

Severi Kosonen

KONFORMIUKUVAUKSEN JA HARMONISTEN FUNKTIOIDEN VÄLISESTÄ YHTEYDESTÄ

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta

Kandidaatintyö

Kesäkuu 2020

TIIVISTELMÄ

Severi Kosonen: Konformikuvausten ja harmonisten funktioiden välisestä yhteydestä
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja Luonnontieteet, TkK
Kesäkuu 2020

Konformikuvaus on funktio, joka säilyttää määrittelyjoukossa olevien käyrien väliset kulmat. Tällainen kuvaus on hyödyllinen, koska sen avulla monimutkaisessakin geometriassa esitettyjä ongelmia voidaan kuvata yksinkertaisempaan alueeseen. Kompleksianalyysi tarjoaa kätevän tavan käsitellä konformikuvausta, sillä analyttinen kompleksikuvaus säilyttää kulmat, ja on näin ollen konformikuvaus. Tässä työssä konformikuvausta käsitellään kompleksianalyysin keinoin.

Työssä kutsutaan funktioita termillä kuvaus, koska halutaan painottaa funktion määrittely- ja maalijoukon muodon muutosta. Koska kompleksimuuttujat ovat luonteeltaan kaksiulotteisia, niitä ei voida kuvata samalla tavalla kuin reaali-lukuja. Täten kompleksimuuttujia kuvataan niin, että funktion määrittelyjoukon pisteet kuvataan toiseen koordinaatistoon. Näiden koordinaatistojen ei tarvitse olla samat, mutta tässä työssä kuvaukset rajoittuvat vain kompleksitasoon. Peruskuvauksia ovat siirto, laajennus ja inversio. Nämä yhdistämällä saadaan yleinen muoto lineaariselle kuvaukselle, joka tunnetaan Möbius-kuvauksena.

Työn yksi päätavoite on todistaa, että harmonisen funktion ja konformikuvausten yhdistelmä on harmoninen konformikuvausten määrittelyjoukossa. Tätä voidaan hyödyntää, kun halutaan löytää harmoninen funktio hankalan geometrian läheisyydestä. Yhteyttä hyödynnetään meriteollisuudessa niin sanotuissa seakeeping-laskuissa, joissa pyritään etsimään fluidin liikkestä aiheutuvan lisätyn massan ja vaimennuksen kertoimia. F. Ursell osoitti miten tällaiset kertoimet voidaan johtaa äärettömän pitkälle ylös-alas-suuntaiselle liikkeiselle sylinterille. Yksi oleellinen osa tätä osoitusta on, että fluidin virtaus- ja nopeusfunktiot ovat harmonisia. Koska konformikuvauksessa harmonisuus säilyy, voidaan laivan poikkileikkauksen profiili kuvata yksikköympyräksi niin, että nämä funktiot säilyttävät harmonisuuden. Tämän jälkeen kertoimet voidaan ratkaista käyttämällä Ursellin metodia.

Avainsanat: konformikuvaus, harmoninen funktio, kompleksiluvut, close-fit

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1	Johdanto	1
2	Kompleksiluvut	2
2.1	Argumentti ja normi	2
2.2	Käyrän parametrisointi	3
2.3	Alueet	5
2.4	Analyttisyys	6
2.5	Harmoniset funktiot	8
3	Kompleksinen kuvaus	10
3.1	Kuvauksen geometrinen tulkinta	10
3.2	Möbius-kuvaus	13
3.3	Konformikuvaus	15
4	Seakeeping esimerkki konformikuvaukselle	18
5	Yhteenveto	20
	Lähteet	21

LYHENTEET JA MERKINNÄT

\mathbb{C}	kompleksiluvut
$D(z, r)$	Kiekko, jonka keskipiste on z ja säde r
\mathbb{N}	kokonaisluvut
\mathbb{R}	reaaliluvut

1 JOHDANTO

Funktiota käytetään yleensä parametrien laskemiseen, mutta niitä voidaan myös käyttää kappaleiden geometrian tutkimiseen. Erityisesti jatkuva funktio voi kuvata alueen tai käyrän toiseksi vastaavanlaisiksi geometriseksi objektiksi. Konformisilla kuvauksilla tarkoitetaan sellaisia funktioita, jossa sileiden käyrien väliset kulmat säilyvät. Tällainen ominaisuus on hyödyllinen, sillä konformisilla kuvauksilla voidaan yksinkertaistaa ongelmatilanteen geometriaa säilyttäen alkuperäisen muodon ominaisuuksia.

Funktion sanotaan olevan harmoninen, jos se toteuttaa ns. *Laplacen yhtälön* $\nabla^2 f = 0$, missä ∇^2 vastaa funktion toista osittaisderivaattaa jokaiseen sen koordinaattiin. Harmoniset funktiot ovat tärkeä käsite fysiikassa ja niihin liittyvät ongelmat johtuvat yleensä tilanteen hankalasta geometriasta. Voidaan osoittaa, että konformikuvaukset säilyttävät harmonisuuden. Täten on mahdollista kuvata ongelma yksinkertaiseen geometriaan, ratkaista ongelma siellä ja kuvata ratkaisu takaisin lähtötilanteeseen.

Tässä työssä tarkastellaan kaksiulotteisen tason konformikuvauksia kompleksianalyysin keinoin. Konformikuvauksia voidaan tarkastella myös korkeampiulotteisissa avaruuksissa, mutta tällöin ainoat konformikuvaukset ovat Möbius-kuvauksia Liouvilien lauseen (Liouville's theorem) nojalla [7]. Työn tavoitteena on esitellä lukijalle konformikuvaus, sen yhteys kompleksisiin analyttisiin funktioihin ja konformikuvausten yhteys harmonisiin funktioihin.

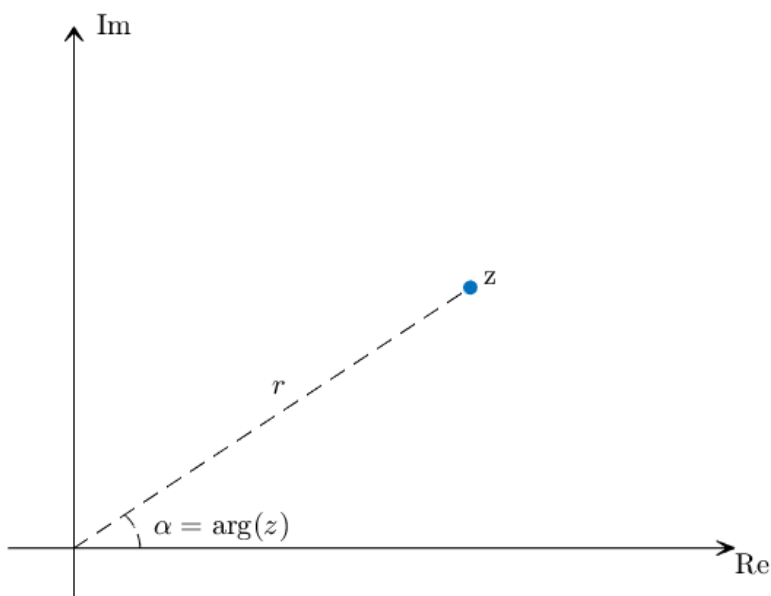
Harmoniset funktiot yleensä määritellään usean muuttujan reaalisisina funktioina, kun taas konformikuvaus esitetään usein kompleksimuuttujan funktion avulla. Luvussa 2 aloitetaan työ sen kannalta tärkeistä kompleksilukujen teorian määritelmistä. Tämän jälkeen luvussa 3 esitellään peruskuvauksia ja niistä johdettu Möbius-kuvaus. Ensimmäinen työn päätulos on osoittaa, että jokainen analyttinen kompleksimuuttujan funktio, jonka derivaatta eroaa nollasta, määrittää konformikuvauksen. Toinen työn päätulos on osoittaa, että funktion harmonisuus säilyy konformikuvauksessa. Lopuksi luvussa 4 demonstroidaan käytännön esimerkki konformikuvauksen hyödystä, missä laivan poikkileikkauksen profiili kuvataan konformisesti yksikkökiekoksi.

2 KOMPLEKSILUVUT

Lukijan oletetaan hallitsevan kompleksilukuihin liittyvät peruskäsitteet ja -ominaisuudet. Tässä luvussa kootaan niistä tämän työn kannalta oleelliset. Näitä asioita on käsitelty tarkemmin esimerkiksi kirjoissa [12] ja [1].

2.1 Argumentti ja normi

Kuvassa 2.1 on esitelty satunnainen kompleksiluku z kompleksitasossa. Kuvassa pisteen z etäisyyttä origosta on merkitty r :llä. Tätä etäisyyttä kutsutetaan luvun z *normiksi* tai *moduuliksi*, ja sitä merkitään itseisarvolla $r = |z|$. Kompleksiluvun ja kompleksitason reaaliakselin välistä kulmaa kutsutaan luvun z *argumentiksi*. Kompleksiluvut voidaan kirjoittaa näiden avulla napakoordinaattimuodossa, eli $z = re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. [1]



Kuva 2.1. Kompleksiluku kompleksitasossa

Olkoot piste $z = x + iy$ kuvan 2.1 mukainen, missä $x, y \in \mathbb{R}$. Tämän luvun normi on $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, joten normi on aina positiivinen reaaliluku tai nolla. Jos kulma positiivisen reaaliakselin ja pisteen välillä on välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, voidaan kulmalle johtaa kaava $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

Kompleksiluvun napakoordinaattiesityksestä nähdään positiivisen reaaliakselin ja pisteen välisen kulman olevan riippuva sinistä ja kosinista. Nämä molemmat ovat jaksollisia 2π välein, joten argumentti ei ole yksikäsitteinen. Argumentti siis sisältää kaikki kulmat $\alpha = \phi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, missä ϕ on jokin argumentti.

Mikäli $\alpha \in (-\pi, \pi]$, sanotaan argumentin olevan *päähaaralla*. Tällöin merkitään, että $\text{Arg}(z) = \alpha$. Koska argumentin päähaara on yksikäsitteinen, on joskus miellyttävää kirjoittaa argumentti sen kautta. Tällöin argumentti kirjoitetaan $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Lause 2.1. *Olkoot luvut z_1 ja z_2 kompleksilukuja. Näille luvuille pätee $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.*

Todistus. Merkitään, että $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, missä $\theta_1 = \text{Arg}(z_1)$ ja $\theta_2 = \text{Arg}(z_2)$. Kertomalla luvut yhteen saadaan, että $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. Tästä nähdään tulon kulman olevan lukujen z_1 ja z_2 argumenttien summa. Kirjoitetaan argumentit muodossa $\arg(z_1) = \text{Arg}(z_1) + 2n\pi$ ja $\arg(z_2) = \text{Arg}(z_2) + 2m\pi$, missä $n, m \in \mathbb{Z}$. Nyt summa on muotoa

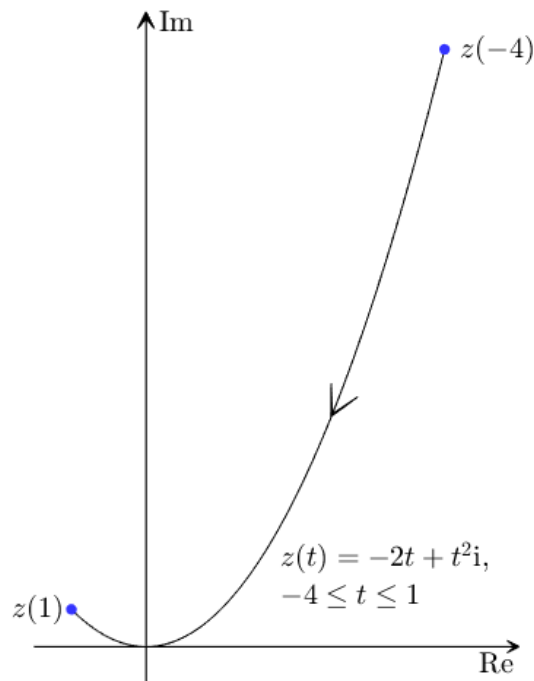
$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2k\pi \\ &= \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2(n + m)\pi \\ &= \text{Arg}(z_1) + 2n\pi + \text{Arg}(z_2) + 2m\pi \\ &= \arg(z_1) + \arg(z_2), \text{ missä } k, m, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.1}$$

□

Huomautus 2.2. Lause 2.1 ei aina kuitenkaan päde argumentin päähaaralle, eli $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$. Tämä voidaan osoittaa valitsemalla $z_1 = z_2 = 1 - i$. Tällöin $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2) = \frac{3\pi}{4}$. Näiden summa on $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \frac{6\pi}{4} > \pi$. Täten summa ei ole argumentin päähaaralla.

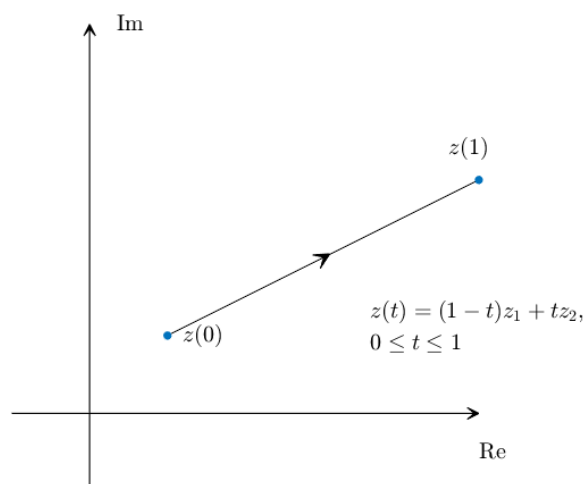
2.2 Käyrän parametrisointi

Käsitteellä *käyrä* (myös käytetään termiä *reitti*) tarkoitetaan reittiä pisteestä toiseen. Käyrä on määritelty jatkuvana funktiona $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Käyrän *alkupiste* on $z(a)$ ja *päätepiste* $z(b)$. [5]



Kuva 2.2. Käyrän parametrisointi

Esimerkki 2.3. Helpoin muodostettava käyrä pisteiden välillä on suora. Olkoot pisteet $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = 5 + 3i$ kompleksitasossa ja niiden välille halutaan muodostaa suora. Sen muodostamiseen on monta eri tapaa ja eräs niistä on $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, missä $t \in [0, 1]$. Huomataan, että alkupisteessä $z(0) = z_1$ ja loppupisteessä $z(1) = z_2$. Yhtälö voidaan vielä muokata muotoon $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$, mistä nähdään pisteen z olevan lineaarisesti riippuvainen luvusta t . Täten $z(t)$ on suora.



Kuva 2.3. Parametrisoitu suora $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$

Käyrä $z(t) = x(t) + iy(t)$ on *derivoituva*, kun $x(t)$ ja $y(t)$ ovat derivoituvia ja derivaattaa merkitään

$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ [1, s. 71]. Käyrän sanotaan olevan *suljettu* (engl. *closed*), jos sen alku- ja päätepiste ovat samat, toisin sanoen $z(a) = z(b)$. Mikäli käyrä ei leikkaa missään kohtaa itsensä kanssa, paitsi mahdollisesti päätepisteissään, sanotaan käyrän olevan *yksinkertainen*. Käyrä, joka on yksinkertainen ja suljettu, on *Jordanin käyrä* (myös engl. *simple closed curve*).

Määritelmä 2.4. (Sileä käyrä) Olkoot käyrä $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$. Käyrän sanotaan olevan *sileä*, jos

1. $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ on olemassa ja jatkuva välillä $[a, b]$,
2. $z'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$.

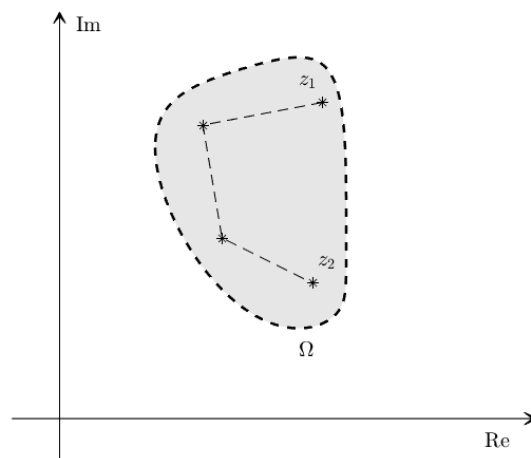
Sileän käyrän määritelmästä saadaan, että käyrällä on olemassa tangenttivektori jokaisessa pisteessä $z(t)$. Siinä ei siis ole kulmia tai teräviä kohtia, joten tangenttivektori on yksikäsitteinen aina. Jos käyrä ei ole sileä, mutta se voidaan pilkkoa moneen sileään käyrään, sanotaan käyrän olevan *paloittain sileä* (engl. *piecewise smooth*).

2.3 Alueet

Vaikka alueen käsite on intuitiivinen, on syytä määrittää se tarkemmin vielä. Monet kompleksiluvun teorialat vaativat määrittelyjoukon olevan tietynlainen alue, mikä esimerkiksi tullaan huomaamaan, kun puhutaan funktion analyyttisyydestä. Työssä käytetään z keskipisteiselle kiekolle merkintää $D(z, \varepsilon) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Määritelmä 2.5. Joukko $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ on

- (i) avoin, jos kaikilla $z \in \Omega$ löytyy sellainen $\varepsilon > 0$, että $D(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$,
- (ii) yhtenäinen, jos jokainen alueen piste voidaan yhdistää käyrällä $\zeta \in \Omega$,
- (iii) alue, jos se on avoin ja yhtenäinen.



Kuva 2.4. Alue kompleksitasossa

Työssä aikaisemmin puhuttiin Jordanin käyrästä, jonka nimitys tulee *Jordanin lauseesta*. Tämän lauseen mukaan käyrä, joka on yksinkertainen ja suljettu, toimii jonkin rajoitetun alueen reunana. Käyrä siis jakaa kompleksitason kahteen alueeseen, jossa toinen alue on rajoitettu, eli sen sisäpisteet, ja toinen alue on sen ulkopisteet, jotka muodostavat rajoittamattoman alueen. [1, s. 80].

Määritelmä 2.6. Alue Ω on yhdesti yhtenäinen, jos jokaisen joukon Ω Jordanin käyrän sisäpuoli on joukon Ω osajoukko, toisin sanoen alueessa ei ole reikiä.

2.4 Analytyisyys

Kuten reaalityöjen funktioiden tapauksessa, kompleksimuuttujan funktioiden derivoitavuus on tärkeä käsite. Tällä pystytään ilmaisemaan funktion muutosta, sekä sille löytyy monesta fysiikan sovelluksesta konkreettinen käsite, esimerkiksi matkan derivaatta kuvaa nopeutta. Kompleksifunktioiden derivoitavuudesta päästään funktion analytyisyyteen, joka on yksi kompleksimuuttujan funktioiden merkittävimmistä käsitteistä. Kuten reaalityöjen funktioissa, kompleksimuuttujan funktioiden derivaatta määritellään raja-arvon avulla.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.2)$$

Mikäli kaavan (2.2) raja-arvo on olemassa, sanotaan funktion olevan *derivoituva* pisteessä z . Kuten reaalityöjen funktioissa, myös kompleksimuuttujan funktioiden raja-arvo ei saa olla riippuvainen lähestymisreitistä. Otetaan satunnainen piste $z = x + iy$, missä funktio $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on määritelty. Lähestytään aluksi raja-arvoa positiivisen reaaliakselin suunnasta, eli $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta y = 0$. Kirjoitetaan nyt kaava (2.2) reaali- ja imaginääriosassa

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right). \quad (2.3)$$

Nähdään, että tällöin derivaatta voidaan kirjoittaa muodossa $f'(z) = u_x + iv_x$. Lähestytään seuraavaksi pistettä positiivisen imaginääriakselin suunnasta, eli $\Delta y \rightarrow 0$ ja $\Delta x = 0$. Nyt kaava (2.2) on muodossa

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right). \quad (2.4)$$

Derivaatan lause voidaan kirjoittaa muodossa $f'(z) = -iu_y + v_y$. Koska raja-arvo ei saanut olla reitistä riippuvainen, on näiden kahden tuloksen oltava samat. Täten saadaan yhtälö $f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$. Tästä tuloksesta saadaan kuuluisat *Cauchy-Riemannin yhtälöt* (CR-yhtälöt). Yllä olevalla tarkastelu osoittaa lauseen 2.7.

Lause 2.7. *Olkoot funktio $f = u + iv$ derivoituva alueessa Ω . Tällöin alueessa pätee ns. Cauchy-*

Riemannin yhtälöt, jotka ovat

$$u_x = v_y \quad \text{ja} \quad u_y = -v_x, \quad (2.5)$$

missä yhtälöiden alaindeksit vastaavat tämän osittaisderivaattaa.

CR-yhtälöt eivät kuitenkaan takaa suoraan, että funktio on derivoituva [12, s. 125]. Olkoot funktio $f = u + iv$ määritelty alueessa Ω ja $z_0 \in \Omega$. Mikäli funktion reaali- ja imaginääriosat toteuttaa CR-yhtälöt ja ne ovat derivoituvia ja jatkuvia pisteessä z_0 , on funktio f derivoituva pisteessä z_0 . [2, s. 40] Cauchy-Riemannin yhtälöillä on yhteys harmoonisiin funktioihin, mikä osoitetaan työssä luvussa 2.5.

Määritelmä 2.8. (Analyttisyys) Funktion $f(z)$ sanotaan olevan analyttinen alueessa Ω , jos funktio on derivoituva jokaisessa pisteessä $z \in \Omega$. Funktion sanotaan olevan analyttinen pisteessä z_0 , jos funktio on derivoituva jossain pisteen z_0 sisältävässä alueessa. Jos funktio on analyttinen koko kompleksitasossa, sanotaan funktion olevan *kokonainen* (engl. *entire*).

Analyttisyys on vahva käsite kompleksilukujen teoriassa. On selvää, että analyttisen funktion reaali- ja imaginääriosat toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt. Cauchy-Goursatin lause muun muassa todistaa, että suljettu reitti alueessa, jossa integroitava funktio on analyttinen, on aina nolla [1, s. 112]. Vaikka määritelmä 2.8 vaikuttaa yksinkertaiselta, on syytä tutkia tätä tarkemmin, sillä yksinkertaiselta näyttävät funktiot eivät välttämättä ole analyttisiä. Tämä todetaan seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 2.9. Klassinen esimerkki funktiosta, joka ei ole missään analyttinen, on $f(z) = \bar{z}$. Funktio on selvästi määritelty koko kompleksitasossa. Tutkitaan funktion raja-arvoa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$. Pisteen z muutos on $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Raja-arvon laskemalla saadaan tulos

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta y, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right). \quad (2.6)$$

Nähdään, ettei raja-arvo ole riippuvainen pisteestä z_0 . Nyt raja-arvon mukaan lähestytään origoa. Tämä voidaan tehdä äärettömän monella eri tavalla, mutta lähestytään nyt akseleita pitkin. Kun lähestytään x-akselia pitkin, merkitään $\Delta y = 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = 1. \quad (2.7)$$

Kun lähestytään y-akselia pitkin, merkitään $\Delta x = 0$, jolloin raja-arvo on

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} \right) = -1. \quad (2.8)$$

Nähdään, ettei raja-arvo ole sama eri reittiä lähestyttäessä. Täten funktiolla ei ole olemassa yksikäsitteistä raja-arvoa pisteessä z_0 . Koska z_0 oli satunnainen piste kompleksitasota, ei täten funktio ole derivoituva, eikä siten myöskään analyyttinen missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.5 Harmoniset funktiot

Osoitetaan vielä analyyttisen ja harmonisen funktion yhteys. Harmonisilla funktioilla on suuri merkitys muun muassa fluididynamiikassa. Harmoniset funktiot toteuttavat ns. *Laplacen yhtälön*, joka on muotoa

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x_2} = 0. \quad (2.9)$$

Tässä yhtälössä operaattorilla ∇ tarkoitetaan funktion toisen asteen gradienttia, eli osittaisderivaattaa jokaiseen sen koordinaattiin.

Lause 2.10. *Olkoot funktio $f = u(x, y) + iv(x, y)$ analyyttinen. Tällöin funktio f on harmoninen, sekä sen reaali- ja imaginäärifunktiot u ja v ovat harmonisia.*

Todistus. Analyyttinen funktio on derivoituva jokaisella sen asteella. Tämä osoitus tulee Cauchyn yleistetystä integraalilauseesta. [12, s. 247] Täten varsinkin toiselle asteelle on olemassa derivaatta. Kaavasta (2.3) saadaan funktion derivaatta muodossa $f'(z) = u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x}$. Nähdään, että toinen derivaatta saadaan vastaavasti reaali-osan suhteen derivoimalla, jolloin

$$f''(z) = \frac{\partial}{\partial x} f'(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}. \quad (2.10)$$

Samalla tavalla saadaan kaavasta (2.4) derivaatalle arvo $f'(z) = -iu_y + v_y = -i \frac{\partial f}{\partial y}$. Toisen asteen derivaatta imaginääriosan suhteen tälle tuottaa tuloksen

$$f''(z) = -i \frac{\partial}{\partial y} f'(z) = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(-i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}. \quad (2.11)$$

Nyt kaavoista (2.10) ja (2.11) huomataan, että

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0. \quad (2.12)$$

Nähdään, että funktio f on Laplacen yhtälön (2.9) muotoa, eli f on harmoninen. Näytetään vielä, että sen reaali- ja imaginäärifunktiot ovat harmonisia. Yhtälö (2.12) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}(u + iv) + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}(u + iv) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + i \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Nyt koska yhtälön (2.13) vasemman ja oikean puolen reaali- ja imaginääriosien täytyy olla yhtä suuret, saadaan että $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ja $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Täten u ja v ovat harmonisia. \square

Olkoot $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ reaalifunktioita. Jos v on harmoninen sekä u ja v toteuttavat CR-yhtälöt, sanotaan funktion v olevan funktion u *harmoninen konjugaattifunktio*. Täten analyyttisen funktion imaginääriosa on sen reaaliosan konjugaattifunktio. Näytetään vielä, että kaksi harmonista funktiota muodostaa analyyttisen funktion.

Lause 2.11. *Olkoot $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ harmonisia alueessa Ω ja funktio v on funktion u harmoninen konjugaattifunktio. Tällöin funktio $f = u + iv$ on analyyttinen alueessa Ω .*

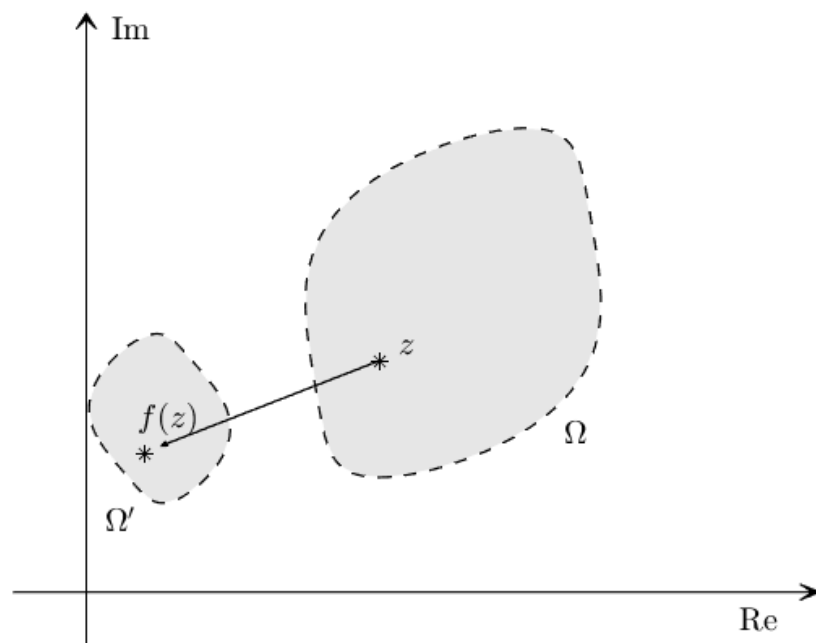
Todistus. Koska u ja v ovat harmonisia niillä on olemassa toisen asteen derivaatta alueessa Ω . Täten funktiot u_x, u_y, v_x ja v_y ovat jatkuvia. Koska u ja v toteuttavat myös CR-yhtälöt, funktio f on derivoituva [2, s. 40] ja täten lauseen 2.8 mukaan analyyttinen. \square

3 KOMPLEKSINEN KUVAAUS

Tässä luvussa selitetään kuvauksista yleisesti ja tuodaan esimerkkejä yksinkertaisista kuvauksista. Myöhemmin esitellään kuuluisa Möbius-kuvaus, sekä selitetään mitä tarkoitetaan konformisella kuvauksella. Kuvaus on yleisesti synonyymi funktiolle. Tässä työssä halutaan painottaa funktion määrittely- ja maalijoukon graafista muutosta, minkä takia työssä puhutaan kuvauksista funktioiden sijaan. Lopuksi määritellään konformikuvaus ja todistetaan harmonisen funktion harmonisuuden säilyvän, kun se kuvataan konformisesti toiseen tasoon.

3.1 Kuvauksen geometrinen tulkinta

Sanaa *kuvaus* (engl. mapping tai transformation) käytetään funktion synonyyminä. Yleensä tällöin kuitenkin halutaan painottaa graafisia muutoksia pistealueille, kun kaikki alueen pisteet kuvataan kyseisen funktion kautta. Olkoot kompleksiset luvut $z \in \Omega$ ja $w \in \Omega'$ määritetty niin, että $f : \Omega \rightarrow \Omega', f(z) = w$. Jos $f(\Omega) = \Omega'$, niin aluetta Ω' kutsutaan alueen Ω kuvaksi.

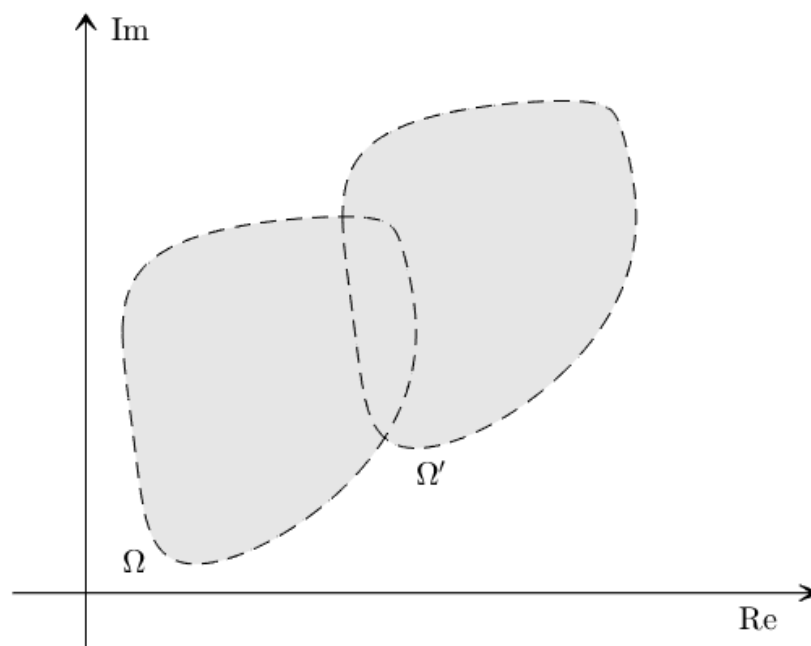


Kuva 3.1. Alueen Ω kuvaus

Yksinkertaisia kuvauksia ovat **siirto**, **laajennus** ja **inversio**. *Siirrosta* aluetta siirretään paikasta toiseen ilman, että sen muoto tai koko muuttuu. Siirto voidaan esittää kuvauksena

$$f(z) = z + a, \quad (3.1)$$

missä $z = x + yi$ on alkuperäisen alueen Ω piste ja $a = m + ni$ on kompleksiluku. Yhtälö voidaan kirjoittaa erikseen reaalisen ja imaginääriosan kanssa $f(z) = (x + m) + (y + n)i$, jolloin nähdään suoraan, että pisteeseen lisäys liikuttaa pistettä m :n verran reaaliakselin suuntaan ja n :n verran imaginääriseen suuntaan.

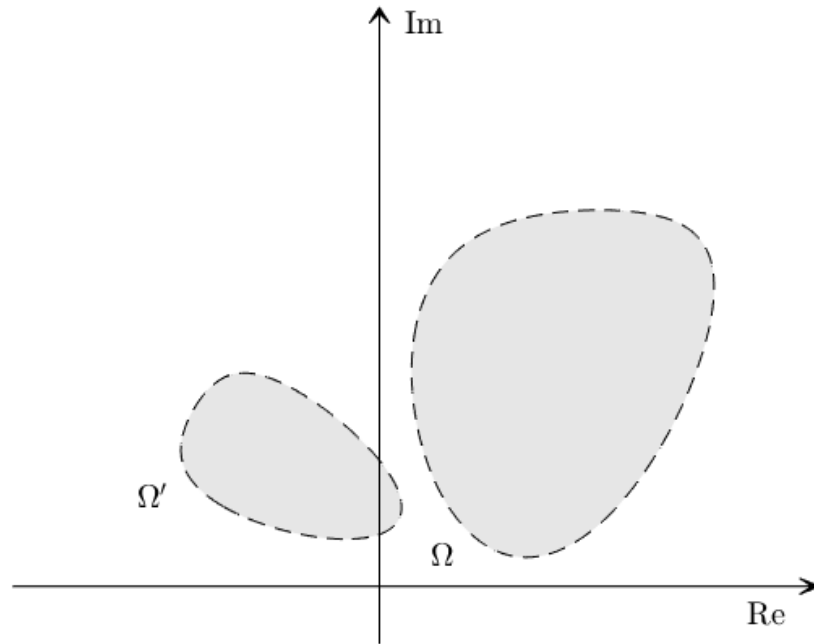


Kuva 3.2. Aluetta Ω siirretään kuvauksella $f(z) = z + 3 + 2i$

Laajennuksessa alueen pisteet kerrotaan jollain vakiolla $a \in \mathbb{C}$, eli

$$f(z) = az. \quad (3.2)$$

Tässä alkuperäiselle alueelle tapahtuu kaksi eri asiaa, skaalaus (engl. magnification) ja kierto (engl. rotation), mikä huomataan, kun yhtälö (3.2) avataan muotoon $f(z) = |a|re^{i(\alpha+\theta)}$, missä $z = re^{i\theta}$ ja $a = |a|e^{i\alpha}$. Luvun a argumentti lisätään pisteen kulmaan ja luvun z suuruus kerrotaan luvulla $|a|$.



Kuva 3.3. Aluetta Ω laajennetaan kuvauksella $f(z) = \frac{1+2i}{4}z$

Inversio on kuvaus

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \quad (3.3)$$

Inversiossa on samoja piirteitä, kuin laajennuksessa, mutta siitä seuraa mielenkiintoisia vaikutuksia nollan lähellä. Tällä kuvauksella voidaan kuvata ympyröitä ja suoria toisikseen.

Lause 3.1. *Olko $w = f(z) = \frac{1}{z}$ kuvaus. Tällöin seuraavat väitteet toteutuvat:*

1. *Suora, joka ei kulje origon kautta, kuvautuu origon kautta kulkeväksi ympyräksi.*
2. *Suora, joka kulkee origon kautta, kuvautuu origon kautta kulkeväksi suoraksi.*
3. *Ympyrä, joka ei kulje origon kautta, kuvautuu ympyräksi, mutta se ei kulje origon kautta.*
4. *Ympyrä, joka kulkee origon kautta, kuvautuu suoraksi, mutta se ei kulje origon kautta.*

Todistus. Olkoot luvut $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja kuvaus muotoa $w = f(z) = \frac{1}{z}$. Kuvauksen reaali-osa on $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ ja imaginääriosa on $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$. Nämä voidaan ratkaista x :n ja y :n suhteen, jolloin saadaan

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{ja} \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \quad (3.4)$$

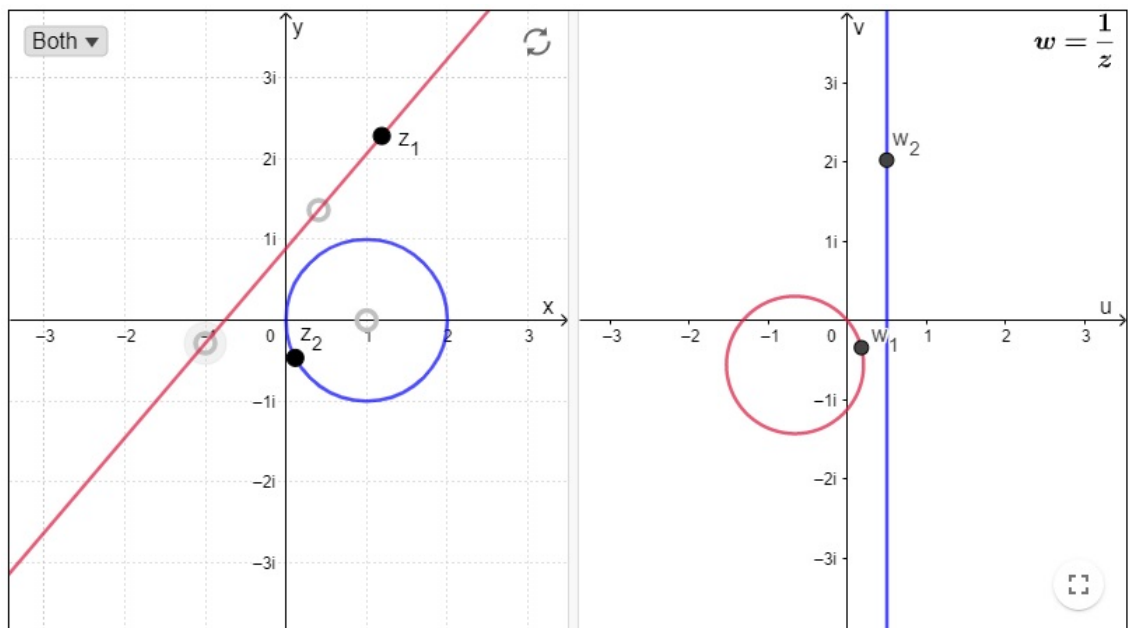
Olkoott kuvattava yhtälö muotoa

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad (3.5)$$

mikä kuvaa nyt joko ympyrää tai suoraa. Kun $a = 0$, kuvaa yhtälö suoraa ja kun $a \neq 0$, kuvaa yhtälö ympyrää. Kun muuttuja $d \neq 0$, kuvio ei kulje origon kautta. Sijoittamalla yhtälöt (3.4) yhtälöön (3.5) nähdään, että yhtälö kuvautuu kuvauksen f kautta muotoon

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0. \quad (3.6)$$

Todetaan yllä olevat väitteet näillä yhtälöillä. Kun yhtälössä (3.5) $a = 0$ ja $d \neq 0$, kuvautuu yhtälön (3.6) kuva muotoon $d(u^2 + v^2) + bu - cv = 0$. Tämä vastaa ympyrää, joka kulkee origon kautta. Kun taas $a = 0$ ja $d = 0$, on kuva muotoa $bu - cv = 0$. Tämä vastaa origon kautta kulkevaa suoraa. Kun $a \neq 0$ ja $d \neq 0$, kuva on muotoa $d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$. Tämä vastaa ympyrää, joka ei kulje origon kautta. Lopuksi kun $a \neq 0$ ja $d = 0$, kuva on muotoa $bu - cv + a = 0$. Tämä vastaa suoraa, joka ei kulje origon kautta. \square



Kuva 3.4. Heijastus-kuvauksen vaikutus suoraan ja ympyrään [4]

3.2 Möbius-kuvaus

Kappaleessa 3.1 puhutaan useasta eri peruskuvauksesta. Möbius-kuvaus on kombinaatio näistä, ja on muotoa

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.7)$$

missä a, b, c ja d ovat kompleksilukuja. Möbiuskuvauksia käytetään paljon muun muassa signaalin-

käsittelyssä analogisten filttareiden luomisessa.

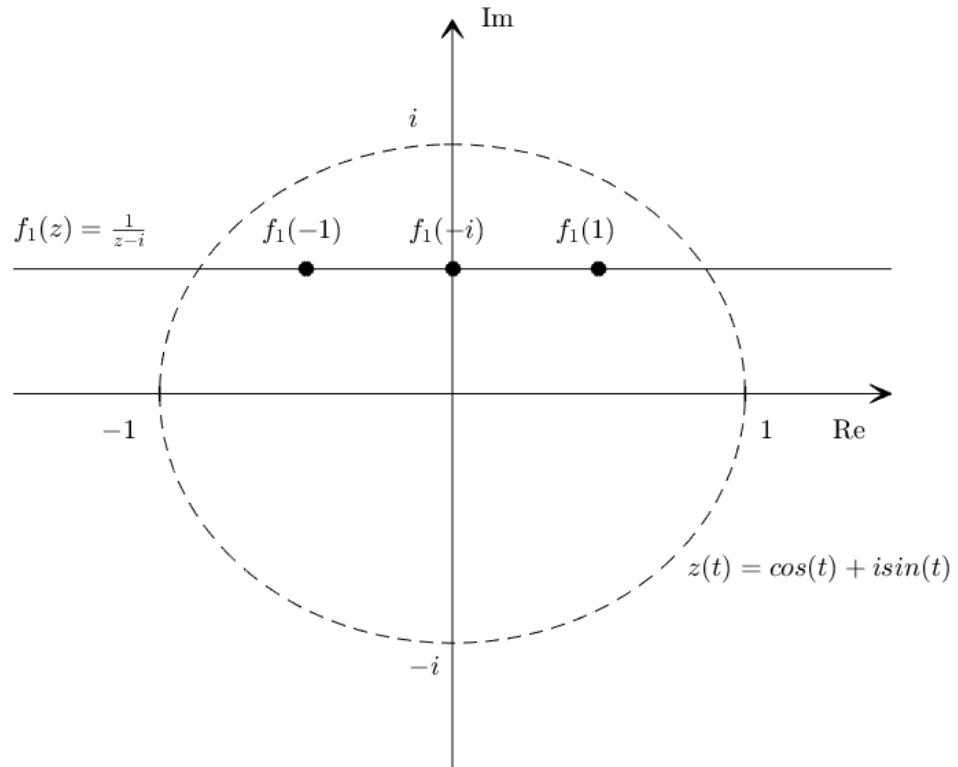
Esimerkki 3.2. Luodaan sellainen Möbius-kuvaus $f(z) = w$, missä kiekko $|z| \leq 1$ voidaan kuvata kompleksitason yläpuoliskoon, eli $\text{Im}(w) > 0$. Kuvaus voidaan tehdä luomalla useampi peruskuvaus, ja yhdistämällä nämä. Aluksi pitää kuvata ympyrä suoraksi, ja sen jälkeen siirtää suora oikeaan kohtaan. Olkoot $D(0, 1)$ yksikköympyrä ja $z \in D(0, 1) : |z| < 1$. Ympyrä parametrisoituna on $z(t) = \cos(t) + i \sin(t), t \in [-\pi, \pi]$. Jotta voidaan kuvata ympyrän kaari suoraksi, luodaan sellainen heijastus, missä jokin ympyrän kaareen pisteistä lähestyy ääretöntä. Valitaan $f_1(z) = \frac{1}{z-i}$. Osoitetaan, että kuvaus f_1 kuvaa yksikköympyrän suoralle $y = \frac{1}{2}$. Ensinnä imaginääriosa on muotoa

$$\text{Im}(f_1(z(t))) = -\frac{\sin(t) - 1}{\cos^2(t) + (\sin(t) - 1)^2} = \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

Nähdään, että funktion imaginääriosa on vakio. Reaaliosa sen sijaan on muotoa

$$\text{Re}(f_1(z(t))) = \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + (\sin(t) - 1)^2} = \frac{\cos(t)}{-2 \sin(t) + 2}. \quad (3.9)$$

Reaaliosa saa nyt arvoja $(-\infty, \infty)$ väliltä, kun $t \in [-\pi, \pi]$. On siis osoitettu, että f_1 kuvaa yksikköympyrän suoraksi $y = \frac{1}{2}$.



Kuva 3.5. Yksikköympyrän kuva funktion $f_1(z) = \frac{1}{z-i}$ suhteen

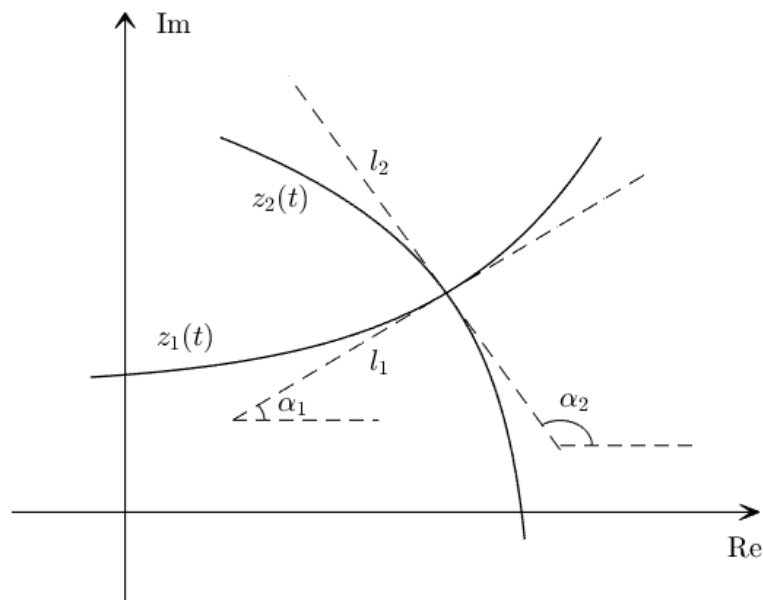
Osoitetaan vielä, että ympyrän sisäpisteet ovat kuvautuneet tämän suoran yläpuolelle, eli $\text{Im}(f(z)) > \frac{1}{2}$. Olkoot piste $z_0 = x_0 + iy_0$ yksikköympyrän sisällä, eli $|z_0| < 1$. Nyt $f_1(z_0) = \frac{1}{x_0 + i(y_0 - 1)} = \frac{x_0 - i(y_0 - 1)}{x_0^2 + (y_0 - 1)^2}$. Koska määrittelyjoukko on kiekko $|z_0| < 1$, saadaan ehto $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < 1$. Täten $x_0^2 + y_0^2 < 1$, eli $x_0^2 < 1 - y_0^2$. Kuvauksen f_1 imaginääriosana on

$$\text{Im}(f_1(z)) = \frac{1 - y_0}{x_0^2 + (y_0 - 1)^2} > \frac{1 - y_0}{1 - y_0^2 + (y_0 - 1)^2} = \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

Jotta saadaan koko yläpuoli, tulee aluetta siirtää vielä puolikkaalla alaspäin, mikä voidaan tehdä siirtokuvauksella $f_2(z) = f_1(z) - \frac{i}{2}$. Saatu kuvaus yksikköympyrästä kompleksitason yläosaan on siis $w = f(z) = f_2(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2} = \frac{-iz+1}{2z-2i}$.

3.3 Konformikuvaus

Olkoot $z_1(t)$ ja $z_2(t)$ sileitä käyriä alueessa Ω ja ne leikkaavat pisteessä $z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0) \in \Omega$. Käyrien välinen kulma pisteessä z_0 voidaan määrittää niiden tangenttikäyrien välisestä kulmasta kuvan 3.6 mukaan. Kuvataan käyrät kuvauksen $w = f(z)$ kautta. Koska käyrät leikkaavat pisteessä z_0 , leikkaavat käyrien kuvat pisteessä $w_0 = f(z_0)$. Kuvauksen sanotaan olevan *konforminen*, jos käyrien kuvien kulma on sama, kuin alkuperäisessä kuvassa, eli $\arg(z_1'(t_0)) - \arg(z_2'(t_0)) = \arg(w_1'(t_0)) - \arg(w_2'(t_0))$.



Kuva 3.6. Kahden sileän käyrän leikkaus

Konformikuvauksille on johdettu ns. Riemannin kuvauslause. Tämä lause sanoo, että jokaiselle yksinkertaiselle yhdistetylle alueelle, mikä ei ole koko kompleksitaso, on olemassa uniikki konforminen kuvaus yksikköympyräksi. Lause todistetaan muun muassa kirjassa [11].

Lause 3.3. *Olkoot kuvaus $w = f(z)$ analyyttinen alueessa Ω . Mikäli derivaatta $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$, on kuvaus konforminen.*

Todistus. Olkoot $\zeta_1 : z_1(t)$ ja $\zeta_2 : z_2(t)$ sileitä käyriä, kun $t \in [a, b]$. Oletetaan käyrien leikkaavan pisteessä z_0 , eli $z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$. Olkoot l_1 kuvan 3.6 mukaisen käyrän ζ_1 tangenttisuora pisteessä z_0 . Koska ζ_1 oletettiin sileäksi, $z_1'(t_0)$ on nollasta eroava ja täten käyrän l_1 ja positiivisen reaaliakselin välinen kulma α_1 on olemassa ja yksikäsitteinen. Sama voidaan todeta α_2 :lle.

Käyrien välinen kulma saadaan niiden tangenttien välisestä kulmasta pisteessä z_0 , mikä on nyt muotoa $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$. Tutkitaan seuraavaksi, mikä on käyrän $w = f(z(t))$ tangentin ja positiivisen reaaliakselin välistä kulmaa pisteessä z_0 . Koska funktio f on riippuvainen pisteestä z ja z on riippuvainen muuttujasta t , voidaan käyttää Leibnizin notaatiota ja kirjoittaa derivaatta muodossa

$$w'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z_0)z'(t_0), \quad (3.11)$$

mitä kutsutaan yleisesti *derivaatan ketjusäännöksi* [1, s. 98]. Koska $f'(z_0) \neq 0$, niin kuvan tangentti on nollasta eroava. Täten sileiden käyrien kuva on myös sileä ja niille voidaan määrittää yksikäsitteinen kulma tangentin ja positiivisen reaaliakselin välille. Huomataan myös, että $w'(t_0)$ koostuu kahden kompleksiluvun tulosta. Täten voidaan lauseesta 2.1 johtaa kuvan kulmalle kaava

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0). \quad (3.12)$$

Hyödyntäen tätä tulosta saadaan kuvien $w_1'(t_0)$ ja $w_2'(t_0)$ väliseksi kulmaksi.

$$\arg w_1'(t_0) - \arg w_2'(t_0) = (\arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0)) - (\arg f'(z_0) + \arg z_2'(t_0)) = \alpha. \quad (3.13)$$

Kulma on sama alkuperäisten käyrien kanssa ja täten väite on todistettu. □

Kulmien säilyminen on tärkeä ominaisuus esimerkiksi fysiikassa. Artikkelissa [6] esitellään, miten konformikuvausta hyödynnetään eri fysiikan alueissa. Näytetään seuraavaksi, että aikaisempi Möbius-kuvaus on myös konforminen.

Lause 3.4. *Tarkastellaan Möbius-kuvausta $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Kuvaus on konforminen, mikäli $ad - bc \neq 0$, eli toisin sanoen f ei ole vakiofunktio.*

Todistus. Hyödynnetään todistuksessa lauseen 3.3 tulosta. Kun $c = 0$ jolloin välttämättä $d \neq 0$. Tällöin yhtälön derivaatta on $f'(z) = \frac{a}{d}$. Kun $a \neq 0$, on kuvaus konforminen ja siten $ad \neq 0$. Kun $c \neq 0$, yhtälön $f(z)$ derivaatta on

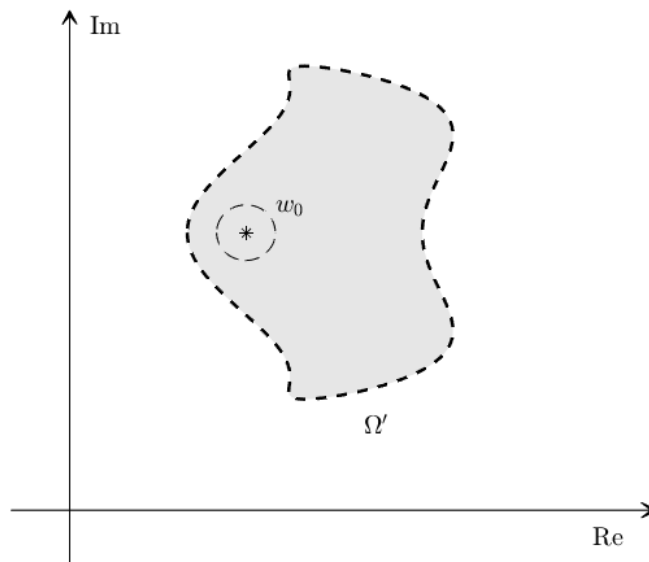
$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{a}{d+cz} - \frac{c(b+az)}{(d+cz)^2} = \frac{ad-bc}{(d+cz)^2}. \quad (3.14)$$

Yhtälö voi olla nolla ainoastaan, kun sen nimittäjä on nolla, eli lauseen 3.3 ehdon mukaan kuvaus on konforminen, kun $ad - bc \neq 0$. \square

Möbiuskuvausten konformisuus on hyödyllinen ominaisuus, sillä möbiuskuvausten luominen on suhteellisen helppoa. Osoitetaan vielä harmonisten funktioiden ja konformisten kuvausten yhteys.

Lause 3.5. *Olkoot $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ konforminen kuvaus alueesta Ω alueeseen Ω' ja $\phi(u, v)$ harmoninen funktio alueessa Ω' . Tällöin funktio $\phi \circ f(z) = \phi(u(x, y), v(x, y))$ on harmoninen alueessa Ω .*

Todistus. Olkoot $z_0 \in \Omega$, jolloin $f(z_0) = w_0 \in \Omega'$. Muodostetaan pisteen w_0 ympärille ympyrä $D(w_0, \varepsilon)$ tarpeeksi pienellä ε :lla niin, että koko ympyrä on alueessa kuvan 3.7 mukaan.



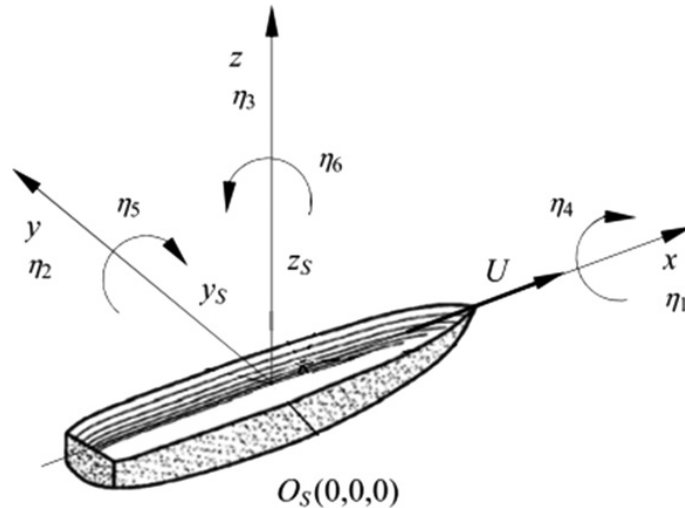
Kuva 3.7. *Koska Ω' on avoin, voidaan pisteen w_0 ympärille muodostaa ympyrä, mikä on kokonaan alueessa*

Funktiolle ϕ löytyy harmoninen konjugaattifunktio θ [10] ja täten funktio $\phi + i\theta$ on analyyttinen ympyrässä lauseen 2.11 mukaan. Koska $f(z_0) \in D(w_0, \varepsilon)$, niin funktoiden yhdistelmä $(\phi + i\theta) \circ f(z_0) = (\phi + i\theta)(f(z_0))$ on analyyttinen pisteessä z_0 . Täten funktion reaali- ja imaginääriosien funktiot toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälö ja ovat molemmat harmonisia funktioita. Funktion reaaliosa on $\text{Re}[(\phi + i\theta) \circ f] = \text{Re}[\phi \circ f + i(\theta \circ f)] = \phi \circ f$, mikä on täten harmoninen pisteessä z_0 . \square

4 SEAKEEPING ESIMERKKI KONFORMIKUVAUKSELLE

Laivoja suunniteltaessa niille tehdään niin sanottua *seakeeping*-analyysiä, millä pyritään selvittämään laivan käyttäytymistä erilaisissa olosuhteissa. Esimerkiksi on mielekästä tutkia kuinka vakaasti laiva käyttäytyy on erilaisissa aallokoissa. Tässä luvussa kerrotaan lyhyesti esimerkki, miten konformikuvausta hyödynnetään näissä laskuissa. Tästä prosessista voi lukea lisää lähteistä [9] ja [3].

Laivalla on kuvan 4.1 mukaan 6 vapausastetta, minkä mukaan se voi liikkua vesistössä.



Kuva 4.1. Seakeepingin koordinaattisysteemi [8]

Näille vapausasteille voidaan johtaa liikeyhtälö, joka on muotoa

$$\sum_{j=1}^6 \left[(M_{kj} + A_{kj})\ddot{x}_j + B_{kj}\dot{x}_j + C_{kj}x_j \right] = X_k, \quad (4.1)$$

missä M_{kj} vastaa oikean massan tai hitauden kerroinmatriisia, A_{kj} vastaa lisätyn massan kerroinmatriisia, B_{kj} vaimennuskertoimien matriisia, C_{kj} jousikertoimien matriisia, x_j vastaa liikettä ja X_k poistuvan aallon momenttimatriisia. Alaindeksi kj kuvaa jostain liikkeestä johtuvaa liikettä samalla indeksillä, kuin kuvan 4.1 muuttujien η_j . Tätä luetaan, että "k:n suuntainen liike, mikä aiheutuu j:n suuntaisesta liikkeestä". Jos $j = k$, puhutaan puhtaasti sen suuntaisesta liikkeestä. Työssä ollan kiinnostuneita löytämään massa- ja vaimennuskertoimet laivan ylös-alas-suuntaiselle liikkeelle *hiiville*, eli kertoimet a_{33} ja b_{33} . Näille kertoimille löytyy empiirisiä approksimaatioita, mutta työssä esitetään tapa johtaa ne hyödyntäen konformikuvausta.

Vuonna 1949 F. Ursell osoitti miten lasketaan fluidista johtuva lisätty massa äärettömän pitkälle ja oskilloivalle sylinterille [14]. Työssään hän osoitti määrittelyalueessaan fluidin nopeusfunktion Φ ja virtausfunktion Ψ olevan harmonisia. Kun profiili kuvataan konformisesti yksikköympyrään, lauseen 3.5 mukaan tällöin funktioiden Φ ja Ψ harmonisuus säilyy laivan profiilin alueeseen. Täten Ursellin metodologia voidaan käyttää laivan profiilin tilanteessa. Yleisesti kuvausfunktio yksikköympyrään on muotoa

$$z = F \sum_{n=0}^N a_{2n-1} \xi^{-(2n-1)}, \quad (4.2)$$

missä F on skaalauskerroin, N on valittavien parametrien määrä, $\xi = ie^\beta e^{-i\theta}$ kuvaa yksikköympyrää ja vakiot a_n ovat kuvauskertoimia. Tämä kuvaus voidaan numeerisesti määrittää niin sanotun *Close-Fit* -kuvauksen kautta. Tässä iteratiivisessa algoritmossa aluksi määritellään kulma jokaiseen profiilin poikkileikkauksen pisteeseen. Näitä kulmia hyödyntämällä voidaan määrittää arvot F ja a_{2n-1} pienimmän neliösumman menetelmällä. Tätä jatketaan, kunnes saatu virhe on tarpeeksi pieni. [13]

5 YHTEENVETO

Tässä työssä käsiteltiin konformikuvauksen perusteita, tähän vaadittavia kompleksilukujen teorioita sekä harmonisen funktion ja konformikuvauksen yhteys. Konformisilla kuvauksilla on monta hyödyllistä ominaisuutta. Koska tässä kuvauksessa kulmat säilyvät, voidaan monesti konformikuvauksilla viedä ongelmatilanne yksinkertaisempaan geometriaan ja ratkaista ongelma siellä. Konformiset kuvaukset ovat analyyttisiä, joten voidaan kaikille konformikuvauksille hyödyntää analyyttisten funktioiden ominaisuuksia. Myös analyyttisyyden takia voidaan johtaa konformikuvauksille ja harmonisille funktioille yhteys. Tällä yhteydellä voidaan ratkaista harmonisten funktioiden ongelmia helpommin.

Työssä esiteltiin myös peruskuvaukset ja miten niitä hyödyntämällä voidaan tehdä Möbius-kuvauksia. Monia muita kuvauksia on määritelty valmiiksi, esimerkiksi toinen potentiaaliteoriassa hyödynnetty kuvaus on *Schwarz-Christofel* -kuvaus. Tässä kompleksitason yläpuoli voidaan kuvata miksikä tahansa monikulmioksi. Tästä voi lukea lisää esimerkiksi kirjasta [2]. Tällaiset kuvaukset ovat myös hyödyllisiä, sillä ne on jo valmiiksi määritelty. Täten niille voidaan johtaa ehto konformiuteen, jonka täytyessä niitä voidaan käyttää konformisina kuvauksia.

Yksi konformikuvauksen tärkeimmistä lauseista on Riemannin kuvalause. Tässä työssä tätä ei käsitelty, sillä sen todistaminen on monivaiheinen ja vaativa. Tämä lause sanoo, että kaikille alueille, jotka eivät ole koko kompleksitaso, on olemassa uniikki konforminen kuvaus yksikköympyräksi. Yksikköympyrän geometria vastaa kaksiulotteista sylinteriä ja tämän hyöty nähtiin muun muassa luvun 4 esimerkissä. [11]

LÄHTEET

- [1] M. J. Ablowitz. *Complex variables introduction and applications*. eng. 2nd ed. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge, U.K. ; Cambridge University Press. ISBN: 1-107-12685-1.
- [2] R. P. Agarwal. *An Introduction to Complex Analysis*. eng. 1. New York, NY: Springer US. ISBN: 1-4614-0195-X.
- [3] R. Bishop, W. Price ja P. Tam. Hydrodynamic coefficients of some heaving cylinders of arbitrary shape. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13 (tammikuu 1978), 17–33. DOI: 10.1002/nme.1620130103.
- [4] J. C. P. Campuzano. COMPLEX ANALYSIS - A Visual and Interactive Introduction (2019). URL: <https://complex-analysis.com/>.
- [5] E. Freitag. *Complex Analysis*. eng. 1st ed. 2005. Universitext. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 3-540-30823-7.
- [6] S. Ganguli. Conformal Mapping and its Applications. *Department of Physics, University of Tennessee, Knoxville, TN37996* (2008), 1–4.
- [7] P. Hartman. Systems of Total Differential Equations and Liouville’s Theorem on Conformal Mappings. *American Journal of Mathematics* 69.2 (1947), 327–332. ISSN: 00029327, 10806377. URL: <http://www.jstor.org/stable/2371855>.
- [8] *Implementation of Linear Potential-Flow Theory in the 6DOF Coupled Simulation of Ship Collision and Grounding Accidents*. URL: https://www.researchgate.net/figure/The-seakeeping-coordinate-system_fig1_304012394.
- [9] J. Journée. Theoretical manual of SEAWAY. *Delft University of Technology Shiphydrodynamics Laboratory, (Release 4.19, 12-02-2001)*, <http://www.shipmotions.nl/DUT/PapersReports/1370-StripTheory-03.pdf> (2001).
- [10] J. R. Muir. *Complex analysis : a modern first course in function theory*. eng. Hoboken, New Jersey: Wiley. ISBN: 1-118-70527-0.
- [11] S. Ponnusamy ja H. Silverman. Conformal Mapping and the Riemann Mapping Theorem. eng. *Complex Variables with Applications*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2006, 379–410. ISBN: 9780817644574.
- [12] S. Ponnusamy. *Complex Variables with Applications*. eng. 1st ed. 2006. Boston, MA: Birkhäuser Boston. ISBN: 0-8176-4513-6.
- [13] M. Salehi, P. Ghadimi ja A. Rostami. A more robust multiparameter conformal mapping method for geometry generation of any arbitrary ship section. eng. *Journal of Engineering Mathematics* 89.1 (2014), 113–136. ISSN: 0022-0833.
- [14] F. Ursell. On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 2.2 (tammikuu 1949), 218–231. ISSN: 0033-5614. DOI: 10.1093/qjmam/2.2.218. eprint: <https://academic>.

oup.com/qjman/article-pdf/2/2/218/5212157/2-2-218.pdf. URL: <https://doi.org/10.1093/qjman/2.2.218>.