

Santtu Stranius

# ERÄIDEN PALKKIMALLIEN STAATTISTEN OMINAISUUKSIEN VERTAILUA

Kandidaatintyö  
Rakennetun ympäristön tiedekunta  
Reijo Kouhia  
Toukokuu 2020

# TIIVISTELMÄ

Santtu Stranius: Eräiden palkkimallien staattisten ominaisuuksien vertailua (Comparison of static response of various beam models.)

Kandidaatintyö

Tampereen yliopisto

Rakennustekniikan kandidaatin tutkinto-ohjelma

Toukokuu 2020

---

Palkkimalleilla on suuri merkitys teknisessä suunnittelussa ja rakenteiden analysoinnissa. Palkin käyttäytymistä kuvaavia malleja on useita, jotka eroavat toisistaan niiden perusotaksumien puolesta. Tässä työssä keskitytään kolmen mallin staattisten ominaisuuksien vertailuun. Klassinen Eulerin–Bernoullin palkkimalli jättää palkissa vaikuttavan leikkausjännityksen huomioimatta, joka aiheuttaa virhettä lyhyillä ja korkeilla palkeilla. Timoshenkon palkkimalli pyrkii vastaamaan näihin puutteisiin ottamalla poikittaiset leikkausmuodonmuutokset likimääräisesti huomioon. Malli olettaa vakio liukumaa koko poikkileikkauksessa, joka todellisuudessa on suurimmillaan palkin neutraaliakselilla ja häviää palkin ylä- ja alapinnalla. Lisäksi se olettaa poikittaisen leikkausjännityksen vakiotilan suhteessa korkeuskoordinaattiin, joka synnyttää mallissa virhettä, jota kompensoidaan korjauskertoimella. Työssä tutkitaan Timoshenkon mallin epäkohtien korjaamiseksi kehitettyä Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallia. Mallissa siirtymäkenttä mukauttaa poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen kvadraattisen jakauman, jolloin korjauskorjainta ei tarvitse käyttää.

Työn tarkoituksen on selvittää oleelliset erot mallien välillä ja tutkia niiden tarkkuutta sekä soveltuvuutta eri käyttökohteissa. Tarkastelu perustuu staattisesti määrättyyn esimerkkitehtävään, jonka tuloksia vertaillaan keskenään. Kiinnostuksen kohteena on myös selvittää, kuinka työlästä Levinsonin–Bickfordin–Reddyn kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälö on muodostaa verrattuna Timoshenkon ja Eulerin–Bernoullin mallien neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin.

Esimerkkitehtävän tilanteessa Eulerin–Bernoullin mallin kinemaattisten rajoitteiden johdosta palkin siirtymätila häviää, kun jakaantunut momenttikuormitus on vakio. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn ja Timoshenkon mallien salliessa leikkausmuodonmuutokset, palkilla siirtymätila koostuu kiertymästä, joka on vakio koko palkin pituuden suhteen ja siihen syntyy lisäys liukumasta, joka on niin ikään vakio koko palkin pituuden. Korkeamman kertaluvun malleissa luovutaan tasomaisuus olettamuksesta, jolloin voimaresultantit laajentuvat vastaamaan käyrästynyttä siirtymäkenttää, jolloin kiertymän tuloksesta saadaan tarkempi ratkaisu. Palkkimalleissa yhteisesti taivutusmomentti häviää palkin pituudelta ja ainoana sisäisenä rasituksena palkille syntyy vakio leikkausvoima.

Työssä saatujen mallien tuloksien erot ovat staattisesti määrätyn mitoitustehtävän kannalta mitättömiä. Näyttäisi siltä, ettei Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallilla kannata korvata Timoshenkon mallia staattisten tilanteiden suunnittelun työkaluna. Korkeamman kertaluvun palkkimalleja käytetään täten harvoin, koska näiden saavuttama tarkkuus, joka vaatii paljon vaivaa tasapainoyhtälöiden ratkaisemiseksi, on melko pieni. Korkeamman kertaluvun malleissa geometria rajoittuu suorakaiteen muotoisiin poikkileikkauksiin, joka tuo puutteita käytännön hyödyntämistä ajatellen.

Avainsanat: Palkkimalli, Eulerin–Bernoulli, Timoshenko, Bickford, taivutusteoria.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck –ohjelmalla.

# SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO .....	1
2. PALKKIMALLIT .....	3
2.1 Eulerin–Bernoullin palkkimalli .....	4
2.2 Timoshenkon palkkimalli .....	7
2.3 Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimalli .....	11
3. PALKKIMALLIEN VERTAILUA .....	18
3.1 Eulerin–Bernoullin palkkimalli .....	19
3.2 Timoshenkon palkkimalli .....	20
3.3 Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimalli .....	21
3.4 Palkkimallien antamat tulokset .....	23
4. YHTEENVETO .....	26
LÄHTEET .....	28

# LYHENTEET JA MERKINNÄT

$A$	Palkin poikkileikkauksen pinta-ala
$b$	Palkin leveys
$C$	Integrointivakio
$E$	Materiaalin kimmokerroin
$G$	Materiaalin liukukerroin
$h$	Palkin korkeus
$I$	Palkin jäyhyysmomentti / neliömomentti
$L$	Palkin pituus
$M$	Taivutusmomentti
$M_1$	Yleistetty taivutusmomentti
$M_3$	Korkeamman kertaluvun taivutusmomentti
$m$	Jakaantunut momenttikuormitus
$q$	Jatkuva kuormitus
$t$	Aika
$u$	x-suuntainen siirtymä
$V$	Leikkausvoima
$w$	z-suuntainen siirtymä, taipuma
$x, y, z$	Koordinaatisto
$\gamma_{xz}$	Liukuma xz-tasossa
$\gamma_{xy}$	Liukuma xy-tasossa
$\delta$	Variaatio-operaattori
$\epsilon_x$	x-suuntainen venymä
$\epsilon_z$	z-suuntainen venymä
$\kappa$	Leikkausjännityksen korjauskerroin
$\xi$	Käyrästysfunktio
$\rho$	Tiheys
$\sigma_x$	x-suuntainen normaalijännitys
$\sigma_z$	z-suuntainen venymä
$\tau_{xz}$	Leikkausjännitys, xz-tasossa
$\tau_{xy}$	Leikkausjännitys, xy-tasossa
$\tau_{tod}$	Todellinen leikkausjännitys
$\phi$	Poikkileikkauksen kiertymä neutraaliakselilla
$\varphi$	Käyrästymäfunktio

# 1. JOHDANTO

Rakennusteollisuudessa palkkeja käytetään lähes kaikkialla rakenneosina, joita mallinetaan rakenteiden suunnittelussa ja niiden analysoinnissa. Yhtenä keskeisimpänä tarkastelun kohteena palkkeja tutkiessa on selvittää palkin taivutus- ja leikkauskestävyys. Klassinen palkkiteoria eli Eulerin–Bernoullin palkkimalli on kaikista tutuin sekä ensimmäinen rakenteiden käyttäytymistä kuvaava malli. Malli jättää palkissa vaikuttavan leikkausvoiman aiheuttamat muodonmuutokset huomioimatta. Täten palkin poikkileikkaus pysyy Eulerin–Bernoullin palkkimallissa taivutuksessa tasona eikä se veny. Yksinkertaisuuden takia mallista on kehitelty useita uusia malleja, jotka poistavat Eulerin–Bernoullin rajoitteet sallien poikkittaisia leikkausmuodonmuutoksia palkissa.

Yleisin poikkittaisen leikkausmuodonmuutoksen salliva palkkimalli on Timoshenkon palkkimalli, jossa sallitaan pyöriminen poikkileikkauksen ja taivutuslinjan välillä sekä se olettaa poikkittaisleikkausjännitykset vakioiksi suhteessa paksuuskoordinaattiin. Kyseinen oletus ei ole aivan tarkka ja näin ollen Timoshenkon palkkimalli vaatii leikkauskorjauskertoimen virheen tasoittamiseksi. Tästä edelleen on kehitelty palkkimalleja, joista tässä työssä käsitellään vain Bickfordin palkkimallia. Bickfordin palkkimallissa poikkileikkaustasojen sallitaan käyristyvän ja se täyttää näin normaaleissa kuormitustapauksissa leikkausjännityksen reunaehdot palkin ylä- ja alapinnassa. Eulerin–Bernoullin sekä Timoshenkon palkkimallit johtavat neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöön palkin taipuman suhteen. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn malli tuottaa taipumalle kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälön (Wang et al. 2000, luku 2). Eulerin–Bernoullin ja Timoshenkon palkkimalleissa voidaan antaa kaksi reunaehto, kun taas Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallissa voidaan antaa kolme reunaehto.

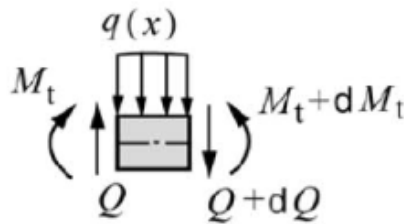
Tässä työssä tarkoituksena on vertailla eri palkkimalleja keskenään niiden perusoletuksien pohjalta sekä tutkia niiden tarkkuutta sekä soveltuvuutta eri käyttökohteissa. Tarkastelu perustuu staattisen esimerkkitehtävän ratkaisusta saatuihin tuloksiin, joita vertaillaan kirjallisuudesta löytyviin tietoihin. Palkkimalleja verrattaessa kiinnostuksen kohteena on myös selvittää, kuinka työlästä Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallin avulla on saada tuloksia verrattuna Eulerin–Bernoullin ja Timoshenkon malleihin. Työssä keskitytään vain palkin staattiseen tilanteeseen.

Työn sisältö koostuu seuraavista pääpiirteistä. Toisessa luvussa on esitelty eri palkkimallit johtamalla niille tasapainoyhtälöt sekä taustaoletukset. Kolmannessa luvussa esitellään mallien antamat ratkaisut valittuun esimerkkitehtävään. Samassa luvussa vertailaan mallien antamia tuloksia kirjallisuudesta löytyviin tuloksiin. Kolmannessa luvussa selvennetään myös, mitä mieltä kirjallisuudessa ollaan eri malleista, millaisissa tilanteissa niiden käyttäminen on asianmukaista sekä koostetaan mallien hyvät ja huonot puolet. Lopuksi tutkitaan, millaisia yhteyksiä palkkimallien välille voidaan muodostaa niiden ollessa eri kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

## 2. PALKKIMALLIT

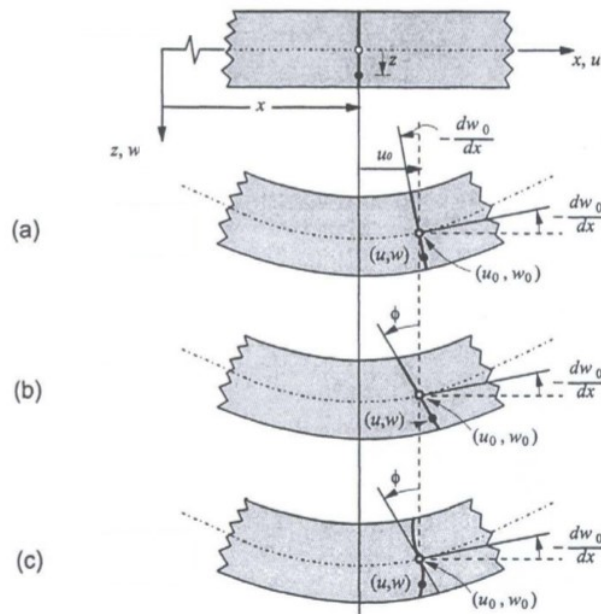
Palkkien mallintamisessa ja suunnittelussa käytetään kolmiulotteisia malleja. Edes kolmiulotteinen kimmoteoria ei ole täydellinen. Tämä näkyy siinä, että rakenteiden lujuusominaisuuksia tutkittaessa ratkaisu ongelmaan on vaikeasti tai mahdotonta ratkaista. Jotta palkkimaisia tehtäviä voitaisiin ratkaista kohtuullisella työmäärällä, on niiden ulottuvuutta pienennettävä. Palkkimallit ovat jatkuvan aineen kimmoteorian kolmiulotteisen mallin yksinkertaistuksia yhteen ulottuvuuteen (Lampinen 2014, s. 3). Yksinkertaistettujen mallien avulla palkkia kuvataan tavoilla, joissa otetaan oleelliset ominaisuudet riittäväällä tarkkuudella huomioon. Tällöin tutkittava ongelma on ratkaistavissa kohtuullisella työmäärällä ja sopivalla tarkkuudella.

Palkin rakenteessa sen yksi ulottuvuus on muita selvästi suurempi. Se kannattelee pääosin yläpuolelta tulevia kuormia, jotka ovat pituussuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Ensimmäisjaisesti palkki kestää sen akselin sivusuunnasta kohdistuvia kuormia, jolloin se pystyy kantamaan taivutusrasituksia. Palkki kestää myös hyvin veto- ja puristusrasituksia. Kuvassa 1 on esitetty tällaisen tilanteen rasittaman palkin osa, jossa  $q(x)$  kuvaa jatkuvaa kuormitusta,  $M$  positiivisia momenteja ja  $Q$  leikkausvoimia. Tässä työssä poikileikkaus on suorakaiteen muotoiseksi, jonka korkeus on  $h$  ja leveys  $b$ . Palkin materiaaliominaisuuksia ei oteta huomioon, jolloin kimmokerroin  $E$ , liukumoduuli  $G$  ja tiheys  $\rho$  ovat vakioita.



**Kuva 1.** Palkin differentiaalelementti (Salmi & Pajunen 2009, s.168)

Yleisessä tasomaisessa palkkimallissa kaikki vaikuttavat kuormat sekä palkin geometriat ovat sellaisia, että siirtymät ( $u$ ,  $w$ ) ovat  $x$ - ja  $z$ -koordinaattien funktiota (Wang et al. 2000, s. 11). Kuvassa 2 on esitetty kyseiset koordinaatit sekä siirtymät:  $u$  on pisteen siirtymä  $x$ -akselin suunnassa, ja  $w$  on palkin keskiviivan siirtymä  $z$ -akselin suhteen. Kuvassa a-kohta kuvaa Eulerin–Bernoullin, b-kohta Timoshenkon ja c-kohta Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin mukaisia siirtymiä keskiviivan suhteen. Kuvassa ensimmäisenä on palkki, jota ei ole vielä kuormitettu.



**Kuva 2.** Koordinaatit ja siirtymät eri palkkimalleissa (Wang et al. 2000, s. 12)

Seuraavissa palkkimalleissa käytetään yleisiä lähtöoletuksia, joita ovat seuraavat: materiaali on isotrooppista ja lineaarisesti kimmoisaa. Yksinkertaistuksen vuoksi oletetaan pienet siirtymät ja taipumat, ja että poikkileikkaus säilyttää muotonsa, jolloin Poissonin vakio voidaan jättää huomioimatta. Leikkausmuodonmuutosten oletetaan vaikuttavan vain  $xz$ -tasossa kuvan 2 mukaisesti.

## 2.1 Eulerin–Bernoullin palkkimalli

Palkkimallien yleisten lähtöoletuksien lisäksi Eulerin–Bernoullin palkkimallissa poikkileikkaus säilyy taivutuksessa tasona, joka on kohtisuorassa palkin pituussäkeitä vastaan (Salmi & Pajunen 2009, s. 171). Kyseistä olettamusta kutsutaan Bernoullin hypoteesiksi. Hypoteesi olettaa myös aksiaalisen venymän jakautuvan lineaarisesti poikkileikkauksen korkeuden suunnassa. Tämä ei kuitenkaan pidä täysin paikkaansa, sillä puhtaassakin taivutuksessa muodostuu poikittaiskutistumista, joka aiheuttaa venymiä poikkileikkauksessa (Salmi & Pajunen 2009, s. 171). Vaikutus palkissa on kuitenkin niin pieni, että se voidaan jättää huomioimatta. Koska oletetaan pienet siirtymät, voidaan palkin poikkileikkauksen kiertymä approksimoida muodossa  $\sin(w') \approx w'$  kuvan 2 mukaisesti, kun  $w' \ll 1$ . Palkin siirtymäkentät voidaan kirjoittaa tällöin muotoon

$$\begin{aligned} u(x, z) &= -zw'(x), \\ w(x, z) &= w(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$



jossa  $z$  on koordinaatti palkin korkeus suunnassa,  $u$  on  $x$ -suuntainen aksiaalinen siirtymä ja  $w$  on  $z$ -suuntainen taipuman siirtymä. Jatkossa käytetään merkintöjä  $w(x) = w$ ,  $q(x) = q$  ja  $m(x) = m$  yksinkertaistuksen vuoksi. Eulerin–Bernoullin mallin mukaiset muodonmuutoskomponentit, venymä ja liukuma, voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -zW'', \\ \gamma &= \gamma_z = u' + w' = 0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

missä  $\varepsilon_x$  on  $x$ -suuntainen venymä ja  $\gamma_z$  liukuma  $xz$ -tasossa. Palkin tasapainoehtoja ratkaistaessa on käytettävä virtuaalisen työn periaatetta. Periaatteen mukaan palkille annettaessa mielivaltainen virtuaalinen siirtymä  $\delta w$ , jossa  $\delta$  on variaatio-operaattori, on tehdyn virtuaalisen kokonaistyön summan hävittävä (Lampinen 2014, s. 5). Tällöin oletetaan palkin olevan tasapainossa ja yhtälöksi saadaan

$$\delta W = \delta W_{sis} + \delta W_{ulk} = 0\tag{2.3}$$

Yhtälössä  $\delta W_{sis}$  on palkilla vaikuttavien sisäisten voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ ja  $\delta W_{ulk}$  on palkilla vaikuttavien ulkoisten voimien, pystysuoran jakautuneen kuorman  $q$  ja jakaantuneen momenttikuormituksen  $m$ , yhteensä tekemä virtuaalinen työ. Staattisten tilanteiden tarkastelun kannalta työ, jonka inertiaivoimat tekevät kulkiessaan virtuaalisen siirtymän  $\delta w$ , jätetään huomioimatta. Sisäisten voimien ja ulkoisten voimien tekemälle virtuaaliselle työlle voidaan kirjoittaa kaavat

$$\begin{aligned}\delta W_{sis} &= - \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \text{ ja} \\ \delta W_{ulk} &= \int_0^L q \delta w dx + \int_0^L m \delta w' dx,\end{aligned}\tag{2.4}$$

missä  $\sigma_x$  on  $x$ -suuntainen normaalijännitys ja  $m$  jakaantunut momenttikuormitus. Sijoittamalla virtuaalisen työn kaavaan kaavat (2.4) saadaan virtuaalisen työn tasapainoyhtälöksi

$$\int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L m \delta w' dx = 0.\tag{2.5}$$

Yhtälöä voidaan sieventää sijoittamalla normaalijännitys lineaarisesti kimmoisan kappaaleen mallista sekä virtuaalinen venymä käyttämällä variaatio-operaattoria kaavan (2.2) yhtälössä. Lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen ainemallin mukaan normaalijännitys on muotoa

$$\sigma_x = E \varepsilon_x,$$

missä  $E$  on materiaalin kimmokerroin, ja venymän variaatioksi saadaan

$$\delta \varepsilon_x = -z \cdot \delta w''.$$

Sijoitetaan yllä olevat yhteydet ja poikkileikkauksen korkeuden  $h$  sekä palkin leveyden  $b$  ollessa vakioita saadaan yhtälö (2.5) muotoon

$$\int_0^L \int_A E z^2 dA w'' \delta w'' dA dx - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L m \delta w' dx = 0 \quad (2.6)$$

Integroidaan yhtälöä (2.6) palkin korkeuden yli sekä merkitään integroinnin jälkeen jäyhyysmomentti  $I = bh^3/12$ , saadaan yhtälö muotoon

$$EI \int_0^L w'' \delta w'' dx - \int_0^L q \delta w dx - \int_0^L m \delta w' dx = 0. \quad (2.7)$$

Integroidaan ensimmäinen termi osittain, jotta variaatio-operaattorin derivaatat saadaan pois integraalin sisältä (Lampinen 2014, s. 6). Tällöin virtuaalisen työn yhtälö saadaan muotoon

$$[-EIw'' \delta w' - (EIw''' + m)\delta w]_0^L + \int_0^L ((EIw'')' m)' \delta w dx - \int_0^L q \delta w dx = 0. \quad (2.8)$$

Valittu virtuaalinen siirtymä  $\delta w$  on mielivaltainen välillä  $0 < x < L$ , joten sen on oltava nolla integraalin sisällä, jotta tasapainoyhtälö toteutuu (Wang et al. 2000, s. 15). Sijoitus-termien on myös hävitettävä, kun  $x = 0$  tai  $x = L$ . Sijoitetaan yhtälöön (2.8) edellä mainitut ehdot ja saadaan virtuaalisen työn liikeyhtälöksi

$$EIw^{(4)} = q - m' \quad \text{kun } 0 < x < L \quad (2.9)$$

sekä tasapainoyhtälön reunaehdoiksi yhtälön (2.8) ensimmäisen osan sijoitustermeistä

$$\begin{aligned} EIw'' = 0 \quad \text{tai} \quad w' = 0 \quad \text{kun } x = 0, L, \\ EIw''' + m = 0 \quad \text{tai} \quad w = 0 \quad \text{kun } x = 0, L. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Yhtälö (2.10) on Eulerin–Bernoullin palkkimallin mukaisesti staattisen tilanteen tasapainoyhtälö. Palkkeja tutkittaessa tärkeänä tekijänä on taivutusmomentti. Käyttämällä lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen aineenmallia sekä venymän variaatiota hyödyksi saadaan taivutusmomentin lausekkeeksi

$$M = \int_A z \sigma_x dA = \int_A -z^2 w'' E dA = -EIw'', \quad \text{kun } 0 < x < L. \quad (2.11)$$

Taivutusmomentin lisäksi tärkeä tekijä muodonmuutosten määrittämisessä on leikkausvoima. Statiikan mukaan palkin poikkileikkauksen voimaresultanteilla, momentilla  $M$  ja leikkausvoimalla  $V$  on jatkuvan kuormituksen  $q$  ja jatkuvan jakaantuneen momenttikuoormituksen kanssa yhteydet (Lampinen 2014, s. 6)

$$-\frac{dV}{dx} = q, \quad -(EIw'')' - m = V, \quad (EIw'')'' = q - m'. \quad (2.12)$$

Edellä saatujen yhtälöiden avulla voidaan kirjoittaa kaavan (2.10) tasapainoyhtälön reunaehdot selkeämmin, jolloin niiden fysikaalinen merkitys selkenee. Reunaehdot ovat nyt muotoa

$$\begin{aligned} M = -EIw'' = 0 \quad \text{tai} \quad w' = \text{tunnettu}, \quad \text{kun } x = 0, L, \\ V = M' - m = 0 \quad \text{tai} \quad w = \text{tunnettu}, \quad \text{kun } x = 0, L. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Eulerin–Bernoullin palkkimalin yleisimmät reunaehdot ovat seuraavat (Wang et al. 2000, s. 16–17)

Niveltuki;  $w = 0, M = \text{tunnettu}.$

Liukutuki;  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0, V = \text{tunnettu}.$

Vapaa reuna;  $M = V = \text{tunnettu}.$

Jäykkä tuki;  $M = V = \text{tunnettu}.$

Malli ei kuitenkaan rajoitu pelkästään suorakaiteen muotoisiin palkkeihin, vaan sitä voidaan käyttää kaikenlaisiin poikkileikkauksiin, kunhan kuormitustaso sisältää poikkileikkauksen toisen pääakselin eli, jos taivutusmomenttivektori yhtyy toiseen pääakseliin (Salmi & Pajunen 2009, s. 176). Jäyhyysmomentille sekä pinta-alalle voidaan kirjoittaa yhtälöt, joiden avulla saadaan ratkaisu mille tahansa poikkileikkaukselle

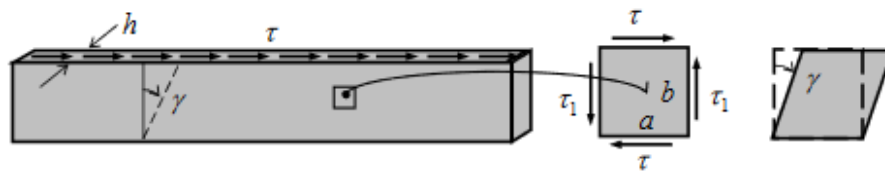
$$I = \int_A z^2 dA \quad \text{ja} \quad A = \int_A dA. \quad (2.14)$$

Bernoullin hypoteesi toteutuu ainoastaan puhtaan taivutuksen yhteydessä, jolloin palkkia kuormittaa ainoastaan taivutusmomentti  $M$ , leikkausvoiman  $V$  ollessa nolla. Kyseinen kuormitustapaus on käytännössä melko harvinainen, ja yleensä palkkia kuormittaa myös leikkausvoima, jonka vaikutuksen Eulerin–Bernoullin malli jättää huomiotta (Lampinen 2014, s. 7). Kun palkin korkeuden ja pituuden suhde on pieni, nämä oletukset antavat suunnittelulle tarpeeksi hyvät pohjat, eli kun  $(\frac{h}{L})^2 \ll 1$ . Tällöin mallin antamien tulosten virhe on pieni ja mallin antamiin tuloksiin voidaan luottaa.

## 2.2 Timoshenkon palkkimalli

Yleisesti on todettu, ettei Eulerin–Bernoullin palkkimallin oletus poikkileikkauksen säilymisestä tasana ole toimiva kaikille mahdollisille poikkileikkaus tyypeille. Kun poikkileikkauksen korkeus suhteessa palkin pituuteen kasvaa, myös Eulerin–Bernoullin palkkimalin virhe kasvaa. Timoshenkon palkkimalli ottaa huomioon poikittaiset leikkausmuodonmuutokset. Mallissa otetaan poikittaiset leikkausmuodonmuutokset likimääräisesti huo-

mioon, jolloin luovutaan Eulerin–Bernoullin vaatimuksesta, että palkin poikkileikkaus säilyisi kohtisuorassa neutraaliakselia kohden myös taipuneessa tilassa. Poikkileikkaus säilyy kuitenkin edelleen tasona, jonka takia palkkiin syntyy vakio liukumaa koko poikkileikkauksessa. Todellisuudessa liukuma on kuitenkin staattisessa taivutuksessa suurin palkin neutraaliakselilla, ja häviää palkin reunoilla, eli sillä on jokin poikkileikkauksen muodosta riippuva jakauma (Gere & Timoshenko 1984, s. 230). Kuvassa 3 on esitettyä poikkileikkauksen muodonmuutokset, jossa havainnollistetaan syntyvä liukuma  $\gamma$  leikkausvoimien vaikutuksesta.



**Kuva 3.** Poikkileikkauksen muodonmuutos leikkausvoiman vaikutuksesta (J. Aalto, Rakenteiden mekaniikan seura, Rakenteiden lujuusopin perusteita)

Timoshenkon palkkimallin mukaiset siirtymät on esitetty kuvassa 2 b-kohdassa. Kuvassa nähdään palkkiin syntyvä kiertymä  $\phi$ . Kiertymä syntyy kuormitus tilanteessa ja kertoo, kuinka paljon palkin akseli on kiertynyt neutraaliakseliin nähden. Siirtymäkentille voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\phi(x) \\ w(x, z) &= w(x), \end{aligned} \quad (2.15)$$

missä  $\phi$  on poikkileikkauksen neutraaliakselin kiertymä. Palkkimallissa oletetaan poikittaisen leikkausjännityksen vakiotila suhteessa paksuuskoordinaattiin. Oletus ei pidä täysin paikkaansa ja siitä syntyy mallissa virhettä. Malli vaatii leikkausjännityksen korjauskertoimen  $\kappa$  virheen kompensoimiseksi (Wang et al. 2000, s. 13). Yksinkertaisuudessaan  $\kappa$  on vakio, joka toteuttaa yhtälön (Lampinen 2014, s. 8)

$$\int_A \tau_{tod} dA = \int_A \tau_z \kappa dA, \quad (2.16)$$

missä  $\tau_{tod}$  on poikkileikkauksessa vaikuttava todellinen leikkausjännitys ja  $\tau_z$  oletettu tasainen leikkausjännitys. Todellisuudessa korjauskertoimen määrittämiseen hieman monipuolisemmin, koska siihen vaikuttaa poikkileikkauksen geometria, kuorma- ja reunaehdot (Wang et al. 2000, s. 4). Korjauskertoimeen ja sen periaatteeseen palataan luvun lopussa.

Timoshenkon palkkimallin venymä ja liukuma voidaan kirjoittaa muodossa

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\phi'$$

$$\gamma = \gamma_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = w' + \phi. \quad (2.17)$$

Kuten Eulerin–Bernoullin palkkimallissa, myös Timoshenkon palkkimallissa reunaehtoja määrittäessä käytetään hyväksi virtuaalisen työn yhtälöä. Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ  $\delta W_{sis}$  ja on ulkoisten voimien, pystysuoran jakautuneen kuorman  $q$  ja jakaantunut momenttikuormituksen  $m$ , tekemä virtuaalinen työ  $\delta W_{ulk}$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\delta W_{sis} = - \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_z \delta \gamma_z) dV$$

$$\delta W_{ulk} = \int_0^L q(x) \delta w dx + \int_0^L m \delta \phi dx. \quad (2.18)$$

Edellä saatua yhtälöä verrattaessa kaavaan (2.4) huomataan, että Timoshenkon virtuaalisen työn yhtälöön on lisätty leikkausjännitykseen liittyvä venymäenergia  $\tau_z \delta \gamma_z$ . Eulerin–Bernoullin palkkimallin mukaan kyseinen venymäenergia on nolla, joten sitä ei esiinny kaavassa (2.4). Sijoittamalla kaava (2.18) virtuaalisen työn kaavaan (2.3), saadaan Timoshenkon mukainen virtuaalisen työ muotoon

$$\int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_z \delta \gamma_z) dV - \int_0^L q(x) \delta w dx - \int_0^L m \delta \phi dx = 0 \quad (2.19)$$

Kaavaa (2.19) voidaan sieventää sijoittamalla normaalijännitys aikaisemmin esitetystä lineaarisesti kimmoisan aineen mallista, poikittainen leikkausjännitys  $\tau_z$  korjauskertoimella korjattuna sekä poikkileikkauksen korkeuden  $h$  sekä palkin leveyden  $b$ . Leikkausjännityksen yhteys liukumään ja variaatio yhtälöt voidaan esittää muodossa

$$\tau_z = \kappa G \gamma_z, \quad \delta \varepsilon_x = z \delta \phi', \quad \delta \gamma_z = \delta w' + \delta \phi, \quad \delta u = z \delta \phi, \quad (2.20)$$

jossa  $G$  on materiaalin liukumoduuli, joka kuvaa materiaalin kykyä vastustaa leikkausjännitystä ja sen aiheuttamaa muodonmuutosta. Kuten Eulerin–Bernoullin palkkimallissa, lausutaan liukuma, venymä ja poikkileikkauksen kiertymä neutraaliakselilla  $\delta$  variaation avulla (Wang et al. 2000, s. 17–18), saadaan yhtälö (2.19) muotoon

$$\int_V [Ebz^2 \phi' \delta \phi' + \kappa G(w' + \phi)(\delta w' + \delta \phi)] dV - \int_0^L q(x) \delta w dx - \int_0^L m \delta \phi dx = 0. \quad (2.21)$$

Tästä edelleen integroimalla poikkileikkauksen korkeuden yli, kaava sieventyy muotoon

$$\int_0^L [EI \phi' \delta \phi' + \kappa GA(w' + \phi)(\delta w' + \delta \phi)] dx - \int_0^L q(x) \delta w dx - \int_0^L m \delta \phi dx = 0. \quad (2.22)$$

Integroidaan ensimmäinen termi osittain, jotta variaatio-operaattorin derivaatat saadaan pois integraalin sisältä. Kaava (2.22) saadaan integroinnin jälkeen muotoon

$$[EI\phi'\delta\phi + \kappa GA(w' + \phi)\delta w]_0^L - \int_0^L [(\kappa GA(w'' + \phi') - q)\delta w] dx + \int_0^L [(-EI\phi'' + \kappa GA(w' + \phi) - m)\delta\phi] dx = 0. \quad (2.23)$$

Tasapainoyhtälöt saadaan vaatimalla, että yhtälö toteutuu mielivaltaisilla  $\delta w$  ja  $\delta\phi$  arvoilla (Lampinen 2014, s. 10). Näin ollen taipuman ja venymän variaatiot ovat välillä  $0 < x < L$ , jolloin myös sijoitustermien oltava nolla, kun  $x = 0$  tai  $x = L$ . Valitsemalla niiden arvoiksi 0 saadaan lopulliset tasapainoyhtälöt muotoon

$$\begin{aligned} -\kappa GA(w'' + \phi') &= q(x) \text{ ja} \\ -EI\phi'' + \kappa GA(w' + \phi) - m &= 0, \text{ kun } 0 < x < L. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Kaavan (2.23) sijoitustermistä saadaan reunaehdoiksi palkkimallille

$$\begin{aligned} EI\phi'' &= 0 \text{ tai } \delta\phi = 0 \text{ kun } x = 0, L. \\ \kappa GA(w' + \phi) &= 0 \text{ tai } \delta w = 0 \text{ kun } x = 0, L. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Palkissa vaikuttavat taivutusmomentti sekä leikkausvoima voidaan kirjoittaa leikkausjännityksen sekä normaalijännityksen avulla. Molemmat voimaresultantit vaikuttavat koko poikkileikkauksessa, jolloin integroimalla leikkausjännitys ja normaalijännitys poikkileikkauksen yli, saadaan leikkausvoiman ja taivutusmomentin yhtälöiksi

$$\begin{aligned} M &= \int_A z\sigma_z dA = EI\phi' \text{ ja} \\ V &= \int_A \tau_{xz} dA = \kappa GA(w' + \phi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Kuten Eulerin–Bernoullin palkkimallissa, on Timoshenkon palkkimallille kirjallisuudessa kirjoitettu yleisiä reuna-arvoja standardi rajaolosuhteissa (Wang et al. 2000, s. 20). Eri tuille voidaan kirjoittaa reuna-arvoja muodossa

$$\text{Niveltuki; } w = 0, M = EI \frac{\partial\phi}{\partial x} = \text{tunnettu.}$$

$$\text{Liukutuki; } \frac{\partial w}{\partial x} = \phi = 0, V = \kappa GA(\phi + \frac{\partial w}{\partial x}) \text{ tunnettu.}$$

$$\text{Vapaa reuna; } M = V = \text{tunnettu.}$$

$$\text{Jäykkä tuki; } w = \phi = 0.$$

Timoshenkon palkkimallissa leikkausjännityksen huomioiminen tekee mallista sopivan kuvaamaan paksujen palkkien käyttäytymistä. Edellä mainitut lisätyt muodonmuutokset Eulerin–Bernoullin palkkimalliin verrattuna pienentävät oletetusti palkin jäykkyyttä, jolloin staattisissa tilanteissa syntyy suurempia siirtymiä (Gere & Timoshenko 1984, s. 407).

Kuten Eulerin–Bernoullin mallissakin, Timoshenkon palkkimallin antama virhe on pieni, kun pituuden suhde korkeuteen on riittävän pieni. Toisaalta palkin pituuden ollessa pieni, antaa Timoshenkon palkkimalli tarkempia tuloksia. Mallia voidaan käyttää Eulerin–Bernoullin palkkimallin mukaisesti mielivaltaisille poikkileikkauksille. Aikaisemmin todettu leikkausjännityksen korjauskerroin on riippuvainen poikkileikkauksen geometriasta, jolloin leikkausjännityksen jakauma on riippuvainen poikkileikkauksesta. Tämä ei aseta rajoituksia poikkileikkaukselle, koska Timoshenkon mallissa leikkausjännitys huomioidaan keskimääräisenä ja tasaisesti jakautuneena koko poikkileikkaukselle (Lampinen 2014, s. 11).

Leikkausjännityksen korjauskertoimelle on tarjottu monia vaihtoehtoja, joista yleisesti hyväksytyä ei ole onnistuttu määrittämään. Tavallisia lähestymistapoja korjauskertoimen arvon saamiseksi on sovittamalla värähtelevän palkkien korkeataajuusspektri tai yksinkertaistamalla oletuksia lineaarisen joustavuuden teorian puitteissa (Wang et al. 2000, s. 19). Gare ja Timoshenko (1984, s. 229, s. 408) ovat määrittäneet suorakaiteen muotoiselle poikkileikkaukselle korjauskertoimelle arvon  $\kappa = 2/3$ , joka on johdettu palkin leikkausjännityksen kaavasta. Kaavassa verrataan keskimääräisen leikkausjännityksen suhdetta neutraaliakselin leikkausjännitykseen. Arvo  $2/3$  on saatu palkin maksimileikkausjännityksestä, joka sijaitsee palkin neutraaliakselilla. Gare ja Timoshenko (Gare & Timoshenko 1984, s. 663–664) ovat myös määrittäneet leikkausjännitykselle muotokerroimen, jonka arvo suorakaiteisen palkin poikkileikkauksessa on  $\kappa = 6/5$ . Kyseinen luku on saatu virtuaalisen työn periaatteen avulla ja kirjoittajat suosittelevat jälkimmäisen käyttöä (Gare ja Timoshenko 1984, s. 666), kun ratkaistaan palkin taipumia ja arvioidaan leikkauksen vaikutuksista johtuvaa venymää.

### 2.3 Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimalli

Timoshenkon malli ei toteuta kaikkia palkin reunaehtoja, joten sen epäkohtien ratkaisemiseksi on kehitelty useita palkkimalleja. Ensimmäisen Timoshenkon mallin mukaiset tasapainoyhtälöt kehitti Levinson vuonna 1981. Hän käytti vektorimenetelmää tasapainoyhtälöiden muodostamiseksi. Bickford vuonna 1982 sekä Reddy vuonna 1984 johtivat liikeyhtälön variaatioperiaatteella, käyttäen oletettua siirtymäkenttään (Wang et al. 2000, s. 14). Bickfordin työ rajoittui isotrooppisiin palkkeihin, kun taas Reddyn tutkimuksissa tarkasteltiin komposiittilevymalleja. Siirtymäkentät olivat samat kuin Levinsonin mallissa, joka johti yhtälöt palkin differentiaalelementin tasapainoehtojen ja palkin voimaresultanttien avulla (Levinson 1980, s.344–345). Työssä keskitytään Bickfordin palkkimallin mukaisiin tasapainoyhtälöihin, jolloin tulee ilmi korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälön antama ratkaisu. Reddy kehitti tietämättään Bickfordin mallista samanlaisen palkkimallin,

joten työssä käytetään apuna Bickfordin–Reddyn palkkimallia (Wang et al. 2000). Jokainen edellä mainittu palkkimalli on kuudennen kertaluvun yhtälöitä sekä niiden siirtymäkenttien yhtälöt ovat käytännössä samanlaiset. Malleissa siirtymäkenttä mukauttaa poikittaisen leikkausjännityksen neliömäisen jakauman ja poikittaisen leikkausjännityksen häviämisen palkin ylä- ja alatasossa (Wang et al. 2000, s. 14). Kun luovutaan Timoshenkon mallin mukaisesta leikkausmuodonmuutoksen keskimääräisyys olettamuksesta, ei leikkausjännityksen korjauskerrointa tarvitse käyttää.

Levinsonin (Levinson 1980, s. 345) mukaan siirtymäkentät ovat alimman kertaluvun lausekkeita, jotka ovat epäsymmetriset palkin neutraaliakselin molemmiin puolin ja jotka täyttävät ehdon, jossa leikkausjännitys on nolla, kun  $z = \pm h/2$ . Siirtymäkentät ovat muotoa

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\phi - z^3 \left( \frac{4}{3h^2} \right) (\phi + w'), \\ w(x, z) &= w(x). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Bickfordin–Reddyn mallin mukaiset siirtymäkentät olivat lähes samanlaiset, kuin kaavassa (2.27). Mallissa leikkausjännityksen häviäminen palkin ylä- ja alatasossa otetaan huomioon lisäämällä näille omat kertoimensa neutraaliakselin taipuman lisäksi. Siirtymäkentät ovat täten muotoa

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\phi + z^2\xi(x) - z^3\zeta(x), \\ w(x, z) &= w(x), \end{aligned} \quad (2.28)$$

joissa  $\phi(x)$  kuvaa poikkileikkaustason kiertymää neutraaliakselilla, ja  $\xi(x)$  ja  $\zeta(x)$  määrittellään siten, että leikkausjännitykset häviävät palkin ylä- ja alapinnassa. Kyseinen ehto johtaa  $z^2$  kertoimen katoamiseen (Lampinen 2014, s. 14) ja näin ollen siirtymäkentät ovat samanlaisia Levinsonin mallin kanssa. Venymä ja liukuma voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_x &= z\phi' - z^3 \left( \frac{4}{3h^2} \right) (w'' + \phi'), \\ \gamma = \gamma_{xz} &= \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) (w' + \phi). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Kaavan (2.29) yhtälöitä Bickford käytti perusolettamuksena liikeyhtälöitä muodostaessa. Bickfordin mukaan (Bickford 1982, s. 137) tasapainoyhtälöt palkille voidaan muodostaa kahdella tavalla, vektori- tai variaatioperiaatteen avulla. Bickford käytti alkuperäisessä kaavassaan variaatioperiaatetta. Reddy lähtee liikkeelle, kuten Eulerin–Bernoullin ja Timoshenkon palkkimalleissa, liikeyhtälöiden johtamisessa virtuaalisen työn periaatteesta (Wang et al. 2000, s. 21). Sisäisten voimien virtuaaliselle työlle  $\delta W_{sis}$  ja ulkoisten voimien tekemälle virtuaaliselle työlle  $\delta W_{ulk}$  voidaan muodostaa yhtälöt



$$\delta W_{sis} = - \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_z \delta \gamma_z) dV,$$

$$\delta W_{ulk} = \int_0^L q \delta w dx + \int_0^L m \delta \phi dx. \quad (2.30)$$

Käytetään hyväksi lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen aineen mallia  $\sigma_x = E \varepsilon_x$  ja poikittainen leikkausjännitys  $\tau_z = G \gamma_z$ . Aikaisemmin mainitusti, Bickfordin–Reddyn mallissa ei tarvitse käyttää leikkausjännityksen korjauskerrointa, koska poikittaisen leikkausjännityksen oletetaan olevan kvadraattinen palkin poikkileikkauksen yli (Wang et al. 2000, s. 21). Sijoitusten lisäksi, integroidaan palkin leveyden yli. Sijoitetaan saadut ehdot kaavaan (2.30), jotka sijoitetaan edelleen virtuaalisen työn kaavaan (2.3). Muodostetaan virtuaalisen työn kaavat erikseen sisäisille ja ulkoisille voimille. Reddyn–Bickfordin mallin mukaiset virtuaalisen työn kaavat saadaan muotoon

$$\delta W = \delta W_{ulk} + \delta W_{sis} = - \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b (E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G \gamma_z \delta \gamma_z) dz dx + \int_0^L q \delta w dx + \int_0^L m \delta \phi dx = 0. \quad (2.31)$$

Kuten edellisissä malleissa, määritetään variaatiot venymälle ja liukumalle. Käyttämällä hyväksi kaavoja (2.29) saadaan variaatioiksi

$$\delta \varepsilon_x = z \delta \phi' - z^3 \left( \frac{4}{3h^2} \right) (\delta \phi' + \delta w''), \quad \delta \gamma_{xz} = \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) (\delta w' + \delta \phi). \quad (2.32)$$

Sijoitetaan variaatiot sisäisen voimien tekemään virtuaalisen työn kaavaan. Sijoitetaan samalla lineaarisesti kimmoisan materiaalin mallin mukainen normaalijännitys  $\sigma_x = E \varepsilon_x$  sekä poikittainen leikkausjännitys  $\tau_z = G \gamma_z$ . Kaava (2.30) saadaan tällöin muotoon

$$\delta W_{sis} = - \int_V \left[ E \left( z \phi' + \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} (w'' + \phi') \right) \left( z \delta \phi' + \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} (\delta w'' + \delta \phi') \right) + G \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)^2 (w' + \phi) (\delta w' + \delta \phi) \right] dV. \quad (2.33)$$

Määritetään kaavan (2.33) avulla voimaresultantit palkkimallille tässä vaiheessa, jotta kaavoja voidaan sieventää jatkossa käyttäen voimaresultanttien lyhenteitä. Korkeamman asteen palkkimalleissa määritetään kahta eri momenttia; normaali taivutusmomentti  $M_1$  ja korkeamman kertaluvun taivutusmomentti  $M_3$  (Wang et al. 2000, s. 22). Alanumerot tulevat kaavassa (2.27) olevista  $z$  asteluvuista. Korkeamman kertaluvun taivutusmomentin kertoimeksi valitaan siirtymäkentissä kaavoissa (2.27) ja (2.28) esiintyvä  $4z^3/3h^2$ . Jännitysresultantit voidaan esittää Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallissa muodossa

$$M_1 = \int_A \sigma_x z dA, \quad M_3 = \int_A \sigma_x \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} dA \quad \text{ja} \quad V = \int_A \tau_z dA. \quad (2.34)$$

Sijoitetaan normaalijännityksen  $\sigma_x$  arvot taivutusmomenttien kaavoihin ja integroidaan ne palkin paksuuden  $b$  ylitse, voidaan taivutusmomentit esittää muodossa

$$M_1 = b \int_{-h/2}^{h/2} [E \left( z\phi' - \frac{4z^3}{3h^2} (\phi' + w'') \right) z] dz, \quad (2.35)$$

$$M_3 = b \int_{-h/2}^{h/2} [E \left( z\phi' - \frac{4z^3}{3h^2} (\phi' + w'') \right) \frac{4z^3}{3h^2}] dz. \quad (2.36)$$

Integroidaan taivutusmomenttien kaavoja (2.35) ja (2.36) edelleen palkin korkeuden  $h$  ylitse. Merkitään yksinkertaistukseksi palkin jäyhyysmomentiksi  $I = bh^3/12$ , jolloin kaavat (2.35) ja (2.36) saadaan muotoon

$$M_1 = \frac{4}{5} EI\phi' - \frac{1}{5} EIw'', \quad (2.37)$$

$$M_3 = -\frac{16}{105} EI\phi' - \frac{1}{21} EIw''. \quad (2.38)$$

Kaavassa (2.30) oleva sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ koostuu palkin siirtymä ja leikkausmuodonmuutos osuuksien tekemästä virtuaalisesta työstä ja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\delta W_{sis} = \delta W_{sis}^{taip} + \delta W_{sis}^{leik}. \quad (2.39)$$

Kaavan taipuma osuuden tekemän virtuaalisen työ (2.39) voidaan kirjoittaa edellä saatujen jännitysresultanttien taivutusmomentin  $M_1$  ja korkeamman kertaluvun taivutusmomentin  $M_3$  avulla muotoon

$$\delta W_{sis}^{taip} = \int_0^L [M_1 \delta\phi' + M_3 (\delta w'' + \delta\phi')] dx. \quad (2.40)$$

Kaavassa (2.39), missä esiintyvä  $\delta W_{sis}^{leik}$  on kaavassa (2.30) esiintyvä leikkausvoiman ja liukuman yhteys  $\tau_z \delta\gamma_z$ . Se voidaan esittää muodossa

$$\delta W_{sis}^{leik} = - \int_V G \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)^2 (w' + \phi) (\delta w' + \delta\phi) dV. \quad (2.41)$$

Suorittamalla integrointi poikki pinnan ja ottamalla huomioon  $A = bh$ , saadaan leikkausmuodonmuutosten aiheuttaman virtuaalisen työn osuudeksi

$$\delta W_{sis}^{leik} = - \int_0^L \frac{8}{15} GA (w' + \phi) (\delta w' + \delta\phi) dV. \quad (2.42)$$

Määritellään tässä välissä palkilla Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin mukainen leikkausvoima  $V$ . Sijoitetaan kaavassa (2.34) esiintyvään yleistettyyn leikkausvoimaan poikittaisen leikkausjännityksen kaavan  $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ , johon edelleen sijoitetaan liukuma kaavasta (2.29) (Wang et al. 2000, s. 21). Leikkausvoima voidaan esittää täten muodossa

$$V = \int_A G \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2}\right) (w' + \phi) dA, \quad (2.43)$$

josta integroimalla poikkipinnan yli saadaan

$$V = \frac{2}{3} GA(w' + \phi). \quad (2.44)$$

Sisäisten leikkausvoimien tekemä virtuaalinen työ voidaan kirjoittaa täten muodossa

$$\delta W_{sis}^{leik} = - \int_0^L \frac{4}{5} V(\delta w' + \delta \phi) dx. \quad (2.45)$$

Ulkoisten ja sisäisten voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ on oltava nolla. Nyt virtuaalisen työn kaava (2.3), jossa otetaan huomioon sisäisten ja ulkoisten voimien tekemät virtuaaliset työt, voidaan kirjoittaa edellä tehtyjen sievennysten jälkeen muodossa

$$\int_0^L \left[ M_1 \delta \phi' + M_3 (\delta w'' + \delta \phi') - \frac{4}{5} V (\delta w' + \delta \phi) \right] dx + \int_0^L q \delta w dx + \int_0^L m \delta \phi dx = 0. \quad (2.46)$$

Integroidaan yhtälöstä osittain termejä, joissa on variaation derivaattoja, jolloin kaava (2.46) saadaan muotoon (Lampinen 2014, s. 15)

$$\begin{aligned} & \left[ (M_1 + M_3) \delta \phi + M_3 \delta w' - \left( M_3' + \frac{4}{5} V \right) \delta w \right]_0^L + \int_0^L \left[ \left( M_3' + \frac{4}{5} V \right)' + q \right] \delta w dx + \\ & \int_0^L \left[ -(M_1 + M_3)' + \frac{4}{5} V + m \right] \delta \phi dx = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Timoshenkon mallin mukaisesti, taipuman ja liukuman variaatioilla  $\delta w$  ja  $\delta \phi$ , yhtälön pitää toteutua mielivaltaisilla arvoilla. Näin ollen taipuman ja venymän variaatiot ovat välillä  $0 < x < L$ , jolloin myös sijoitusermien oltava nolla, kun  $x = 0$  tai  $x = L$  (Wang et al. 2000, s. 22). Tasapainoyhtälöiksi palkkimallissa saadaan

$$\begin{aligned} & \left( M_3' + \frac{4}{5} V \right)' + q = 0, \\ & -(M_1 + M_3)' + \frac{4}{5} V + m = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallissa voidaan antaa siirtymäreunaehdot taipumaa  $w$ , taipuman derivaattaa  $w'$  ja poikkileikkauksen kiertymää  $\phi$  vastaavilla voimasuureilla muodossa (Wang et al. 2000, s. 22)

$$\begin{aligned} & M_3' + \frac{4}{5} V = 0 \quad \text{tai} \quad w = \text{tunnettu}, \\ & M_1 + M_3 = 0 \quad \text{tai} \quad \phi = \text{tunnettu}, \\ & M_3 = 0 \quad \text{tai} \quad w' = \text{tunnettu}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Liiketyhtälön avulla voidaan kirjoittaa pystyvoimille tasapainoyhtälö (2.50) ja momenttitasapainoyhtälö (2.51), jotka ovat Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallissa muotoa

$$\left(M_3' + \frac{4}{5}V\right)' + q = \frac{16}{105}EI\phi''' - \frac{1}{21}EIw^{(4)} + \frac{8}{15}GA(w'' + \phi') + q = 0, \quad (2.50)$$

$$-(M_1 + M_3)' + \frac{4}{5}V + m = -\frac{68}{105}EI\phi'' + \frac{16}{105}EIw''' + \frac{8}{15}GA(w'' + \phi') + m = 0, \quad (2.51)$$

ja joiden avulla voidaan kirjoittaa voimaresultantit muotoon

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{4}{5}EI\phi' - \frac{1}{5}EIw'', \\ M_3 &= \frac{16}{105}EI\phi' - \frac{1}{21}EIw'', \\ V &= \frac{3}{2}GA(w' + \phi), \end{aligned} \quad (2.52)$$

missä  $V$  on leikkausvoima, sekä  $M_1$  ja  $M_3$  momentteja, jossa  $M_1$  kuvaa tavallista taivutusmomenttia ja  $M_3$  korkeamman kertaluvun taivutusmomenttia (Lampinen 2014, s. 16). Lähteessä (Wang et al. 2000, s. 22) on käytetty hieman erilaisia merkintöjä voimaresultanteille. Idea on kuitenkin sama ja päästään samaan lopputulokseen. Mallissa merkitään leikkausvoimaa  $Q_x$ , taivutusmomenttia  $M_x$  sekä korkeamman asteen voimaresultantteja muodossa  $P_x$  ja  $R_x$ . Korkeamman asteen voimaresultantit ovat apusuureita, joiden avulla voidaan esittää jännitysresultantit (2.52) yksinkertaisemmassa muodossa, jossa kertoimet häviävät ja käytetään vain voimasuureita. Kirjallisuudessa on annettu Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallille eri tuille reunaehtoja, joita ovat (Wang et al. 2000, s. 23)

$$\text{Niveltuki; } w = 0, M_1 = M_3 = \textit{tunnettu}.$$

$$\text{Liukutki; } \frac{\partial w}{\partial x} = \phi = 0, V = \textit{tunnettu}.$$

$$\text{Vapaa reuna; } M_1 = M_3 = V = \textit{tunnettu}.$$

$$\text{Jäykkä tuki; } w = \phi = \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

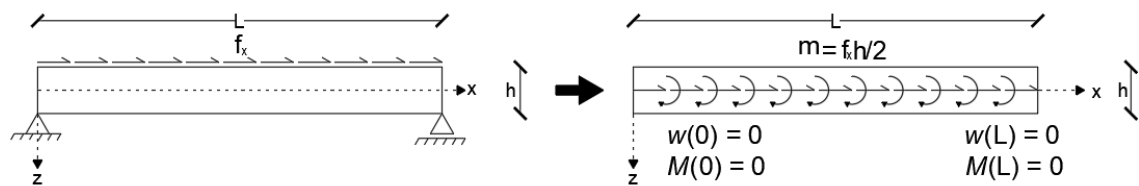
Kuten tasapainoyhtälöistä nähdään, Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallissa palkin molemmissa päissä on kolme reunaehto, toisin kuin Eulerin–Bernoullin ja Timoshenkon malleissa (Wang et al. 2000, s. 22). Luovuttaessa poikkileikkauksen tasomaisuus oletuksesta, täytyy voimaresultantit myös laajentaa vastaamaan käyritynyttä siirtymäkenttää, jotta vektorein päästäisiin yhtäpitäviin tuloksiin variaatiomenetelmin johdettujen yhtälöiden kanssa (Lampinen 2014, s. 17). Tämän vuoksi tasapainoyhtälöstä saatuja reunaehtoja on mallissa kolme, kun esimerkiksi Timoshenkon palkkimallilla on vain kaksi. Bickford esitti (Bickford 1982, s. 137–150) kirjallisuudessa tasapainoyhtälöt korkeamman asteen palkkimallille vektori- ja variaatiomenetelmällä. Vektorimenetelmää käyttäessä, Bickford käytti Levinsonin valmiiksi esittämiä yhtälöitä hyväksi, jolloin jää

epäselväksi, päästäänkö molemmilla yhtälöillä samankaltaisiin tuloksiin, kun variaatiomenetelmän avulla saatuja yhtälöitä ei tunnettaisi. Korkeamman asteen palkkimalleja käytetään kuitenkin harvoin, koska näiden saavuttama tarkkuus, joka vaatii paljon vaivaa tasapainoyhtälöiden ratkaisemiseksi, on melko pieni. Tämä korostuu staattisten tilanteiden laskennassa, varsinkin käsin laskettaessa, jolloin Eulerin–Bernoullin sekä Timoshenkon mallien antamat tulokset ovat tarpeeksi tarkkoja. Korkeamman kertaluvun palkkimallit antavat kuitenkin paremman likiarvon staattisessa tilanteessa.

Reddyn–Bickfordin tasapainoyhtälöitä määrittäessä on edellä mainitusti lähdetty liikkeelle Levinsonin käyttämistä siirtymäkentistä. Levinson puolestaan käytti Reissnerin mallin mukaisista siirtymiä sekä merkintöjä (Levinson 1980, s. 344). Reissnerin malli perustui isotrooppisille levyille, joiden poikkileikkaus oli suorakaiteen muotoinen. Näin ollen myös Levinsonin mallissa siirtymäkentät on rajoitettu suorakaiteen muotoisille poikkileikkauksille, joissa poikittaissiirtymät ovat riippumattomia z-akselista, ts. poikkileikkauksen y-suuntaiset venymät eivät ole sallittuja (Levinson 1980, s. 345). Täten myös Reddyn–Bickfordin malli on rajoitettu geometrisesti edellä mainitusti. Rajoitus voidaan nähdä siirtymäkentistä (2.27).

### 3. PALKKIMALLIEN VERTAILUA

Työssä perehdytään palkkimallien antamiin ratkaisuihin esimerkkitehtävän avulla. Esimerkissä keskitytään staattisen tilanteen tutkimiseen, jolloin tärkeimpinä tarkastelun kohteina ovat palkin siirtymäratkaisut sekä voimaresultantit. Jännitykset voitaisiin ratkaista siirtymien avulla, esimerkiksi Eulerin–Bernoullin palkkimallissa ratkaistaan venymä kaavasta (2.2) ja sijoittamalla tämä arvo lineaarisesti kimmoisan isotrooppisen aineen malliin, jolloin saataisiin palkissa vaikuttava normaalijännitys. Palkkimalleja tutkiessa, staattiset tilanteet ovat yleisesti palkkien perusongelmia. Työssä esitetyt palkkimallit ovat Pajusen & Salmen (Salmi & Pajunen 2009, s. 14) mukaan riittävän hyviä vastaamaan todellisten materiaalien lujuusopillisia ominaisuuksia. On kuitenkin muistettava, että palkkimallit ovat mahdollisimman pelkistettyjä, jolloin niiden ratkaiseminen ei olisi matemaattisesti liian työlästä. Mallien käyttökelpoisuudet on aina todennettava kokeellisesti (Salmi & Pajunen 2009, s. 14). Staattisissa esimerkeissä palkki mitoitetaan ja mallinnetaan tilanteessa, jossa kuormitukset eivät vaihtele tai vaihtelu on tarpeeksi hidasta, riippumatta onko haluttuna ratkaisuna palkin jännitykset tai siirtymät (Lampinen 2014, s. 18).



**Kuva 4.** Tasaisesti  $x$ -akselin suuntaisesti kuormitettu niveltuettu palkki.

Esimerkkitehtävä on kuvan 4 mukainen: staattisesti määrätty niveltuettu palkki, jota kuormittaa  $x$ -akselin suuntainen tasainen kuorma  $f_x$  vaikuttaen palkin yläpinnalla. Kuormitus voidaan redusoida  $x$ -akselin suuntaiseksi normaalivoimaksi  $f_x$  ja jakautuneeksi momentiksi  $m = f_x h / 2$ . Kuvan oikealla puolella on tasapainoalkio. Kyseinen esimerkki voisi olla todellisuudessa tilanne, jossa kuorma-auto jarruttaa palkin päällä aiheuttaen jakaantunutta momenttikuormitusta, joka tekee työtä kiertymää vastaan, neutraaliakselin suuntaisesti. Ratkaisuissa käytetään hyväksi sekä edellä ratkaistuja tasapainoehdoja sekä differentiaaliyhtälöitä, jotka voidaan muodostaa tunnettujen voimien avulla. Differentiaalisen palkkielementin momenttitasapainoehdoksi saadaan

$$-M' + V + m = 0. \quad (3.1)$$

### 3.1 Eulerin–Bernoullin palkkimalli

Eulerin–Bernoullin palkkimallissa lähdetään liikkeelle tukien asettamista reunaehdoista, joita esitettiin luvussa 2.1. Reunaehdot ovat kuvan 4 mukaisessa tilanteessa muotoa (Reddy et al. 2000, s. 16–17)

$$\text{Niveltuki; } w = 0, M = \text{tunnettu} . \quad (3.2)$$

Kuvaan 4 on myös merkittynä tuille statiikan avulla ratkaistut voimaresultantit tuilla; palkin molemmissa päissä taivutusmomentit sekä taipumat ovat nollia. Eulerin–Bernoullin mallissa unohdetaan aksiaalikuormitus. Täten esimerkin tilanteessa, palkkia ei rasita z-akselin suuntaisia voimia, joten leikkausvoima voidaan olettaa  $V$  vakioksi.

Lähdetään liikkeelle merkitsemällä palkille pystysuorien voimien sekä momenttitasapainoehdot voimaresultanttien  $V$  ja  $M$  avulla, jotka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} V' + q = 0 \\ -M' + V + m = 0 \end{cases} \quad (3.3 \text{ a ja b})$$

Kuvan 4 mukaisessa tilanteessa pystysuora jakaantunut kuormitus  $q$  häviää, jolloin yhtälöistä (3.3) saadaan

$$EI \cdot w^{(4)} = m'. \quad (3.4)$$

Tehtävässä oletetaan, että jakaantunut momenttikuormitus on vakio, jolloin  $m = \text{vakio}$ , ja  $m' = 0$ . Kun tämä sijoitettuna yhtälöön (3.4), saadaan taivutusmomentin  $M''$  arvoksi täten nolla. Kuten jakaantunen momenttikuormituksen tilanteessa, taivutusmomentin  $M''$  ollessa nolla, on myös  $M'$  nolla. Tämä voidaan huomata jo kuvan 4 perusteella annetuissa reunaehdoista palkin tuilla sekä palkkiin redusoidun kuormituksen avulla. Työn alussa määriteltiin palkin noudattavan lineaarista materiaalilakia, jolloin taivutusmomenttien ollessa nolla palkin molemmissa päissä, reunaehtoien ja vakiokuormituksen vuoksi momentti näin ollen häviää. Taivutusmomentin ollessa nolla, esimerkkitehtävän taipumaksi Eulerin–Bernoullin palkkimallin mukaan saadaan

$$-EIw'' = M \rightarrow -EIw'' = 0 \rightarrow w(x) = 0 \quad (3.5)$$

Eulerin–Bernoullin palkkimallin mukainen leikkausvoima esimerkkitehtävään saadaan momenttitasapainoyhtälön (3.3 b) avulla, kun yhtälöön sijoitetaan  $M' = 0$

$$-M' + V + m = 0 \rightarrow V + m = 0 \rightarrow V = -m. \quad (3.6)$$

Palkin ainoana sisäisenä rasituksena on leikkausvoima ja siten Eulerin–Bernoullin palkkimallin kinemaattisten rajoitteiden johdosta palkin siirtymätila häviää, saadut siirtymät ovat nolla tasapainoyhtälöiden mukaisesti, kun  $m$  on vakio ja  $m' = 0$ . Saatu tulos pitää yhtä kaavan (3.1) reunaehtoihin verrattuna. Edellä mainitusti myös taivutusmomentti

koko palkin pituudelta häviää. Kyseinen lopputulos johtuu Eulerin–Bernoullin asettamasta rajoitteesta, joka ei salli leikkausmuodonmuutoksia poikkileikkauksessa.

### 3.2 Timoshenkon palkkimalli

Timoshenkon palkkimallissa lähdetään liikkeelle myös tutkimalla tuille annettuja reunaehtoja. Kirjallisuudessa niveltukiselle palkille on annettu seuraavat reunaehdot (Wang et al. 2000, s. 20)

$$\text{Niveltuki; } w = 0, M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{tunnettu.} \quad (3.7)$$

Kuten Eulerin–Bernoullin palkkimallissa, reunaehdot tuille ovat samat eli sekä taivutusmomentti  $M$  että taipuma  $w$  ovat nolla palkin molemmissa päissä. Laskeminen aloitetaan merkitsemällä palkille tasapainoyhtälöt, jotka saadaan kaavan (2.24) avulla muotoon

$$\begin{cases} V' + q = 0 \\ M' - V - m = 0. \end{cases} \quad (3.8 \text{ a ja b})$$

Esimerkkitehtävän tilanteessa pystysuoraa kuormitusta ei ole, jolloin  $q = 0$ . Tällöin leikkausvoiman derivaatta häviää. Kun  $V' = 0$ , on leikkausvoima  $V = \text{vakio}$  koko palkin pituudelta. Leikkausvoiman  $V$  ollessa vakio, saadaan

$$V = \kappa GA(w' + \phi) = \text{vakio} \rightarrow w' + \phi = \text{vakio} \quad (3.9)$$

Kaavassa (3.9) oleva  $w' + \phi$  kuvaa palkin keskimääräistä liukumaa  $\gamma$ . Kuvan 4 mukaisesti taivutusmomentti häviää palkin molemmilla tuilla. Kaavan (2.26) mukaan taivutusmomentin tasapainoyhtälöä on muotoa  $M = EI\phi'$ . Tällöin momenttireunaehdoiksi saadaan  $\phi'(0) = 0$  ja  $\phi'(L) = 0$ . Kiertymä  $\phi$  on myös vakio koko palkin pituudelta. Edellä saatu tulos sijoitetaan Timoshenkon taivutusmomentin kaavaan (2.26), jolloin saadaan

$$M = EI\phi', \text{ kun } \phi' = 0 \rightarrow M = 0 \quad (3.10)$$

Taivutusmomentin ollessa nolla, on myös taivutusmomentin derivaatta nolla, jolloin leikkausvoima voidaan kirjoittaa kaavan momenttitasapainoyhtälön sekä kaavan (3.9) avulla muotoon

$$V = -m \text{ ja } V = \kappa GA \gamma(x), \text{ niin } \gamma(x) = -\frac{m}{\kappa GA} = \text{vakio} \quad (3.11)$$

Kaavan (3.11) perusteella liukuman ollessa vakio, on myös kiertymä koko palkin pituudelta Timoshenkon mallin mukaan vakio. Tämä johtuu mallin rajoitteista, Timoshenkon palkkimallissa otetaan leikkausmuodonmuutos huomioon keskimääräisesti. Salliessa leikkausmuodonmuutokset, poikkileikkaus ei ole taivutuksessa kohtisuorassa neutraaliakselia vasten, jolloin kiertymään syntyy lisäys liukumasta. Näin ollen esimerkkitehtävän palkkiin syntyy kiertymää, joka on vakio koko palkin pituuden. Taivutusmomentit ja



taipumat Eulerin–Bernoullin mallin mukaisesti häviävät palkilla. Taipuman ollessa nolla koko palkin pituudelta voidaan kiertymä kirjoittaa palkille muodossa

$$\gamma(x) = w' + \phi, \text{ kun } w' = 0 \text{ niin } \phi = \gamma(x) = -\frac{m}{\kappa GA} = \text{vakio}. \quad (3.12)$$

### 3.3 Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimalli

Kirjallisuudessa on kirjattu Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallille reunaehdot, jotka ovat niveltukiselle palkille muotoa (Wang et al. 2000, s. 23)

$$\text{Niveltuki; } w = 0, M_1 = M_3 = \text{tunnettu}. \quad (3.13)$$

Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin ollessa kuudennen kertaluvun yhtälö, on ratkaisun saaminen esimerkkitehtävään täten haastavampaa. Palkkimallissa käytetään yleistä taivutusmomenttia  $M_1$  ja korkeamman kertaluvun taivutusmomenttia  $M_3$  Timoshenkon ja Eulerin–Bernoullin mallien mukaisen  $M$  sijaan. Tällöin kuvan 4 mukaiset reunaehdot tuille voidaan kirjoittaa nyt muodossa

$$w(0) = w(L) = 0, M_1(0) = M_1(L) = 0, M_3(0) = M_3(L) = 0. \quad (3.14)$$

Esimerkin ratkaisussa lähdetään liikkeelle tasapainoyhtälöistä. Yhtälöt ovat esitetty luvussa 2.3 ja ovat muotoa

$$\left(M_3' + \frac{4}{5}V\right)' + q = \frac{16}{105}EI\phi''' - \frac{1}{21}EIw^{(4)} + \frac{8}{15}GA(w'' + \phi') + q = 0, \quad (3.15)$$

$$-(M_1 + M_3)' + \frac{4}{5}V + m = -\frac{68}{105}EI\phi'' + \frac{16}{105}EIw''' + \frac{8}{15}GA(w'' + \phi') + m = 0 \quad (3.16)$$

Reunaehtoien (3.14) mukaan palkin molemmissa päissä momentit  $M_1$  ja  $M_3$  häviävät, jolloin myös normaalin ja korkeamman kertaluvun taivutusmomenttien summa  $M_1 + M_3$  on nolla. Tämän vuoksi momenttitasapainoyhtälön (3.16) avulla nähdään, että leikkausvoiman  $V$  on oltava

$$0 + \frac{4}{5}V + m = 0 \rightarrow V = -\frac{5}{4}m, \quad (3.17)$$

jotta tasapainoyhtälöt toteutuvat. Siirtymäratkaisu saadaan niin ikään reunaehtoien avulla. Tutkittaessa jännitysresultanteja (2.52), voidaan taivutusmomenttien yhteyksien kiertymän derivaattaan ja taipuman toiseen derivaattaan avulla esittää seuraavat oletukset. Esimerkkitehtävä on staattisesti määrätty palkki, jolloin taivutusmomenttien  $M_1$  ja  $M_3$  hävitessä, saadaan

$$w'' \equiv \phi' \equiv 0. \quad (3.18)$$

Kuten Timoshenkon ja Eulerin–Bernoullin palkkimallissa, kiertymän derivaatan  $\phi'$  ollessa nolla, on kiertymä  $\phi$  vakio koko palkin pituuden suhteen. Taipuman toisen derivaatan  $w''$  ollessa nolla, on taipuma  $w$  korkeintaan lineaarinen polynomi. Toisaalta reunaehtojen mukaan (3.14)  $w \equiv 0$ , joten taipuma esimerkkitehtävän mukaisessa tilanteessa häviää.

Kaavassa (2.52) määritelty Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin mukainen leikkausvoima on muotoa

$$V = \frac{3}{2}GA(w' + \phi). \quad (3.19)$$

Kun esimerkkitehtävän reunaehtojen puolesta määritellyn leikkausvoiman kaavaan (3.17) sijoitetaan Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin leikkausvoima (3.19), saadaan palkilla vaikuttavan kiertymä muotoon

$$V = -\frac{5}{4}m \rightarrow \frac{3}{2}GA(w' + \phi) = -\frac{5}{4}m \rightarrow \phi = -\frac{5}{6}\frac{m}{GA}. \quad (3.20)$$

Leikkausmuodonmuutosten sallivien palkkimallien tulokset esimerkkitehtävässä ovat samanlaiset: palkilla siirtymätila koostuu kiertymästä, joka on vakio koko palkin pituuden suhteen. Taipumat sekä taivutusmomentit ovat Eulerin–Bernoullin palkkimallin mukaisesti nolla. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin mukaan palkilla vaikuttaa vakio kiertymä Timoshenkon palkkimallin mukaisesti. Kuitenkin korkeamman kertaluvun palkkimalleissa luovutaan poikkileikkauksen tasomaisuus olettamuksesta, jolloin voimaresultantit laajentuvat vastaamaan käyrästynnyttä siirtymäkenttää, jolloin kiertymän tulokseen saadaan 5/6 kerroin verrattuna Timoshenkon palkkimalliin (Lampinen 2014, s. 17). Timoshenkon ratkaisussa (3.12) esiintyy leikkauskorjauskerroin  $\kappa$ , jolle Gere ja Timoshenko (Gere & Timoshenko 1984, s. 663–664) ovat määrittäneet arvon  $\kappa = 6/5$ . Tällöin saadut kiertymän ratkaisut ovat Timoshenkon ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallien mukaisesti identtiset. Kun palkkia ei rastia pystysuoria kuormia, ovat mallien ratkaisut täten samanlaiset. Esimerkkitehtävän palkin poikkileikkauksen ollessa suorakaiteen muotoinen, voidaan todeta Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin antavan tarkan tuloksen. Palkin ollessa staattisesti määrätty, voidaan siirtymäratkaisut määrittellä palkin tasapainoyhtälöiden avulla. Tämä edellyttää myös pystysuoran jakautuneen taasisen kuorituksen olevan nolla, kuten esimerkkitehtävässä. Tämän vuoksi palkkia kuormittava jakaantunut momenttikuormitus aiheuttaa palkille ainoastaan vakio kiertymä sen pituuden suhteen.

### 3.4 Palkkimallien antamat tulokset

Esimerkkitehtävän avulla palkkimallien välille saatiin eroja niiden antamissa ratkaisuissa staattisessa tilanteessa. Erot olisivat olleet selvemmat, jos esimerkkitehtävässä palkkia olisi rasittanut pystysuora tasaisesti jakaantunut kuormitus  $q$ . Palkkimallien sisältämien ehtojen puolesta voitiin jo hieman ennustaa ratkaisujen eroavaisuuksia. Esimerkiksi Eulerin–Bernoullin malli ei kykene leikkausmuodonmuutoksia poikkileikkauksessa, kun Timoshenko malli puolestaan ottaa ne huomioon keskimääräisesti ja sen tarkempi jakauma otetaan huomioon likimääräisesti käyttäen leikkauskorjauskerrointa  $\kappa$ . Kahden edellä mainitun mallin johtaessa taipuman suhteen neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöön, on niiden ratkaisut suhteellisesti helpot, kun taas Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin johtaessa kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälö, on tuloksen saaminen selvästi monimutkaisempaa. Mallin ehto, jossa leikkausjännitykset häviävät palkin ylä- ja alapinnalla, tuo kinemaattisiin yhtälöihin korkeamman asteen polynomin palkin paksuus suunnassa.

Eulerin–Bernoullin mallin mukaan esimerkkitehtävän mukaisessa tilanteessa palkin taipuma häviää. Mallin mukaan poikkileikkaus säilyy taivutuksessa tasona, joka on kohti suorassa pituussäikeitä vastaan (Salmi & Pajunen 2009, s. 171). Tasapainoyhtälöistä voidaan kuitenkin ratkaista jännitysresultantit. Palkin ainoana sisäisenä rasituksena on siten vain leikkausvoima ja siten palkin kinemaattisten rajoitteiden johdosta siirtymätila häviää.

Timoshenkon palkkimalli ottaa huomioon keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen (Lampinen 2014, s. 8), jolloin kiertymään syntyy lisäys liukumasta. Esimerkkitehtävässä leikkausvoima on vakio, jonka vuoksi myös liukukulma on vakio koko palkin pituudelta. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että palkin kiertymä koko pituudelta on vakio, kun liukukulma on yhtä suuri kuin kiertymä, koska taipuma palkilla häviää, Eulerin–Bernoullin mallin mukaisesti. Salliessa leikkausmuodonmuutokset, palkilla siirtymätila koostuu kiertymästä ja siihen syntyy lisäys liukumasta.

Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallissa leikkausjännityksen häviäminen palkin ylä- ja alatasossa otetaan huomioon lisäämällä näille omat kertoimensa neutraaliakselin taipuman lisäksi, joka korostuu saaduissa voimaresultanteissa verrattuna muiden mallien voimaresultanttien arvoihin (Wang et al. 2000, s. 14). Timoshenkon palkkimallin mukaisesti taivutusmomentti sekä taipuma häviää palkilla. Jakaantuneen momenttikuormituksen aiheuttaman leikkausvoiman vuoksi palkin siirtymätila koostuu vakio kiertymästä, jonka tulos on identtinen Timoshenkon mallin kanssa, kun leikkauskorjauskertoimena käytetään arvoa  $\kappa = 6/5$ . Petrolito (Petrolito 1995, s. 34–36) on artikkelissaan esittänyt

numeerisen ratkaisumenetelmän korkeamman kertaluvun palkkimallille käyttäen hyväksi mallin analyttistä ratkaisua. Ratkaisussa Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallin mukaiset tasapainoyhtälöt voidaan ratkaista homogeenisen yhtälön ja yksittäisratkaisun avulla. Homogeenisessa yhtälössä muodostetaan taivutuksen  $w$  ja kiertymän  $\phi$  funktiot. Funktiot ovat korkeamman asteen differentiaaliyhtälöitä, joiden ratkaisuksi saadaan kuusi tuntematonta vakiota  $C_1, C_2, \dots, C_6$ . Vakiot ratkaistaan reunaehtojen avulla. Vakioiden sekä funktioiden avulla muodostuu Petroliton mukaiset yksittäisratkaisut kiertymälle ja taivutukselle. Siirtymätilan ratkaisu saadaan yksittäisratkaisun ja homogeenisen yhtälön ratkaisun summana (Lampinen 2014, s. 21). Esimerkkitehtävässä palkki on staattisesti määrätty sekä pystysuoria kuormituksia ei ole, jolloin Petroliton ratkaisua ei voida käyttää, ja näin ollen ratkaisut saadaan suoraan tasapainoyhtälöiden ja reunaehtojen avulla.

Leikkausmuodonmuutosten sallivien mallien tulokset ovat samankaltaisia tarkkuuden puolesta. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallin saavuttama tarkkuus vaatii paljon vaivaa, joten yleensä tyydytään Timoshenkon mallin antamiin tuloksiin. Myös poikkileikkauksen rajoittaminen suorakaiteen muotoisille poikkileikkauksille vähentää korkeamman asteen palkkimallien käyttöä staattisten tilanteiden ratkaisussa. Tällöin palkkimallissa voi ajatella olevan puutteita käytännön hyödyntämistä ajatellen. Vaikka Eulerin–Bernoullin, Timoshenkon sekä Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallit ovat reunaehdoiltaan erilaisia, voidaan niiden välille tehdä yhteyksiä. Esimerkkitehtävän kaltaisessa tilanteessa Timoshenkon ja Eulerin–Bernoullin mallin taivutusmomentit ja leikkausvoimat ovat samat. Reddyn mukaan (Wang et al. 2000, s. 28) Timoshenkon mallin antama taipuman derivaatta on sama kuin Eulerin–Bernoullin mallissa  $w''$ . Kun tarkastellaan staattisesti määrämätön palkkia, esimerkiksi palkin toinen tuki on sivusiirtävä  $x$ -askelin suunnassa, jännitykset ovat malleissa erilaiset, koska ratkaisu vaatii yhteensopivuusyhtälön, johon sisältyy poikittaisten leikkausmuodonmuutosten vaikutus (Wang et al. 2000, s. 28). Tämä on selitettävissä mallien ehtojen välisistä eroista leikkausmuodonmuutoksissa.

Eulerin–Bernoullin ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallien väliset yhteydet muodostetaan ylimääräisen toiseen asteen differentiaaliyhtälön avulla, koska tarkka palkkimalli muodostetaan neljännen asteen yhtälön  $w_0$  ja toisen asteen yhtälön  $\phi$  avulla (Wang et al. 2000, s. 29). Tämä johtuu siitä, kun Levinsonin–Bickfordin–Reddyn malli on kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja Eulerin–Bernoullin malli puolestaan neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Käytännössä leikkausmuodonmuutosten sallivien mallien välisiä yhteyksiä Eulerin–Bernoullin malliin voidaan käyttää aina, kun Eulerin–Bernoullin mallin ratkaisu on saatavana (Wang et al. 2000, s. 36). Eulerin–Bernoullin mallin ratkai-

sut ovat helposti määritettävissä tai niitä on saatavana useimmissa mekaniikan oppikirjoissa useille reunaehtotapauksille, teorioiden välisten yhteyksien tunnistaminen helpottaa Timoshenkon ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallien ratkaisujen laskentaa.

## 4. YHTEENVETO

Työssä käsiteltiin kolmea oletuksiltaan erilaista palkkimallia, joiden eroja tarkasteltiin esimerkkitehtävän avulla. Tärkeimpinä tarkastelun kohteina ovat palkin siirtymäratkaisut sekä jännitysresultantit palkilla. Palkkimalleina työssä oli Eulerin–Bernoullin, Timoshenkon ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallit. Malleissa käytettävä materiaali oletettiin isotrooppiseksi ja lineaarisesti kimmoisaksi ja palkin poikkipinnan geometria suorakaiteen muotoiseksi. Lähtökohtana oli johtaa kirjallisuuden avulla palkkimalleille niiden tasapainoyhtälöt lähtien liikkeelle siirtymäkentistä. Mallien tasapainoyhtälöt johdettiin käyttäen virtuaalisen työn periaatetta.

Rakenteiden käyttäytymistä tarkastellaan palkkimallien avulla, joista Eulerin–Bernoullin malli on kaikista tutuin. Malli jättää palkissa vaikuttavan leikkausvoiman aiheuttamat muodonmuutokset huomioimatta, joka aiheuttaa epätarkkuutta lyhyillä sekä korkeilla palkeilla, kun  $(\frac{h}{L})^2 \ll 1$ . Malli antaa kuitenkin suunnittelulle tarpeeksi hyvät pohjat, kun palkin paksuuden ja pituuden suhde säilyy pienenä. Timoshenkon malli ottaa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset likimääräisesti huomioon olettamalla sen jakautuvan tasaisesti palkin poikkileikkauksessa. Poikkileikkaukseen syntyvän kiertymän ja taivutusvastusten huomioimisen puolesta Timoshenkon malli on parempi kuvaamaan paksujen ja lyhyiden palkkien käyttäytymistä. Leikkausmuodonmuutosten jakauman keskimääräinen oletus synnyttää mallissa virhettä, koska todellisuudessa leikkausjännitykset häviävät palkin ylä- ja alapinnassa. Tätä virhettä korjataan käyttämällä korjauskerrointa. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn malli toteuttaa todellisen oletuksen leikkausmuodonmuutosten jakaumasta, jolloin se ei tarvitse korjauskerrointa. Malli on kuudennen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jolloin se on huomattavasti työläämpi kuin Timoshenkon ja Euler–Bernoullin palkkimallit. Mallilla saatava tarkkuus palkin käyttäytymisen tarkastelussa on tarkka, mutta tarvittava tarkka tulos ei ole työn määrän kannalta usein tarvittava. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallin geometria rajoittuu suorakaiteen muotoisille palkeille, joka on huomattava puute käytännön hyödyntämistä ajatellen.

Esimerkkitehtävän tilanteessa Eulerin–Bernoullin mallissa palkilla on vain leikkausvoimaa; siirtymät ja taivutusmomentit ovat nolla koko palkin matkan kinemaattisten rajoitteiden takia. Timoshenkon ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn palkkimallin mukaan, palkille syntyy kiertymää, joka on vakio jakaantunen momenttikuormituksen aiheuttaman leikkausvoiman takia ja taipuman ollessa palkilla nolla, häviää taivutusmomentti koko

palkin poikkileikkauksessa. Levinsonin–Bickfordin–Reddyn ja Timoshenkon mallien tuloksien erot ovat mitoitustehtävän kannalta mitättömiä. Näyttäisi siltä, ettei korkeamman kertaluvun palkkimalleilla kannata korvata Timoshenkon mallia staattisten tilanteiden suunnittelun työkaluna.

Leikkausmuodonmuutosten sallivien palkkimallien, Timoshenkon ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallit, tulokset ovat tarkkuuden puolesta hyvin samanlaisia. Eulerin–Bernoullin tulokset eroavat muista kahdesta mallista palkin pituuden ja korkeuden suhteen ollessa pieni. Eulerin-Bernoullin ja Timoshenkon mallien taivutusmomentit sekä leikkausvoimat ovat samaa luokkaa niveltukiselle palkille. Korkeamman asteen palkkimallin tulokset ovat eri luokkaa, kuin muiden kahden edellä mainitun mallin, mutta esimerkiksi Eulerin-Bernoullin ja Levinsonin–Bickfordin–Reddyn mallien välille voidaan muodostaa yhteys käyttäen ylimääräistä toiseen asteen differentiaaliyhtälöä.

## LÄHTEET

Bickford, W.M., 1982. *A consistent higher order beam theory*, Arizona State University.

Gere, J.M. & Timoshenko, S.P., 1984. *Mechanics of materials, second edition*. Monterey, CA: Brooks/Cole.

Lampinen, M., 2014. *Eräiden palkkimallien staattisten ja dynaamisen vasteen vertailua*, diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto.

Levinson, M., 1980. *An accurate, simple theory of statics and dynamics of elastic plates*. Department of Mechanical Engineering, University of Maine at Orono.

Petrolito, J., 1995. Stiffness analysis of beams using a higher-order theory. *Computers and Structures*, 55(1), s. 33–39.

Salmi, T & Pajunen, S., 2009. *Lujuusoppi*. Pressus OY, Tampere,

Wang, C.M., Reddy, J.N. & Lee, K.H., 2000. *Shear deformable beams and plates relationships with classical solutions*. Amsterdam: Elsevier.