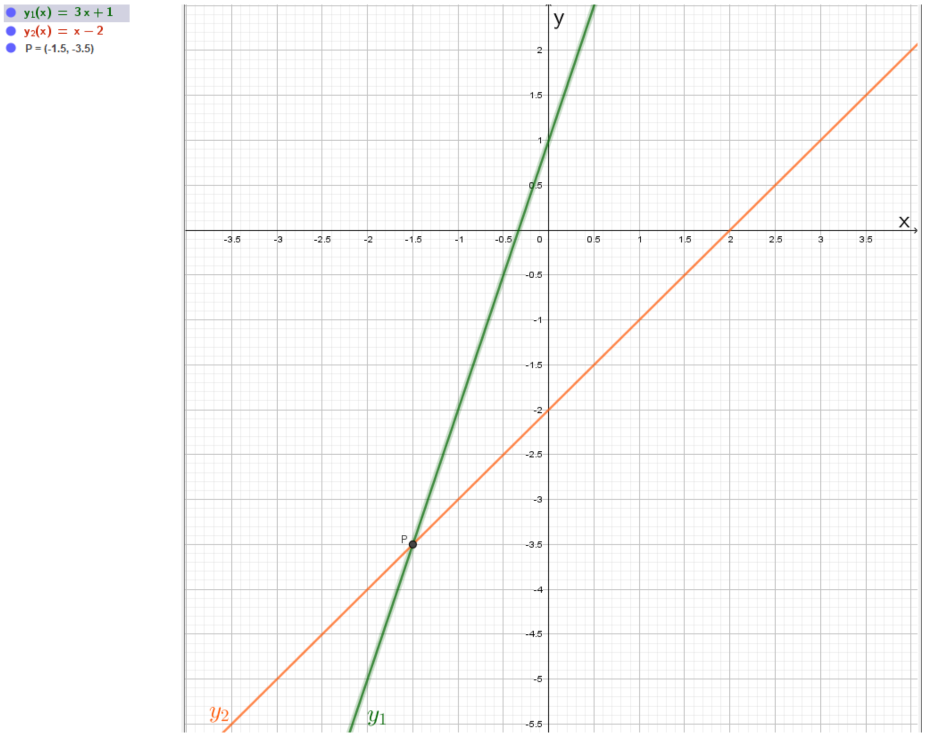
Edellisessä esimerkissä ratkaisimme yhtälön $3x + 1 = x - 2$ eli yhtälön $y_1 = y_2$, minkä ratkaisuna saimme leikkauspisteen x-koordinaatin $\boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$. Koska suorat y_1 ja y_2 leikkaavat toisensa, saamme leikkauspisteen y-koordinaatin sijoittamalla tämän kumpaan tahansa suoran funktioista.

$$\boldsymbol{y_1}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -\frac{3 \cdot 3}{2} + {}^{2)}1 = -\frac{9}{2} + \frac{2}{2} = \frac{-9+2}{2} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$

tai

$$\boldsymbol{y_2}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) = -\frac{3}{2} - {}^{2)}2 = -\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \frac{-3-4}{2} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$

Vastaus: Suorien $\boldsymbol{y_1}$ ja $\boldsymbol{y_2}$ leikkauspisteen koordinaatit ovat $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$.
Tuloksen voi vielä tarkistaa graafisesti piirtämällä ko. suorat koordinaatistoon.



Esimerkki 3. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden summa on 27 ja erotus 3?

Ratkaisu:

Nimetään ensiksi muuttujat $x =$'Ensimmäinen', $y =$'Toinen luku'. Tämän jälkeen voidaan muodostaa kaksi yhtälöä tehtävänannon tietoihin nojautuen: $x + y = 27$ ja $x - y = 3$.

Tapa 1: Sijoitusmenetelmä

Ratkaistaan molemmat yhtälöt ensin muuttujan y suhteen:

$$\begin{aligned} x + y &= 27 && \mid -x \\ y &= 27 - x \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x - y &= 3 && \mid -x \\ -y &= 3 - x && \mid \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-y) &= (-1) \cdot (3 - x) \\ y &= -3 + x \end{aligned}$$

Ratkaisujen täytyy olla yhtä suuret, jotta olisi olemassa tosiaankin kaksi lukua, jotka toteuttavat molemmat tehtävänannon yhtälöt:

$$\begin{aligned} y &= y \\ 27 - x &= -3 + x && \mid -x \\ 27 - 2x &= -3 && \mid -27 \\ -2x &= -30 && \mid : (-2) \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

Ratkaistaan y sijoittamalla $x = 15$ toiseen yhtälöön $y = -3 + x$

$$\begin{aligned} y &= -3 + 15 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{12} \end{aligned}$$

Voidaan vielä tarkistaa, ettei ole sattunut laskuvirheitä sijoittamalla $x = 15$ ensimmäiseen yhtälöön $27 - x$:

$$\begin{aligned} y &= 27 - 15 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{12} \end{aligned}$$

Vastaus: Luvut 15 ja 12.

Tapa 2: Eliminointimenetelmä

Muodostetaan yhtälöpari tehtävänannon yhtälöistä, joiden molempien täytyy toteutua samoilla muuttujien x ja y arvoilla:

$$+\begin{cases} x+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+x+y-y &= 27+3 \\ 2x &= 30 \qquad |:2 \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

Ratkaistaan y, sijoittamalla $x = 15$ yhtälöryhmän yhtälöön $x - y = 3$:

$$\begin{aligned} 15-y &= 3 && |-15 \\ -y &= 3-15 \\ -y &= -12 && |\cdot(-1) \\ (-1)(-y) &= (-1)(-12) \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{12} \end{aligned}$$

Tarkistetaan vielä sijoittamalla $x = 15$ toiseen yhtälöön $x + y = 27$:

$$\begin{aligned} 15+y &= 27 && |\text{-}15 \\ y &= 27-15 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{12} \end{aligned}$$

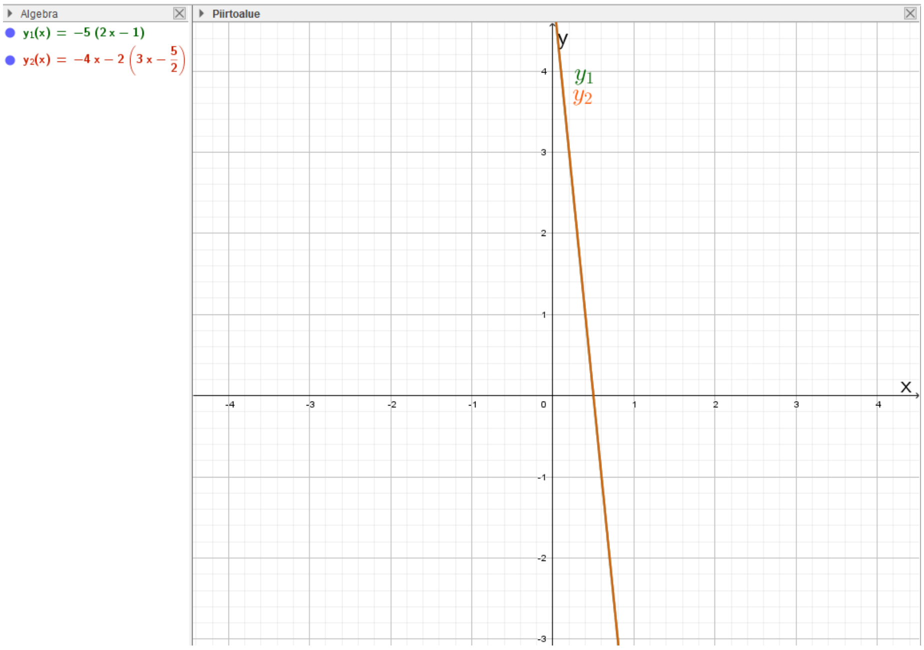
Vastaus: Luvut 15 ja 12.

Esimerkki 4. Ratkaise yhtälö $-5(2x-1) = -4x-2\left(3x-\frac{5}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} -5(2x-1) &= -4x-2\left(3x-\frac{5}{2}\right) \\ -5\cdot 2x-5\cdot(-1) &= -4x-2\cdot 3x-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \\ -10x+5 &= -4x-6x+5 \\ -10x+5 &= -10x+5 && |+10x \\ 5 &= 5 && |-5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Huomaamme yhtälön olevan identtisesti tosi eli toisin sanoen $0 = 0$ riippumatta muuttujan x arvosta.
Vastaus: Yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.

Graafisesti tulkittuna tämä tarkoittaa sitä, että **yhdensuuntaiset** (eli sama kulmakerroin -10) suorat $y_1 = -5(2x-1) = -10x+5$ ja $y_2 = -4x-2\left(3x-\frac{5}{2}\right) = -10x+5$ ovat samat ja täten sivuavat toisensa äärettömän monessa pisteessä.



● $y_1(x) = -5(2x-1)$

● $y_2(x) = -4x-2\left(3x-\frac{5}{2}\right)$

Esimerkki 5. Ratkaise yhtälö $4x - \frac{2-3x}{3} = 5x.$

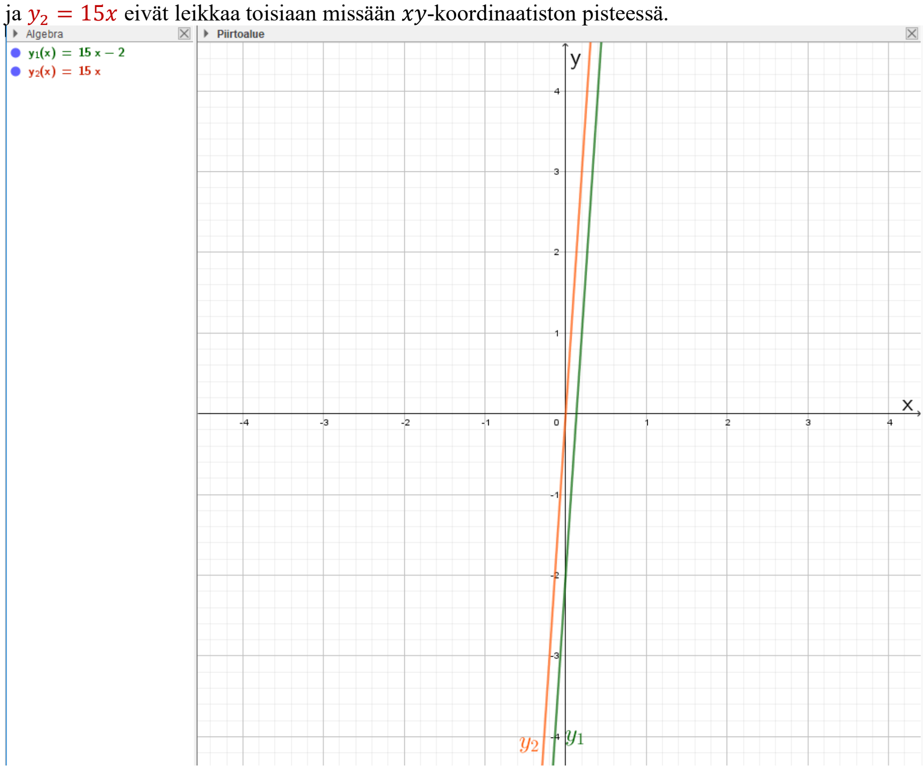
Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
4x - \frac{2-3x}{3} &= 5x && \mid \cdot 3 \\
3 \cdot 4x + 3 \cdot \left(-\frac{2-3x}{3}\right) &= 3 \cdot 5x \\
12x - (2-3x) &= 15x \\
12x - 2 + 3x &= 15x \\
15x - 2 &= 15x && \mid -15x \\
\mathbf{-2} &\mathbf{= 0}
\end{aligned}$$

Yhtälö $-2 = 0$ on identtisesti epätosi, eli yhtälöllä ei ole ratkaisua, valittiinpa muuttujan x arvo miten tahansa.

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Graafisesti tulkittuna tämä tarkoittaa sitä, että **yhdensuuntaiset** suorat $y_1 = 4x - \frac{2-3x}{3} = 15x - 2$ ja $y_2 = 15x$ eivät leikkaa toisiaan missään xy-koordinaatiston pisteessä.



● $y_1(x) = 15x - 2$

● $y_2(x) = 15x$

Harjoitustehtäviä

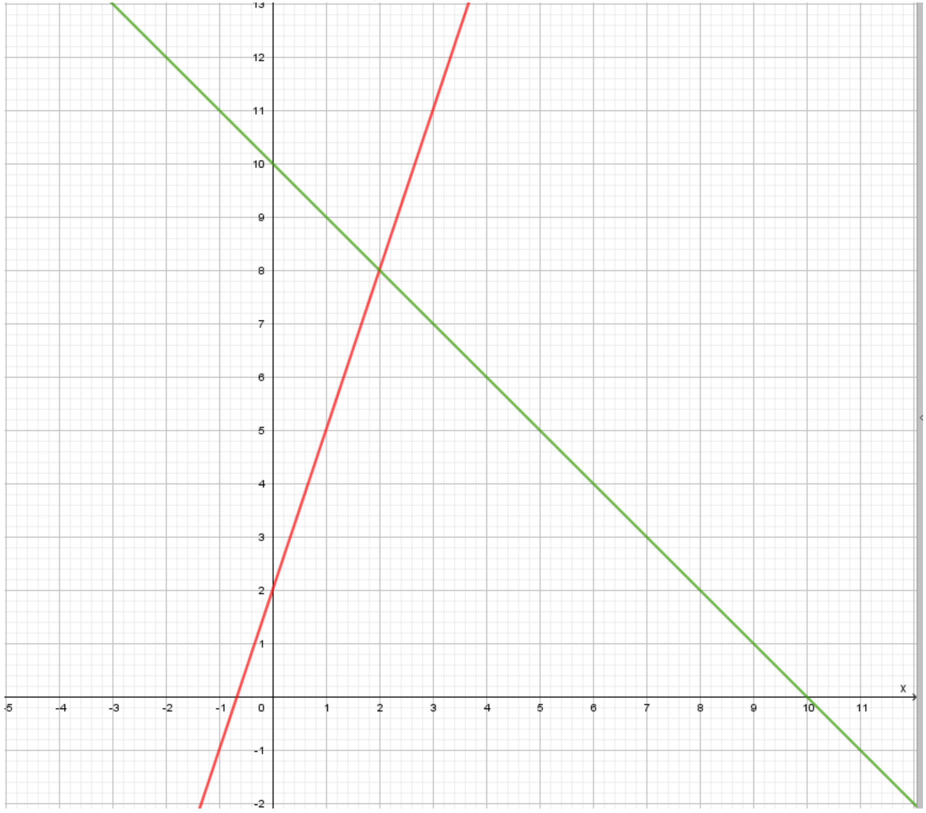
150.Ratkaise yhtälö
- a) $2x + 1 = 3$
- b) $5x + 2 = 12$

151.Ratkaise yhtälö
- a) $2x - 1 = 3$
- b) $5x - 2 = 12$

152.Tutki, toteuttavatko lukuparit yhtälöparin $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

a) $x = 0$ ja $y = 1$ b) $x = 1$ ja $y = -2$ c) $(x, y) = (-2{,}4)$

153. Ratkaise kuvan perusteella yhtälöpari $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x + 10 \end{cases}$.



154.Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$.

155.Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = x - 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$.

156.Määritä suorien $y = x + 1$ ja $-x - 1$ leikkauspisteen koordinaatit

157.Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$.

158.Onko suorilla $y = 2x + 1$ ja $4x - 2y - 6 = 0$ yhteisiä koordinaatteja?

159.Kioskissa myydään irtokarkkeja 20 karkin ja 50 karkin pusseissa. Pieni pussi maksaa 1,50 € ja isompi pussi 3,50 €. Päivän päätteeksi laskettiin, että pusseja oli myyty 39 kpl ja rahaa oli saatu 92,50 €. Kuinka monta karkkia myytiin?

160.Jänis haastaa kilpikonnan juoksukilpailuun ja antaa reiluna kaverina kilpikonnalle 10,2 km etumatkaa. Lähtölaukaus kajahtaa, ja kilpikonna viipottaa koko ajan tasaisella vauhdilla 15 m/min. Jänis ajaa takaa vauhdilla 85 m/min. Milloin jänis saa kilpikonnan kiinni?

161.**Yhtälöryhmäksi** kutsutaan ryhmää, jossa tarkasteltavia yhtälöitä on enemmän kuin kaksi. Vastaavasti kuin yhtälöparinkin tapauksessa, tulee yhtälöryhmän kohdalla varmistaa, että yksittäisen yhtälön toteuttava ratkaisu toteuttaa kaikki ryhmän yhtälöt.

a) Ratkaise yhtälöryhmä algebrallisesti $\begin{cases} y + x = 5 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y + 4 = 2x \end{cases}$

b) Ratkaise yhtälöryhmä graafisesti

162. Ratkaise kolmen muuttujan yhtälöryhmä $\begin{cases} -x+y+2z=-5 \\ 2x-y-z=3 \\ 3x+2y+z=4 \end{cases}$.

Vihje: $\begin{cases} -x+y+2z=-5 & 1.\,yhtälö \\ 2x-y-z=3 & 2.\,yhtälö \\ 3x+2y+z=4 & 3.\,yhtälö \end{cases}$

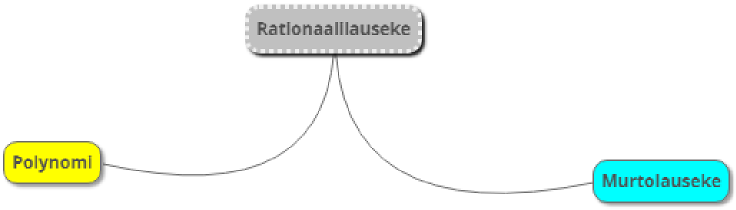
- Ratkaistaan $3.\,yhtälöstä$ z, eli sievennetään z vasemmalle ja muut termit yhtälön oikealle puolelle.

- Tämän jälkeen sijoitetaan ratkaistu z $1.\,yhtälöön$, jolloin saamme kahden muuttujan yhtälöparin, josta voimme ratkaista x:n ja y:n.

- Kyseisten x:n ja y:n arvojen tulee nyt toteuttaa myös $3.\,yhtälö$, joten sijoittamalla nämä arvot $3.\,yhtälöön$ saamme lopulta myös $z:n$ ratkaistua.

- Tuloksen voi vielä tarkistaa sijoittamalla ratkaistut x, y ja z jokaiseen yhtälöryhmän yhtälöön ja toteamalla, että yhtälöistä tulee identtisesti todet!

2.11. * Rationaalilausekkeet



Olkoon polynomit P ja Q. Tällöin lauseke

$$\frac{P}{Q}$$

on **rationaalilauseke**. Lisäksi $\boldsymbol{Q \neq 0}$, sillä nollalla jakoa ei ole määritetty reaaliluvuilla $\mathbb{R}$.

Jos rationaalilauseketta ei voida sieventää **polynomiksi**, niin tällöin kyseessä on **murtolauseke**.

Esimerkki 1. Onko kyseessä oleva rationaalilauseke murtolauseke vai polynomi?

a) $\frac{x+1}{x+1}$ b) $\frac{x+1}{x-1}$ c) $\frac{2x+2}{x+1}$ d) x e) $\frac{x^2-1}{x+1}$

Ratkaisu:

a) $\frac{x+1}{x+1} = 1$, sillä $\frac{\text{Luku}}{\text{Luku}} = 1$. Koska $\frac{x+1}{x+1}$ sievenee (nollannen asteen) polynomiksi, niin kyseessä on **polynomi.**

b) Lauseke $\frac{x+1}{x-1}$ ei sievene polynomiksi, joten **se on murtolauseke**. *

c) $\frac{2x+2}{x+1} = \frac{2 \cdot x + 2 \cdot 1}{x+1} = \frac{2 \cdot (x+1)}{x+1} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$, joka on **polynomi**.

d) x on **polynomi**.

e) $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{1 \cdot (x-1)}{1} = x - 1$, joka on **polynomi.**

***)** Tämän perusteleminen, ettei lauseke $\frac{x+1}{x-1}$ sievene polynomiksi on jo itsessään yliopistasoinen tehtävä. Tämän vuoksi meille riittää tässä yhteydessä vain todeta se, että koska kyseinen lauseke ei sievene polynomiksi, niin se on murtolauseke.

Esimerkki 2. Milloin rationaalilauseke $\frac{x+1}{x+1}$ on määritelty?

Ratkaisu:

Rationaalilauseke on määritelty silloin, kun sen nimittäjä **ei** saa arvoa 0. Ratkaistaan nimittäjän $x+1$ nollakohta, eli toisin sanoen selvitetään, millä muuttujan x arvolla nimittäjä saa arvon 0:

$$x+1=0\,|-1$$

$$x+1-1=0-1$$

$$x=-1$$

Siispä rationaalilausekkeen nimittäjä saa arvon 0, kun $x=-1$.

Vastaus: $x \neq -1$. (Lue:” x on eri suuri kuin -1”)

Huom! Kuten esimerkin 1 kohdassa a) huomasimme, rationaalilauseke $\frac{x+1}{x+1} = 1$. Eli käytännössä katsoen luku 1 vastaa edellä mainittua lauseketta. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa silloin, kun $x=-1$. Matemaattisemmin tämän voisi merkitä seuraavasti: $\boldsymbol{\frac{x+1}{x+1} = 1}$**, kun** $\boldsymbol{x \neq -1}$**.**

Murtolausekkeiden laskusäännöt (A, B, C ja D ovat polynomeja)

Yhteen- ja vähennyslasku) Vastaavasti kuin murtoluvuilla, murtolausekkeet tulee sieventää samannimisiksi ennen kuin voidaan suorittaa yhteen- tai vähennyslasku. Helpoiten tämä onnistuu, kun lavennetaan summattavat luvut toistensa nimittäjällä.

$$\frac{{}^{D)}A}{B}+\frac{{}^{B)}C}{D}=\frac{DA}{DB}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD}{BD}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD+BC}{BD}$$

$$\frac{{}^{D)}A}{B}-\frac{{}^{B)}C}{D}=\frac{DA}{DB}-\frac{BC}{BD}=\frac{AD}{BD}+\frac{-BC}{BD}=\frac{AD-BC}{BD}$$

Kertolasku) Kahden murtolausekkeen välinen kertolasku voidaan suorittaa kertomalla osoittajat ja nimittäjät keskenänsä.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

Jakolasku) Luvun jakaminen toisella luvulla vastaa luvun kertomista tämän toisen luvun käänteisluvulla. Vastaavasti murtolausekkeen jakaminen toisella murtolausekkeella vastaa murtolausekkeen kertomista tämän toisen murtolausekkeen käänteismurtolausekkeella.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

Esimerkki 3. Sievennä

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ b) $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}$ c) $\frac{x}{4}\cdot\frac{5}{y}$ d) $\frac{5x}{3}:\frac{3x}{4}$

Ratkaisu:

a) $^{5)}\frac{2}{3}+{}^{3)}\frac{1}{5}=\frac{5\cdot 2}{5\cdot 3}+\frac{3\cdot 1}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$

b) $^{5)}\frac{x}{2}-{}^{2)}\frac{y}{5}=\frac{5\cdot x}{5\cdot 2}-\frac{2\cdot y}{2\cdot 5}=\frac{5x}{10}-\frac{2y}{10}=\frac{5x-2y}{10}$

c) $\frac{x}{4}\cdot\frac{8}{y}=\frac{x\cdot 8}{4\cdot y}=\frac{8x}{4y}=\frac{8}{4}\cdot\frac{x}{y}=2\cdot\frac{x}{y}=\frac{2x}{y}$ *

d) $\frac{5x}{3}:\frac{3x}{4}=\frac{5x}{3}\cdot\frac{4}{3x}=\frac{5x\cdot 4}{3\cdot 3x}=\frac{20x}{9x}=\frac{20}{9}\cdot\frac{x}{x}=\frac{20}{9}\cdot 1=\frac{20}{9}$

***)** Polynomin ja murtolausekkeen välisessä kertolaskussa **vain ja ainoastaan** murtoluvun **osoittaja** kerrotaan kyseisellä kokonaisluvulla! Tämän voi todentaa kyseessä olevan laskutoimituksen kohdalla perustella seuraavasti: $2\cdot\frac{x}{y}=\frac{2}{1}\cdot\frac{x}{y}=\frac{2\cdot x}{1\cdot y}=\frac{2x}{y}$.

Esimerkki 4. Sievennä

a) $\frac{5x+1}{x-1}+\frac{x+3}{x-1}$ b) $\frac{2a-1}{a+2}-\frac{a}{b}$

Ratkaisu:

a) $\frac{5x+1}{x-1}+\frac{x+3}{x-1}=\frac{5x+1+x+3}{x-1}=\frac{5x+x+1+3}{x-1}=\frac{6x+4}{x-1}$

b) $^{b)}\frac{2a-1}{a+2}-{}^{a+2)}\frac{a}{b}=\frac{b\cdot(2a-1)}{b\cdot(a+2)}-\frac{(a+2)\cdot a}{(a+2)\cdot b}$

$$=\frac{b\cdot 2a+b\cdot(-1)}{b\cdot a+b\cdot 2}-\frac{a\cdot a+2\cdot a}{a\cdot b+2\cdot b}$$

$$=\frac{2ab-b}{ab+2b}-\frac{a^2+2a}{ab+2ab}=\frac{2ab-b-(a^2+2a)}{ab+2b}$$

$$= \frac{2ab - b - a^2 - 2a}{ab + 2b} = \frac{-a^2 + 2ab - 2a - b}{ab + 2b}$$

Esimerkki 5. Sievennä

a) $\frac{5x+2}{2y} \cdot \frac{a+2}{b-1}$ b) $\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2}$ *

Ratkaisu:

a) $\frac{5x+2}{2y} \cdot \frac{a+2}{b-1} = \frac{(5x+2)\cdot(a+2)}{2y\cdot(b-1)} = \frac{5x\cdot a+5x\cdot 2+2\cdot a+2\cdot 2}{2y\cdot b+2y\cdot(-1)} = \frac{5ax+10x+2+4}{2by-2y}$

$$= \frac{5ax+10x+6}{2by-2y}$$

b) $\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2} = \frac{2x+1}{y+1} \cdot \frac{2y+2}{6x+3} = \frac{(2x+1)\cdot(2y+2)}{(y+1)\cdot(6x+3)}$

$$= \frac{2x\cdot 2y+2x\cdot 2+1\cdot 2y+1\cdot 2}{y\cdot 6x+y\cdot 3+1\cdot 6x+1\cdot 3} = \frac{4xy+4x+2y+2}{6xy+3y+6x+3}$$

$$= \frac{4xy+4x+2y+2}{6xy+6x+3y+3} = \frac{2\cdot(2xy+2x+y+1)}{3\cdot(2xy+2x+y+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(2xy+2x+y+1)}{(2xy+2x+y+1)} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Jokeri *) Milloin edellisen tehtävänannon mukainen osamäärä $\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2}$ on määritelty?

Ratkaisu:

Ensinnäkin meidän tulee olla varmoja siitä, että kyseisen osamäärän murtolausekkeet $\frac{2x+1}{y+1}$ ja $\frac{6x+3}{2y+2}$ ovat määriteltävissä. Murtolauseke on määritelty silloin, kun sen nimittäjä ei saa arvoa nolla, joten saamme tästä kaksi ehtoa ratkaisemalla nimittäjän nollakohdan:

1) $y + 1 = 0 \mid -1$

$y = -1$, joten tulee olla $\boldsymbol{y \neq -1}$, jotta voidaan määrittää $\frac{2x+1}{y+1}$

2) $2y + 2 = 0 \mid -2$

$2y = -2 \mid : 2$

$y = -1$, joten tulee olla $\boldsymbol{y \neq -1}$, jotta voidaan määrittää $\frac{6x+3}{2y+2}$ (sattumalta sama ehto kuin ensimmäinenkin ehto)

Lisäksi tulee huomioida myös se, että $\frac{6x+3}{2y+2}$ ei voi saada arvoa nolla, sillä se on jakajana. Ratkaistaan tämän nollakohdat, niin saamme vielä viimeisen ja kolmannenkin ehdon:

3)

$$\begin{aligned} \frac{6x+3}{2y+2} &= 0 && | \cdot (2y+2),\ \text{missä } y \neq -1 \\ (2y+2) \cdot \frac{6x+3}{2y+2} &= (2y+2) \cdot 0 \\ 6x+3 &= 0 && | -3 \\ 6x &= -3 && | : 6 \\ x &= \frac{-3}{6} \\ x &= \frac{3 \cdot (-1)}{3 \cdot 2} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

, joten tulee olla $\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{2}}$.

Kokoamalla ehdot 1), 2) ja 3) saamme:

$\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2} = \frac{3}{2}$, kun $\boldsymbol{y \neq -1}$ ja $\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{2}}$.

Harjoitustehtäviä

163.Laske

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{2}-2$ d) $\frac{4}{5}+1\frac{2}{3}$

164.Laske

a) $\frac{4}{5}\cdot 2$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{7}:\frac{1}{2}$

165. Milloin murtolauseke **ei** ole määritelty?

a) $\frac{5}{x-3}$

b) $\frac{x}{x}$

c) $\frac{3x-4}{-4x+8}$

d) $\frac{3}{a+b}$

166.Olkoon $f(x,y)=\frac{x^2+3}{y-3}$. Laske kyseisen funktion arvo, kun

a) $x=0$ ja $y=0$
b) $x=1$ ja $y=1$
c) $x=2$ ja $y=2$
d) $x=3$ ja $y=3$.

167.Sievennä

a) $\frac{9x+1}{x-1}+\frac{2x-1}{x-1}$ b) $\frac{x+4}{a+b}+\frac{-x+3}{a+b}$

168.Sievennä

a) $\frac{-3x+1}{n}-\frac{x+2}{n}$ b) $\frac{-4a+13b}{-c+r}-\frac{-b+3a}{-c+r}$

169.Sievennä

a) $\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x-1}{x+2}$ b) $\frac{x-3y}{(a+b)}\cdot\left(-\frac{2x+y}{(a+b)}\right)$

170.Sievennä

a) $\frac{a+b}{a-b}:\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{3+x}{y+1}:\frac{-x+2}{-y}$

171.Sievennä

a) $\frac{9x+1}{x}+\frac{2x-1}{x+1}$ b) $\frac{4x+2}{x-1}-\frac{3x+7}{x+1}$

172.Ratkaise rationaaliyhtälö

$$\frac{2x+1}{x^2-x}=0$$

173.Ratkaise rationaaliyhtälö

$$\frac{x+2}{2x+4}=0$$

2.12. Geometria

Algebra ja geometria voidaan katsoa toisistaan irrallisiksi matematiikan haaroiksi. Kuitenkin geometristen kappaleiden mittojen ja tilavuuksien laskentoon voidaan liittää yhtälönratkaisua, mikä suoritetaan algebrallisesti sallittujen peruslaskutoimitusten avulla, joita ovat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Tällä tarkoitetaan siis sitä, että ratkaistaessa esimerkiksi yhtälöä

$$2\pi\boldsymbol{r} = p$$

muuttujan $\boldsymbol{r}$ suhteen, voidaan yhtälö jakaa puolittain 2π:llä, jolloin yhtälö saadaan ratkaistuun muotoon

$$\boldsymbol{r} = \frac{A}{2\pi}$$

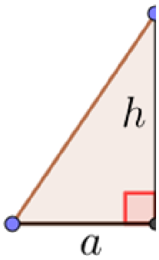
muuttujan $\boldsymbol{r}$ suhteen.

Tämä kappaleen tarkoituksena on palauttaa mieliin laskutehtävien avulla geometriaan liittyviä kaavoja sekä soveltaa aiemmin opittua kuten yhtälön ratkaisemista.

Harjoitustehtäviä

174. Suorakulmaisen kolmion pinta-ala voidaan laskea pinta-ala kaavalla

$$\boldsymbol{A} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

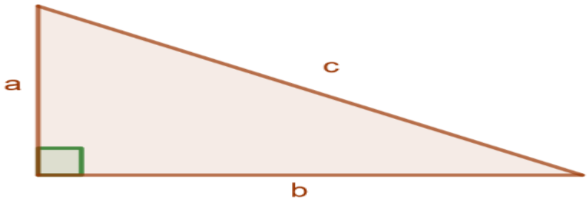


a) Laske suorakulmaisen kolmion pinta-ala, kun sen kanta on *2* m ja korkeus *3* m
b) Ratkaise suorakulmaisen kolmion korkeus, kun sen pinta-ala on *A* ja kanta *a*
c) Ratkaise suorakulmaisen kolmion kanta, kun sen pinta-ala on *A* ja korkeus *h*
d) Laske suorakulmaisen kolmion korkeus, kun sen pinta-ala on *25* m^2 ja kanta *5* m
e) Laske suorakulmaisen kolmion kanta, kun sen pinta-ala on *1,6* m^2 ja korkeus *10,5* m

175. Suorakulmion kateettien ja hypotenuusan välillä on voimassa lause

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

jota kutsutaan *Pythagoraan lauseeksi.*



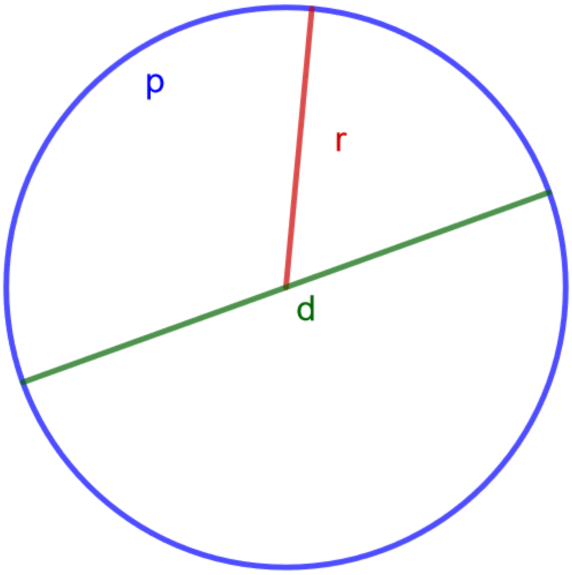
[11]

a) Laske hypotenuusan pituus, kun kateettien pituudet ovat 1 m ja 2m.

Muuta kaava ratkaistuun muotoon muuttujan

b) a suhteen ja laske kateetin a pituus, kun hypotenuusa on 5 m ja toinen kateeteista 4 m.
c) b suhteen ja laske kateetin b pituus, kun hypotenuusa on 1,5 cm ja toinen kateeteista 0, 01 m.

176.



[11]

Ympyrälle pinta-alalle on voimassa yhtälö

$$A = \pi r^2$$

ja piirille

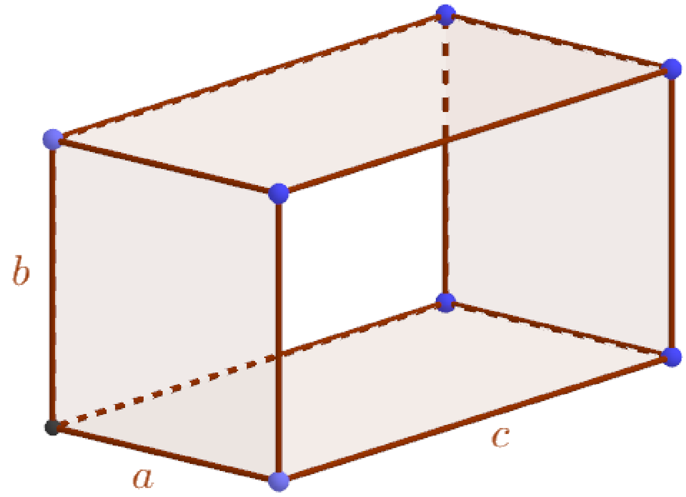
$$d = 2\pi r.$$

a) Laske ympyrän pinta-ala, kun säde on 5 dm
b) Laske ympyrän piiri, kun säde on 7,5 km
c) Laske ympyrän säde, kun piiri on π
d) Laske ympyrän säde, kun pinta-ala on $\frac{25}{2}$

Ilmoita ympyrän säde

e) piirin p funktiona.
f) pinta-alan A funktiona

177.

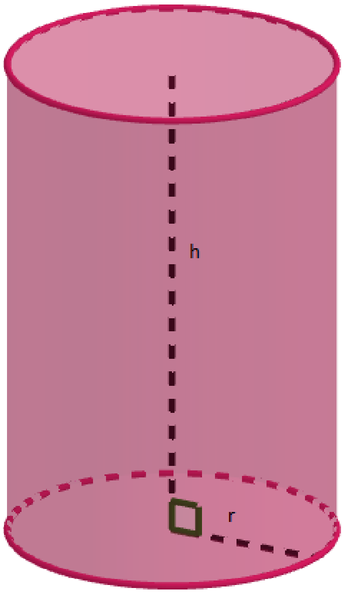


Suorakulmaisen särmiön tilavuus V voidaan laskea sen särmien avulla seuraavasti:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

a) Laske suorakulmaisen särmiön tilavuus, jos sen särmien pituudet ovat 1 m, 2 m ja 3 m
b) Ilmoita särmä b tilavuuden ja särmien a ja c funktiona
c) Laske suorakulmaisen särmiön kolmannen särmän pituus, jos muiden särmien pituudet ovat 2,5 dm ja 3,7 dm sekä tilavuu on 100 litraa.

178.



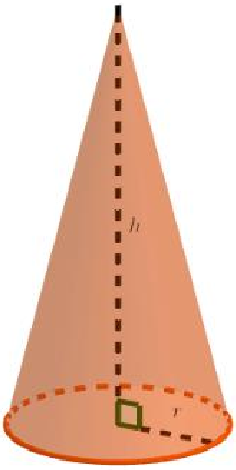
[11]

Suoran ympyrälieriön tilavuus voidaan laskea lieriön pohjaympyrän (miksei myös päällysympyränkin, jostain syystä vain aina puhutaan pohjaympyrästä) pinta-alan ja lieriön korkeuden tulona

$$V = A \cdot h$$

a) Ilmoita ympyrälieriön tilavuus säteen r ja korkeuden h funktiona
b) Laske ympyrälieriön tilavuus, kun säde on 2,5 cm ja korkeus 4,5 cm
c) Puolentoista litran colapullon korkeus on 32 cm. Approksimoidaan colapulloa suorana ympyrälieriönä. Mikä on tällöin colapullon pohjaympyrän säteen pituus?

179.



[11]

Suoran ympyräkartion tilavuus voidaan laskea pohjaympyrän säteen r ja korkeuden h tulona, kun jaetaan tulo kolmella

$$V = \frac{Ah}{3}.$$

Kaavan voi itselleen perustella sillä, että ympyräkartion voidaan ajatella olevan ympyrälieriö, josta on leikattu kaksi kolmiota kolmesta pois.

a) Ilmoita ympyräkartion tilavuus säteen r ja korkeuden h funktiona
b) Laske ympyräkartion tilavuus, kun säde on 2,5 cm ja korkeus 4,5 cm
c) Jäätelötuutin voidaan approksimoida olevan suora ympyräkartio. Mikä on tuutin korkeus, jos tuutin suun halkaisija on 8 cm ja tuutin tilavuus 0,7 litraa?

Tehtävien ratkaisuja

1. a) 12, 8 ja $\frac{8}{4}$
   b) kaikki
   c) -3, 12, -5, $\frac{8}{4}$ ja 8

2. a) esim. *pii*
   b) esim. $\frac{1}{2}$
   c) esim. $\frac{1}{3}$

3. a) kokonaisluvut
   b) luonnolliset luvut
   c) reaaliluvut

4. 888 + 88 + 8 + 8 + 8

5. (25, 0, 0), (20, 5, 0), (10, 10, 5), (10, 8, 7), (9, 9, 7) ja (9, 8, 8)

6.
a) 0, 0, 0
b) 2, 3, 4
c) 16, 24, 32
d) 24, 36, 48

7.
108, 54, 162

8.
66, 132, 121

9.
a) Esim. 39 ja 282
b) Koska 12 on luvun 3 monikerta, luvut ovat jaollisia kolmella

10.
a) Esim. 297 ja 8604
b) Koska 18 on luvun monikerta, ovat luvut jaollisia kolmella. Koska 18 on myös luvun 9 monikerta, luvut ovat jaollisia myös luvulla 9

12.
a) parillinen
b) parillinen
c) pariton
d) parillinen

13.
60

14.
a) Mies, 1990, M
b) Nainen, 1970, Y
c) Mies, 2002, 3
d) Nainen, 1899, R

15.
a) $3\frac{1}{3}$
b) $2\frac{3}{5}$
c) $7\frac{1}{7}$
d) $7\frac{6}{18} = 7\frac{1}{3}$

16.
a) $\frac{2}{6}$ ja $\frac{3}{6}$
b) $\frac{9}{15}$ ja $\frac{4}{15}$
c) $\frac{9}{18}$ ja $\frac{8}{18}$
d) $\frac{55}{77}$ ja $\frac{63}{77}$

17.
a) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{6}$

18.
a) $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$
b) $\frac{1}{40}$

19.
$\frac{2}{3}$

20.
a) $\frac{3}{x}$
b) $\frac{5}{b}$
c) $\frac{1}{y}$

21.
a) $\frac{5}{a}$
b) $\frac{3}{10x}$
c) $\frac{5}{6y}$

22.
a) 1

a) 1
c) 1
d) $\frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

23.
a) $\frac{13}{15}$
b) $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$

25.
a) 12 e
b) 190 g
c) $23\frac{1}{7}$ kg

26.
80 kolikkoa

27.
7 metriä
38.
a) 4
b) 6
c) 10

29.
a) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$
b) $\frac{25}{64}$

30.
a) $\frac{23}{18} = 1\frac{5}{18}$
b) $-\frac{7}{18}$
c) $\frac{10}{27}$
d) $\frac{8}{15}$

32.
$\frac{3}{16}$

34.
8:5

35.
2:7

36.
ei

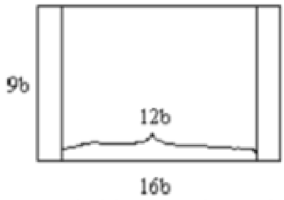
37.
a) 1:1
b) 1:3
c) 3:2

38.
a) 3:125
b) 100:7

39.
a) 3:1
b) 29:3
c) 49:23

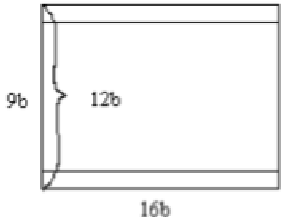
40.
56 %

41. Merkitään HDTV-television kuvaruudun korkeutta *9b* ja ruudun leveyttä *16b*. Jos vanhanmuotoinen kuva näkyy kokonaan pystysuunnassa (korkeus *9b*), on sen leveys $\frac{4}{3} \cdot 9b = 12b$.



Mustaksi jäävän alueen leveys on yhteensä $16b - 12b = 4b$. Mustaksi siten jää $\frac{4b}{16b} = \frac{1}{4}$ kuvaruudun leveydestä.

Jos vanhanmuotoinen kuva näkyy kokonaan vaakasuunnassa (leveys *16b*), on kuvan korkeus $\frac{3}{4} \cdot 16b = 12b$.



Ulkopuolelle jäävän kuva-alueen korkeus on $12b - 9b = 3b$. Ulkopuolelle siten jää $\frac{3b}{12b} = \frac{1}{4}$ kuvan korkeudesta.

Vastaus: Mustaksi jää $\frac{1}{4}$ kuvaruudun leveydestä ja ulkopuolelle jää $\frac{1}{4}$ kuvan korkeudesta.

42.
160 e ja 240 e

43.
6,80 e

44.
36, 54 ja 90 astetta

45.
Leevi saa 271,30 e ja Eevi 208,70 e

46.
Mehutiivistettä 1,5 l ja vettä 4,5 l

47. Merkitään Joukon tuntipalkkaa luvulla 100, jolloin Tapion tuntipalkka on 110 ja Matin 121. Oikeat suhdeluvut saadaan kertomalla tuntimäärät tuntipalkkoja kuvaavilla luvuilla.
Jouko: $140 \cdot 100 = 14\,000$,
Tapio: $160 \cdot 110 = 17\,600$,
Matti: $200 \cdot 121 = 24\,200$.
Suhdelukujen summa on 55 800, jolloin palkkiot ovat
Jouko: 2258 euroa,
Tapio: 2839 euroa ja
Matti: 3903 euroa.

48. Merkitään 40 %:sen liuoksen määrää a:lla. Liuoksessa on desinfiointiainetta 40 % eli 0,40a. Merkitään 5 %:sen liuoksen määrää x:llä. Desinfiointiaineen määrä säilyy laimennettaessa.

$$0{,}05x = 0{,}40a$$

$$x = \frac{0{,}40}{0{,}04}a = 8a$$

Vettä on lisättävä $8a - a = 7a$. Siis sekoitussuhde on 1 : 7. 10 litraan tarvitaan kahdeksasosa eli 1,25 litraa liuosta ja loput 8,75 litraa vettä.

49.
a) 15 %
b) 12
c) 100

50.
1,5 %

51.
60 %

52.
30 %

53.
a) 31 kg

b) 52 kg

54.
8,4 l

55. Todellinen nopeus on mittarin näyttämästä nopeudesta $\frac{92\ km/h}{100\ km/h} = 0{,}92 = 92\ \%$.

Kun mittari näytti 85 km/h, oli todellinen nopeus $0{,}92 \cdot 85 \frac{km}{h} \approx 78\ km/h$.

56.
31,85 e

57.
25 %

58. Yhtiövastike ennen korotusta oli $64{,}5\ m^2 \cdot 2 \frac{e}{m^2} = 129\ e$.

Korotuksen jälkeen yhtiövastike oli $1{,}085 \cdot 129\ e \approx 139{,}97\ e$.

59.
a) 1020 e
b) 1061,20 e

60.
10 vuoden kuluttua

61.
a) 328 e
b) 35,6 %

62.
a) 20 %
b) 16,7 %

63.
7,1 %

64.
a) 16,7 %
b) 1,5 prosenttiyksikköä

65.
a) 1445,48 e
b) 15,6 %

66.
a) 24,2 %
b) 314 %
c) 75,8 %

67.
a) kasvoi 50 %
b) väheni 25 %
c) väheni 25 %

68. Vanha nettopalkka on $\frac{100-25}{100} \cdot 1170\ e = 877{,}5\ e.$

Uusi nettopalkka on $\frac{100-28}{100} \cdot 1300\ e = 936\ e$

a) Nettopalkan nousu $936\ e - 877{,}5\ e = 58{,}5\ e.$
b) Prosentuaalinen nousu $\frac{58{,}5\ e}{877{,}5\ e} \cdot 100\ \% \approx 6{,}7\ \%.$

69. Käytetyn maidon litrahinta oli ensimmäisellä viikolla $\frac{4{,}20\ mk}{0{,}8} = 5{,}25\ mk.$

Litrahinta toisella viikolla oli 5,0 mk. Toisella viikolla käytetty maito tuli halvemmaksi. Toisen viikon maito oli $\frac{5{,}25\ mk-5{,}0\ mk}{5{,}25\ mk} \cdot 100\ \% \approx 4{,}8\ \%.$

Vastaus: Toisen viikon maito oli 4,8 % edullisempaa.

70.
21,10 e

71. Osasto A:

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{48}{300} = 0{,}16 = 16\%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$

Osasto A:

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{4}{20} = 0{,}20 = 20\%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{114}{600} = 0{,}19 = 19\%$

Siis tyttöjen hyväksymisprosentit ovat 1 yksikköä suuremmat molemmilla osastoilla. Koko laitokseen pyrki 320 tyttöä, joista hyväksyttiin 52. Poikia pyrki 620, joista hyväksyttiin 117.

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{52}{320} = 0{,}1625 = 16{,}25\%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{117}{620} \approx 0{,}1887 = 18{,}87\%$

Siis poikien hyväksymisprosentti koko laitokseen oli suurempi kuin tyttöjen.

72. Värjätyn alueen ala *A*. Pienemmän ympyrän ala $B = \pi r^2 = \pi \cdot (5{,}0\ cm)^2 = 78{,}5\ cm^2$. Suuremman ympyrän ala *C*, jolloin

$$B = \frac{40}{100}C$$

$$C = \frac{100}{40}B = \frac{100}{40}78{,}5\ cm^2 = 196\ cm^2$$

$$A = C - B = 196\ cm^2 - 78{,}5\ cm^2 \approx 118\ cm^2$$

73.
a) 28
b) 400

74.
6,6 ha

75.
1250 e

76.
15,5 %

77. Merkitään äänioikeutettujen määrää *a*:lla. Äänestäneiden määrä oli 0,71*a*. Näistä 57 % äänesti KYLLÄ. KYLLÄ-äänien määrä oli $0{,}57 \cdot 0{,}71a = 0{,}4047a \approx 0{,}40a$ eli 40 % äänioikeutettujen määrästä.

78. Merkitään alkuperäistä perushintaa *x* (mk). Tällöin

$$1{,}12x = 22{,}30\ e$$

$$x = \frac{22{,}30\ e}{1{,}12} \approx 19{,}90\ e$$

Alennettu perushinta on $19{,}90\ e - 4{,}20\ e = 15{,}70\ e$.

Alennettu myyntihinta on $1{,}12 \cdot 15{,}70\ e \approx 17{,}60\ e$.

79. Merkitään todellista ajettua matkaa *x*:llä.

$$1{,}05 \cdot x = 205\ km$$

$$x = \frac{205\ km}{1{,}05} \approx 195{,}2\ km$$

$$2\ h\ 40\,\text{min} \approx 2{,}67\ h$$

Keskinopeus oli $\frac{195,2\ km}{2,67\ h} \approx 73\ km/h.$

80. Merkitään edellisvuoden matkustajamäärää a:lla. Nykyinen matkustajamäärä on 0,77a. Seuraavan vuoden matkustajamäärä pitää olla taas a. Matkustajamäärä on siis suurempi edellisen vuoden matkustajamäärää

$$\frac{a - 0{,}77a}{0{,}77a} = \frac{(1 - 0{,}77)a}{0{,}77a} = \frac{0{,}23}{0{,}77} \approx 0{,}2987$$

Vastaus: Matkustajamäärän pitäisi kasvaa 30 %.

81. Merkitään alkuperäistä myyntihintaa a:lla, jolloin alkuperäinen myyntipalkkio on 0,25a. Laskenut myyntihinta on 0,92a, jolloin uusi myyntipalkkio on $0{,}31 \cdot 0{,}92a = 0{,}2852a$. Siis myyntipalkkio nousi.

82. Merkitään vuoden 1995 pesujauheiden kokonaismyyntiä a:lla. Kyseessä olevan pesujauheen myynti oli 0,15a. Vuonna 1996 kokonaismyynti oli 1,10a. Tarkasteltavan pesujauheen myynti oli $1{,}20 \cdot 0{,}15a = 0{,}18a$. Osuus koko myynnistä oli

$$\frac{0{,}18a}{1{,}10a} = \frac{0{,}18}{1{,}10} \approx 0{,}16 = 16\ \%$$

83.
a) 2^4
b) $(-10)^4$
c) a^3

84.
a) 100
b) $b * b * b$
c) $4 * 4 * 4 * 4 * 4$

85.
a) Ei
b) Ei
c) Kyllä

86.
a) -3
b) 2
c) a

87.
a) 32
b) -9
c) 1
d) -1

88.
a) $(-2)^3$
b) $(\frac{2}{3})^4$
c) $-(\frac{1}{3})^6$
d) $\frac{5^3}{7}$
e) $(1+x)^4$

89.
a) $(-5)^2 = 25$
b) $(-5)^3 = -125$

90.
a) 15
b) 7
c) 11
d) Perättäisten lukujen neliöiden erotus on yhtä suuri kuin samojen lukujen summa.
$1000^2 - 999^2 = 1000 + 999 = 1999$.

91.
9 ja 8

92.
a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 8$
d) $x = 3$

93.
  a) $6x^3 * x^2 = 6x^5$
  b) $3x^2 * 4x = 12x^3$
  c) $x^4 * 5x^4 = 5x^8$

94.
a) $24x^2$
b) $-8y^3$

95.
a) $10a^8b^{10}$
b) x^8y^{10}

96.
a) 5
b) 1
c) 0

97.

a) 4
b) $\frac{1}{9}$
c) $-\frac{1}{49}$
d) $\frac{1}{5}$

98.
a) 1
b) 1
c) -1
d) 3
e) a^8

99.
a) $6x^3 \cdot x^2 = 6x^5$
b) $\frac{6x^3}{x^2} = 6x$

100.
9

101.
a) b^3
b) c^6

102.
a) $\frac{3}{7}$
b) $\frac{y}{6}$

103.
a) $3a^5b^6$
b) $\frac{ab^5c^7}{8}$

104.
a) 10^6
b) y^8
c) 1
d) 1
e) 5

105.

a) k^{40}
b) x^{27}
c) t^{99}

106.
a) 2^6
b) 2^{21}
c) 2^{64}

107.
a) 3^7
b) 3^6
c) 3^{15}
d) 3^{11}

108.

$$a^3$$

109.

$$\frac{1}{x^2}$$

110.
a) $\frac{7}{12}$
b) $\frac{1}{45}$

111.
a) epätosi, sillä $(3^2)^3 = 3^6$ ja $(3^3)^2 = 3^6$, joten $(3^2)^3 = (3^3)^2$.
b) tosi, sillä $(9^5)^0 = 1$ ja $(9^4)^{-1} = 9^{-4} = \frac{1}{9^4}$, joten $(9^5)^0 > (9^4)^{-1}$.
c) epätosi, sillä $(2^3)^4 = 2^{12}$ ja $(4^4)^2 = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$, joten $(2^3)^4 < (4^4)^2$.

112.

$$3^0 - 3^{-2} = 1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

113.
a) $16a^2$
b) $243a^5$
c) -1000
d) $100x^6y^8$

114.
a) 15^2
b) 10^{10}

115.

$$x^{16}y^{14}$$

116.

$$a^2b^4$$

117.
a) $(3x)^3 = 27x^3$
b) $(2a)^3 = 8a^3$
c) $(5y)^3 = 125y^3$

118.

$$a^4b$$

119.
a) $\frac{4x^2}{25}$
b) $\frac{9x^2}{16}$

120.

$$(\frac{5m^3n^4}{5m^2n})^2 = (mn^3)^2 = m^2n^6$$

121.
a) -1
b) 4

122.
a) 8
b) $\frac{1}{49}$

123.

$$\frac{9b^2}{4a^8}$$

124.
a) epätosi
b) epätosi
c) tosi
d) epätosi

125.
a) 1
b) 0
c) 11

126.
157 m

127.
a) 5
b) 7
c) 9

128.
a) 0 tai 1
b) 4
c) $\frac{1}{9}$

129.
a) $\frac{3}{5}$
b) $1\frac{1}{2}$

130.
a) 7
b) 5

131.
a) 8
b) 8

132.
a) 2
b) 3

133.
x = 2

134.

$$\sqrt{2^2 + (\frac{8}{3})^2} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

135.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

136.

$9 - 4\sqrt{5} \approx 0{,}236$

137.

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $4y^6 + 3y^2 + 5y + 2$

c) $x^2 + 3y^2 - 3$ tai $3y^2 + x^2 - 3$

d) $2x^9 + 4y^5 - 5x^3 + 133y + 7$

138.

a) $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 + 2 + 1 = \mathbf{4}$

b) 2

c) 17

d) -8

139.

a) $20x^2$

b) $-4xy$

c) $-8a^2b$

d) $2xyz$

140.

a) $8a + 8b$

b) $-2a + 2b$

c) $-15a - 20b$

d) $12a - 10b$

141.

a) $5a + 2$

b) $9a - 4$

142.

a) $a^2 + 3a$ b) $12a^2 + 15a$

c) $6a^2 - 36a$ d) $a^3 - a^2$

143.

a) $x^2 + 4x + 3$ b) $n^2 + n - 2$

c) $-6y^2 + 14y - 8$ d) $-a^2 + ax + bx - ab$

144.

a) $2x^3 + 7x^2 - 11x + 2$

b) $3a^3 - 7a^2 + 8a - 12$

c) $6a^3 + 22a - 8a$

145. a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - b^2$

146. $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1 = (\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) + \boldsymbol{x}$

Eli tulos on lukujen $x + 1$ ja x summa, valittiinpa luku x miten tahansa!

147.
Suorakulmaisten kolmioiden alojen lausekkeet: $A_1 = \frac{a \cdot h}{2}$ ja $A_2 = \frac{b \cdot h}{2}$.

Tällöin $A = A_1 + A_2 = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(a+b)h}{2}$.

148.
a)$A_s(x,y) = xy$
b)$A_k(a,b) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 2ab$
c) $A(x,y,a,b) = A_s - A_k = xy - 2ab$
d) $A(60{,}28{,}6{,}6) = 60 \cdot 28 - 2 \cdot 6 \cdot 6 = 1608 \approx 1610,$
V: Kaukalon pinta-ala on n. 1610 $\boldsymbol{m^2}$

149.
a) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
b) $8x^3 - 84x^2 + 294x - 343$

150.
a) $x = 1$
b) $x = 2$

151.
a) $x = 2$
b) $x = \frac{14}{5}$

152. a) $\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \\ 2 \cdot 0 + 1 \neq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \neq 2 \\ 2 \cdot 1 + (-2) = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2 \\ 2 \cdot (-2) + 4 = 0 \end{cases}$

.: c)-kohta, kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{-2}$ ja $\boldsymbol{y} = \mathbf{4}$ toteuttaa yhtälöryhmän, muut eivät.

153. $x = 2$ ja $y = 8$.

154. $x = 1$ ja $y = 1$.

155. $(x,y) = (1{,}0)$

156. $x = -1$ ja $y = 0$.

157. Yhtälöparin yhtälöt (eli suorat) ovat samat, jonka voi todeta esim. seuraavasti:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \mid \cdot 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} <==> \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \mid + 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} <==> \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Vastaus: Yhtälöparilla on aina ratkaisu, rippumatta muuttujista x ja y.

158. $4x - 2(2x + 1) - 6 = 0$

$-8 = 0$, joka on identtisesti epätosi. Täten suorat **eivät** leikkaa toisiansa.

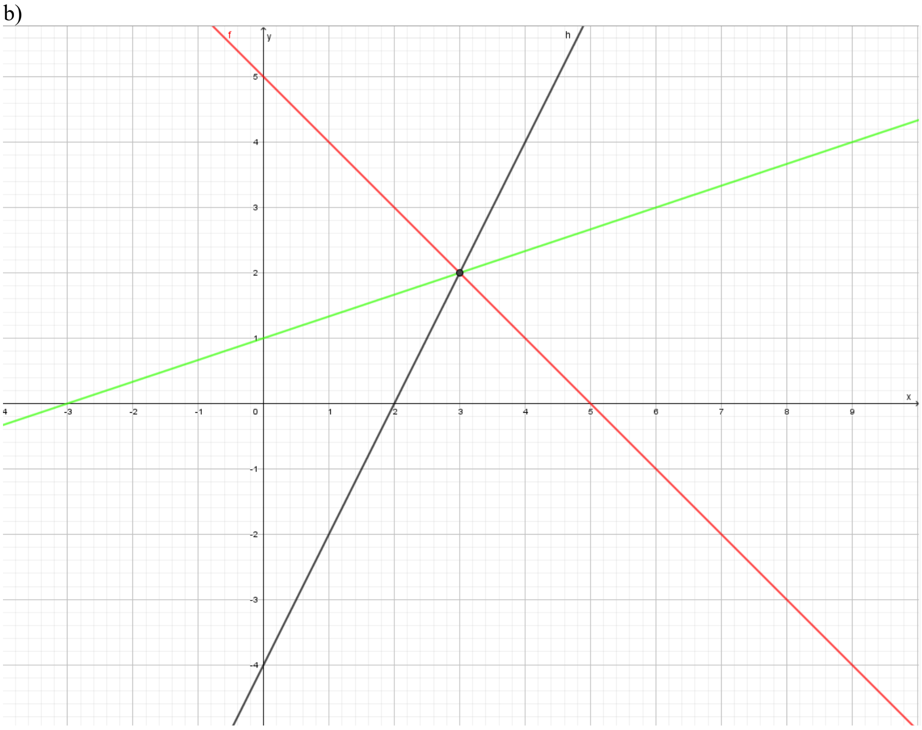
159. Irtokarkkeja myytiin 1290 kappaletta.

160. 2 tunnin ja 26 minuutin kuluttua kilpailun alkamisesta.

161.

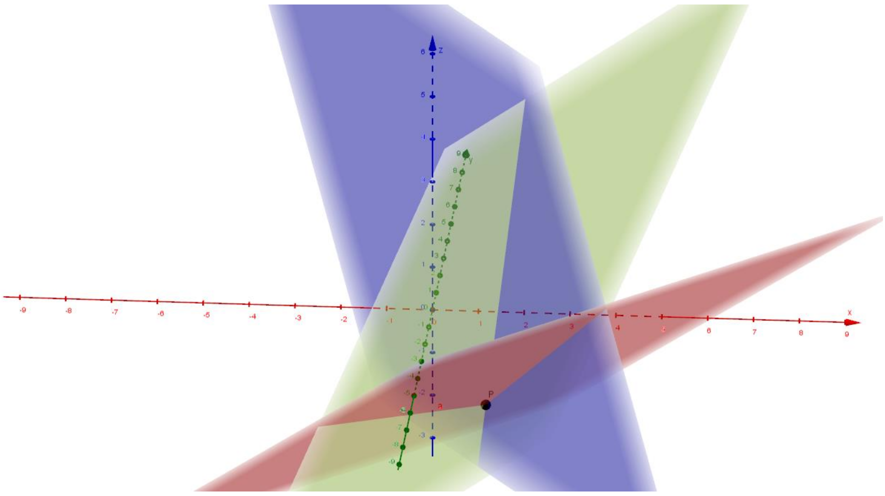
a) $\boldsymbol{x = 3}$ **ja** $\boldsymbol{y = 2}$. Voidaan ratkaista ensin esim. suorien $y + x = 5$ ja $y = \frac{1}{3}x + 1$ välinen yhtälöpari, josta saadaan $x = 3$ ja $y = 2$. Tämän jälkeen sijoitetaan kyseiset koordinaatit kolmanteen yhtälöön $y + 4 = 2x$, josta saadaan **identtisesti tosi** yhtälö $2 + 4 = 2 \cdot 3$.

b)



162. $x = 1, y = 2$ ja $z = -3$.

Geometrisesti tämä tarkoittaa yhtälöryhmän yhtälöiden leikkauspistettä. Kyseiset yhtälöt voidaan tulkita kolmiulotteisen avaruuden tasoina. Eli ratkaisu voidaan tulkita näiden tasojen leikkauspisteenä. Aiheeseen palataan lukion pitkän matematiikan vektorit -kurssilla, joten ei kannata todellakaan murehtia jos oheisen kuvan merkitys ei nyt aukea!



163. a) $\frac{31}{35}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{37}{15}$

164. a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{7}$

165. a) $x = 3$ b) $x = 0$ c) $x = 2$ d) $a = -b$

166. a) $f(0,0) = -1$ b) $f(1,1) = -2$
c) $f(2,2) = -7$ d) Nimittäjästä saa arvon 0 sijoituksella $y = 3$. Siispä, ei voida määrittää mitä on $f(3,3)$.

167. a) $\frac{11x}{x-1}$ b) $\frac{7}{a+b}$

168. a) $\frac{-4x-1}{n}$ b) $\frac{-7a+14b}{-c+r}$

169. a) $\frac{-3x+1}{n}$ b) $\frac{-2x^2+5xy+3y^2}{a+b}$

170. a) 1 (luku jaettuna itsellään) b) $\frac{-xy-3y}{-xy-x+2y+2}$

171. a) $\frac{11x^2+9x+1}{x^2+x}$ b) $\frac{x^2+2x+9}{x^2-1}$

172. $x = -\frac{1}{2}$

173. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

174. a) 3 m^2

b) $h = \frac{2A}{a}$

c) $a = \frac{2A}{h}$

d) 10 m
e) 0, 3 m

175. a) 2,2 m
b) 3 m
c) 1, 1 cm

176. a) 79 dm^2
b) 47,1 km
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{5}{\sqrt{2\pi}}$
e) $r = \frac{p}{2\pi}$
f) $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

177. a) 6 m^3
b) $b = \frac{v}{ac}$
c) 10,8 dm

178. a) $V = \pi r^2 h$
b) V = 88,4cm^3
c) $r = 3{,}9$ cm

179. a) $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
b) V = 88,4 cm^3
c) $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 700\ cm^3}{\pi (4\ cm)^2} \approx 41{,}8\ cm$

Lähdeluettelo

[1] M. Toivola, T. Härkönen, *Avoin matematiikka 9. lk., osio*, saatavissa: http://avoinoppikirja.fi/tiedostot/ylakoulu/matematiikka/avoin_matematiikka_9lk_osio3.pdf (8.1.2019)

[2] L. Hellsten, *Polynomit*, saatavissa: https://opetus.tv/mab/mab1/polynomit/ (8.1.2019)

[3] S. Hassinen, O. Latva, J-P. Makkonen, M. Peltola, M. Pirttimaa ja A. Tolvanen, *Kuutio X*, Sanoma Pro, 2018

[4] J. Cederberg, *Polynomiyhtälöt,* saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa1/ensimmaisen-asteen-polynomiyhtalot/ (9.1.2019)

[5] J. Cederberg, *Rationaalilauseke*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa7/rationaalilauseke/ (9.1.2019)

[6] J. Cederberg, *Yhtälöryhmät*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa4/yhtaloryhmat/ (9.1.2019)

[7] T. Metsänkylä, M. Näätänen, *Algebra,* saatavissa: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/algebra.pdf (11.2.2019)

[8] J. Cederberg, *Rationaaliyhtälöt,* saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa7/rationaaliyhtalo/ (11.2.2019)

[9] Saarijärven nuorisotalo, *Hiihtolomalla/talvilomalla nuorisotalo näin toimii!,* saatavissa: http://www.saarijarvennuorisotalo.com/wp-content/uploads/2017/02/hiihtoloma-2017.jpg (18.3.2019)

[10] J. Cederberg, *Yhtälöryhmät,* saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa4/yhtaloryhmat/ (21.3.2019)

[11] M. Lohikainen, Geometria, saatavissa: https://tim.jyu.fi/view/tau/toisen-asteen-materiaalit/matematiikka/geometria (15.5.2020)