Tampereen yliopisto

Jani Oksanen

Banachin-Tarskin paradoksi

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Matematiikan pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2020

Tiivistelmä

Jani Oksanen: Banachin-Tarskin paradoksi
Matematiikan pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2020

Tämä tutkielma esittelee erään tunnetun matemaattisen tuloksen: Banachin-Tarskin paradoksin, joka on seurausta valinta-aksioomasta. Paradoksin mukaan yhden kolmiulotteisen pallon voi kahdentaa niin, että kumpikin kahdennetuista palloista on identtisiä alkuperäisen pallon kanssa. Tutkielma käsittelee myös paradoksaalisuutta yleisemmin ja esittelee siihen liittyviä laajempia käsitteitä.

Tutkielman alkupuoli esittelee lukijalle tarvittavat tiedot ryhmäteoriasta, topologiasta ja mittateoriasta. Tämän jälkeen käsitellään mistä paradoksaalisuus johtuu ja esitellään joitain sen ominaisuuksia, mistä siirrytään itse paradokseihin. Lopuksi tarkastellaan pintapuolisesti muovautuvia ryhmiä, jotka saivat alkunsa Banachin-Tarskin paradoksista.

Avainsanat: Banachin-Tarskin paradoksi, Hausdorffin paradoksi, paradoksi, muovautuvat ryhmät, ryhmäteoria

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Banachin-Tarskin paradoksi juontaa juurensa 1900-luvun alkupuolelle, jolloin Zermelo muotoili valinta-aksiooman, mikä synnytti kiistaa matemaattisissa piireissä [7, s. 346–347]. Eri matemaatikot osoittivat millaisia mahdottomalta vaikuttavia tuloksia valinta-aksioomasta seuraa, ja näitä analyysin ja geometrian "katastrofeja" on lueteltu Herrlichin teoksessa [6, s. 117–142]. Yksi tällaisista "mahdottomista" tuloksista on Banachin-Tarskin paradoksi. On kuitenkin tehtävä selväksi ero sen välillä, mitä paradoksilla yleensä tarkoitetaan ja mitä sillä tässä tapauksessa tarkoitetaan. Usein sillä tarkoitetaan jotain loogisesti ristiriitaista, tai jopa joitain mahdottomia fyysisiä rakenteita, kuten esimerkiksi Penrosen kolmiota. Banachin-Tarskin paradoksin kohdalla kyse on kuitenkin vain intuition vastaisesta matemaattisesta tuloksesta, joka paljastuu matemaattisesti oikeaksi.

Paradoksin esitteli Stefan Banach ja Alfred Tarski lehden *Fundamenta Mathematicae* artikkelissa otsikolla *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* vuonna 1924. Heidän työnsä ei kuitenkaan lähtenyt tyhjältä pöydältä, vaan kyseessä oli oikeastaan looginen jatkumo Felix Hausdorffin vuonna 1914 lehdessä *Mathematische Annalen* otsikolla *Bemerkungen über den Inhalt von Punktmengen* julkaisemalle tulokselle jakaa pallon pinta kolmeen osaan siten, että kahden osan yhdisteestä saadaan kiertämällä ekvivalentti kolmannen osan kanssa. Tätä pallon pinnan hajotelmaa sanotaankin Hausdorffin paradoksiksi ja Banachin-Tarskin paradoksia voitaisiin oikeastaan sanoa Hausdorffin-Banachin-Tarskin paradoksiksi.

Banach ja Tarski osoittivat Hausdorffin paradoksin pohjalta, että kiinteä pallo voidaan jakaa osiin siten, että sen osista voidaan koota kaksi täysin alkuperäisen pallon kanssa identtistä palloa pelkillä kierroilla, oleellisesti venyttämättä mitään. Vaikka tullaan näkemään, että tämä ei matemaattisessa merkityksessään eroa valtavasti Hausdorffin tuloksesta, on se huomattavasti tunnetumpi. Kenties sen takia, että sitä on kuvailtu fyysisten kappaleiden avulla, esimerkiksi juuri pallon kahdentamisena tai herneen jakamisella osiin, joista voidaan koota auringon kokoinen kappale. Lisäksi huomataan, että näitä osia tarvitaan vain äärellinen määrä. Kuitenkin kyseessä on täysin matemaattinen konstruktio, jolla ei ole tekemistä fyysisten kappaleiden kanssa.

Tutkielma rakentuu pääasiassa alustavista tiedoista, johdattelusta paradoksaalisuuteen valinta-aksiooman kautta, itse Banachin-Tarskin paradoksin lähemmästä tarkastelusta. Lopussa tehdään vielä lyhyt katsaus muovautuviin, ei-paradoksaalisiin ryhmiin. Ryhmäteoria on ensimmäisen luvun tärkein osio pääaiheen kannalta ja siihen kannattaa palata, mikäli vastaan tulee ryhmiin liittyviä asioita, joita ei ymmärrä. Topologia yhdessä kolmannen luvun tietojen kanssa tulee uudelleen vastaan vasta kuudennessa luvussa, joten ainoastaan Banachin-Tarskin paradoksista kiinnostunut lukija voi halutessaan ohittaa nämä osat alustavista tarkasteluista.

Neljäs luku esittelee lyhyesti valinta-aksiooman ja konseptin, joka auttaa ymmärtämään, kuinka paradoksaalisuus toimii. Luku ei ole pitkä ja sen asiat eivät usein ole yliopistomatematiikan opiskelijalle tuttuja, joten hyvä tutustuminen on suotavaa. Viides luku alkaa Hausdorffin paradoksin esittelyllä, josta päästään luontaisesti Banachin-Tarskin paradoksin esittelyyn ja todistamiseen, jonka jälkeen tarkastellaan lähemmin, kuinka paradoksi toimii. On suotavaa verrata Hausdorffin paradoksin tuloksia Banachin-Tarskin paradoksin tuloksiin.

Kuudes luku esittelee lyhyesti ryhmät, joille ei ole olemassa paradokseja. Englanninkielinen termi *amenable groups* on vapaasti suomennettu *muovautuviksi ryhmiksi*. Vaikka tämän luvun aihe liittyy oleellisesti Banachin-Tarskin paradoksiin, ei siihen ole mahdollista paneutua syvällisesti tekemättä tutkielmasta tarpeettoman pitkää.

Lukijan odotetaan käyneen yliopistomatematiikan aineopinnot, tuntevan jonkin verran topologiaa ja algebraa sekä ymmärtävän joukko-opin perusteet. Mittateorian ja abstraktin algebran, etenkin ryhmäteorian, ymmärtämisestä on hyötyä, mutta tarvittava tietämys näistä esitellään tässä tutkielmassa.

Tutkielman pääteoksena voidaan pitää Stan Wagonin teosta *The Banach-Tarski Paradox* [12]; lisäksi tutkielmaa läheisesti tukee Volker Runden *Lectures on Amenability* [11]. Muista teoksista tässä vaiheessa mainittakoon Donald Cohnin *Measure theory* [3], johon suuri osa mittateorian tekstistä pohjautuu.

2 Alustavia tarkasteluja

Aloitetaan tutkielman kannalta tärkeiden ryhmäteoriaan ja topologiaan liittyvien käsitteiden, lauseiden ja ominaisuuksien mieleen palauttamisella. Tässä luvussa esitetään tutkielman pääaiheen kannalta vähemmän oleellisia lauseita ilman kokonaisia todistuksia. Ryhmäteorian ja topologian hyvin tunteva voi silmäillä luvun nopeasti läpi tai siirtyä suoraan seuraavaan lukuun.

2.1 Ryhmäteoriaa

Tässä aliluvussa esitellään tutkielman kannalta tärkeät ryhmäteorian käsitteet ja alilukuun kannattaa tarvittaessa palata, sillä tutkielman aihe *paradoksaalisuus* aukeaa ryhmän toiminnan kautta. Aliluku on koostettu pääosin Grilletin [4] teoksesta ja sitä on täydennetty Wagonin [12] teoksen materiaalilla. Kiertoryhmät ja isometriaryhmät esitellään Beardonin [1] teoksen pohjalta.

Määritelmä 2.1. Paria $(G, \cdot_G)$, missä G on jokin joukko ja $\cdot_G$ on laskutoimitus, sanotaan *ryhmäksi*, kun

1. kaikilla alkioilla $a, b \in G$ pätee $a \cdot_G b \in G$, eli laskutoimitus on suljettu,
2. kaikilla alkioilla $a, b, c \in G$ pätee $(a \cdot_G b) \cdot_G c = a \cdot_G (b \cdot_G c)$, eli laskutoimitus on liitännäinen,
3. on olemassa sellainen $e_G \in G$, että kaikilla alkioilla $a \in G$ pätee $e_G \cdot a = a \cdot e_G = a$, eli laskutoimituksella on *neutraalialkio* ja
4. kaikilla alkioilla $a \in G$ on olemassa $a^{-1} \in G$, jolla $a \cdot_G a^{-1} = e_G$, eli jokaisella alkiolla on *käänteisalkio*.

Merkintä 2.2. On tapana merkitä ryhmää samalla kirjaimella kuin ryhmän joukkoa, esimerkiksi ryhmää $(G, \cdot_G)$ merkitään G:llä. Mikäli on selvää, minkä ryhmän neutraalialkiota ja laskutoimitusta tarkoitetaan, merkitään ne ilman ryhmän symbolia. Lisäksi laskutoimitus jätetään usein kokonaan merkitsemättä, eli $a \cdot b = ab$.

Määritelmä 2.3. Olkoon $(G, \cdot_G)$ ryhmä ja E joukon G osajoukko. Tällöin sanotaan parin $(E, \cdot_E)$ olevan ryhmän G *aliryhmä*, jos se täyttää ryhmän määritelmän kun $\cdot_E$ on laskutoimituksen $\cdot_G$ rajoittuma joukkoon E.

Määritelmä 2.4. Ryhmän G osajoukko X *virittää* aliryhmän $(E, \cdot_E)$, kun E koostuu kaikista joukon X alkioiden ja käänteisalkioiden tuloista.

Määritelmä 2.5. Jos ryhmän G laskutoimitus on vaihdannainen, eli $a \cdot b = b \cdot a$ kaikilla $a, b \in G$, sanotaan ryhmän olevan *Abelin ryhmä*.

Määritelmä 2.6. Olkoon G ryhmä, E sekä E' sen osajoukkoja ja $x \in G$. Tällöin $E^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in E\}$, ja osajoukkojen välinen laskutoimitus on määritelty seuraavasti:

$$EE' = \{a \cdot b \mid a \in E \text{ ja } b \in E'\}.$$

Osajoukon ja alkion välinen laskutoimitus määritellään vastaavasti:

$$Ex = \{a \cdot x \mid a \in E\} \text{ ja } xE = \{x \cdot a \mid a \in E\}.$$

Määritelmä 2.7. Ryhmän G aliryhmää E kutsutaan *normaaliksi aliryhmäksi*, jos $Ex = xE$ kaikilla $x \in G$.

Määritelmä 2.8. Olkoon G ryhmä. Tällöin jono ryhmän G alkioita on *sana*. Jos sanassa ei esiinny peräkkäin kahta alkiota, jotka ovat toistensa käänteisalkioita, sanotaan sanaa *supistetuksi sanaksi*.

Huomautus. Oleellisesti sanan voi muodostaa minkä tahansa ryhmän G alkioista. Esimerkiksi jos ryhmän alkiot ovat matriiseja, koostuu sana jonosta matriiseja.

Lause 2.9. *Olkoon G ryhmä ja w jokin sen sana. Tällöin w voidaan aina supistaa yksikäsitteiseksi supistetuksi sanaksi.*

Todistus. Esitetään vain perusperiaate, sillä tarkka todistus vaatisi tutkielman kannalta liiaksi aikaa. Yksityiskohdat voi tarkistaa Grilletin [4, s. 27–29] teoksesta.

Olkoon G kuten väitteessä. Jos sanassa w esiintyy peräkkäin jokin ryhmän G alkio ja tämän käänteisalkio, poistetaan molemmat alkiot ja suoritetaan tarkastelu uudelleen syntyneelle sanalle w' niin kauan, kunnes jäljelle jää supistettu tai tyhjä sana. □

Merkintä 2.10. Merkitään sanan w supistettua muotoa $\text{red}(w)$.

Määritellään seuraavaksi niin kutsuttu vapaa ryhmä, johon kaikki tutkielman paradoksaaliset tulokset tulevat pohjautumaan.

Määritelmä 2.11. Joukon X virittämä *vapaa ryhmä* G koostuu joukon X alkioista muodostetuista supistetuista sanoista.

Huomautus. Edellisen määritelmän G todella on ryhmä, sillä sen laskutoimitus on sanojen liittäminen peräkkäin ja sen jälkeen supistaminen, eli $w \cdot v = \text{red}(wv)$, kun w ja v ovat mielivaltaiset ryhmän G sanat. Neutraalialkio on tyhjä sana, sanan käänteisalkio on sana itse käännettynä ja jokainen sanan alkio vaihdettuna käänteisalkioksi. Yksityiskohdat löytyvät jälleen Grilletin [4, s. 27–30] teoksesta. Huomataan lisäksi, että vapaa ryhmä ei ole Abelin ryhmä, jos sen virittäjistössä on enemmän kuin yksi alkio.

Huomautus. Oleellisesti vapaa ryhmä sisältää mielivaltaisen pitkät supistetut sanat.

Vapaita ryhmiä tullaan käyttämään tutkielmassa useaan otteeseen, joten varataan niille oma merkintä.

Merkintä 2.12. Merkitään $n \geq 0$ alkion virittämää vapaata ryhmää $\mathbb{F}_n$.

Määritelmä 2.13. Olkoon G ryhmä ja $a, b \in G$. Näiden alkioiden *kommutaattori* on $aba^{-1}b^{-1}$. Kaikkien kommutaattorien virittämää aliryhmää $G^{(1)}$ sanotaan *(ensimmäiseksi) kommutaattorialiryhmäksi*. Induktiolla voidaan edelleen määritellä kommutaattorialiryhmän kommutaattorialiryhmä, jota merkitään yleisesti $G^{(k)}$, missä $k \in \mathbb{Z}_+$.

Määritelmä 2.14. Olkoon G ryhmä, jolla $G^{(k)} = \{e\}$ jollain $k \geq 0$. Tällöin sanotaan ryhmän G olevan *ratkeava ryhmä*. Lisäksi sanotaan ryhmän G *asteen* olevan k.

Lause 2.15. *Jokainen abelin ryhmä on ratkeava.*

Todistus. Olkoon G abelin ryhmä. Määritelmän mukaan sen kommutaattorialiryhmän virittävät kaikki kommutaattorit $aba^{-1}b^{-1}$, missä $a, b \in G$. Mutta koska G on abelin ryhmä, niin

$$aba^{-1}b^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = ee = e,$$

ja koska alkioita a ja b ei kiinnitetty, niin $G^{(1)} = \{e\}$. □

Määritelmä 2.16. Olkoon G ryhmä ja X jokin joukko. Tarkastellaan kuvausta $G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$, jolla $e \cdot x = x$ ja $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ kaikilla $g, h \in G$ ja $x \in X$. Tällöin sanotaan, että ryhmä G *toimii (vasemmalta) joukossa* X.

Erityisesti vapaan ryhmän toiminta joukossa tulee olemaan merkittävässä roolissa tutkielman kannalta, joten nämä kaksi määritelmää on hyvä painaa mieleen.

Määritelmä 2.17. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X, ja $x \in X$. Tällöin alkion x *rata* on $\{g \cdot x \mid g \in G\}$. Puhuttaessa *$G$-radasta* tarkoitetaan minkä tahansa alkion x rataa.

Määritelmä 2.18. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X. Jos alkioille $g \in G$ ja $x \in X$ pätee $g \cdot x = x$, niin alkiota x sanotaan alkion g *kiintopisteeksi*. Jos $g = e$ (neutraalialkio), on x *triviaali kiintopiste*.

Määritelmä 2.19. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X, ja $x \in X$. Tällöin alkion x *stabilisaattori* on $\mathrm{stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$, eli stabilisaattori koostuu kaikista niistä alkioista $g \in G$, joiden kiintopiste x on.

Huomautus. Edellä mainittu stabilisaattori $\mathrm{stab}(x)$ on ryhmän G aliryhmä.

Määritelmä 2.20. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X. Sanotaan, että *G toimii lokaalisti vaihdannaisesti*, jos aliryhmä $\mathrm{stab}(x)$ on vaihdannainen jokaisella $x \in X$.

Rata ja kiintopisteet ovat tärkeitä paradokseja muodostaessa ja stabilisaattoria sekä lokaalia vaihdannaisuuttaa tullaan käyttämään, kun halutaan minimoida paradokseja varten tarvittavien osien määrää aliluvussa 5.3.

Esitellään sitten tämän tutkielman kannalta hyvin oleelliset ryhmät, ortogonaaliset ryhmät ja isometriaryhmät. Näitä tullaan tarvitsemaan sekä Hausdorffin että Banachin-Tarskin paradoksien kanssa näyttämällä niillä olevan aliryhmiä, jotka ovat isomorfisia vapaiden ryhmien kanssa.

Määritelmä 2.21. Olkoon M kääntyvä $n\times n$ -matriisi, jolla pätee $M^{-1} = M^{\top}$. Tällöin matriisin M sanotaan olevan *ortogonaalinen*.

Lause 2.22. *Kaikista ortogonaalisista $n \times n$ -matriiseista koostuva joukko X varustettuna tavallisella matriisitulolla muodostaa ryhmän.*

Todistus. Lause ei kuulu tutkielman ydinsisältöön, joten sivuutetaan sen todistaminen. Todistus löytyy Beardonin [1, s. 202] teoksesta. □

Merkintä 2.23. Merkitään ortogonaalisten $n \times n$ -matriisien muodostamaa ryhmää $O(n)$. Jos ryhmä koostuu vain niistä matriiseista M, joilla $\det(M) = 1$, merkitään $SO(n)$. Merkinnät tulevat englanninkielisistä termeistä *orthogonal group* ja *special orthogonal group* [1, s. 202].

Huomautus. Ryhmä $SO(n)$ sisältää kaikki euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ origon ympäri tapahtuvat kierrot ja sitä sanotaan usein kiertoryhmäksi.

Määritelmä 2.24. Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n)$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ piste. Tällöin *normi* $\|x\|$ on pisteen etäisyys origosta, eli $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Määritelmä 2.25. Bijektio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *isometria*, jos $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lause 2.26. *Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ isometria voidaan kirjoittaa kuvauksena $x \mapsto a + xA$, missä $a \in \mathbb{R}^n$ ja A on ortogonaalinen $n \times n$ -matriisi, ja kaikki tällaiset kuvaukset ovat isometrioita.*

Todistus. Sivuutetaan tämäkin todistus, koska se ei kuulu tutkielman ydinsisältöön. Todistus löytyy Beardonin [1, s. 204] teoksesta. □

Lause 2.27. *Kaikista avaruuden $\mathbb{R}^n$ isometrioista koostuva joukko X varustettuna yhdistetyllä kuvauksella muodostaa ryhmän.*

Todistus. Olkoon f, g ja h avaruuden $\mathbb{R}^n$ isometrioita ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin lauseen 2.26 perusteella $f(g(x)) = a + (b + xB)A = a + bA + xBA$, missä $a, b \in \mathbb{R}^n$ ja A sekä B ovat ortogonaalisia matriiseja. Nyt $a + bA + xBA = c + xC$, missä $c \in \mathbb{R}^n$ ja C on ortogonaalisten matriisien tulona ortogonaalinen, joten $f \circ g$ on isometria. Liitännäisyys $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ on triviaali. Identiteettikuvaus $id_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{0} + xI$, missä I on yksikkömatriisi, on selvästi isometria ja se on tämän ryhmän neutraalialkio. Kuvauksen $f : x \mapsto a + xA$ käänteisalkio on isometria $f^{-1} : x \mapsto -aA^{-1} + xA^{-1}$. □

Määritelmä 2.28. Sanotaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ isometrioiden muodostamaa ryhmää *isometriaryhmäksi* ja merkitään sitä $E(n)$.

Huomautus. Isometriaryhmä $E(n)$ sisältää siis kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierrot, siirrot ja peilaukset.

Huomautus. Isometriaryhmä $E(n)$ (kuten myös sen aliryhmä $SO(3)$) toimii avaruudessa $\mathbb{R}^n$ luonnollisella tavalla: $E(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(g, x) \mapsto g \cdot x = g(x)$.

2.2 Topologiaa

Tässä aliluvussa esiteltävien topologisten asioiden tunteminen on tarpeen kolmannen luvun mittateorian ymmärtämiseksi. Topologian perusteiden osuus on koostettu Munkresin [9] ja Raon [10] teoksista. Topologisiin avaruuksiin liittyviä määritelmiä ja lauseita on otettu myös Cohnin [3] teoksesta.

Määritelmä 2.29. Olkoon X epätyhjä joukko. Tällöin perhe $\mathcal{T}$ joukon X osajoukkoja on *topologia*, kun seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$,
2. jos $A \in \mathcal{T}$ ja $B \in \mathcal{T}$, niin $A \cap B \in \mathcal{T}$ ja
3. jos $A_i \in \mathcal{T}$ kaikilla $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Lisäksi paria $(X, \mathcal{T})$ sanotaan *topologiseksi avaruudeksi*, perheen $\mathcal{T}$ alkioita joukon X *avoimiksi joukoiksi* ja joukon X alkioita topologisen avaruuden *pisteiksi*.

Merkintä 2.30. Topologista avaruutta $(X, \mathcal{T})$ merkitään usein vain sen joukolla X.

Määritelmä 2.31. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja Y joukon X osajoukko. Tällöin $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ on topologia joukolle Y ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ on *topologinen aliavaruus*.

Huomautus. Edellisen määritelmän $\mathcal{T}_Y$ todella on topologia, ks. [9, s. 89].

Määritelmä 2.32. Olkoon A topologisen avaruuden X osajoukko. Tällöin A on *suljettu*, jos sen komplementti $A^c = X \setminus A$ on avoin avaruudessa X.

Määritelmä 2.33. Olkoon x topologisen avaruuden X piste. Tällöin joukko $U \subseteq X$ on pisteen x *ympäristö*, jos on olemassa jokin avoin joukko V, jolla $x \in V \subseteq U$.

Määritelmä 2.34. Olkoon A topologisen avaruuden X osajoukko. Tällöin perheen $\mathcal{F} = \{F \mid A \subseteq F, F \text{ on suljettu}\}$ leikkausta sanotaan joukon A *sulkeumaksi* ja perheen $\mathcal{S} = \{S \mid S \subseteq A, S \text{ on avoin}\}$ yhdistettä joukon A *sisukseksi*.

Merkintä 2.35. Merkitään joukon A sulkeumaa $\overline{A}$ tai $\mathrm{cl}[A]$.

Huomautus. Sulkeuma on selvästi suljettu joukko.

Määritelmä 2.36. Topologinen avaruus X on *Hausdorffin avaruus*, jos jokaisella parilla avaruuden X pisteitä $x, y \in X$ on olemassa niitä vastaavat ympäristöt U_x ja U_y, joilla $U_x \cap U_y = \emptyset$. Lisäksi sanotaan näillä pisteillä x ja y olevan *erilliset ympäristöt*.

Määritelmä 2.37. Perhe $\mathcal{A}$ topologisen avaruuden X osajoukkoja on *peite* avaruudelle X, jos $\bigcup \mathcal{A} = X$. Lisäksi, jos kaikki perheen $\mathcal{A}$ alkiot ovat avoimia, niin se on *avoin peite*.

Määritelmä 2.38. Topologinen avaruus X on *kompakti*, jos jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä $\mathcal{A}$ on äärellinen osajoukko $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, joka on avaruuden X peite.

Määritelmä 2.39. Topologisen avaruuden X osajoukkoa C sanotaan *kompaktiksi*, jos se on topologisena aliavaruutena kompakti.

Lause 2.40. *Olkoon X Hausdorffin avaruus ja K sekä L sen erillisiä kompakteja osajoukkoja. Tällöin on olemassa erilliset avoimet osajoukot $U, V \subseteq X$, joilla $K \subseteq U$ ja $L \subseteq V$.*

Todistus. Sivuutetaan liian pitkänä, ks [3, s. 196] □

Määritelmä 2.41. Topologista avaruutta X sanotaan *lokaalisti kompaktiksi*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on jokin kompakti ympäristö U, jolla pätee $x \in U \subseteq X$.

Huomautus. Jokainen kompakti topologinen avaruus on myös lokaalisti kompakti.

Määritelmä 2.42. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia. Tällöin kuvaus $f : X \to Y$ on *jatkuva*, jos osajoukko $f^{-1}(U) \subseteq X$ on avoin aina, kun $U \subseteq Y$ on avoin.

Määritelmä 2.43. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia ja kuvaus $f : X \to Y$ niiden välinen bijektio. Jos f ja sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat jatkuvia, sanotaan kuvausta f tällöin *homeomorfismiksi*.

Lause 2.44. *Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ niiden välinen jatkuva kuvaus. Tällöin kompaktin osajoukon $C \subseteq X$ kuva $f(C)$ on kompakti.*

Todistus. Vrt. [9, s. 166]. Olkoot X, Y ja f kuten väitteessä, $C \subseteq X$ kompakti osajoukko ja $\mathcal{A}_Y$ joukon $f(C)$ avoin peite avarudessa Y. Koska f on jatkuva, niin jokainen $f^{-1}(A)$, missä $A \in \mathcal{A}_Y$, on avoin avaruudessa X ja perhe $\mathcal{A}_X = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_Y\}$ on joukon C avoin peite. Toisaalta C on kompakti, joten äärellinen osajoukko $\mathcal{A}_{X0} \subseteq \mathcal{A}_X$ on myös joukon C peite, joten perhe $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}_{X0}\}$ on joukon $f(C)$ äärellinen peite. □

Määritelmä 2.45. Olkoon X topologinen avaruus ja $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Tällöin kuvauksen f *kantajaksi* sanotaan joukon $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ sulkeumaa ja sitä merkitään $\mathrm{supp}(f)$.

Seuraavassa lauseessa esiintyvää tuloavaruutta ei käsitellä sen tarkemmin, sillä se esiintyy vain muutamassa todistuksessa tutkielman alkupuolella, eikä näin ole riittävän oleellinen aiheen ymmärtämisen kannalta. Aiheesta kiinnostuneet voivat lukea (topologisesta) tuloavaruudesta ja tulotopologiasta Munkresin [9, s. 86–88 ja s. 114–117] teoksesta.

Lause 2.46 (Tihonovin lause)**.** *Mielivaltainen kompaktien topologisten avaruuksien tuloavaruus on kompakti.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. [9, s. 234]. □

Seuraavaksi voidaan yhdistää ryhmän ja topologisen avaruuden määritelmä ja näin saada aikaan topologinen ryhmä.

Määritelmä 2.47. Topologisesta avaruudesta G saadaan ryhmä varustamalla se jatkuvalla ja kääntyvällä

(a) ryhmäkuvauksella $G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$ ja

(b) käänteisalkiokuvauksella $G \to G : x \mapsto x^{-1}$.

Tällöin muodostunutta ryhmää G sanotaan *topologiseksi ryhmäksi*.

Määritelmä 2.48. *Kompakti topologinen ryhmä* on topologinen ryhmä, jonka topologinen avaruus on kompakti Hausdorffin avaruus. Vastaavasti *lokaalisti kompaktin topologisen ryhmän* topologinen avaruus on lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus.

Määritelmä 2.49. Olkoon X topologinen avaruus ja x jokin tämän avaruuden piste. Tällöin avaruuden X osajoukkojen perhe $\mathcal{U}$ on pisteen x *ympäristökanta*, jos

(a) jokainen perheen $\mathcal{U}$ alkio on pisteen x avoin ympäristö ja

(b) jokaisella pisteen x avoimella ympäristöllä V on olemassa jokin $U \subseteq V$, joka kuuluu perheeseen $\mathcal{U}$.

Lause 2.50. *Olkoon G topologinen ryhmä, e sen neutraalialkio ja a mielivaltainen piste. Tällöin*

(a) kuvaukset $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$ ja $x \mapsto x^{-1}$ ovat homeomorfismeja $G \to G$,

(b) jos $\mathcal{U}$ on neutraalialkion e ympäristökanta, niin $\{aU \mid U \in \mathcal{U}\}$ ja $\{Ua \mid U \in \mathcal{U}\}$ ovat pisteen a ympäristökantoja ja

(c) jos K ja L ovat ryhmän G kompakteja osajoukkoja, niin aK, Ka, KL ja K^{-1} ovat ryhmän G kompakteja osajoukkoja.

Todistus. Vrt. [3, s. 298]. Topologisen ryhmän määritelmä yhdessä ryhmän laskutoimitusten jatkuvuuden kanssa sisältää kohdan (a) kuvauksien jatkuvuuden. Lisäksi koska kuvauksilla $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$ ja $x \mapsto x^{-1}$ on jatkuvat käänteiskuvaukset, ovat ne homeomorfismeja $G \to G$.

Kohta (b) seuraa suoraan kohdasta (a), sillä ympäristön kuva homeomorfismissa on edelleen ympäristö. Oletetaan, että U on neutraalialkion e ympäristö. Tällöin on siis olemassa avoin joukko V_e, jolla $e \in V_e \subseteq U$, ja edelleen $a \in aV_e \subseteq aU$. Koska avoimen joukon kuva homeomorfismissa on avoin, on aV_e avoin joukko ja nyt aU on pisteen a ympäristö.

Kohta (c) seuraa siitä, että kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti lauseen 2.44 perusteella. Tämä todistaa suoraan tapauksen K^{-1} ja yhdessä Tihonovin lauseen 2.46 kanssa myös tapaus KL ja sen erikoistapaukset aK ja Ka ovat todistettu. □

Määritelmä 2.51. Olkoon G topologinen ryhmä ja e sen neutraalialkio. Tällöin neutraalialkion e ympäristöä U sanotaan *symmetriseksi*, jos $U = U^{-1}$.

Lause 2.52. *Olkoon G topologinen ryhmä, e sen neutraalialkio ja U mikä tahansa neutraalialkion e avoin ympäristö. Tällöin* *(a) on olemassa neutraalialkion e avoin ympäristö V, jolle $VV \subseteq U$ ja*

(b) on olemassa neutraalialkion e symmetrinen avoin ympäristö, joka sisältyy ympäristöön U.

Todistus. Vrt. [3, s. 299]. Olkoot G ja e kuten väitteessä.

Todistetaan ensin kohta (a). Koska kuvaus $(x, y) \mapsto xy$ on jatkuva, on joukko $W = \{(x, y) \mid xy \in U\}$ pisteen (e, e) avoin ympäristö tuloavaruudessa $G \times G$, ja on olemassa neutraalialkion e avoimet ympäristöt V_1 ja V_2, joilla $V_1 \times V_2 \subseteq W$. Tällöin $V = V_1 \cap V_2$ on neutraalialkion e avoin ympäristö, jolla pätee $VV \subseteq U$.

Todistetaan sitten kohta (b). Kuvauksen $x \mapsto x^{-1}$ homeomorfisuudesta seuraa, että jos U on neutraalialkion e avoin ympäristö, niin tällöin myös U^{-1} on neutraalialkion e avoin ympäristö. Siispä $U \cap U^{-1}$ on symmetrinen neutraalialkion e avoin ympäristö joka sisältyy ympäristöön U. □

Lause 2.53. *Olkoon G topologinen ryhmä, K sen kompakti osajoukko ja U avoin joukko, jolla $K \subseteq U$. Tällöin on olemassa ryhmän G neutraalialkion e avoimet ympäristöt V_R ja V_L, joilla pätee $KV_R \subseteq U$ ja $V_L K \subseteq U$.*

Todistus. Vrt. [3, s. 299]. Olkoot K ja U kuten väitteessä. Tällöin lauseiden 2.50 ja 2.52 nojalla voidaan valita jokaiselle osajoukon K pisteelle x neutraalialkion e avoimet ympäristöt W_x ja V_x, joilla $xW_x \subseteq U$ ja $V_x V_x \subseteq W_x$. Tällöin $\{xV_x \mid x \in K\}$ on osajoukon K avoin peite ja koska K on kompakti, niin on olemassa äärellinen joukko $x_1, \dots, x_n$ osajoukon K pisteitä niin, että joukot $x_i V_{x_i}$, missä $i = 1, \dots, n$, peittävät osajoukon K. Olkoon nyt $V_R = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Jos $x \in K$, niin on olemassa jokin indeksi i, jolla $x \in x_i V_{x_i}$, joten $xV_R \subseteq x_i V_{x_i} V_{x_i} \subseteq x_i W_{x_i} \subseteq U$. Koska x oli osajoukon K mielivaltainen piste, niin $KV_R \subseteq U$. Ympäristön V_L olemassaolon todistus on vastaavanlainen. □

3 Mittateoriaa

Mittateorian osaaminen on tutkielman kannalta tärkeää, sillä ei-mitalliset joukot tulevat mahdollistamaan myöhemmin esiteltävät paradoksaaliset tulokset. Myös tässä luvussa sivuutetaan joidenkin lauseiden todistuksia.

3.1 Algebrat ja sigma-algebrat

Tämä aliluku valmistaa ymmärtämään tutkielman varsinaiset mittateorian osuudet ja se on koottu Cohnin [3] teoksen sivuilta 1–6.

Määritelmä 3.1. Olkoon X jokin joukko. Jos $\mathcal{A}$ on perhe joukon X osajoukkoja, jolla pätee

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. jos $S \in \mathcal{A}$, niin $S^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$ ja
3. $\mathcal{A}$ on suljettu äärellisten yhdisteiden suhteen,

niin tällöin perhettä $\mathcal{A}$ sanotaan *algebraksi*.

Määritelmä 3.2. Jos perhe $\mathcal{A}$ on kuten edellisessä määritelmässä, mutta se on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen, niin perhettä $\mathcal{A}$ sanotaan *σ-algebraksi*.

Huomautus. Algebran ja σ-algebran määritelmien kohdista 2 ja 3 seuraa, että algebrat ovat suljettuja äärellisten leikkauksien suhteen ja σ-algebrat ovat suljettuja numeroituvien leikkauksien suhteen.

Lause 3.3. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{S}$ epätyhjä perhe joukon X σ-algebroja. Tällöin leikkaus $\bigcap \mathcal{S}$ on joukon X σ-algebra.*

Todistus. Vrt. [3, s. 3]. Olkoot X ja $\mathcal{S}$ kuten väitteessa ja $\mathcal{A}$ perheen $\mathcal{S}$ leikkaus. Riittää tarkistaa, että joukko $\mathcal{A}$ sisältää joukon X ja että se on suljettu komplementin sekä numeroituvien yhdisteiden suhteen. Selvästi $X \in \mathcal{A}$, sillä X kuuluu jokaiseen σ-algebraan. Olkoon nyt $A \in \mathcal{A}$. Tällöin jokainen perheen $\mathcal{S}$ σ-algebra sisältää joukon A, joten ne sisältävät myös sen komplementin A^{c}, eli myös $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$. Olkoon sitten $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ jono joukon $\mathcal{A}$ alkioita, jolloin jokainen niistä kuuluu myös jokaiseen perheen $\mathcal{S}$ σ-algebraan. Tällöin yhdiste $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} A_i$ kuuluu jokaiseen perheen $\mathcal{S}$ σ-algebraan, eli se kuluu myös joukkoon $\mathcal{A}$. Näin on osoitettu, että $\mathcal{A}$ täyttää kaikki σ-algebran vaatimukset. □

Määritelmä 3.4. Jonoa $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ joukkoja sanotaan *kasvavaksi*, jos $A_i \subseteq A_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Vastaavasti jonoa sanotaan *väheneväksi*, jos $A_{i+1} \subseteq A_i$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$.

Lause 3.5. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{A}$ algebra tälle joukolle. Tällöin $\mathcal{A}$ on σ-algebra, jos kumpi tahansa seuraavista ehdoista pätee.*

(a) $\mathcal{A}$ on suljettu kasvavien jonojen yhdisteiden suhteen tai

(b) $\mathcal{A}$ on suljettu vähenevien jonojen leikkauksien suhteen.

Todistus. Vrt. [3, s. 6]. Olkoon X ja $\mathcal{A}$ kuten väitteessä. Oletetaan ensiksi, että kohta (a) pätee. Koska $\mathcal{A}$ on algebra, riittää tarkistaa, että se on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen, jotta tiedetään sen olevan myös σ-algebra. Oletetaan, että $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on jono joukkoja, jotka kuuluvat algebraan $\mathcal{A}$. Olkoon nyt $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Jono $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ on selvästi kasvava, ja koska $\mathcal{A}$ on algebra, niin jokainen B_n kuuluu algebraan $\mathcal{A}$. Nyt kohdan (a) perusteella $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. Mutta toisaalta $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, joten $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Nyt on osoitettu, että $\mathcal{A}$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen, eli se on σ-algebra.

Oletetaan sitten, että kohta (b) pätee. Nyt riittää tarkistaa, että myös kohta (a) pätee. Jos $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on kasvava jono joukkoja, jotka kuuluvat algebraan $\mathcal{A}$, niin tällöin $(A_i^{\mathsf{c}})_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on vähenevä jono joukkoja, jotka kuuluvat algebraan $\mathcal{A}$ ja oletuksen (b) perusteella $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$. Nyt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathsf{c}}\right)^{\mathsf{c}}$, joten siis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. On siis osoitettu, että kohdasta (b) seuraa kohta (a), ja tällöin $\mathcal{A}$ on σ-algebra. □

Määritelmä 3.6. Jos $\mathcal{A}$ on topologisen avaruuden X avoimien joukkojen virittämä σ-algebra, sanotaan sitä silloin *Borel-joukkojen σ-algebraksi*.

Merkintä 3.7. Merkitään topologisen avaruuden X Borel-joukkojen σ-algebraa $\mathcal{B}(X)$.

Määritelmä 3.8. Joukon $\mathcal{B}(X)$ alkioita kutsutaan *Borel-osajoukoiksi*.

Merkintä 3.9. Olkoon $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ kaikkien topologisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettujen osajoukkojen perhe ja $\mathcal{F}_\sigma$ kaikkien joukon $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ numeroituvien jonojen yhdiste. Kutsutaan joukon $\mathcal{F}_\sigma$ alkioita F_σ-joukoiksi.

Vastaavaan tapaan avoimille osajoukoille: olkoon $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ kaikkien topologisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimien osajoukkojen perhe ja $\mathcal{G}_\delta$ kaikkien joukon $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ numeroituvien jonojen leikkaus. Kutsutaan joukon $\mathcal{G}_\delta$ alkioita G_δ-joukoiksi.

Lause 3.10. *Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko on G_δ-joukko ja jokainen avoin osajoukko on F_σ-joukko.*

Todistus. Vrt. [3, s. 6]. Oletetaan, että F on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko. Määritellään U_m

$$U_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x - y\| < \frac{1}{m} \text{ jollakin } y \in F \right\}, \text{ missä } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Selvästi jokainen U_m on avoin, sillä $x \in U_m$, jos ja vain jos alkion x etäisyys jostakin alkiosta $y \in F$ on aidosti pienempi kuin $\frac{1}{m}$. Lisäksi selvästi $F \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$, sillä $\|y - y\| = 0 < \frac{1}{m}$, kun $y \in F$. Toisaalta myös $\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m \subseteq F$, sillä jokainen joukon

$\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ alkio on joukon F alkioiden jonon raja-arvo. Siispä $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$, joten jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko on G_δ-joukko.

Oletetaan sitten, että V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin osajoukko. Tällöin sen komplementti V^{c} on suljettu, eli se on G_δ-joukko. Tällöin on olemassa jono $(V_m)_{m \in \mathbb{Z}_+}$ avoimia joukkoja siten, että $V^{\mathsf{c}} = \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$. Tällöin joukot V_m^{c} ovat suljettuja ja $V = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m^{\mathsf{c}}$, eli V on F_σ-joukko. □

3.2 Mitat ja mitta-avaruus

Myös tämä mittoja käsittelevä aliluku on kokonaisuudessaan Cohnin [3] teoksesta. Aloitetaan esittelemällä ulkomitta ja mitta.

Määritelmä 3.11. Olkoon X joukko. Tällöin kuvaus

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$$

on *osittaisadditiivinen*, jos sillä pätee

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

jokaisella numeroituvalla jonolla $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ erillisiä joukkoja, jotka kuuluvat joukkoon $\mathcal{P}(X)$.

Määritelmä 3.12. Olkoon X joukko. Tällöin kuvaus $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on *ulkomitta* joukolle X, jos

1. se on osittaisadditiivinen,
2. kaikilla osajoukoilla $A \subseteq B \subseteq X$ pätee $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ja
3. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Määritelmä 3.13. Jos X on joukko ja μ^* on ulkomitta tälle joukolle, niin joukkoa X sanotaan *μ^*-mitalliseksi joukoksi* tai vain *ulkomitalliseksi joukoksi*.

Määritelmä 3.14. Olkoon X joukko ja $\mathcal{A}$ sen σ-algebra. Tällöin kuvaus

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

on *täysadditiivinen*, jos sillä pätee

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

jokaisella numeroituvalla jonolla $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ erillisiä joukkoja, jotka kuuluvat σ-algebraan $\mathcal{A}$.

Määritelmä 3.15. Kuvaus $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ on *mitta* σ-algebralle $\mathcal{A}$, jos se on täysadditiivinen ja $\mu(\emptyset) = 0$.

Kuten yllä olevista määritelmistä nähdään, ulkomitalla ja mitalla on paljon yhtäläisyyksiä. Usein mitta tietylle σ-algebralle rakennetaan ulkomitan avulla [3, s. 14], rajoittamalla sitä johonkin potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ osajoukkoon (joka on myös σ-algebra) ja todistamalla tämän rajoittuman olevan täysadditiivinen.

Huomautus. Mitta joukon X σ-algebralle on ulkomitta, jos ja vain jos sen määrittelyjoukko on $\mathcal{P}(X)$. Yleisesti ulkomitta ei täytä mitan määritelmää.

Määritelmä 3.16. Jos X on joukko, $\mathcal{A}$ on σ-algebra tälle joukolle ja μ on mitta σ-algebralle $\mathcal{A}$, niin paria $(X, \mathcal{A})$ sanotaan *mitalliseksi avaruudeksi* ja kolmikkoa $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sanotaan *mitta-avaruudeksi*.

Määritelmä 3.17. Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus. Tällöin μ on *äärellinen mitta*, jos $\mu(X) < \infty$.

Määritelmä 3.18. Olkoon $(X, \mathcal{B}(X))$ mitallinen topologinen avaruus ja μ sen mitta. Tällöin tätä mittaa sanotaan *Borel-mitaksi*.

Lause 3.19. *Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus ja A sekä B joukon X osajoukkoja, jotka kuuluvat σ-algebraan $\mathcal{A}$ ja joilla pätee $A \subseteq B$. Tällöin $\mu(A) \leq \mu(B)$. Lisäksi, jos joukolle A pätee $\mu(A) < \infty$, niin $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Todistus. Vrt. [3, s. 9]. Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$, A ja B kuten väitteessä. Joukot A ja $B \setminus A$ ovat selvästi erilliset ja niille pätee $B = A \cup (B \setminus A)$, joten nyt mitan μ täysadditiivisuudesta seuraa $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Edelleen koska $\mu(B \setminus A) \geq 0$, niin $\mu(B) \geq \mu(A)$. Lisäksi, jos $\mu(A) < \infty$, niin myös $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$. □

Lause 3.20. *Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus.*

(a) Jos $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ on kasvava jono σ-algebran $\mathcal{A}$ alkioita, niin $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

(b) Jos $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ on laskeva jono σ-algebran $\mathcal{A}$ alkioita ja $\mu(A_n) < \infty$ pätee jollain $n \in \mathbb{Z}_+$, niin $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

Todistus. Vrt. [3, s. 11]. Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus. Oletetaan, että $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ on kasvava jono σ-algebran $\mathcal{A}$ alkioita ja olkoon $(B_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ jono, jolla $B_1 = A_1$ ja $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$, jos $j > 1$. Näin muodostetut joukot ovat erilliset, kuuluvat σ-algebraan $\mathcal{A}$ ja niillä pätee $A_i = \bigcup_{j=1}^{i} B_j$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Tästä seuraa, että $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, ja edelleen koska μ on täysadditiivinen, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} \mu(B_j) = \lim_{i \to \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{i} B_j\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

Näin kohta (a) on todistettu.

Seuraavaksi oletetaan, että $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on vähenevä jono σ-algebran $\mathcal{A}$ alkioita ja $\mu(A_n) < \infty$ jollain $n \in \mathbb{Z}_+$. Voidaan olettaa, että $n = 1$. Olkoon nyt $C_i = A_1 \setminus A_i$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $(C_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on kasvava jono σ-algebran $\mathcal{A}$ alkioita ja $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. Kohdasta (a) seuraa, että $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(C_i)$, joten

$$\mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_i).$$

Lauseen 3.19 ja oletuksen $\mu(A_n) < \infty$ perusteella siis pätee $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$. □

Määritelmä 3.21. Olkoon $\mathcal{A}$ σ-algebra joukossa $\mathbb{R}^n$, joka sisältää σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin mitallisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ mitta μ on *säännöllinen*, jos

1. jokaisella kompaktilla osajoukolla $K \in \mathbb{R}^n$ pätee $\mu(K) < \infty$,
2. jokaisella $A \in \mathcal{A}$ pätee $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U,\ U \text{ on avoin}\}$ ja
3. jokaisella avoimella osajoukolla $U \subseteq \mathbb{R}^n$ pätee
   $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U,\ K \text{ on kompakti}\}$.

Jos mitta on Borel-mitta, sanotaan sitä silloin *säännölliseksi Borel-mitaksi*.

Apulause 3.22. *Olkoon $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus ja $\mathcal{A}_0$ σ-algebran $\mathcal{A}$ osajoukko joka sisältää kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet joukot ja kaikilla $A \in \mathcal{A}_0$ pätee*

1. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ on avoin}\}$ *ja*
2. $\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq A, C \text{ on suljettu}\}$.

Tällöin $\mathcal{A}_0$ koostuu niistä Borel-joukoista A, joille jokaista positiivista lukua ϵ vastaan on olemassa sellainen avoin joukko U ja suljettu joukko C, että $C \subseteq A \subseteq U$ ja $\mu(U \setminus C) < \epsilon$.

Todistus. Olkoon $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ ja $\mathcal{A}_0$ kuten väitteessä. Voidaan valita joukoksi U joukko A ja väitteen kohdasta kaksi seuraa, että on olemassa suljettu joukko C, jolla $C \subseteq A$ ja $\mu(A) = \mu(C)$. Tällöin lauseen 3.19 avulla saadaan $0 = \mu(A) - \mu(A) = \mu(U) - \mu(C) = \mu(U \setminus C) < \epsilon$ kaikilla positiivisilla luvuilla ϵ. □

Apulause 3.23. *Olkoon μ äärellinen mitta avaruudelle $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Tällöin jokaisella Borel-osajoukolla $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pätee apulauseen 3.22 kohdat 1 ja 2.*

Todistus. Vrt. [3, s. 40]. Olkoon $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ mitta-avaruus ja $\mathcal{R}$ perhe, joka koostuu niistä Borel-osajoukoista joille apulauseen kohdat yksi ja kaksi pätevät.

Osoitetaan ensin, että perhe $\mathcal{R}$ sisältää kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet osajoukot. Olkoon nyt V mikä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin osajoukko. Selvästi joukolle V pätee

$$\mu(V) = \inf\{\mu(U) \mid V \subseteq U, U \text{ on avoin}\}.$$

Lauseen 3.10 perusteella on siis olemassa jono joukon $\mathbb{R}^n$ suljettuja osajoukkoja $(C_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$, jolla $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $(C_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on kasvava. Nyt lauseen 3.20 perusteella $\mu(V) = \lim_{i\to\infty} \mu(C_i)$, joten joukolle V pätee

$$\mu(V) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq V, C \text{ on suljettu}\}.$$

Eli perhe $\mathcal{R}$ sisältää kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet osajoukot.

Osoitetaan sitten, että $\mathcal{R}$ on σ-algebra. Se sisältää joukon $\mathbb{R}^n$, sillä $\mathbb{R}^n$ on avoin. Olkoot $A \in \mathcal{R}$ ja ϵ mikä tahansa positiivinen luku, sekä C jokin suljettu joukko ja U jokin avoin joukko, joilla $C \subseteq A \subseteq U$ ja $\mu(U \setminus C) < \epsilon$. Tällöin U^c on suljettu joukko ja C^c on avoin joukko, joilla $U^c \subseteq A^c \subseteq C^c$ ja $\mu(C^c \setminus U^c) < \epsilon$. Nyt apulauseesta 3.22 seuraa, että $\mathcal{R}$ on suljettu komplementin suhteen. Olkoon seuraavaksi $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ jono joukon $\mathcal{R}$ alkioita ja ϵ jokin positiivinen luku. Valitaan jokaiselle indeksille $i \in \mathbb{Z}_+$ sellainen suljettu joukko C_i ja avoin joukko U_i, että $C_i \subseteq A_i \subseteq U_i$ ja $\mu(U_i \setminus C_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$. Merkitään $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ ja $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Tällöin $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq U$ ja

$$\mu(U \setminus C) \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus C_i)\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i \setminus C_i) < \epsilon.$$

Joukko U on avoin, mutta C ei välttämättä ole suljettu. Mutta toisaalta jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ joukko $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ on suljettu, ja koska $\mu(U \setminus C) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i\Big)$ niin on olemassa positiivinen luku n, jolla

$$\mu\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) < \epsilon.$$

Joten joukot U ja $\bigcup_{i=1}^{n} C_k$ ovat apulauseen 3.22 vaatimat joukot ja $\mathcal{R}$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen.

Nyt on osoitettu, että $\mathcal{R}$ on σ-algebra joukolle $\mathbb{R}^n$, joka sisältää joukon $\mathbb{R}^n$ avoimet osajoukot. Koska $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ on pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot, niin $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{R}$. Näin ollen apulause on todistettu. □

Lause 3.24. *Olkoon μ äärellinen mitta avaruudelle* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. *Tällöin μ on säännöllinen. Lisäksi jokaiselle Borel-osajoukolle* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *pätee*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K \textit{ on kompakti}\}.$$

Todistus. Vrt. [3, s. 42]. Olkoon $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ mitta-avaruus. On siis todistettava, että mitalle μ pätee

1. jokaisella kompaktilla osajoukolla $K \in \mathbb{R}^n$ pätee $\mu(K) < \infty$,
2. jokaisella $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pätee $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ on avoin}\}$ ja
3. jokaisella avoimella osajoukolla $U \subseteq \mathbb{R}^n$ pätee
$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U, K \text{ on kompakti}\}$.

Ensimmäinen kohta seuraa suoraan mitan μ äärellisyydestä ja toinen kohta apulauseesta 3.23. Vielä täytyy siis todistaa kolmas kohta. Olkoon $A \in \mathbb{R}^n$ Borel-osajoukko ja olkoon ϵ positiivinen luku. Nyt apulauseen 3.23 perusteella on olemassa suljettu osajoukko $C \subseteq A$, jolla $\mu(C) > \mu(A) - \epsilon$. Valitaan kasvava jono $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ suljettuja ja rajoitettuja (eli kompakteja) joukkoja, joiden yhdiste on C, esimerkiksi asettamalla $C_i = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq i\}$. Lauseen 3.20 perusteella $\mu(C) = \lim_{i \to \infty} \mu(C_i)$ ja jos i on riittävän suuri, niin $C_i \subseteq A$ on kompakti osajoukko jolla $\mu(C_i) > \mu(A) - \epsilon$. Tästä seuraa että myös kohta kolme pätee. □

3.3 Haarin mitta

Esitellään tässä aliluvussa Haarin mitta sekä joitain siihen liittyviä ominaisuuksia. Tämä aliluku on koostettu Cohnin [3] ja Halmosin [5] teoksien pohjalta.

Määritelmä 3.25. Olkoon G lokaalisti kompakti topologinen ryhmä. Säännöllistä Borelin mittaa μ tässä ryhmässä G kutsutaan (vasemmaksi) *Haarin mitaksi* silloin, kun $\mu(U) > 0$ kaikilla epätyhjillä avoimilla joukoilla U ja $\mu(xE) = \mu(E)$ kaikilla Borel-joukoilla E ja $x \in G$. Oikea Haarin mitta määritellään vastaavasti edellyttämällä $\mu(Ex) = \mu(E)$.

Lause 3.26. *Jokaisella lokaalisti kompaktilla topologisella ryhmällä G on vasen Haarin mitta.*

Todistus. Nojataan tässä todistuksessa normaalia vahvemmin lähdemateriaaliin, sillä Haarin mitta ja siten tämä todistus ei ole tutkielman pääaihe. Valveutunut lukija voi tarkistaa kaikki yksityiskohdat Cohnin [3, s. 297–309] teoksesta.

Olkoon G lokaalisti kompakti topologinen ryhmä, K sen kompakti osajoukko ja V sellainen ryhmän G osajoukko, jonka sisus V_{sis} on epätyhjä. Tällöin $\{x(V_{sis}) \mid x \in G\}$ on kompaktin osajoukon K avoin peite, joten on olemassa äärellinen jono $(x_i)_{i=1}^n$ ryhmän G alkioita, joilla $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i V$. Merkitään $\#(K : V)$ pienintä epänegatiivista lukua n, jolla edellä mainittu jono $(x_i)_{i=1}^n$ on olemassa. Selvästi $n = 0$, jos ja vain jos $K = \emptyset$.

Kiinnitetään sitten ryhmän G jokin kompakti osajoukko K_0, jonka sisus niin ikään on epätyhjä. Käytetään tätä kompaktia osajoukkoa "mittaamaan" ryhmän G osajoukkojen kokoa edellisessä kappaleessa määritellyn merkinnän $\#(K : V)$ avulla. Näin voidaan rakentaa ryhmälle G ulkomitta μ^*, jonka rajoittuman Borel-osajoukkoihin $\mathcal{B}(G)$ voidaan edelleen osoittaa olevan haluttu Haarin mitta.

Olkoon $\mathcal{C}$ kaikkien ryhmän G kompaktien osajoukkojen perhe ja $\mathcal{U}$ kaikkien neutraalialkion $e \in G$ avointen ympäristöjen perhe. Määritellään jokaisella $U \in \mathcal{U}$ kuvaus $h_U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, K \mapsto \#(K : U)/\#(K_0 : U)$. Osoitetaan, että yhtälöt ja epäyhtälöt

$$0 \le h_U(K) \le \#(K : K_0), \tag{3.1}$$
$$h_U(K_0) = 1, \tag{3.2}$$
$$h_U(xK) = h_U(K), \tag{3.3}$$
$$h_U(K_1) \le h_U(K_2), \text{ jos } K_1 \subseteq K_2, \tag{3.4}$$
$$h_U(K_1 \cup K_2) \le h_U(K_1) + h_U(K_2) \text{ ja} \tag{3.5}$$
$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2), \text{ jos } K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset \tag{3.6}$$

pätevät kaikille $U \in \mathcal{U}, K, K_1, K_2 \in C$ ja $x \in G$. Huomataan, että

$$\#(K : U) \le \#(K : K_0)\#(K_0 : U) \tag{3.7}$$

pätee kaikilla $K \in C$ ja $U \in \mathcal{U}$, sillä jos $(x_i)_{i=1}^m$ ja $(y_j)_{j=1}^n$ ovat sellaiset jonot, joilla pätee $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m x_iK_0$ ja $K_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^n y_jU$, niin $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n x_iy_jU$. Nyt jakamalla epäyhtälön 3.7 molemmat puolet luvulla $\#(K_0 : U)$ saadaan epäyhtälö 3.1. Yhtälö 3.2 on triviaali, samoin ovat 3.3: ryhmän G toiminta itsessään ei vaikuta osajoukon kokoon, 3.4: joukolle K_1 käy sama jono kuin joukolle K_2, ja 3.5: joukkojen K_1 ja K_2 yhdisteelle käy niiden joukkojen yhdistetty jono.

Voidaan todistaa yhtälö 3.6 epäyhtälön 3.5 avulla tarkistamalla, että

$$\#((K_1 \cup K_2) : U) \ge \#(K_1 : U) + \#(K_2 : U) \tag{3.8}$$

pätee. Oletetaan yhtälön 3.6 mukaisesti, että $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$ ja olkoon $(x_i)_{i=1}^n$ jono pisteitä, jolla $n = \#((K_1 \cup K_2) : U)$ ja $K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iU$. Tällöin jokaisessa joukossa x_iU on alkioita enintään vain yhdestä joukosta K_1 tai K_2, sillä muutoin x_i kuuluisi joukkoon $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1}$, joten nyt voidaan jakaa jono $(x_i)_{i=1}^n$ kahteen jonoon $(y_i)_{i=1}^j$ ja $(z_i)_{i=1}^k$ siten, että $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^j y_iU$ ja $K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^k z_iU$. Tästä seuraa, että epäyhtälö 3.8 pätee, ja edelleen yhtälö 3.6 pätee. Näin on todistettu, että kaikki yhtälöt ja epäyhtälöt 3.1–3.6 pätevät.

Merkitään sitten jokaista $K \in C$ vastaavaa väliä $[0, \#(K : K_0)]$ lyhyemmin merkinnällä I_K. Olkoon X tuloavaruus $\prod_{K \in C} I_K$ varustettuna vastaavalla tulotopologialla. Koska jokainen väli I_K on kompakti, Tihonovin lauseesta 2.46 seuraa edelleen, että X on kompakti. Yhtälön 3.1 perusteella jokainen h_U kuuluu avaruuteen X. Merkitään $S(V)$:llä joukon $\{h_U \mid U \in \mathcal{U},\ U \subseteq V\}$ sulkeumaa avaruudessa X, kun V on mikä tahansa neutraalialkion e avoin ympäristö. Selvästi, jos ympäristöt $V_1, \ldots, V_n$ kuuluvat perheeseen $\mathcal{U}$ ja $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$, niin $h_V \in \bigcap_{i=1}^n S(V_i)$, erityisesti suljetut joukot $S(V), V \in \mathcal{U}$ toteuttavat äärellisen leikkauksen ominaisuuden. Siispä avaruuden X kompaktisuudesta seuraa, että $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V)$ on epätyhjä. Kiinnitetään sitten joukon $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V)$ kuvaus h, joka toimii kuvauksien h_U "raja-arvona".

Tarkastetaan, että kuvaukselle h pätee yhtälöt ja epäyhtälöt

$$0 \leq h(K), \tag{3.9}$$

$$h(\emptyset) = 0, \tag{3.10}$$

$$h(K_0) = 1, \tag{3.11}$$

$$h(xK) = h(K), \tag{3.12}$$

$$h(K_1) \leq h(K_2), \text{ jos } K_1 \subseteq K_2, \tag{3.13}$$

$$h(K_1 \cup K_2) \leq h(K_1) + h(K_2), \text{ ja} \tag{3.14}$$

$$h(K_1 \cup K_2) = h(K_1) + h(K_2), \text{ jos } K_1 \cap K_2 = \emptyset. \tag{3.15}$$

Aloitetaan epäyhtälöstä 3.14. Koska X on tuloavaruus, niin

(a) jokainen sen alkio on kuvaus perheestä $\mathcal{C}$ joukkoon $\mathbb{R}$ ja

(b) jokaisella $K \in \mathcal{C}$ kuvaus $X \to \mathbb{R}$, $F \mapsto F(K)$ on jatkuva.

Joten kaikille ryhmän G kompakteille osajoukoille K_1 ja K_2 määritelty kuvaus

$$F \mapsto F(K_1) + F(K_2) - F(K_1 \cup K_2) \tag{3.16}$$

on jatkuva. Koska tämä kuvaus on lisäksi epänegatiivinen kaikilla h_U yhtälön 3.5 mukaisesti, se on epänegatiivinen myös jokaisen joukon $S(V)$ pisteissä. Erityisesti se on epänegatiivinen kuvauksella h, joten epäyhtälö 3.14 pätee.

Epäyhtälö 3.9 on triviaali ja yhtälöt sekä epäyhtälöt 3.10–3.13 todistetaan vastaavasti kuin epäyhtälö 3.14. Oletetaan sitten, että K_1 ja K_2 ovat ryhmän G erillisiä kompakteja osajoukkoja. Lauseen 2.40 perusteella on olemassa erilliset avoimet osajoukot U_1 ja U_2, joilla $K_1 \subseteq U_1$ ja $K_2 \subseteq U_2$, ja edelleen lauseen 2.53 perusteella on olemassa neutraalialkion e avoimet ympäristöt V_1 ja V_2, joilla $K_1 V_1 \subseteq U_1$ ja $K_2 V_2 \subseteq U_2$. Merkitään $V = V_1 \cap V_2$. Tällöin $K_1 V$ ja $K_2 V$ ovat erilliset, joten jokaisella joukolla $U \in \mathcal{U}$, jolla $U \subseteq V^{-1}$, pätee yhtälön 3.6 nojalla

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$$

pätee. Tästä seuraa, että kuvaus 3.16 häviää jokaisella $h_U \in S(V^{-1})$. Koska $h \in S(V^{-1})$, niin yhtälö 3.15 seuraa.

Määritellään nyt kuvaus μ^*, jonka väitetään olevan ulkomitta ryhmän G avointen joukkojen perheessä, seuraavasti

$$\mu^*(U) = \sup\{h(K) \mid K \subseteq U \text{ ja } K \in \mathcal{C}\}, \tag{3.17}$$

ja laajennetaan se kaikkien ryhmän G osajoukkojen perheelle seuraavasti

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) \mid A \subseteq U \text{ ja } U \text{ on avoin}\}. \tag{3.18}$$

Kuvaus μ^* on tällöin selvästi epänegatiivinen ja monotoninen, ja $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Kuvauksen μ^* numeroituvan osittaisadditiivisuuden tarkastamiseksi riittää tarkastaa (ks. [3, s. 210, 7.2.9 todistus]), että jokaisella numeroituvalla jonolla $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ ryhmän G avoimia osajoukkoja pätee

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i). \tag{3.19}$$

Oletetaan, että $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ on jono ryhmän G avoimia osajoukkoja. Olkoon K jokin joukon $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ kompakti osajoukko. Tällöin on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolla $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ ja on olemassa joukkojen $U_1, \ldots, U_n$ kompaktit osajoukot $K_1, \ldots, K_n$ (ks. [3, s. 199, 7.1.9 apulause ja induktio]), joilla $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Epäyhtälöstä 3.14 ja yhtälöstä 3.17 seuraa, että

$$h(K) \leq \sum_{i=1}^{n} h(K_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i),$$

ja koska K on mielivaltainen joukon $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ kompakti osajoukko, epäyhtälö 3.19 pätee. Näin on osoitettu, että μ^* on ryhmän G ulkomitta.

Voidaan todistaa jokaisen ryhmän G Borel-joukon olevan μ^*-mitallinen tarkistamalla (ks. [3, s. 210, 7.2.9 todistus]), että kun U ja V ovat ryhmän G avoimia osajoukkoja ja $\mu^*(V) < \infty$, niin

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c). \tag{3.20}$$

Olkoon ϵ jokin positiivinen luku. Valitaan joukon $V \cap U$ kompakti osajoukko K siten, että

$$h(K) > \mu^*(V \cap U) - \epsilon, \tag{3.21}$$

ja valitaan sitten avoimen joukon $V \cap K^c$ kompakti osajoukko L siten, että

$$h(L) > \mu^*(V \cap K^c) - \epsilon.$$

Tällöin K ja L ovat erillisiä, ja koska $V \cap U^c \subseteq V \cap K^c$, pätee joukolla L

$$h(L) > \mu^*(V \cap U^c) - \epsilon. \tag{3.22}$$

Yhtälöistä 3.15 ja 3.17, ja epäyhtälöistä 3.21 ja 3.22 seuraa nyt, että

$$\mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\epsilon < h(K) + h(L) = h(K \cup L) \leq \mu^*(V).$$

Ja edelleen, koska ϵ on mielivaltainen luku, epäyhtälö 3.20 seuraa. Siis $\mathcal{B}(G)$ kuuluu μ^*-mitallisten joukkojen σ-algebraan, joten väitetään ulkomitan μ^* rajoittuman joukkoon $\mathcal{B}(G)$ olevan mitta (ks. [3, s. 18, 1.3.4]). Merkitään tätä rajoittunutta ulkomittaa μ.

Huomataan, että jos K on kompakti joukko, U on avoin joukko ja $K \subseteq U$, niin $h(K) \leq \mu(U)$. Tästä ja yhtälöstä 3.18 seuraa, että

$$h(K) \leq \mu(K). \tag{3.23}$$

Lisäksi, jos K on kompakti joukko ja U on avoin joukko, joka sisältää joukon K ja jolla on kompakti sulkeuma, niin

$$\mu(K) \leq \mu(U) \leq h(\overline{U}).$$

Tästä seuraa, että μ on äärellinen kaikilla ryhmän G kompakteilla osajoukoilla.

Mitan μ ulkosäännöllisyys (määritelmän 3.21 kohta 2) seuraa yhtälöstä 3.18, ja sisäsäännöllisyys (määritelmän 3.21 kohta 3) yhtälöstä 3.17 ja epäyhtälöstä 3.23. Mitta μ on myös selvästi siirtoinvariantti eikä ole nollakuvaus yhtälöiden 3.11, 3.12, 3.17 ja 3.18 perusteella. Tällöin μ siis on haluttu mitta. □

Lause 3.27. *Jos lokaalisti kompaktilla topologisella ryhmällä G on vasen Haarin mitta, sillä on myös oikea Haarin mitta.*

Todistus. Vrt. [3, s. 312] ja [5, s. 256]. Olkoon μ lokaalisti kompaktin ryhmän G vasen Haarin mitta ja $A \in \mathcal{B}(G)$. Voidaan nyt määritellä $\mu_R(A) = \mu(A^{-1})$, sillä käänteiskuvaus on homeomorfismi. Tällöin μ_R on oikea Haarin mitta ryhmälle G, sillä $\mu_R(U) = \mu(U^{-1}) > 0$ kaikilla epätyhjillä avoimilla joukoilla U ja $\mu_R(Ex) = \mu((Ex)^{-1}) = \mu(x^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \mu_R(E)$ kaikilla Borel-joukoilla E ja $x \in G$. □

Merkintä 3.28. Jos X on lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus, merkitään $\mathcal{K}(X)$ niiden jatkuvien kuvauksien $f : X \to \mathbb{R}$ joukkoa, joiden kantaja $\mathrm{supp}(f)$ on kompakti.

Apulause 3.29. *Olkoon G lokaalisti kompakti topologinen ryhmä ja μ sen vasen Haarin mitta. Tällöin jokaisella epätyhjällä ryhmän G osajoukolla U pätee $\mu(U) > 0$ ja jokaisella joukon $\mathcal{K}(G)$ epänegatiivisella kuvauksella f, joka ei ole nollakuvaus, pätee $\int f d\mu > 0$.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. [3, s. 309] □

Lause 3.30. *Olkoon G lokaalisti kompakti ryhmä ja μ ja υ sen vasempia Haarin mittoja. Tällöin on olemassa sellainen positiivinen luku c, että $\upsilon = c\mu$. Toisin sanoen Haarin mitta on skaalausta lukuunottamatta yksikäsitteinen.*

Todistus. Todistus käyttää oleellisesti edellistä apulausetta, mutta sivuutetaan se tilan säästämiseksi, ks. [3, s. 309]. □

Esimerkki 3.31. Vrt. [5, s. 256]. Lauseen 3.30 perusteella vasen Haarin mitta on skaalausta vaille yksikäsitteinen. Tästä ei kuitenkaan seuraa, että vasen ja oikea Haarin mitta olisivat keskenään samankaltaisia. Esitellään siis eräs ryhmä, jolla vasen ja oikea Haarin mitta ovat olennaisesti erilaiset. Aloitetaan määrittämällä joukko X seuraavasti

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}_+ \text{ ja } y \in \mathbb{R} \right\}.$$

On helppo osoittaa joukon X muodostavan ryhmän tavallisen matriisitulon suhteen. Matriisitulo tässä tapauksessa toimii seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0x_1 & x_0y_1 + y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ kun } x_0, x_1 > 0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}.$$

Tällöin matriisitulo on selvästi suljettu joukossa X, sen neutraalialkio on yksikkömatriisi, matriisin $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ käänteisalkio on tavallinen käänteismatriisi $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja liitännäisyyden todistaminen on helppo suorittaa.

Merkitään näin syntynyttä ryhmää G ja konstruoidaan sille topologia euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ aliavaruutena, jolloin saadaan ryhmästä G lokaalisti kompakti topologinen ryhmä. Tällöin jos jokaiselle tämän ryhmän Borel-joukolle U määritellään kuvaukset

$$\mu(U) = \iint\limits_U \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{ja} \quad \upsilon(U) = \iint\limits_U \frac{1}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

niin μ ja υ ovat ryhmän vasen ja oikea Haarin mitta, mutta sen todistaminen sivuutetaan tässä esimerkissä. Lisäksi koska $\mu(U^{-1}) = \upsilon(U)$, niin on siis olemassa mitallisia joukkoja U, joille $\mu(U) < \infty$ ja $\mu(U^{-1}) = \infty$.

4 Paradoksaalisuus

Seuraavaksi esitellään tarvittavat käsitteet paradoksaalisuuden ymmärtämiseksi, sekä tutkielman kannalta oleellisia keinoja, joilla paradoksaalisia rakenteita voidaan muodostaa. Aloitetaan valinta-aksiooman lyhyellä esittelyllä, jonka jälkeen määritellään paradoksaalisuus ja sen pariksi toinen keskeinen käsite, yhtähajoavuus. Tämän jälkeen ollaan valmiita siirtymään Hausdorffin paradoksin pariin.

4.1 Valinta-aksiooma

Kuten johdannossa mainittiin, valinta-aksiooma aiheutti ja aiheuttaa kiistaa matematiikassa. Osasyynä voi pitää sitä, että se poikkeaa Zermelon-Fraenkelin joukko-opin aksioomista siinä, ettei se anna mitään sääntöä siitä, miten sen avulla saatu joukko muodostetaan. Kuten Jech [7, s. 346] sanoo, jonkin olemassaolo matematiikassa oli pitkään synonyymi konstruktiolle ja valinta-aksioomaan suhtauduttiin siksi epäilevästi. Eikä suinkaan syyttä, sillä kuten tullaan näkemään, valinta-aksiooma mahdollistaa intuitiivisesti väärältä vaikuttavia tuloksia. Tämä valinta-aksiooman suppea esittely on koottu Herrlichin [6] ja Jechin [7] teoksista.

Aksiooma 4.1 (Valinta-aksiooma, ensimmäinen muotoilu)**.** Olkoon $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ perhe pareittain erillisiä epätyhjiä joukkoja. Nyt on olemassa joukko $C = \{x_i \mid i \in I\}$, jossa on yksi alkio x_i jokaisesta joukosta $A_i \in \mathcal{F}$.

Kuten yllä olevasta muotoilusta nähdään, valinta-aksiooman voi esittää erittäin yksinkertaisesti. Mutta samalla havaitaan sitä koskeva ongelma: kuinka kerätä joukon C alkiot x_i, sillä niiden valitsemiselle joukoista A_i ei ole mitään selvää sääntöä.

Usein valinta-aksiooma esitellään kuvauksena ja edellinen määritelmä onkin seuraavaksi esiteltävän määritelmän erikoistapaus [7, s. 347], vaikkakin ne on osoitettavissa yhtäpitäviksi.

Aksiooma 4.2 (Valinta-aksiooma, toinen muotoilu)**.** Jokaiselle perheelle $\mathcal{F}$ epätyhjiä joukkoja on olemassa kuvaus f, jolla $f(S) \in S$ jokaisella joukolla $S \in \mathcal{F}$.

Määritelmä 4.3. Yllä olevaa valinta-aksiooman kuvausta f sanotaan *valintakuvaukseksi*.

On siis tarkoituksena osoittaa, että pallon voi jakaa kahteen tismalleen samanlaiseen palloon venyttämättä mitään. Intuitiivisesti se vaikuttaa mahdottomalta, sillä jos käytetään mittana tilavuutta ja jos yhden pallon tilavuus on 1, on kahden samanlaisen pallon yhteenlaskettu tilavuus 2.

Juuri tämän "ongelman" valinta-aksiooma ratkaisee: se mahdollistaa ei-mitallisten joukkojen rakentamisen. Vieläpä oleellisesti näitä joukkoja voidaan konstruoida mitallisista joukoista. Ennen paradoksaalisuutta esitellään kaksi esimerkkiä ei-mitallisista joukoista.

Esimerkki 4.4 (Vitalin joukko)**.** Vrt. [6, s. 120]. Tässä esimerkissä *mitalla* viitataan tavanomaiseen Lebesguen mittaan. Määritellään joukossa $\mathbb{R}$ ekvivalenssirelaatio ϱ:

$$x\varrho y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Q}.$$

Nyt jokainen relaation ϱ ekvivalenssiluokka on tiheä joukossa $\mathbb{R}$, joten jokaisessa niistä on alkio välillä $[0,1]$. Valinta-aksioomaa käyttämällä voidaan muodostaa osajoukko $V \subseteq [0,1]$, jossa on yksi alkio jokaisesta relaation ϱ ekvivalenssiluokasta. Merkitään sitten numeroituvaa joukkoa $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = I$ ja määritellään jokaiselle $r \in I$ joukko $V_r = \{v+r \mid v \in V\}$. Tällöin $A = \bigcup_{r\in I} V_r$ on pareittain erillisten joukkojen numeroituva yhdiste, jolla pätee $[0,1] \subseteq A \subseteq [-1,2]$.

Nyt mikäli joukko V olisi mitallinen niin myös jokainen joukko V_r olisi mitallinen ja niillä kaikilla olisi sama mitta joukon V kanssa. Edelleen A olisi mitallinen ja sen mitta olisi joko 0 siinä tapauksessa, että joukon V mitta on 0 ja ääretön muutoin. Joukon A mitta ei kuitenkaan voi olla 0, sillä $[0,1] \subseteq A$ ja toisaalta se ei voi olla ääretönkään, sillä $A \subseteq [-1,2]$. Siispä joukko V ei voi olla mitallinen.

Seuraava esimerkki vie lähemmäksi myöhemmin tarkasteltavia paradokseja, sillä siinä käytettävä kierto tulee olemaan oleellinen operaatio. Pääperiaate on kuitenkin sama kuin Vitalin joukon kanssa: konstruoidaan ääretön määrä tiheitä joukkoja (selvästi) rajatusta joukosta.

Esimerkki 4.5. Vrt. [13, *Example*]. Olkoon S kaikkien yksikköympyrän pisteiden joukko ja G kaikkien rationaalisten origon kautta kulkevien kiertojen (eli kiertojen $2\pi q$, missä $q \in \mathbb{Q}$) ryhmä, joka toimii joukossa S. Tällöin G on selvästi numeroituva ja S on ylinumeroituva. Siispä kaikkien G-ratojen joukko on ylinumeroituva. Voidaan käyttää valinta-aksioomaa muodostamaan joukko X, jolla on yksi piste jokaiselta G-radalta. Tällöin voidaan muodostaa jokaiselle $g \in G$ joukko $X_g = \{g \cdot x \mid x \in X\}$. Näin muodostetut joukot $X_g \subseteq S$ ovat siis selvästi erillisiä, sillä kaikki joukon X alkiot ovat eri G-radoilla, ja lisäksi $\bigcup_{g\in G} X_g = S$.

Tällöin käy vastaavasti kuin Vitalin joukon kanssa, sillä yksikköympyrän mitta olisi 0 siinä tapauksessa, että joukon X_g mitta on 0 ja ääretön muutoin, sillä joukkoja X_g on ääretön määrä. Niinpä joukot X_g eivät voi olla mitallisia.

4.2 Paradoksaalisuuden määritelmä

Määritellään tässä aliluvussa, mitä oikein tarkoitetaan paradoksaalisuudella. Myöhemmin sekä Hausdorffin paradoksi että Banachin-Tarskin paradoksi esitellään ja niitä laajennetaan tämän määritelmän avulla. Viimeistään tässä vaiheessa toisen luvun ryhmäteorian asioiden on oltava hallinnassa. Aliluku on koottu Runden [11] teoksen pohjalta.

Määritelmä 4.6. Olkoon X joukko. Tällöin pareittain erilliset epätyhjät osajoukot $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ muodostavat joukon X *osituksen*, kun $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.

Määritelmä 4.7. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja $E \subseteq X$. Tällöin joukko E on *G-paradoksaalinen*, jos on olemassa joukon E ositus $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ ja alkiot $g_1, \dots, g_{n'}, h_1, \dots, h_{m'} \in G$ missä $n' \leq n$ ja $m' \leq m$, joilla

$$E = \bigcup_{i=1}^{n'} g_i \cdot A_i = \bigcup_{i=1}^{m'} h_i \cdot B_i.$$

Sanotaan joukkoa $\{A_1, \dots, A_{n'}, B_1, \dots, B_{m'}\}$ joukon E *paradoksaaliseksi hajotelmaksi*.

Huomautus. Joukon X paradoksaalisen hajotelman yhdiste ei välttämättä ole koko joukko X.

Huomautus. Äärellinen joukko ei voi koskaan olla paradoksaalinen.

Määritelmä 4.8. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, joka toimii joukossa G, toisin sanoen ryhmä toimii itsessään. Oletetaan lisäksi, että G on $(G, \cdot)$-paradoksaalinen. Sanotaan tällöin ryhmän $(G, \cdot)$ olevan *paradoksaalinen ryhmä*.

Lause 4.9. *Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X, H ryhmän G aliryhmä ja $E \subseteq X$ H-paradoksaalinen. Tällöin E on G-paradoksaalinen.*

Todistus. Olkoon G, X, H ja E kuten väitteessä. Tällöin on siis olemassa joukon E paradoksaalinen hajotelma $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ ja alkiot $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in H$, joilla

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j.$$

Toisaalta $H \subseteq G$, joten myös $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ pätee, eli E on G-paradoksaalinen. □

Lause 4.10. *Itsessään toimiva kahden alkion virittämä vapaa ryhmä on paradoksaalinen.*

Todistus. Vrt. [7, s. 2]. Olkoon a ja b vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$ virittäjät. Merkitään jokaiselle $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ $W(x) = \{w \in \mathbb{F}_2 \mid w \text{ alkaa alkiolla } x\}$. Tällöin

$$\mathbb{F}_2 = \{e_{\mathbb{F}2}\} \cup W(a) \cup W(b) \cup W(a^{-1}) \cup W(b^{-1}),$$

jossa joukot ovat selvästi keskenään erilliset. Huomataan, että jokaisella $w \in \mathbb{F}_2 \setminus W(a)$ pätee $a^{-1}w \in W(a^{-1})$ ja edelleen $w = a(a^{-1}w) \in aW(a^{-1})$. Tästä seuraa, että $\mathbb{F}_2 = W(a) \cup aW(a^{-1})$ ja vastaavasti $\mathbb{F}_2 = W(b) \cup bW(b^{-1})$. □

Lause 4.11. *Olkoon G paradoksaalinen ryhmä, joka toimii joukossa X ilman epätriviaaleja kiintopisteitä. Tällöin X on G-paradoksaalinen.*

Todistus. Vrt. [11, s. 2]. Olkoon G ja X kuten väitteessä, $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ ryhmän G paradoksaalinen hajotelma ja $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ alkiot, joilla

$$G = \bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j.$$

Valitaan joukko $M \subseteq X$ niin, että tässä joukossa on yksi alkio jokaiselta G-radalta. Väitetään, että $\{g \cdot M \mid g \in G\}$ on joukon X ositus. Selvästi $\bigcup\limits_{g \in G} g \cdot M = X$, sillä M sisältää yhden alkion jokaiselta G-radalta. Oletetaan sitten, että on olemassa $g, h \in G$ ja $x, y \in M$, joilla $g \cdot x = h \cdot y$. Tällöin $(h^{-1}g) \cdot x = y$, joten $x, y \in M$ ovat samalla G-radalla, eli niiden on oltava sama alkio. Edelleen koska G toimii joukossa X ilman epätriviaaleja kiintopisteitä, on oltava $h^{-1}g = e_G$ eli $h = g$.

Määritellään sitten joukot

$$A_j^* = \bigcup_{g_A \in A_j} g_A \cdot M, \text{ kun } j = 1, \dots, n \text{ ja}$$
$$B_j^* = \bigcup_{g_B \in B_j} g_B \cdot M, \text{ kun } j = 1, \dots, m.$$

Tällöin $A_1^*, \dots, A_n^*, B_1^*, \dots, B_m^*$ ovat edellä mainitun perusteella joukon X erillisiä osajoukkoja ja niillä pätee $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j^* = \bigcup\limits_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j^*$, sillä

$$\bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j^* = \bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot \left(\bigcup_{g_A \in A_j} g_A \cdot M \right) = \left(\bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j \right) \cdot M = \bigcup_{g \in G} g \cdot M = X$$

ja vastaava tarkastelu voidaan suorittaa myös yhdisteelle $\bigcup\limits_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j^*$. □

Määritelmä 4.12. Olkoon G ryhmä, joka toimii mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ (eli sen joukossa X). Mittaa μ sanotaan *G-invariantiksi*, jos $\mu(g \cdot E) = \mu(E)$ kaikilla $g \in G$ ja $E \in \mathcal{P}(X)$.

Näytetään sitten, kuinka paradoksaalisuus on yhteydessä mitallisen avaruuden mittaan.

Määritelmä 4.13. Olkoon G ryhmä, joka toimii mitallisessa avaruudessa $(X, \mathcal{P}(X))$, ja $E \subseteq X$ epätyhjä osajoukko. Jos tällöin kaikilla äärellisillä G-invarianteilla mitoilla $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ pätee $\mu(E) = 0$, niin osajoukon E sanotaan olevan *G-mitätön*.

Lause 4.14. *Olkoon G paradoksaalinen ryhmä, joka toimii mitallisessa avaruudessa $(X, \mathcal{P}(X))$. Tällöin X on G-mitätön.*

Todistus. Vrt. [12, s. 18]. Olkoon G ja X kuten väitteessä ja $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ jokin äärellinen G-invariantti mitta. Koska X on G-paradoksaalinen, on olemassa joukon X hajotelma paradoksaalisiin osiin $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ ja alkiot

$g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$, joilla $X = \bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j$. Tällöin siis

$$\begin{aligned}
\mu(X) &\geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu(g_j \cdot A_j) + \sum_{j=1}^{m} \mu(h_j \cdot B_j) \\
&= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j\right) \\
&= \mu(X) + \mu(X) = 2\mu(X).
\end{aligned}$$

Toisaalta $\mu(X) < \infty$, joten $\mu(X) = 0$. □

4.3 Yhtähajoavuus

Seuraavaksi esitellään toinen olennainen käsite paradoksaalisuuden rinnalle. Yhtähajoavuus on samankaltainen paradoksaalisuuden kanssa, mutta se ei itsessään johda intuition vastaisiin tuloksiin. Käy kuitenkin ilmi, että sillä ja paradoksaalisuudella on läheinen suhde ja joidenkin joukkojen yhtähajoavuutta voidaan käyttää paradoksaalisuuden todistamiseksi. Aliluku pohjautuu Wagonin [12] ja Runden [11] teoksiin.

Määritelmä 4.15. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X. Sanotaan osajoukkojen $A, B \subseteq X$ olevan *G-ekvivalentteja*, jos on olemassa jokin $g \in G$, jolla $g \cdot A = B$. Huomataan myös, että $g^{-1} \cdot (g \cdot A) = g^{-1} \cdot B$, eli $A = g^{-1} \cdot B$.

Määritelmä 4.16. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja $A, B \subseteq X$. Tällöin osajoukkojen A ja B sanotaan olevan *G-yhtähajoavia*, jos A ja B voidaan osittaa yhtä moneen, mutta äärelliseen määrään G-ekvivalentteja osajoukkoja.

Siis jos $\{A_1, \dots, A_n\}$ on joukon A, ja $\{B_1, \dots, B_n\}$ on joukon B ositus tällaisiin osajoukkoihin, niin on olemassa alkiot $g_1, \dots, g_n \in G$, joilla jokaisella $i \leq n$ pätee $g_i \cdot A_i = B_i$.

Merkintä 4.17. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X. Merkitään G-yhtähajoavuutta $A \sim_G B$, missä $A, B \subseteq X$. Jos joukko A on G-yhtähajoava joukon B kanssa jakamalla se n osaan, merkitään $A \sim_n B$ ja sanotaan, että A on G-yhtähajoava joukon B kanssa käyttämällä n osaa.

Lause 4.18. *Yhtähajoavuus $\sim_G$ on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X. Tällöin $\sim_G$ on selvästi refleksiivinen ja symmetrisyys $B \sim_G A$ seuraa siitä, että ryhmän G alkioilla on käänteisalkiot.

Olkoot $A, B, C \subseteq X$ osajoukkoja, joilla $A \sim_G B$ ja $B \sim_G C$. Olkoot sitten $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_n\}$, $\{B'_1, \ldots, B'_m\}$ ja $\{C_1, \ldots, C_m\}$ näitä yhtähajoavuuksia vastaavat ositukset, eli $g_i \cdot A_i = B_i$ ja $g'_j \cdot B'_j = C_j$ joillakin $g_1, \ldots, g_n, g'_1, \ldots, g'_m \in G$. Tällöin joukot A ja C voidaan selvästi hajottaa nm osaan siten, että $\bigcup_{i=1}^{nm} A'_i = A$, $\bigcup_{i=1}^{nm} C_i = C$ ja $f_{ij} \cdot A'_i = C_i$, missä $f_{ij} = g'_j g_i \in G$. □

Apulause 4.19. *Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja A_1, A_2, B_1 ja B_2 joukon X osajoukkoja. Tällöin seuraavat ehdot pätevät*

(a) jos $A_1 \sim_G B_1$, niin on olemassa bijektio $f : A_1 \to B_1$, jolla $C \sim_G f(C)$ kaikilla $C \subseteq A_1$ ja

(b) jos $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, $A_1 \sim_G B_1$ ja $A_2 \sim_G B_2$, niin $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$.

Todistus. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X.

Aloitetaan todistamalla ensiksi kohta (a). Oletetaan, että on olemassa osajoukot $A, B \subseteq X$, joilla $A \sim_G B$. G-yhtähajoavuudesta seuraa, että B voidaan esittää muodossa $B = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i$, missä $g_1, \ldots, g_n \in G$ ja $A_1, \ldots, A_n$ muodostavat joukon A osituksen. Tällöin alkioiden g_i avulla voidaan muodostaa bijektio $f : A \to B$, jolle $f(x) = g_i \cdot x$, kun $x \in A_i$. Nyt kaikilla osajoukoilla $C \subseteq A$ pätee $C \sim_G f(C)$.

Siirrytään kohtaan (b) olettamalla, että on olemassa osajoukot $A_1, A_2, B_1, B_2 \subseteq X$, joilla $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, $A_1 \sim_G B_1$ ja $A_2 \sim_G B_2$. Tällöin G-yhtähajoavuuden perusteella joukot B_1 ja B_2 voidaan esittää muodoissa

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A'_i \text{ ja } B_2 = \bigcup_{i=1}^{m} h_i \cdot A''_i,$$

missä $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ ja $A'_1, \ldots, A'_n \subseteq A'_1$ ja $A''_1, \ldots, A''_m \subseteq A_2$ ovat erillisiä osajoukkoja. Merkitään sitten $h_i = g_{i+n}$ ja $A''_i = A'_{i+n}$. Tällöin

$$B_1 \cup B_2 = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A'_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{n+m} g_i \cdot A'_i = \bigcup_{i=1}^{n+m} g_i \cdot A'_i \sim_G A_1 \cup A_2.$$

□

Lause 4.20. *Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja E sekä E' G-yhtähajoavia joukon X osajoukkoja. Tällöin jos E on G-paradoksaalinen niin myös E' on G-paradoksaalinen.*

Todistus. Vrt. [11, s. 5]. Olkoon X, G, E ja E' kuten väitteessä, ja $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ joukon E paradoksaalinen hajotelma. Merkitään sitten

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ ja } B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i.$$

Tällöin osajoukon E G-paradoksaalisuudesta seuraa, että $A \sim_G E$ ja $B \sim_G E$. Nyt apulauseen 4.19 kohdan a perusteella on olemassa bijektio $f : E \to E'$, jolla $C \sim_G f(C)$ kaikilla $C \subseteq E$. Tämän ja lauseen 4.18 perusteella siis $A \sim_G f(A) \sim_G E'$ ja $B \sim_G f(B) \sim_G E'$. Nyt joukkojen $f(A)$ ja $f(B)$ osituksista muodostuu joukon E' paradoksaalinen hajotelma, eli E' on G-paradoksaalinen. □

Merkintä 4.21. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja $A, B \subseteq X$. Jos A ja jokin osajoukko $B_0 \subseteq B$ ovat yhtähajoavia, merkitään $A \preceq_G B$.

Seuraava lause vastaa joukko-opin Cantorin-Schröderin-Bernsteinin lausetta.

Lause 4.22 (Banachin-Schröderin-Bernsteinin lause)**.** *Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja $A, B \subseteq X$. Tällöin jos $A \preceq_G B$ ja $B \preceq_G A$ niin $A \sim_G B$. Siis $\preceq_G$ on $\sim_G$-ekvivalenssiluokkien osittaisjärjestys joukossa $\mathcal{P}(X)$.*

Todistus. Vrt. [12, s. 25]. Olkoon G, X, A ja B kuten väitteessä, ja $A \preceq_G B$ ja $B \preceq_G A$. On siis olemassa osajoukot $B_0 \subseteq B$ ja $A_0 \subseteq A$, joilla $A \sim_G B_0$ ja $A_0 \sim_G B$. Tällöin apulauseen 4.19 kohdan a perusteella on olemassa bijektiot

$$f : A \to B_0 \text{ ja } f' : A_0 \to B,$$

joilla $C_A \sim_G f(C_A)$ kaikilla $C_A \subseteq A$ ja $C_{A0} \sim_G f'(C_{A0})$ kaikilla $C_{A0} \subseteq A_0$.

Merkitään $C_0 = A \setminus A_0$ ja määritellään induktiolla $C_{n+1} = f'^{-1}(f(C_n))$, ja merkitään $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Tällöin $A \setminus C \sim_G f'(A \setminus C) = B \setminus f(C)$, eli $A \setminus C \sim_G B \setminus f(C)$. Toisaalta myös $C \sim_G f(C)$, jolloin apulauseen 4.19 kohdan (b) avulla saadaan

$$A = (A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B,$$

eli $A \sim_G B$. □

Seuraus 4.23. *Joukon X osajoukko E on G-paradoksaalinen, jos ja vain jos on olemassa sellaiset erilliset joukot $A, B \subseteq E$, että $A \cup B = E$ ja $A \sim_G E \sim_G B$.*

Todistus. Olkoon $E \subseteq X$ osajoukko.

Oletetaan ensiksi, että E on G-paradoksaalinen. Tällöin määritelmän nojalla on olemassa jotkin erilliset osajoukot $A, B' \subseteq E$, joilla $A \sim_G E \sim_G B'$, ja selvästi $B' \subseteq E \setminus A$. Saadaan $E \sim_G B' \subseteq E \setminus A \subseteq E$, eli $E \preceq_G E \setminus A \preceq_G E$ ja lauseen 4.22 nojalla $E \sim_G E \setminus A$. Nyt voidaan valita $B = E \setminus A$, jolloin siis A ja B ovat ne erilliset joukot joilla pätee $A \cup B = E$ ja $A \sim_G E \sim_G B$.

Oletetaan sitten, että on olemassa joukon E osajoukot A ja B joilla pätee $A \cup B = E$ ja $A \sim_G E \sim_G B$. Tällöin nämä joukot A ja B ovat G-paradoksaalisuuden vaatimat joukot. □

5 Banachin-Tarskin paradoksi

Päästään viimein paradoksien pariin. Aloitetaan tutkimalla Hausdorffin paradoksia, jonka kautta on luontaista siirtyä siihen pohjautuvaan Banachin-Tarskin paradoksiin. Aloitetaan Banachin-Tarskin paradoksin käsittely kenties yleisimmin tunnetusta muodosta, eli siitä, että kolmiulotteisen pallon voi jakaa kahdeksi tismalleeen samanlaiseksi palloksi. Laajennetaan sitten tarkastelua muihin muotoihin, korkeampiulotteisiin avaruuksiin ja lopuksi keskitytään paradoksaalisten osien määrään.

5.1 Hausdorffin paradoksi

Osoitetaan pallon pinnan olevan paradoksaalinen kolmiulotteisessa avaruudessa Runden [11] teoksen pohjalta. Esitellään mielenkiinnosta myös Hausdorffin paradoksin alkuperäinen muotoilu Jechin [7, s. 352] teoksen pohjalta. Jätetään se kuitenkin todistamatta, sillä alkuperäisessä muotoilussa ei ole paradoksaalisuuden käsitettä mukana lainkaan eikä lauseelle ole käyttöä myöhemmin.

Merkintä 5.1. Merkitään euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ pallon pintaa S^2:lla ja sanotaan sitä kaksiulotteiseksi palloksi. Käytetään yleisemmin avaruuden $\mathbb{R}^n$ pallon pinnasta merkintää S^{n-1}.

Lause 5.2 (Hausdorffin paradoksi, alkuperäinen muotoilu)**.** *Joukko S^2 voidaan osittaa osajoukkoihin A, B, C ja D, joilla*

1. *A, B ja C ovat $SO(3)$-yhtähajoavia,*
2. *$B \cup C$ on $SO(3)$-yhtähajoava jokaisen joukon A, B ja C kanssa, ja*
3. *D on numeroituva.*

Todistus. Sivuutetaan, sillä tämä muotoilu ei ole tutkielman kannalta kiinnostava. □

Lause 5.3. *On olemassa kierrot $\sigma, \tau \in SO(3)$, jotka virittävät ryhmän $SO(3)$ vapaan aliryhmän.*

Todistus. Vrt. [11, s. 3]. Olkoot kierrot $\sigma, \tau, \sigma^{-1}$ ja τ^{-1} matriisimuodossa

$$\sigma^{\pm 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \tau^{\pm 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Olkoon w epätyhjä sana joukosta $\{\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}\}$. Väitetään nyt, että w ei voi olla ekvivalentti neutraalialkion kanssa, eli σ ja τ ovat riippumattomia kiertoja, joten ne virittävät vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$. Voidaan olettaa sanan w päättyvän alkioon $\sigma^{\pm 1}$, sillä jos näin ei ole, voidaan korvata w sanalla $\sigma w \sigma^{-1}$. Väitetään, että

$$w \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{bmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c \in \mathbb{Z}$, b ei ole jaollinen kolmella ja k on sanan w pituus. Tämä selvästi todistaa, ettei w ole ekvivalentti neutraalialkion kanssa.

Jatketaan induktiolla luvun k suhteen. Oletetaan ensiksi, että $k = 1$, joten $w = \sigma^{\pm 1}$, joten

$$w \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Olkoon sitten $w = \sigma^{\pm 1} w'$ tai $w = \tau^{\pm 1} w'$, missä

$$w' \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{bmatrix} a' \\ \pm b'\sqrt{2} \\ c' \end{bmatrix},$$

kun $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ ja b' ei ole jaollinen kolmella. Seuraa, että

$$w \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{bmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{bmatrix},$$

jossa

$$a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c', \text{ kun } w = \sigma^{\pm 1} w',$$

$$a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b', \text{ kun } w = \tau^{\pm 1} w'.$$

Tällöin selvästi $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Täytyy vielä osoittaa, että b ei ole jaollinen kolmella.

Tapaus 1: $w = \sigma^{\pm 1} \tau^{\pm 1} v$, jossa v voi olla myös tyhjä sana. Tällöin $b = b' \mp 2a'$, jossa $3 | a'$. Koska oletuksen nojalla $3 \nmid b'$ niin myös $3 \nmid b$.

Tapaus 2: $w = \tau^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} v$. Tällöin $b = b' \mp 2c'$, jossa $3 | c'$. Jälleen koska $3 \nmid b'$, niin myös $3 \nmid b$.

Tapaus 3: $w = \sigma^{\pm 1} \sigma^{\pm 1} v$. Tällöin oletuksen nojalla

$$v \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^{k-2}} \begin{bmatrix} a'' \\ b''\sqrt{2} \\ c'' \end{bmatrix},$$

kun $a'', b'', c'' \in \mathbb{Z}$. Seuraa, että

$$b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b'',$$

joten $3 \nmid b$.

Tapaus 4: $w = \tau^{\pm 1} \tau^{\pm 1} v$ on samanlainen kuin tapaus 3. □

Lause 5.4. *Olkoon D kaksiulotteisen pallon S^2 numeroituva osajoukko. Tällöin S^2 ja $S^2 \setminus D$ ovat $SO(3)$-yhtähajoavia.*

Todistus. Vrt. [11, s. 5]. Olkoon L origon kautta kulkeva suora avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jolla $L \cap D = \emptyset$, ja K kaikkien sellaisten kulmien $\theta \in [0, 2\pi)$ perhe, joilla pätee seuraava: on olemassa $x \in D$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$, joille $\sigma(x) \in D$, kun σ on kierto suoran L suhteen kulman $n\theta$ verran.

Tällöin joukko K on määritelmänsä perusteella selvästi numeroituva, joten on olemassa jokin $\theta_0 \in [0, 2\pi) \setminus K$. Olkoon ρ kierto suoran L suhteen kulman θ_0 verran, tällöin $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Tästä seuraa, että

$$\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset, \text{ kun } n, m \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } n \neq m.$$

Olkoon nyt $D_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D)$. Tällöin

$$S^2 = D_0 \cup (S^2 \setminus D_0) \sim_{SO(3)} \rho(D_0) \cup (S^2 \setminus D_0) = S^2 \setminus D,$$

sillä $\rho \in SO(3)$. □

Lause 5.5 (Hausdorffin paradoksi, vaihtoehtoinen muotoilu)**.** *On olemassa kaksiulotteisen pallon S^2 numeroituva osajoukko D, jolla $S \setminus D$ on $SO(3)$-paradoksaalinen.*

Todistus. Vrt. [11, s. 4]. Olkoot σ ja τ kuten lauseen 5.3 todistuksessa. Nyt ne virittävät ryhmän $SO(3)$ vapaan aliryhmän $\mathbb{F}_2$. Koska σ ja τ ovat kiertoja origon läpi kulkevien suorien suhteen, on jokaisella kierrolla $w \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e_{\mathbb{F}_2}\}$ tasan kaksi kiintopistettä joukossa S^2 (tämä pätee kaikille ryhmän $SO(3)$ kierroille). Joukko

$$F = \{x \in S^2 \mid x \text{ on kiintopiste jollain } w \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e_{\mathbb{F}_2}\}\}$$

on siis numeroituva, kuten on myös $D = \bigcup_{w \in \mathbb{F}_2} w(F)$. Selvästi $\mathbb{F}_2$ toimii joukossa $S^2 \setminus D$ ilman epätriviaaleja kiintopisteitä, joten lauseen 4.11 perusteella $S^2 \setminus D$ on $\mathbb{F}_2$-paradoksaalinen, ja lauseen 4.9 perusteella $S^2 \setminus D$ on myös $SO(3)$-paradoksaalinen. □

Näin on lopuksi helposti todettavissa, että kaksiulotteinen pallo on kokonaisuudessaan paradoksaalinen.

Seuraus 5.6. *Kaksiulotteinen pallo S^2 on $SO(3)$-paradoksaalinen.*

Todistus. Olkoon D lauseessa 5.5 esiintyvä joukon S^2 numeroituva osajoukko. Lauseen 5.4 perusteella S^2 ja $S^2 \setminus D$ ovat yhtähajoavia, ja lauseen 5.5 perusteella $S^2 \setminus D$ on $SO(3)$-paradoksaalinen. Tällöin lauseen 4.20 nojalla myös S^2 on $SO(3)$-paradoksaalinen. □

5.2 Pallon kahdentaminen

Todistetaan seuraavaksi tunnetuimmat osat Banachin-Tarskin paradoksista Wagonin [12] ja Runden [11] teoksien pohjalta.

Hausdorffin paradoksiin nojautuen voidaan välittömästi todistaa yksi Banachin-Tarskin paradoksin heikommista muotoiluista, eli aloitetaan osoittamalla ainoastaan pallon olevan paradoksaalinen.

Lause 5.7. *Jokainen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ suljettu pallo on $E(3)$-paradoksaalinen.*

Todistus. Vrt. [11, s. 5]. Riittää osoittaa, että suljettu yksikköpallo P_1 on $E(3)$-paradoksaalinen, sillä se on isomorfinen jokaisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ pallon kanssa. Osoitetaan ensiksi, että $P_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ on $SO(3)$-paradoksaalinen. Koska S^2 on $SO(3)$-paradoksaalinen seurauksen 5.6 perusteella, on olemassa $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subseteq S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ja $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_m \in SO(3)$, joilla pätee

$$S^2 = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j(A_j) \text{ ja } S^2 = \bigcup_{j=1}^{m} \tau_j(B_j).$$

Olkoon sitten

$$\begin{aligned} A_j^* &= \{tx \mid t \in (0,1], x \in A_j\}, \text{kun } j = 1, \ldots, n \text{ ja} \\ B_j^* &= \{tx \mid t \in (0,1], x \in B_j\}, \text{kun } j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Tällöin joukot $A_1^*, \ldots, A_n^*, B_1^*, \ldots, B_m^* \subseteq P_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ovat selvästi erillisiä, ja lisäksi $P_1 \setminus \{\mathbf{0}\} = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j(A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{m} \tau_j(B_j^*)$, joten $P_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ on $SO(3)$-paradoksaalinen.

Olkoon sitten $x = (0, 0, \frac{1}{2}) \in P_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ja $\rho \in E(3)$ jokin irrationaalinen kierto (eli kierto $2\pi q'$, missä $q' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) sellaisen suoran suhteen, joka leikkaa pisteen x mutta ei origoa. Kaikilla tällaisilla kierroilla ρ origo pysyy aina yksikköpallon sisällä. Merkitään $D = \{\rho^n(\mathbf{0}) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Selvästi $\rho(D) = D \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tällöin

$$P_1 = D \cup (P_1 \setminus D) \sim_{E(3)} \rho(D) \cup (P_1 \setminus D) = P_1 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

joten lauseen 4.20 perusteella yksikköpallo P_1 on $E(3)$-paradoksaalinen. □

Huomautus. Koska edellisen todistuksen kierto ρ ei ole origon ympäri, se ei kuulu kiertoryhmään $SO(3)$, jolloin ei saada aikaan $SO(3)$-paradoksaalisuutta. Sen sijaan ρ selvästi kuuluu siirron ja origon ympäri tapahtuvan kierron yhdisteenä isometriaryhmään $E(3)$.

Seuraus 5.8 (Banachin-Tarskin paradoksi, tunnettu muotoilu)**.** *Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ suljettu pallo P voidaan jakaa osiin ja osista koota kaksi samanlaista suljettua palloa P.*

Todistus. Seuraa suoraan seurauksesta 4.23 ja lauseesta 5.7. □

Toisaalta mielivaltainen pallo voi olla myös mielivaltaisen suuri, joten edellinen lause oltaisiin voitu esittää suoraan seuraavan seurauksen muodossa.

Seuraus 5.9. *Euklidinen avaruus* $\mathbb{R}^3$ *itsessään on* $E(3)$*-paradoksaalinen.*

Todistus. Vrt. [12, s. 27]. Seuraa suoraan lauseen 5.7 todistuksesta, sillä jos joukot A_j^*, B_j^* määritelläänkin seuraavasti:

$$\begin{aligned} A_j^* &= \{tx \mid t \in (0,\infty), x \in A_j\}, \text{ kun } j = 1,\dots,n \text{ ja} \\ B_j^* &= \{tx \mid t \in (0,\infty), x \in B_j\}, \text{ kun } j = 1,\dots,m, \end{aligned}$$

niin saadaan, että $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ on $SO(3)$-paradoksaalinen ja edelleen samalla kierrolla $\rho \in E(3)$ saadaan $\mathbb{R}^3 \sim_{E(3)} \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. □

Nyt on mahdollista todistaa Banachin-Tarskin paradoksin vahvempi muotoilu: riippumatta avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkojen muodosta, ne ovat aina yhtähajoavia.

Lause 5.10. *Olkoot* A *ja* B *rajoitettuja euklidisen avaruuden* $\mathbb{R}^3$ *osajoukkoja, joilla on epätyhjät sisustat. Tällöin* $A \sim_{E(3)} B$*.*

Todistus. Vrt. [11, s. 7]. Aloitetaan osoittamalla, että $A \preceq_{E(3)} B$. Pallon keskipiste on origossa, jos sitä ei erikseen mainita. Koska osajoukko A on rajoitettu, on olemassa $r > 0$, jolla $A \subseteq P_r$, missä r on pallon säde. Olkoon x nyt jokin joukon B sisäpiste. Tällöin on olemassa $\epsilon > 0$, jolla $P_{\epsilon,x} \subseteq P_r$, missä ϵ on jälleen säde ja x pallon keskipiste. Koska P_r on kompakti, on olemassa isometriat (pelkät siirrot riittävät) $\sigma_1,\dots,\sigma_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, joilla $P_r \subseteq \sigma_1(P_{\epsilon,x}) \cup \dots \cup \sigma_n(P_{\epsilon,x})$. Valitaan sitten isometriat (jälleen pelkät siirrot riittävät) $\tau_1,\dots,\tau_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ niin, että $\tau_j(P_{\epsilon,x}) \cap \tau_k(P_{\epsilon,x}) = \emptyset$, kun $j \neq k$. Merkitään $S = \bigcup_{j=1}^{n} \tau_j(P_{\epsilon,x})$. Nyt $S \preceq_{E(3)} P_{\epsilon,x}$, sillä lauseen 5.7 perusteella jokainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ suljettu pallo on paradoksaalinen. Tällöin

$$A \subseteq P_r \subseteq \sigma_1(P_{\epsilon,x}) \cup \dots \cup \sigma_n(P_{\epsilon,x}) \preceq_{E(3)} S \preceq_{E(3)} P_{\epsilon,x} \subseteq B,$$

eli $A \preceq_{E(3)} B$.

Täysin vastaavalla tavalla todistetaan, että $B \preceq_{E(3)} A$. Tällöin lauseen 4.22 perusteella $A \sim_{E(3)} B$. □

Voidaan myös laajentaa sekä Hausdorffin että Banachin-Tarskin paradokseja korkeampiin ulottuvuuksiin.

Lause 5.11. *Olkoon* $n \leq 3$*. Tällöin*

(a) jokainen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ *pallon pinta* S^{n-1} *on* $SO(n)$*-paradoksaalinen,*

(b) jokainen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suljettu pallo on* $E(n)$*-paradoksaalinen, kuten on myös avaruus* $\mathbb{R}^n$ *itse ja*

(c) mitkä tahansa kaksi rajoitettua euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ *osajoukkoa ovat yhtähajoavia.*

Todistus. Vrt. [12, s. 53]. Aloitetaan kohdasta (a). Seurauksen 5.6 perusteella väite pitää paikkansa, kun $n = 3$, joten voidaan jatkaa induktiolla. Tehdään kuten aiemmin ja tarkastellaan vain origoon keskitetyn pallon pintaa S^n avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$, sillä se on isomorfinen kaikkien muiden pallojen pintojen kanssa.

Voidaan siis olettaa, että on olemassa joukon S^{n-1} paradoksaalinen hajotelma $\{A_1, \dots, A_i, B_1, \dots, B_j\}$ ja kierrot $\sigma_1, \dots, \sigma_i, \tau_1, \dots, \tau_j \in SO(n)$, joilla S^{n-1} on $SO(n)$-paradoksaalinen. Muodostetaan sitten joukon $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ ositus $\{A_1^*, \dots, A_i^*, B_1^*, \dots, B_j^*\}$ seuraavasti: asetetaan piste $(x_1, \dots, x_n, z)$ yhteen joukoista A_i^* tai B_j^* sen mukaan, mihin joukoista A_i tai B_j piste $(x_1, \dots, x_n)/\|(x_1, \dots, x_n)\|$ kuuluu. Laajennetaan kiertoja σ_i ja τ_j kierroiksi σ_i^* ja $\tau_i^* \in SO(n+1)$ kiinnittämällä niille uusi kiertoakseli. Tämä tapahtuu yksinkertaisesti käyttämällä kiertojen σ_i ja τ_j matriisimuotoja:

$$g_i^* = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & g_i & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin osajoukot A_i^*, B_j^* muodostavat joukon $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ paradoksaalisen hajotelman yhdessä kiertojen σ_i^*, τ_j^* kanssa. Mutta samaan tapaan kuten lauseessa 5.4, voidaan nyt käyttää kaksiulotteista irrationaalista kiertoa, joka kiertää vain kahta viimeistä koordinaattia pitäen $n - 1$ ensimmäistä koordinaattia paikallaan, osoittamaan, että $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} \sim_{SO(n+1)} S^n$. Tällöin lauseen 4.20 nojalla myös S^n on $SO(n+1)$-paradoksaalinen ja näin kohta (a) on todistettu. Tämän jälkeen kohdat (b) ja (c) todistetaan täysin vastaavasti kuin lauseissa 5.9 ja 5.10. □

5.3 Paradoksaalisten osien minimointi

Siirrytään seuraavaksi minimoimaan paradoksaalisten osien määrää. Tämä ei varsinaisesti anna mitään uutta [12, s. 37], sillä joukon ollessa G-paradoksaalinen se on aina G-mitätön, välittämättä osien määrästä, mutta vähintään ajatuksen tasolla asian tarkastelu on mielenkiintoinen. Aliluku on kokonaisuudessaan Wagonin [12] teoksesta. Aloitetaan määrittelemällä, mitä tarkoitetaan tarvittavien osien määrällä ja toteamalla, mikä on pienin mahdollinen määrä jolla ylipäätään voidaan paradoksaalisen hajotus tehdä.

Määritelmä 5.12. Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja $E \subseteq X$. Tällöin E on *G-paradoksaalinen r osalla*, jos on olemassa sellaiset erilliset joukot A ja B, joilla $A \cup B = E$, $A \sim_n E \sim_m B$ ja $n + m = r$.

Lause 5.13. *Olkoon G ryhmä, joka toimii G-paradoksaalisessa joukossa X. Tällöin X ei voi olla G-paradoksaalinen vähemmällä kuin neljällä osalla.*

Todistus. Vrt. [12, s. 34]. Osoitetaan väite todeksi vastaoletuksella. Oletetaan, että X on G-paradoksaalinen vähemmällä kuin neljällä osalla. On siis olemassa joukon X ositus osajoukkoihin A ja B, joilla $A \sim_n X \sim_m B$. Tällöin $n + m \leq 3$, joten joko n tai m on 1. Voidaan olettaa, että $n = 1$, joten nyt $A \sim_1 X$ ja $g \cdot A = X$ jollain $g \in G$. Tällöin $g^{-1} \cdot X = A$, joten on oltava $B = \emptyset$, mikä on ristiriita. □

Jatketaan luvusta neljä tutulla kaavalla näyttämällä ensiksi, kuinka vapaa ryhmä $\mathbb{F}_2$ käyttäytyy suhteessa osien määrään. Käy ilmi, että paradoksaalisuuteen päästään edellisen lauseen vaatimalla neljällä osalla.

Lause 5.14. *Olkoon a ja b vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$ virittäjät. Tällöin $\mathbb{F}_2$ voidaan osittaa joukkoihin $A_1, A_2, A_3,$ ja A_4 niin, että*

$$aA_2 = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \text{ ja } bA_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_4.$$

Eli $\mathbb{F}_2$ on paradoksaalinen neljällä osalla, sillä $aA_2 \cup A_1 = bA_4 \cup A_3 = \mathbb{F}_2$. Lisäksi jokaisella kiinnitetyllä sanalla $w \in \mathbb{F}_2$ voidaan osat $A_1, A_2, A_3,$ ja A_4 valita niin, että w on samassa osassa ryhmän $\mathbb{F}_2$ neutraalialkion kanssa.

Todistus. Vrt. [12, s. 35]. Lauseessa 4.10 näytettiin jo ryhmän $\mathbb{F}_2$ olevan paradoksaalinen, mutta tuolloin tyhjä sana jätettiin muodostettujen joukkojen ulkopuolelle. Kiinnitetään jokin sana $w \in \mathbb{F}_2$ ja aloitetaan muodostamalla osajoukot $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq \mathbb{F}_2$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{v \in \mathbb{F}_2 \mid v \text{ on tyhjä sana, alkaa alkiolla } a \text{ tai on alkion } a^{-1} \text{ potenssi}\},\\
A_2 &= \{v \in \mathbb{F}_2 \mid v \text{ alkaa sanoilla } a^{-1}b, a^{-1}b^{-1} \text{ tai } a^{-1}\cdots a^{-1}b \text{ tai } a^{-1}\cdots a^{-1}b^{-1}\},\\
A_3 &= \{v \in \mathbb{F}_2 \mid v \text{ alkaa alkiolla } b\} \text{ ja}\\
A_4 &= \{v \in \mathbb{F}_2 \mid v \text{ alkaa alkiolla } b^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Tällöin huomataan helposti, että $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \mathbb{F}_2$, ja sanojen supistamisen jälkeen $aA_2 = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ja $bA_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_4$. Joten $aA_2 \cup A_1 = bA_4 \cup A_3 = \mathbb{F}_2$, eli $\mathbb{F}_2$ on paradoksaalinen neljällä osalla.

Tätä tapaa rakentaa osajoukot voidaan hyödyntää myös väitteen toisessa kohdassa seuraavasti:

(a) jos w alkaa alkiolla a, niin w ja e ovat jo samassa osassa,

(b) jos w alkaa alkiolla a^{-1}, niin vaihdetaan määritelmässä alkiot a ja a^{-1} keskenään, jolloin $a^{-1}A_2 \cup A_1 = bA_4 \cup A_3 = \mathbb{F}_2$,

(c) jos w alkaa alkiolla b, niin vaihdetaan määritelmässä alkiot a ja b sekä a^{-1} ja b^{-1} keskenään, jolloin $bA_2 \cup A_1 = aA_4 \cup A_3 = \mathbb{F}_2$ ja

(d) jos w alkaa alkiolla b^{-1}, niin vaihdetaan määritelmässä a ja b^{-1} sekä a^{-1} ja b keskenään, jolloin $b^{-1}A_2 \cup A_1 = a^{-1}A_4 \cup A_3 = \mathbb{F}_2$.

□

Seuraus 5.15. *Olkoon X epätyhjä joukko ja oletetaan, että $\mathbb{F}_2$ toimii joukossa X ilman epätriviaaleja kiintopisteitä. Tällöin X on $\mathbb{F}_2$-paradoksaalinen neljällä osalla. Lisäksi jokainen ryhmä, jolla on vapaa epävaihdannainen aliryhmä on paradoksaalinen neljällä osalla.*

Todistus. Vrt. [12, s. 36]. Todistus noudattelee samaa kaavaa kuin lauseen 4.11 todistus, mutta tällä kertaa ollaan kiinnostuneempia paradoksaalisen hajotelman osien määrästä. Lauseen 5.14 perusteella ryhmä $\mathbb{F}_2$ on paradoksaalinen käyttäen neljää osaa. Olkoon $A, B \subseteq \mathbb{F}_2$ sellaiset osajoukot, joilla $A \sim_2 \mathbb{F}_2 \sim_2 B$ ja valitaan joukko $M \subseteq X$ niin, että siinä on yksi alkio jokaiselta $\mathbb{F}_2$-radalta. Määritellään sitten joukot

$$A^* = \bigcup_{g_A \in A} g_A \cdot M \text{ ja}$$
$$B^* = \bigcup_{g_B \in B} g_B \cdot M.$$

Epätriviaalien kiintopisteiden puute tarkoittaa, että jokaiselle $y \in X$ on olemassa yksikäsitteinen $g \in \mathbb{F}_2$, jolla $y \in g \cdot M$. Selvästi $A^* \cup B^* = X$ ja $A^* \cap B^* = \emptyset$, ja $A^* \sim_2 X \sim_2 B^*$ seuraa suoraan siitä, että $A \sim_2 \mathbb{F}_2 \sim_2 B$.

Olkoon sitten G ryhmä, joka toimii itsessään, ja jolla on vapaa epävaihdannainen aliryhmä G'. Tällöin aliryhmällä G' on vapaa aliryhmä $\mathbb{F}_2$, joka toimii ryhmässä G ilman epätriviaaleja kiintopisteitä, jolloin tämä on vain väitteen ensimmäisen kohdan erikoistapaus. □

Huomataan, että mikäli ryhmän toiminnalla joukossa ei ole epätriviaaleja kiintopisteitä, on toiminta silloin lokaalisti vaihdannaista. Näytetään seuraavaksi, että lokaalisti vaihdannainen toiminta on riittävä ehto $\mathbb{F}_2$-paradoksaalisuuteen neljällä osalla.

Lause 5.16. *Jos vapaa ryhmä $\mathbb{F}_2$ toimii lokaalisti vaihdannaisesti joukossa X, niin X on $\mathbb{F}_2$-paradoksaalinen neljällä osalla.*

Todistus. Vrt. [12, s. 37]. Olkoon X epätyhjä joukko, jossa $\mathbb{F}_2$ toimii lokaalisti vaihdannaisesti. Jokainen $\mathbb{F}_2$-rata koostuu kokonaan epätriviaaleista kiintopisteista tai ei sisällä lainkaan epätriviaaleja kiintopisteitä, sillä jos $w \cdot x = x$ ja $u \in \mathbb{F}_2$, niin sana uwu^{-1} kiinnittää alkion $u \cdot x$. Olkoon R nyt mikä tahansa $\mathbb{F}_2$-rata, jolla ei ole lainkaan epätriviaaleja kiintopisteitä. Tällöin $\mathbb{F}_2$-radan R alkioiden sijoittaminen joukkoihin A_i^* on yksinkertaista ja voidaan käyttää yhtä ryhmän $\mathbb{F}_2$ paradoksaalista hajotelmaa neljään joukkoon A_1, A_2, A_3 ja A_4. Olkoon x jokin $\mathbb{F}_2$-radan R alkio. Tällöin mikä tahansa alkio $y \in R$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa $v \cdot x$, missä $v \in \mathbb{F}_2$. Sijoitetaan nyt y joukkoon A_i^*, jos A_i sisältää alkion v. Näin joukot A_i^* muodostuvat suoraan joukkojen A_i perusteella.

Olkoon sitten O mikä tahansa $\mathbb{F}_2$-rata, joka koostuu epätriviaaleista kiintopisteistä. Tällöin alkiota $x \in O$ ei voida valita mielivaltaisesti kuten edellisessä tapauksessa. Aloitetaan valitsemalla lyhyin mahdollinen epätyhjä sana ryhmästä $\mathbb{F}_2$, joka kiinnittää jonkin alkion $\mathbb{F}_2$-radalla O. Olkoon sitten x yksi sanan w kiintopiste $\mathbb{F}_2$-radalla O ja merkitään sanan w vasemmanpuoleisinta alkiota c:llä, joka siis on yksi alkioista $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Huomataan, että w ei voi loppua alkioon c^{-1}, sillä tällöin sana $c^{-1}wc$ kiinnittäisi alkion $c^{-1} \cdot x$ ja se olisi lyhyempi kuin w, koska $c^{-1}c$ ja cc^{-1} supistuvat pois. Muodostetaan seuraavaksi lauseen 5.14 perusteella ryhmän $\mathbb{F}_2$ paradoksaalinen hajotelma $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ niin, että e ja w ovat samassa osassa jakoa.

Väitetään, että jokainen alkio $y \in O$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa $v \cdot x$, missä $v \in \mathbb{F}_2$ ei lopu sanaan w eikä alkioon c^{-1}. Tällaisen yksikäsitteisen muodon olemassaolo todistetaan tarkastelemalla lyhyintä mahdollista sanaa v, jolla $y = v \cdot x$. Tällöin v ei voi loppua sanaan w tai w^{-1}, joten jos se loppuu alkioon c^{-1}, voidaan korvata v sanalla vw, sillä sanan w ensimmäinen alkio c supistuu pois. Muodon yksikäsitteisyys riippuu lokaalin vaihdannaisuuden tärkeästä ominaisuudesta: ainoat ryhmän $\mathbb{F}_2$ alkiot jotka kiinnittävät alkion x ovat sanan w potensseja. Huomataan, että jos $u \in \mathbb{F}_2$ kiinnittää alkion x, niin lokaalista vaihdannaisuudesta seuraa $uw = wu$, mistä edelleen seuraa vapaan ryhmän ominaisuuksien takia, että $u = t^j$ ja $w = t^k$ joillain $t \in \mathbb{F}_2$ ja $j, k \in \mathbb{Z}$. Mutta tällöin koska sana w on lyhin mahdollinen, on oltava $|j| > |k|$, joten j voidaan kirjoittaa muodossa $lk + r$, missä $l, r \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq r < |k|$. Tällöin $x = u \cdot x = t^r (t^k)^l \cdot x = t^r \cdot x$ ja jälleen, koska w on lyhin mahdollinen, on oltava $r = 0$. Niinpä j on jaollinen luvulla k ja u on sanan w potenssi kuten väitettiin.

Nyt jos $y = v \cdot x = u \cdot x$ ovat kaksi esitystä alkiolle y yllä kuvaillussa muodossa, niin $u^{-1}v \cdot x = x$, joten jompi kumpi sanoista $u^{-1}v$ tai $v^{-1}u$ on sanan w positiivinen potenssi. Voidaan olettaa sen olevan $u^{-1}v$, sillä tapauksen käsitellään täysin vastaavalla tavalla. Tällöin joko u^{-1} alkaa alkiolla c, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että u ei pääty alkioon c^{-1}, tai koko u^{-1} supistuu sanan v kanssa, jolloin v loppuu sanaan w, mikä on jälleen ristiriita, joten alkion y muoto $v \cdot x$ on yksikäsitteinen.

Tällä yksikäsitteisellä muodolla voidaan viimein sijoittaa $\mathbb{F}_2$-radan O alkiot joukkoihin A_1^*, A_2^*, A_3^*, ja A_4^*. Sijoitetaan y joukkoon A_i^*, jos A_i sisältää sanan v, missä $v \cdot x$ on alkion y yksikäsitteinen yllä kuvaillun kaltainen muoto. Täytyy vielä osoittaa, että tämä sijoittaminen todella tuottaa halutun lopputuloksen. Tarkastellaan ensiksi relaatiota $aA_2^* \subseteq A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$. Oletetaan, että $y \in A_2^*$, joten alkiolla y on yksikäsitteinen muoto $v \cdot x = y$, jossa $v \in A_2$ ja tarkastellaan sanaa $a \cdot y$. Jos $av \cdot x$ on oikea muoto sanalle $a \cdot y$, niin koska $v \in A_2$, on $av \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$, tällöin $a \cdot y$ on oikein sijoitettu joukkoon $A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$. Mutta toisaalta on mahdollista, että av loppuu sanaan w tai alkioon c^{-1}. Ensimmäisessä tapauksessa, koska v ei lopu sanaan w, on oltava $av = w$, joten $a \cdot y = w \cdot x = x$. Tällöin siis $w = av \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ja ryhmän $\mathbb{F}_2$ paradoksaalisen hajotelman valinnasta seuraa, että myös e kuuluu tähän joukkoon. Tällöin $e \cdot x$ on alkion x yksikäsitteinen muoto ja seuraa, että $a \cdot y \in A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$. Jos sana av päättyy alkioon c^{-1} ja v ei pääty alkioon c^{-1}, on oltava $v = e$ ja $a = c^{-1}$, joten $y = x$, $av = a$, eli w alkaa alkiolla a^{-1}. Tällöin $e = v \in A_2$, joten myös $w \in A_2$ ja edelleen $aw \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Mutta toisaalta $aw \cdot x$ on alkion $a \cdot x$ yksikäsitteinen esitys, joten $a \cdot y = a \cdot x \in A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$. Kaikille kolmelle muulle relaatiolle todistus tehdään täsmälleen samaan tapaan. □

Lokaalilla vaihdannaisuudella ja paradoksaalisuudella neljällä osalla on vielä suurempi yhteys, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 5.17. *Olkoon G ryhmä, joka toimii G-paradoksaalisessa joukossa X, joka on paradoksaalinen neljällä osalla. Tällöin on olemassa kaksi alkiota $a, b \in G$, joiden virittämä vapaa ryhmä $\mathbb{F}_2$ toimii lokaalisti vaihdannaisesti joukossa X.*

Todistus. Vrt. [12, s. 42]. Olkoon G ja X kuten väitteessä, ja olkoon $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ joukon X paradoksaalinen hajotelma ja $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ alkiot, joilla $g_1 \cdot A_1 \cup$

$g_2 \cdot A_2 = X = h_1 \cdot A_3 \cup h_2 \cdot A_4$. Merkitään $a = g_1^{-1} g_2$ ja $b = h_1^{-1} h_2$. Tällöin $A_1 \cup a \cdot A_2 = X = A_3 \cup b \cdot A_4$ ja

$$a \cdot A_2 = X \setminus A_1,\ a^{-1} \cdot A_1 = X \setminus A_2,\ b \cdot A_4 = X \setminus A_3,\ b^{-1} \cdot A_3 = X \setminus A_4.$$

Tarkoitetaan alkion a lähtöjoukolla joukkoa A_2 ja kuvajoukolla joukkoa $X \setminus A_1$, ja vastaavasti muille alkioille edellisten yhtälöiden mukaan.

Olkoon $w = c_n \cdots c_1$, missä $c_i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$, epätyhjä (supistettu) sana alkioiden a ja b virittämästä ryhmästä. Valitaan $x \in X$, joka ei kuulu alkion c_1 lähtöjoukkoon mutta kuuluu alkion c_n kuvajoukkoon. Tällainen alkio x on olemassa, sillä lähtöjoukko on aina yksi osajoukoista $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ja kuvajoukko on $X \setminus A_i$, missä $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Tällöin $c_1 \cdot x$ ei kuulu alkion c_1 kuvajoukkoon ja koska $c_2 \neq c_1^{-1}$, niin $c_1 \cdot x$ ei kuulu alkion c_2 lähtöjoukkoon. Tällä tavalla voidaan käydä läpi koko sana w ja saadaan, että $w \cdot x$ ei kuulu alkion c_n kuvajoukkoon. Toisaalta x valittiin niin, että se kuuluu alkion c_n kuvajoukkoon, joten on oltava $w \cdot x \neq x$, eli w ei ole ekvivalentti tyhjän sanan kanssa. Tällöin a ja b ovat siis riippumattomia ja ne virittävät vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$.

Todistetaan sitten vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$ toimivan lokaalisti vaihdannaisesti joukossa X käyttämällä vastaoletusta. Eli oletetaan, että ryhmän G aliryhmä $\mathbb{F}_2$ ei toimi lokaalisti vaihdannaisesti joukossa X. Olkoon w kuten edellisessä kohdassa, $u = d_m \cdots d_1$ ryhmän $\mathbb{F}_2$ epätyhjä sana ja $y \in X$ sanojen w ja u yhteinen kiintopiste. Jos $c_1 \neq d_1$, niin y ei voi kuulua molempien alkioiden c_1 ja d_1 lähtöjoukkoihin. Oletetaan sitten, että y ei kuulu alkion c_1 lähtöjoukkoon. Tällöin todistuksen ensimmäisen vaiheen perusteella $w \cdot y = y$ ei kuulu alkion c_n kuvajoukkoon. Jos nyt $c_n \neq d_m$, niin $u \cdot y$ kuuluu alkion d_m kuvajoukkoon, koska $u \cdot y = y = w \cdot y$. Joten y kuuluu alkion d_1 lähtöjoukkoon todistuksen ensimmäisen vaiheen perusteella. Tällöin $c_n = d_1^{-1}$, sillä muutoin alkion d_1 lähtöjoukko olisi alkion c_n kuvajoukon osajoukko ja syntyisi ristiriita. Olettamalla, että y ei kuulu alkion d_1 lähtöjoukkoon saadaan vastaavasti $d_m = c_1^{-1}$.

Olkoon sitten $v = o_n \cdots o_1$ ja $v' = p_m \cdots p_1$ epävaihdannaiset ryhmän $\mathbb{F}_2$ sanat, joiden pituuksien summa on lyhin mahdollinen ja jotka jakavat saman kiintopisteen $z \in X$. Tällöin $o_n \neq o_1^{-1}$, sillä muuten $o_1 v o_1^{-1}$ ja $o_1 v' o_1^{-1}$ kiinnittävät alkion $o_1 \cdot z$, ja niiden pituuksien summa on supistamisen takia lyhyempi kuin sanoilla v ja v'. Vastaavasti $p_m \neq p_1^{-1}$. Nyt voidaan olettaa, että $p_1 = o_1$, sillä jos näin ei olisi, voitaisiin korvata toinen tai molemmat sanoista v ja v' niiden käänteissanoilla. Tarkastellaan sitten sanoja vv'^{-1} ja $v'^{-1}v$, jotka molemmat kiinnittävät alkion z. Koska v ja v' ovat lyhyimmät epävaihdannaiset alkiot, sanat vv'^{-1} ja $v'^{-1}v$ eivät voi supistua niin paljon, että supistaminen vaikuttaisi sanojen ensimmäiseen tai viimeiseen alkioon. Mutta kun $o_n \neq o_1^{-1}$, $p_m \neq p_1^{-1}$ ja $p_1 = o_1$, niin $o_n \neq p_1^{-1}$ ja $p_m \neq o_1^{-1}$, mikä on ristiriita edellisen kappaleen tuloksen kanssa. Joten tällaisia epävaihdannaisia sanoja v ja v' ei ole, ja ryhmä $\mathbb{F}_2$ toimii lokaalisti vaihdannaisesti joukossa X. □

Seuraus 5.18. *Ryhmä G on paradoksaalinen neljällä osalla, jos ja vain jos sillä on kahden alkion virittämä vapaa aliryhmä.*

Todistus. Seuraa suoraan seurauksesta 5.15 ja lauseesta 5.17. □

Nyt voidaan osoittaa Hausdorffin paradoksin toimivan neljällä osalla, eli kaksiulotteinen pallo on paradoksaalinen neljällä osalla.

Seuraus 5.19. *Kaksiulotteinen pallo S^2 on $SO(3)$-paradoksaalinen neljällä osalla, eikä yhtään vähemmällä.*

Todistus. Vrt. [12, s. 39].Kiertoryhmä $SO(3)$ toimii selvästi lokaalisti vaihdannaisesti avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Lisäksi lauseen 5.3 perusteella se sisältää vapaan kahden alkion virittämän aliryhmän, joten se on paradoksaalinen neljällä osalla. Tällöin lauseesta 5.16 seuraa, että S^2 on $SO(3)$-paradoksaalinen neljällä osalla ja lauseen 5.13 perusteella joukko ei voi olla paradoksaalinen vähemmällä kuin neljällä osalla. □

Siirrytään sitten Banachin-Tarskin paradoksin suljetun pallon osien minimoimiseen. Muistetaan vielä, kuinka suljetun pallon paradoksaalisuus todistettiin käyttäen apuna vastaavaa Hausdorffin paradoksin todistusta. Voidaan jälleen tehdä samoin, mutta koska suljetulla pallolla on myös keskipiste, tarvitaan nyt viisi osaa Hausdorffin paradoksin neljän sijaan.

Lause 5.20. *Jokainen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ suljettu pallo on $E(3)$-paradoksaalinen viidellä osalla, eikä yhtään vähemmällä.*

Todistus. Vrt. [12, s. 40]. Kuten lauseessa 5.7, todistetaan väite jälleen yksikköpallolle P_1 ja samoin perusteluin lause pätee mille tahansa avaruuden $\mathbb{R}^3$ pallolle. Aloitetaan todistamalla, että P_1 ei ole paradoksaalinen neljällä osalla ja näytetään sitten, että se on paradoksaalinen viidellä osalla.

Olkoon S yksikköpallon P_1 pinta ja $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ pallon P_1 paradoksaalinen hajotelma neljään osaan, joilla $\sigma_1(A_1) \cup \sigma_2(A_2) = P_1 = \tau_1(B_1) \cup \tau_2(B_2)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ isometrioilla $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ ja τ_2. Tämä on ainoa mahdollinen hajotelma vähemmällä kuin viidellä osalla, sillä pallon aito osajoukko ei selvästi voi olla yhtenevä koko pallon kanssa. Havaitaan, että origo $\mathbf{0}$ ei voi olla jokaisen isometrian kiintopisteenä, sillä muuten toinen kahdennetuista palloista ei sisältäisi origoa. Joten oletetaan, että $\tau_2(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$. Tällöin $\tau_2(P_1)$ ja P_1 ovat selvästi eri joukkoja, joten on olemassa jokin suljettu osajoukko $H \subseteq S$, jolla $H \cap \tau_2(P_1) = \emptyset$. Tällöin siis $H \subseteq \tau_1(B_1)$, ja edelleen $\tau_1^{-1}(H) \subseteq B_1$, joka on pinnan S osajoukko. Nyt $(A_1 \cup A_2) \cap S$ sisältyy joukon $\tau_1^{-1}(H)$ komplementtiin, eli tämä leikkaus on pallon pinnan S avoin osajoukko. Kun A_1 eikä A_2 sisällä suljettua osajoukkoa H, eikä τ_2 kiinnitä origoa, niin sekä σ_1 että σ_2 kiinnittävät origon ja kuvaavat täten pinnan S itselleen. Mutta tällöin $(\sigma_1(A_1) \cup \sigma_2(A_2)) \cap S = \sigma_1(A_1 \cap S) \cup \sigma_2(A_2 \cap S)$, joka on kahden avoimen joukon yhdiste, joten se on avoin ja joukon S aito osajoukko. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $S \subseteq \sigma_1(A_1) \cup \sigma_2(A_2) = P_1$.

Rakennetaan sitten paradoksaalinen hajotelma viidestä osasta tarkastelemalla erikseen jokaista yksikköpallon pintaa S_r, missä $0 < r \leq 1$ on pallon säde. Voidaan valita lauseen 5.3 perusteella kierrot σ ja τ, jotka virittävät vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$ kanssa isomorfisen ryhmän G. Lauseen 5.16 perusteella voidaan jakaa jokainen S_r neljään osaan A_1^r, A_2^r, A_3^r ja A_4^r, joilla $\sigma(A_2^r) = A_2^r \cup A_3^r \cup A_4^r$ ja $\tau(A_4^r) = A_1^r \cup A_2^r \cup A_4^r$. Mutta origo jää tällä tavalla pois, joten muodostetaan pallon pinnalle S hajotelma viiteen osaan: $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ ja yksi piste $\{p_0\}$, joilla $\sigma(A_2^1) = A_2^1 \cup A_3^1 \cup A_4^1 \cup \{p_0\}$ ja

$\tau(A_4^1) = A_1^1 \cup A_2^1 \cup A_4^1 \cup \{p_0\}$. Kyseinen hajotelma voidaan rakentaa valitsemalla yksi kiintopisteetön G-rata O. Tällaisen G-radan on oltava olemassa, sillä ryhmällä G on vain numeroituvan monta kiintopistettä joukossa S, joten vain numeroituva määrä pisteitä on kiintopisteistä koostuvilla radoilla. Voidaan nyt valita p_0 mielivaltaisesti G-radalta O ja asettaa muut pisteet $q \in O$ joukkoihin $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ seuraavasti: kun w on yksikäsitteinen joukon $G \setminus \{e\}$ sana, jolla $q = w(p_0)$, niin asetetaan piste q yhteen joukoista $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ sen mukaan, millä kierroista $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ tai τ^{-1} sana w alkaa.

Vastaavasti kuten lauseessa 4.10, merkitään jokaiselle $\theta \in \{\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}\}$ $W(\theta) = \{w \in G \mid w \text{ alkaa kierrolla } \theta\}$. Koska $\sigma W(\sigma^{-1}) = F \setminus W(\sigma)$ ja $\tau W(\tau^{-1}) = F \setminus W(\tau)$, on tämä haluttu hajotelma. Tällöin P_1 voidaan hajottaa osiin B_1, B_2, B_3, B_4 ja $\{p_0\}$, missä $B_1 = \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup\{A_1^r \mid 0 < r \leq 1\}$, ja kun $i = 2, 3, 4$, niin $B_i = \bigcup\{A_i^r \mid 0 < r \leq 1\}$. Olkoon sitten ρ se siirto, jolla $\rho(p_0) = \mathbf{0}$, nähdään, että tämä hajotelma toimii, sillä $B_1 \cup \sigma(B_2) = P_1 = B_3 \cup \tau(B_4) \cup \rho(p_0)$. □

Seuraus 5.21. *Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^3$ on $E(3)$-paradoksaalinen viidellä osalla.*

Todistus. Seuraa lauseesta 5.20 samoin perusteluin kuin seurauksen 5.9 todistuksessa. □

6 Muovautuvat ryhmät

Hausdorffin ja Banachin-Tarskin paradoksit ovat kuitenkin vain yksittäisiä tapauksia joukkojen paradoksaalisista hajotelmista. Olisi mielenkiintoista tietää yleisemmin, millaisissa tilanteissa paradoksaalisia hajotelmia voidaan koota, ja saada Banachin-Tarskin paradoksin kaltaisia tuloksia, tai päinvastoin. Kuten on jo huomattu, paradoksaalisen hajotelman osat eivät ole mitallisia. Joten ei siis tule yllätyksenä, että voidaan mittoihin liittyvien ominaisuuksien avulla määritellä, milloin ryhmä on paradoksaalinen.

Tämä luku on vain pintapuolinen katsaus muovautuviin ryhmiin, sillä kaikkea esitietoa ei ole mahdollista sisällyttää tutkielmaan. Kyseessä on kuin vastapaino paradoksaalisuudelle, joten olisi tavallaan väärin sivuuttaa muovautuvat ryhmät kokonaisuudessaan. Näiden ryhmien käsittely sai kuitenkin alkunsa Banachin-Tarskin paradoksista, kun John von Neumann käsitteli niitä 1929 [11, s. 34]. Nimi muovautuva ryhmä (engl. amenable group) on toisaalta peräisin Mahlon Daylta vasta vuodelta 1949 [11, s. 34].

6.1 Keskiarvo ja muovautuvuus

Aloitetaan muovautuvan ryhmän määrittely esittelemällä puuttuvat mittateorian käsitteet Cohnin [3], ja Ceccherini-Silbersteinin ja Coornaertin [2] teoksien pohjalta. Itse muovautuvan ryhmän määritelmä on Runden [11] teoksesta.

Lause 6.1. *Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitallinen avaruus, A joukon X osajoukko ja algebran $\mathcal{A}$ alkio, ja $f : A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Tällöin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

1. $\{x \in A \mid f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}$ *jokaisella* $t \in \mathbb{R}$,
2. $\{x \in A \mid f(x) < t\} \in \mathcal{A}$ *jokaisella* $t \in \mathbb{R}$,
3. $\{x \in A \mid f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$ *jokaisella* $t \in \mathbb{R}$ *ja*
4. $\{x \in A \mid f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ *jokaisella* $t \in \mathbb{R}$.

Todistus. Vrt. [3, s. 48]. Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitallinen avaruus ja A sekä f kuten lauseessa. Huomataan, että

$$\{x \in A \mid f(x) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A \;\middle|\; f(x) \leq t - \frac{1}{n} \right\},$$

eli jokainen kohdan 2 joukko koostuu kohdan 1 joukkojen yhdisteestä, eli kohdasta 1 seuraa kohta 2. Vastaavasti kohdan 3 joukot voidaan esittää muodossa

$$\{x \in A \mid f(x) \geq t\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) < t\},$$

eli kohdasta 2 seuraa kohta 3. Vastaavasti todistetaan myös, että kohdasta 3 seuraa kohta 4, josta edelleen seuraa kohta 1. □

Määritelmä 6.2. Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitallinen avaruus, A joukon X osajoukko ja algebran $\mathcal{A}$ alkio, ja kuvaus $f : A \to \mathbb{R}$, jolla pätee lauseen 6.1 kohdat 1–4. Tällöin kuvausta f sanotaan *mitalliseksi kuvaukseksi*.

Huomautus. Edellisen määritelmän kuvaukselle f riittää siis todeta, että yksi lauseen 6.1 kohdista pätee.

Määritelmä 6.3. Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus. Jonkin joukon X pisteiden ominaisuuden sanotaan *pätevän melkein kaikkialla*, jos $\mu(A) = 0$, kun $A \subseteq X$ sisältää kaikki ne pisteet, joilla ominaisuus ei päde.

Määritelmä 6.4. Olkoon $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mitta-avaruus. Mitallisen kuvauksen $f : X \to \mathbb{R}$ sanotaan olevan *oleellisesti rajoitettu*, jos se on rajoitettu melkein kaikkialla, eli $\mu(A) = 0$, kun $A \subseteq X$ koostuu niistä pisteistä, joilla f ei ole rajoitettu. Toisin sanoen on olemassa sellaiset $m, M \in \mathbb{R}$, että $m < f(x) < M$ melkein kaikilla $x \in X$.

Merkintä 6.5. Kun $(X, \mathcal{A}, \mu)$ on mitta-avaruus, merkitään kaikkien oleellisesti rajoitettujen mitallisten kuvauksien joukkoa $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, tai yksinkertaisemmin $L^\infty(X)$.

Merkintä 6.6. Olkoon G ryhmä, joka voidaan varustaa σ-algebralla ja mitalla. Merkitään tällöin kaikkien oleellisesti rajoitettujen mitallisten kuvauksien joukkoa vastaavasti kuin edellä $L^\infty(G)$.

Määritelmä 6.7. Olkoon G ryhmä. *Keskiarvo* ryhmälle G on lineaarikuvaus $m : L^\infty(G) \to \mathbb{R}$, jolla pätee

1. $m(\mathbf{1}) = 1$ ja
2. jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in G$, niin $m(f) \geq 0$ kaikilla $f \in L^\infty(G)$.

Huomautus. Edellisen määritelmän **1** on siis oleellisesti rajoitettu mitallinen kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = 1$ aina, kun $x \in E \subseteq X$.

Huomautus. Jos G on lokaalisti kompakti ryhmä, voidaan käyttää Haarin mittaa keskiarvon määrittelemiseksi.

Seuraavaksi voidaan määritellä mikä on muovautuva ryhmä käyttäen hyväksi keskiarvoa.

Määritelmä 6.8. Olkoon G ryhmä ja E joukon $L^\infty(G)$ osajoukko. Tällöin ryhmä G on *muovautuva ryhmä*, jos on olemassa (vasemmalta) invariantti keskiarvo $m : L^\infty(G) \to \mathbb{R}$, eli kaikilla $g \in G$ pätee $m(gE) = m(E)$.

6.2 Joitakin ominaisuuksia

Lopuksi esitellään muovautuvien ryhmien ominaisuuksia. Huolimatta tulosten merkittävyydestä lauseet on esitettävä tässä tutkielmassa pääsääntöisesti ilman yksityiskohtaisia todistuksia, sillä todistukset vaatisivat liiaksi taustatietoa, jota ei tutkielmasta löydy. Pyritään kuitenkin esittämään karkea yleiskuvaus todistuksista. Vajaat todistukset on merkitty näkyvästi ja niissä on viittaukset lähdeteoksiin, joista löytyy todistukset yksityiskohtineen ja tarvittavat esitiedot. Aliluvussa on käytetty Wagonin [12], Runden [11], ja Ceccherini-Silbersteinin ja Coornaertin [2] teoksia.

Lause 6.9 (Tarskin lause)**.** *Olkoon G ryhmä, joka toimii joukossa X ja E joukon X osajoukko. Tällöin on olemassa mitta $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, jolla $\mu(E) = 1$, jos ja vain jos E ei ole G-paradoksaalinen.*

Todistus. Olkoon G ja X kuten väitteessä, sekä E joukon X osajoukko, joka on G-paradoksaalinen. Tällöin lauseen 4.14 perusteella ei ole olemassa väitteen kuvailemaa täysadditiivista mittaa μ.

Lauseen toinen suunta sivuutetaan, sillä se vaatisi liiaksi taustatyötä suhteessa tämän tutkielman laajuuteen nähden, todistus on käsitelty yksityiskohtaisemmin Runden [11, s. 7–14] ja Wagonin [12, s. 125–128] teoksissa. □

Määritelmä 6.10. Olkoon G lokaalisti kompakti ryhmä ja H sen suljettu aliryhmä. Tällöin jatkuvaa kuvausta $\beta : G \to \mathbb{C}$ sanotaan *Bruhat-kuvaukseksi* aliryhmälle H, kun se täyttää seuraavat ehdot:

1. jokaisella kompaktilla osajoukolla $K \subseteq G$ kantaja $\mathrm{supp}(\beta_K)$ on kompakti, kun β_K on kuvauksen β rajoittuma joukkoon K ja
2. $\int\limits_{h \in H} \beta(gh) \mathrm{dm_H(h)} = 1$, kun $g \in G$ ja m_H on Haarin mitta aliryhmälle H.

Lause 6.11. *Olkoon G lokaalisti kompakti ryhmä ja H sen suljettu aliryhmä. Tällöin on olemassa Bruhat-kuvaus aliryhmälle H.*

Todistus. Sivuutetaan, sillä todistus olisi liian pitkä esitettäväksi apulauseineen, ks. [11, s. 25]. □

Lause 6.12. *Olkoon G muovautuva lokaalisti kompakti ryhmä ja H sen suljettu aliryhmä. Tällöin myös H on muovautuva.*

Todistus. Sivuutetaan, sillä todistus vaatisi liikaa käsitteistöä yksityiskohtineen. Kuitenkin todistus nojaa lauseeseen 6.11, jonka perusteella on olemassa Bruhat-kuvaus aliryhmälle H. Loput todistuksesta löytyy Runden [11, s. 25] teoksesta. □

Huomautus. Toisin sanoen edellisen lauseen perusteella jokainen muovautuvan lokaalisti kompaktin topologisen ryhmän aliryhmä on muovautuva.

Seuraus 6.13. *Olkoon G lokaalisti kompakti ryhmä, jolla on vapaa aliryhmä $\mathbb{F}_2$. Tällöin G ei ole muovautuva.*

Todistus. Olkoon G kuten väitteessä ja $\mathbb{F}_2$ sen aliryhmä. Tarskin lauseen 6.9 nojalla vapaa ryhmä $\mathbb{F}_2$ ei ole paradoksaalisena ryhmänä muovautuva ja toisaalta lauseen 6.12 perusteella jokainen muovautuvan ryhmän aliryhmä on muovautuva, joten G ei voi olla muovautuva. □

Edelliseen seuraukseen liittyen on hyvä mainita *Von Neumannin otaksuma*, jonka mukaan jokaisella ei-muovautuvalla ryhmällä G on vapaa aliryhmä $\mathbb{F}_2$ [2, s. 105]. Tämä otaksuma on kuitenkin todettu vääräksi vastaesimerkeillä, ks. esimerkiksi [8]. Mielenkiintoisena seikkana Von Neumannin otaksuma pätee lineaarisille ryhmille [2, s. 214], joiden yhteydessä se tunnetaan *Titsin vaihtoehtolauseena*.

Lause 6.14. *Olkoon G lokaalisti kompakti ryhmä ja H sen suljettu normaali aliryhmä. Jos H ja G/H ovat muovautuvia, niin myös ryhmä G on muovautuva.*

Todistus. Sivuutetaan liian monimutkaisena, ks. [11, s. 26]. □

Seuraus 6.15. *Olkoon G ja G' muovautuvia lokaalisti kompakteja ryhmiä. Tällöin $G \times G'$ on muovautuva.*

Todistus. Vrt. [2, s. 90]. Olkoon G ja G' muovautuvia ryhmiä. Huomataan, että $H = \{(g, e_{G'}) \mid g \in G\}$ on ryhmän $G \times G'$ normaali aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän G kanssa ja $(G \times G')/H$ on isomorfinen ryhmän G' kanssa. Tällöin lauseesta 6.14 seuraa, että myös $G \times G'$ on muovautuva. □

Huomautus. Edellisen seurauksen perusteella äärellisen monesta muovautuvasta ryhmästä koostuva tuloryhmä on muovautuva, mutta äärettömän monesta muovautuvasta ryhmästä koostuva tuloryhmä ei välttämättä ole muovautuva [2, s. 90].

Lause 6.16. *Jokainen lokaalisti kompakti abelin ryhmä on muovautuva.*

Todistus. Sivuutetaan, sillä todistus vaatisi liikaa käsitteistöä yksityiskohtineen, ks. [11, s. 19]. □

Lause 6.17. *Jokainen ratkeava lokaalisti kompakti ryhmä on muovautuva.*

Todistus. Vrt. [2, s. 93]. Edetään induktiolla ryhmän asteen k suhteen. Jos $k = 0$, koostuu G pelkästä neutraalialkiosta joka on triviaalisti muovautuva. Oletetaan sitten, että väite on tosi muovautuville ryhmille, joiden aste on k, jollain $k > 0$. Olkoon G ratkeava ryhmä, jonka aste on $k+1$. Tällöin ryhmän G kommutaattorialiryhmä $G^{(1)}$ on ratkeava ryhmä, jonka aste on k ja se on tällöin oletuksen perusteella muovautuva. Lisäksi ryhmä $G/G^{(1)}$ on abelin ryhmä, joka on lauseen 6.16 perusteella muovautuva. Tällöin lauseesta 6.12 seuraa, että myös G on muovautuva ryhmä. □

Lähteet

[1] Beardon Alan F., *Algebra and geometry*. Cambridge University Press, 2005.

[2] Ceccherini-Silberstein T., Coornaert M., *Cellular Automata and Groups*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[3] Cohn Donald L., *Measure theory*. Birkhäuser Boston, 1980.

[4] Grillet Pierre A., *Abstract Algebra* 2nd edition, Springer Science + Business Media, LLC, 2007.

[5] Halmos Paul R., *Measure Theory*. D. Van Nostrad company, Inc., 1950.

[6] Herrlich Horst, *Axiom of choice*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[7] Jech Thomas J., *About the Axiom of Choice*, Handbook of mathematical logic 345–370, 1977.

[8] Monod N., *Groups of piecewise projective homeomorphisms*. Proceedings of the National Academy of Sciences 12 (2013) 4524–4527.

[9] Munkres James R., *Topology* 2nd edition. Pearson, 2000.

[10] Rao K. Chandrasekhara, *Topology*. Alpha science, 2009.

[11] Runde Volker, *Lectures on amenability*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[12] Wagon Stan, *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, 1985.

[13] Wikipedia, the Free Encyclopedia, *Non-measurable set*. 2020. [Viitattu 26.1.2020]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Non-measurable_set#Example