Tampereen yliopisto

Maiju Mäenpää

GEOGEBRA APUNA KOHTISUORUUDEN YMMÄRTÄMISESSÄ

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Lehtori Terhi Kaarakka
Toukokuu 2020

TIIVISTELMÄ

Maiju Mäenpää: GeoGebra apuna kohtisuoruuden ymmärtämisessä
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2020

Tämän työn aiheena on pisteen etäisyys tasosta ja suorasta. Pisteen etäisyys suorasta on yksi lukion pitkän matematiikan oppimäärän keskeisistä sisällöistä. Lukion edellisessä (2003), nykyisessä (2015) ja tulevassa (2021) opetussuunnitelman perusteissa pisteen etäisyys suorasta sisällytetään analyyttiseen geometriaan. Pisteen etäisyyttä suorasta sivutaan lukion pitkän matematiikan oppimäärässä myös vektoreiden yhteydessä. Pisteen etäisyys suorasta sivuaa esimerkiksi kohtisuoruutta ja erilaisia suoran yhtälöitä.

Työssä keskitytään matemaattisen teorian lisäksi GeoGebran käyttöön opetuksen tukena sekä tutustutaan olemassa olevaan tietoon oppimisvaikeuksista, käyttökohteista ja ylioppilaskoetehtävistä. Työtä varten luotiin GeoGebra-kirja, johon on koottu monipuolisesti erilaisia GeoGebran verkko- tai tietokonesovelluksella ratkottavia tehtäviä. Useimpiin kirjan tehtäviin on ohjelmoitu sisäinen tarkistin sekä vihjetoiminto, mikä mahdollistaa tehtävien oikeiden numeroarvojen tarkistamisen ja vuorovaikutteisen oppimisen.

Vaikka pisteen etäisyys suorasta mainitaan lukion opetussuunnitelman perusteissa yhtenä keskeisenä sisältönä, sen käsittelyyn ja opettamiseen on varattu oppikirjojen suunnitelmissa aikaa keskimäärin yksi oppitunti. Tämä voi osittain selittää sitä, miksi pisteen etäisyyttä suorasta ja tasosta ei yleensä kysytä ylioppilaskirjoituksissa. Toinen taustalla oleva syy voi olla ylioppilaskoetehtävien ja yleisten harjoitustehtävien mekaaninen luonne, mihin ei tarvita soveltavia taitoja. Tässä työssä havaittiin, että tehtävistä on mahdollista laatia melko haastavia ja eri aiheita yhdisteleviä kokonaisuuksia.

Monipuolisten, vuorovaikutteisten ja erilaisten tehtävien tarkoituksena on matematiikan teoriataitojen lisäksi tukea visuaalisten taitojen kehittymistä sekä lisätä motivaatiota GeoGebran käyttöön, koska se on yksi keskeisimmistä apuvälineistä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. GeoGebran visuaaliset ja vuorovaikutukselliset kuvaajat edistävät opiskelijoiden visuaalista hahmottamiskykyä, ymmärtämistä ja muistamista. Näitä taitoja tarvitaan lähes jokaisessa ammatissa nykyisessä tietoyhteiskunnassa. Tietotekniset taidot ja kokemukset erilaisista ohjelmistoista tukevat uusien teknisten taitojen oppimista ja vastaavat tämän hetken työelämän tarpeisiin.

Avainsanat: pisteen etäisyys suorasta, analyyttinen geometria, lukio, GeoGebra, ylioppilaskirjoitukset, kohtisuoruus, oppimisvaikeudet

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Maiju Mäenpää: Using GeoGebra to Understand Perpendicularity
Bachelor's Thesis
Tampere University
Degree Programme in Science and Engineering
May 2020

The subject of this work is the distance between a point and a plane or a line. The perpendicular distance from point to line is a part of the analytical geometry course in the Finnish upper secondary school curriculum of mathematics. In order to understand the distance of a point directly, one must know the properties closely related to it. These properties include, among others, the perpendicular, and the direct processing of different forms of line and plane equations.

The purpose of this work is to study how to teach the perpendicular distance from a point to a line or a plane. In addition to the mathematical theory, this work deals with the use of GeoGebra as a teaching aid, as well as existing knowledge of learning difficulties, uses, and matriculation exams in Finland. A GeoGebra book was created for this work, which compiled various types of mathematical exercises. Most of the exercises include some hints and a checking tool that checks the syntax of the answer and gives some feedback.

Although the point distance from the line is mentioned as one of the main contents of the upper secondary school curriculum, there is no more than one lesson time to teach it in the upper secondary school. Based on this, it is it quite understandable that it has not been recent on the matriculation examination. In the GeoGebra book, there are many exercises, and a somewhat challenging exercise that combines different subjects.

This work and the GeoGebra books try to support the development of visual skills and increase motivation with the using of GeoGebra application. The GeoGebra application is one of the main software programs of matriculation exams in Finland. The visualized diagrams support the development of visual skills, understanding and memory in GeoGebra. These skills are important, and they are needed in working life. All in all, all technical skills and experiences support each other and help to learn new technical skills.

Keywords: shortest distance, perpendicular distance from point to line, perpendicularity, analytical geometry, GeoGebra, Upper secondary school

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

SISÄLLYSLUETTELO

1 Johdanto . . . 1
2 Teoreettinen viitekehys . . . 2
2.1 Matemaattinen tausta . . . 2
2.1.1 Pistetulo . . . 3
2.1.2 Kohtisuoruus . . . 4
2.1.3 Avaruudet . . . 4
2.1.4 Suoran ja tason yhtälö . . . 5
2.1.5 Normi, projektio ja vektoreiden välinen kulma . . . 9
2.2 Pisteen etäisyys suorasta . . . 12
2.3 Pisteen etäisyys tasosta . . . 15
2.4 Näkökulmia opetukseen . . . 15
2.4.1 Pisteen etäisyyden suorasta ja tasosta opettaminen . . . 16
2.4.2 GeoGebra opetuksessa . . . 16
2.4.3 Oppimisen haasteet . . . 17
2.5 Matematiikan ylioppilaskirjoitukset . . . 19
2.5.1 Käytössä olevat apuvälineet ja ohjelmistot . . . 19
2.5.2 Hyvä ylioppilaskirjoitusvastaus . . . 20
2.6 Käyttökohteita pisteen etäisyydelle suorasta ja tasosta . . . 21
3 Pisteen etäisyys suorasta ja tasosta ylioppilaskirjoituksissa . . . 22
4 Opetusmateriaalina GeoGebra-kirja . . . 24
4.1 Johdantotehtävät . . . 24
4.2 Perustehtävät . . . 25
4.3 Soveltavat ja luovat tehtävät . . . 26
4.4 Havaintoja tehtävistä . . . 26
5 Yhteenveto . . . 27
Lähteet . . . 28
Liite A GeoGebra - tehtävät . . . 30
Liite B GeoGebra - malliratkaisut laskutehtäviin . . . 34

KUVALUETTELO

2.1 Yksiulotteinen avaruus 4
2.2 Projektion yhteys kosiniin yksikköympyrällä 10
2.3 Havainnollistus Lauseen 2.5 tilanteesta 10
2.4 Havainnekuva Lauseen 2.6 tilanteesta 12
2.5 Havainnollistus esimerkin 2.1 tilanteesta 13
2.6 GeoGebran aloitusnäyttö tietokonesovelluksessa 17
2.7 Abitti-Editorilla tehty esimerkkivastaus 20

4.1 Tehtävä 1.1 Loppuratkaisu 24
4.2 Tehtävä 2.1 Loppuratkaisu 25

A.1 Tehtävä 1.1 tehtävän alussa 30
A.2 Tehtävä 1.2 Ohjeistus piirtämiseen 30
A.3 Tehtävä 1.3 Piirrä ja mittaa 31
A.4 Tehtävä 2.1 Etäisyyden laskeminen malliratkaisuineen 31
A.5 Tehtävä 2.2 Pisteen etäisyys suorasta, yhtälön täydennys 32
A.6 Tehtävä 3.1 Etäisyyden laskeminen malliratkaisuineen 32
A.7 Tehtävä 4 Luovat tehtävät 33

TAULUKKOLUETTELO

3.1 Pisteen etäisyys suorasta pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa tehtävätyyppeineen syksystä 1999 syksyyn 2019 22

LYHENTEET JA MERKINNÄT

d	etäisyys
$\|a\|$	itseisarvo luvulle a
CC	lisenssi luovien töiden jakamiselle (engl. Creative Commons)
LOPS	lukion opetussuunnitelman perusteet
$\mathbf{n}$	normaalivektori
$\|\mathbf{v}\|$	normi, vektorin $\mathbf{v}$ pituus
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	pistetulo vektoreiden $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u}$ välillä
$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$	projektio, vektorin $\mathbf{u}$ projektio vektorille $\mathbf{v}$
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
CAS	symbolinen laskentaohjelmisto (engl. Computer Algebra System)
$\mathbf{v}^T$	transpoosi
USB	tietokonekaapeleiden liitäntäteknologia (engl. Universal Serial Bus)
$\mathbf{v}$	vektori, lihavoitu kirjain tekstissä
URL	verkkosivun osoite (engl. Uniform Resource Locator)

1 JOHDANTO

Matematiikan merkityksestä työelämässä ja yhteiskunnassa keskustellaan paljon. Matematiikkaa tarvitaan kaikilla aloilla ja teknologian kehittyminen edellyttää erilaisia matemaattisia taitoja. Matematiikan arvosanoja painotetaan yliopistojen opiskelijavalinnoissa [29]. Vuoden 2016 lukion opetussuunnitelman perusteiden avulla haluttiin nykyaikaistaa opetusta vastaamaan yhteiskunnan vaatimuksia. Sekä nykyisessä että tulevassa 2021 opetussuunnitelman perusteissa korostetaan teknologian käyttöä, monipuolisia opetustapoja sekä yhteistyötaitoja oppimisessa ja opetuksessa. [13, 14]

Tässä työssä tarkastellaan lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaista pitkän matematiikan analyyttisen geometrian kurssin osa-aluetta eli pisteen etäisyyttä suorasta. Samalla sivutaan vektoreita, tason yhtälöitä ja pohditaan matematiikan opettamista. Pisteen etäisyys suorasta on yksi analyyttisen geometrian perusasioista, jonka ymmärtäminen on edellytys esimerkiksi matematiikan ja fysiikan opiskelun jatkamiseen yliopistossa.

Tämän analyyttisen geometrian osa-alueen opettamisen lähtökohtana ovat erilaiset opetusmenetelmät, oppimisen haasteet sekä ylioppilaskirjoitukset, joita ei voida lukiosta puhuttaessa sivuuttaa. Toisaalta voidaan pohtia, onko olemassa oppimistapaa, joka toimisi kaikilla opiskelijoilla, ja sitä miten pisteen etäisyyden suorasta voisi ymmärtää syvällisemmin osana matematiikan kokonaisuutta eikä vain yksittäisenä ilmiönä. Opettamisen yhteydessä käsitellään erityisesti GeoGebra –sovelluksen käyttömahdollisuuksia. Sen avulla on helppo lisätä opiskelijoiden toiminnallisuutta matematiikan opiskelussa, havainnollistaa ilmiöitä ja kehittää heidän avaruudellista hahmottamiskykyänsä. Ohjelmisto on helposti saatavilla ja ladattavissa käyttöön. GeoGebra on käytössä yhtenä apuvälineenä sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa.

Edellä kerrottuja sisältöjä käsitellään aluksi teorian ja olemassa olevan tiedon kautta. Seuraavissa luvussa käsitellään ensin ylioppilaskoetehtäviä, jonka jälkeen tutustutaan GeoGebran avulla tuotettuun opetussisältöön. Kansainvälisen koulutuksen arviointikeskus Karvi on tutkinut matemaattista osaamista toisen asteen lopussa 2015 [16]. Sen mukaan opettajan käyttämiä menetelmiä tukee se, että opiskelijat itse kokevat ymmärtäneensä asian. Tämä työ pyrkii GeoGebran avulla selkeyttämään ja esittelemään yhden opetustavan pisteen etäisyydelle suorasta. Työn lopussa olevissa liitteissä esitellään tuotetut GeoGebra -materiaalit kokonaisuudessaan sekä niiden vastaukset.

2 TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Pisteen etäisyys suorasta kuuluu lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan analyyttiseen geometrian kurssin sisältöihin sekä vuoden 2016 että 2021 säädöksissä. Vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteissa pisteen etäisyys suorasta kuului pitkän matematiikan kurssiin 4 [12, s. 120]. Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman vastaava kurssi on pitkän matematiikan kurssi 5 [13, s. 132–133]. Vuonna 2021 analyyttinen geometria palaa takaisin pitkän matematiikan neljänneksi kurssiksi, jolloin kurssi yhdistyy yhdeksi kurssiksi vektorikurssin kanssa [14, s. 225]. Kaikissa näissä opetussuunnitelman perusteissa pisteen etäisyys suorasta mainitaan analyyttisen geometrian kurssin keskeisenä sisältönä. Lisäksi pisteen etäisyyttä suoraan sivutaan pitkän matematiikan vektorikurssilla ja se laajennetaan vektoreiden yhteydessä kattamaan pisteen etäisyys tasosta [8, s. 109–115].

2.1 Matemaattinen tausta

Pisteen etäisyyden suorasta laskemiseen tarvitaan ymmärrystä analyyttisen geometrian peruskäsitteistä sekä yhtälöistä. Näitä ovat esimerkiksi koordinaatiston, lukusuoran ja erilaisten suorien ymmärtäminen ja kyky muodostaa niiden avulla yhtälöitä. [10, s. 4.] Jos pisteen etäisyyttä suorasta tai tasosta käsitellään vektoreiden avulla, on ymmärrettävä vektoreiden ominaisuuksia ja pistetulon määritelmä.

Tässä työssä yhtenä merkintätapana käytetään pystyvektoreita. Tilan säästämiseksi osa pystyvektoreista kirjoitetaan transpoosina. Transpoosin myötä pystyvektori kääntyy vaakavektoriksi. Muodostettua transpoosia merkitään tunnuksella T kyseisen vektorin yläindeksissä. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin $\mathbf{u}$ seuraavat muodot ovat identtiset, kun merkitään

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T.$$

2.1.1 Pistetulo

Piste- eli skalaaritulo määritellään kahden vektorin avulla. Pistetulosta saadaan yksittäinen reaaliluku, josta käytetään joskus myös nimitystä skalaariluku. Tässä alaluvussa määritellään pistetulo yleisesti avaruudessa $\mathbb{R}^n$. [19, s.15]

Määritelmä 2.1. Olkoot $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T$ kaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoria. Tällöin vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ *pistetulo* on

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Pistetulon määritelmästä saadaan johdettua pistetulon perusominaisuudet eli liitännäisyys, vaihdannaisuus ja skalaarilla kertominen. Pistetulon määritelmästä voidaan laskea myös vektorin pistetulo itsensä kanssa, mikä on esitetty seuraavassa lauseessa. Tätä lausetta tarvitaan myöhemmin, kun lasketaan vektorin pituutta. [19, s. 16]

Lause 2.1. *Olkoon* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*, tällöin* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ *ja* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *ainoastaan silloin, jos* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Todistus. Olkoon $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$, niin tällöin

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \geq 0,$$

sillä v_i^2 on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla kaikilla reaaliluvuilla v_i, kun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \\ &= 0, \text{ ainoastaan kun } v_i = 0 \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Joten $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ainoastaan, jos $\mathbf{v}$ on nollavektori. □

Pistetulon geometrisia ominaisuuksia käsitellään tarkemmin seuraavien lukujen kohtisuoruuden (luku 2.1.2) ja normin (luku 2.1.5) yhteydessä. Pistetulon avulla on mahdollista laskea vektoreiden välisiä kulmia ja tarkistaa vektoreiden välinen kohtisuoruus.

2.1.2 Kohtisuoruus

Kohtisuoruuden ymmärtäminen on keskeinen osa pisteen ja tason etäisyyttä suorasta. Pisteen etäisyys suorasta halutaan laskea lyhyimmälle mahdolliselle matkalle. Kun kaksi suoraa tai taso ja suora ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja toiselta suoralta valitaan tutkittava piste, voidaan löytää lyhin mahdollinen etäisyys pisteen ja tason tai suoran välille. Syntyvän suoran ja sitä vastaan kohtisuoran alkuperäisen suoran välinen kulma on tällöin $90°$ eli *suorakulma*. Radiaanien avulla ilmaistuna kulma on $\pi/2$. Toisiaan vastaan kohtisuorista suorista voidaan käyttää nimitystä *normaali* tai *ortogonaalinen*.

Määritelmä 2.2. Vektoreiden välinen *kohtisuoruus* $\mathbf{v_1} \perp \mathbf{v_2}$ määritellään pistetulon avulla. Vektorit $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0,$$

kun vektorit $\mathbf{v_1}$ ja $\mathbf{v_2}$ eivät ole *nollavektoreita* eli $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \neq \mathbf{0}$. [19, s.544]

Määritelmässä 2.2 lisäehtona on, etteivät tutkittavat vektorit ole nollavektoreita. Tämä lisäehto ei ole välttämätön, koska myös nollavektorit toteuttavat kyseisen määritelmän. Nollavektorit ovat kohtisuorassa kaikkien vektoreiden kanssa ja määritelmän ehto on tehty osittain vain laskemisen mielekkyyden kannalta, koska nollavektoreille ei voida määrittää konkreettista suuntaa. [19, s. 16]

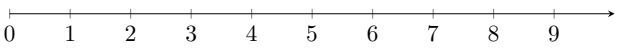
2.1.3 Avaruudet

Analyyttisessä geometriassa tilanteita voidaan tarkastella yksi- tai useampiulotteisessa avaruudessa. Avaruudella tarkoitetaan tilanteen tarkasteluun valittua joukkoa. Matemaattisesti avaruus voidaan määritellä karteesisen tulon avulla [5, s. 11-12].

Määritelmä 2.3. Kahden joukon A ja B *karteesista tuloa* merkitään $A \times B$. Tähän joukkoon kuuluvat kaikki järjestetyt parit (a, b), missä a kuuluu joukkoon A ja b joukkoon B. Tällöin

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

Kun tarkastellaan yksittäistä reaalilukupistettä tai -lukuarvoa, tarkastellaan yksiulotteista reaaliavaruutta $\mathbb{R}$. Kuvassa 2.1 on yksiulotteisen reaaliavaruuden lukusuora. [10, s. 8]



Kuva 2.1. *Yksiulotteinen avaruus*

Pisteen etäisyys suorasta lasketaan lukiotasolla yleensä kaksiulotteisessa tasokoordinaatistossa $\mathbb{R}^2$. Tilannetta ilmaistaan kahden koordinaatin avulla. Tällöin käytetään yleensä *xy*-koordinaatistoa tai jotain vastaavaa karteesista tasoa. Avaruus $\mathbb{R}^2$ voidaan Määri-

telmän 2.3 avulla ilmaista muodossa

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

Avaruuksien tarkastelua voidaan jatkaa myös useampaan ulottuvuuteen. Esimerkiksi merkintä $\mathbb{R}^3$ tarkoittaa kolmiulotteista reaaliavaruutta.

Matemaattisessa tarkastelussa käytettävän avaruuden valintaan vaikuttaa tutkittava tilanne ja valittu näkökulma. Vaikka suoran yhtälöä tarkasteltaisiin useampiulotteisessa avaruudessa, se voidaan aina yksinkertaistaa kaksiulotteiseen avaruuteen. Vastaavasti tason tarkastelu voidaan yksinkertaistaa kolmiulotteiseen avaruuteen.

2.1.4 Suoran ja tason yhtälö

Suoran ja tason yhtälöt voidaan muodostaa usealla eri tavalla. Jos suoran tai tason yhtälö muodostetaan vektoreiden avulla, siitä voidaan ratkaista suoran yleinen, ratkaistu, vektori- ja normaalimuodot. Laskuissa käytettävä suoran yhtälön muoto voidaan valita tilanteen mukaan, koska saman suoran eri yhtälömuodot ovat keskenään ekvivalentteja. [28, s. 33]

Suoran ja tason yhtälöiden määritelmät perustuvat pistetulon Määritelmään 2.2, jonka mukaan toisiaan vastaan kohtisuorien vektoreiden pistetulo on nolla. Määritelmässä piste $\mathbf{n}$ on jokin suoran normaalivektori eli suoraa vastaan kohtisuorassa oleva vektori. Seuraavissa määritelmissä pisteet $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{p}$ ovat jotkin suoran pisteet, joista syntyy toinen tarvittavista vektoreista.

Määritelmä 2.4. Olkoon l suora $\mathbb{R}^2$-avaruudessa, $\mathbf{n}$ suoran *normaalivektori* sekä $\mathbf{p}$ jokin suoralle kuuluva piste. Tällöin suoran *normaalimuodossa* suoralle kuuluvat kaikki ne pisteet eli *paikkavektorit* $\mathbf{x}$, joille

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0.$$

Määritelmä 2.5. Olkoon s taso $\mathbb{R}^3$-avaruudessa, $\mathbf{n}$ tason *normaalivektori* sekä $\mathbf{p}$ tasolle kuuluva piste. Tällöin tason *normaalimuodossa* tasolle kuuluvat kaikki ne pisteet eli *paikkavektorit* $\mathbf{x}$, joille

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0.$$

Määritelmät 2.4 ja 2.5 esittävät suoran ja tason normaalivektoreiden avulla muodostetut yhtälöt [28, s. 33]. Näistä määritelmistä saadaan johdettua muut tarvittavat suoran ja tason yhtälöt, kuten xy-tasosta tuttu suoran yhtälön yleinen muoto.

Määritelmä 2.6. Suoran l *vektoriyhtälö* $\mathbb{R}^2$- tai $\mathbb{R}^3$-avaruudessa on

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{s},$$

missä $\mathbf{p}$ on jokin suoran l piste, $\mathbf{s}$ on suoran *suuntavektori*, kun $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ja $t \in \mathbb{R}$.

Vektoriyhtälöä voidaan hyödyntää vektorialgebrassa. Saatu vektoriyhtälö on yksikäsitteinen, mutta se voidaan esittää äärettömän monella tavalla. Vektoriyhtälön lukuisien ratkaisujen mahdollisuus seuraa siitä, että suunta- ja paikkavektorit voidaan muodostaa erilaisten taustatietojen perusteella. [19, s. 33]

Lause 2.2. *Jokainen normaalimuodossa oleva avaruuden $\mathbb{R}^2$ suoran yhtälö voidaan esittää yleisessä muodossa*

$$ax + by = c. \tag{2.2}$$

Todistus. Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^2$ suoran l normaali $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$, paikkavektori $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}^T$ jokin suoralle kuuluva piste. Tällöin

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \Leftrightarrow ax + by = c,$$

missä $ax_0 + by_0 = c$. □

Suoran yhtälön yleistä muotoa voidaan kutsua eri tilanteissa ja lähteissä erilaisilla nimillä, vaikka tarkoitetaan samaa asiaa. Suoran yhtälön yleistä muotoa voidaan kutsua *ratkaisemattomaksi* eli *implisiittiseksi* muodoksi [3]. Jos puhutaan pelkästään suoran normaalista, niin tarkoitetaan kyseistä suoraa vastaan kohtisuorassa olevaa vektoria tai suoraa.

Määritelmä 2.7. Suoran *yleisestä* muodosta $ax+by = c$, missä $b \neq 0$, saadaan ratkaistua suoran yhtälö $y = kx + b$, missä vakiota $k = -a/b$ kutsutaan suoran *kulmakertoimeksi*.

Vaihtoehtoisesti kulmakerroin voidaan määrittää koordinaattien erotuksien suhteena

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{2.3}$$

missä $\Delta x = x_2 - x_1$ ja $\Delta y = y_2 - y_1$ ja suora kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta.

Kulmakertoimella on erilaisia ominaisuuksia eri tilanteissa. Niitä käsitellään tarkemmin Määritelmässä 2.8 ja Lauseessa 2.3. [7, s. 371–374]

Määritelmä 2.8. Kaksi suoraa ovat *yhdensuuntaisia*, jos niillä on sama kulmakerroin.

Lause 2.3. *Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ suoran kulmakertoimen keskeisiä ominaisuuksia ovat*

1. *suoran kulmakerroin on nolla, jos se kulkee x-akselin suuntaisesti.*
2. *jos suora kulkee y-akselin suuntaisesti, sen kulmakerrointa ei voida määritellä.*
3. *jos k_1 on suoran l_1 ja k_2 suoran l_2 kulmakerroin ja $k_1 \neq 0$, niin suorat l_1 ja l_2 ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos $k_2 = -1/k_1$.*

Todistus. Todistetaan edellä esitellyt kulmakertoimen ominaisuudet.

1. Jos suora kulkee x-akselin suuntaisesti, niin kyseinen suora kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta, missä x_1 ja x_2 kuuluvat reaalilukuihin ja x_1 ja x_2 eivät ole samat. Toisaalta x-akselin suuntaisesti kulkevalla suoralla $y_1 = y$ ja $y_2 = y$, jolloin $y_2 - y_1 = y - y = 0$.

   Tällöin kulmakertoimen yhtälöstä (2.3) saadaan

   $$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0.$$

2. Jos suora l kulkee y-akselin suuntaisesti pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta, missä $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_1 = x_2 = x$ sekä $y_1 \neq y_2$, niin tällöin kulmakertoimen yhtälöstä (2.3) saadaan

   $$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x} = \frac{y_2 - y_1}{0} = \text{ei määritelty},$$

   koska nollalla jakamista ei ole määritelty.

3. Kulmakertoimien kohtisuoruuden ehdosta saadaan tulomuoto

   $$k_2 = -1/k_1 \Leftrightarrow k_2 k_1 = -1.$$

   Suoran l_1 on toteutettava alkuehto $k_1 \neq 0$. Muuten kulmakerrointa k_2 ei ole määritelty, koska

   $$k_2 k_1 = k_2 \cdot 0 = 0 \neq -1.$$

   Vastaavasti tämän ehdon on toteuduttava myös suoran l_2 kulmakertoimelle k_2

   $$k_2 k_1 = 0 \cdot k_1 = 0 \neq -1.$$

   Mikäli kulmakerroin voisi olla nolla, kyseinen suora kulkisi x-akselin suuntaisesti. Tällöin sitä vastaan kohtisuoran suoran kulmakerrointa ei olisi määritelty kohdan 2 mukaan ja kulmakertoimien tulossa $k_2 \to \infty$ ja $k_1 = 0$, jolloin $k_2 k_1$ ei olisi määritelty.

Jos l_1 ja l_2 ovat kaksi toisiaan vastaan kohtisuorassa olevaa suoraa, missä suoran l_1 yhtälö yleisessä muodossa on $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ ja suoran l_2 yhtälö $a_2x+b_2y+c_2 = 0$, niin suorien l_1 ja l_2 kulmakertoimet ovat

$$k_1 = \frac{a_1}{b_1} \text{ ja } k_2 = \frac{a_2}{b_2}.$$

Vektoreiden avulla lausuttuna nämä suorat voidaan kirjoittaa normaalimuodossa

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c_1 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c_2 = 0.$$

Koska suorat ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, saadaan Määritelmän 2.2 mukaisesti

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ Määritelmän 2.1 laskusäännöt

$\Leftrightarrow k_1b_1k_2b_2 + b_1b_2 = 0$ Sijoitetaan $a_1 = k_1b_1$ ja $a_2 = k_2b_2$

$\Leftrightarrow (k_1k_2 + 1)b_1b_2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + k_1k_2 = 0$ Tulon nollasääntö ja $b_1, b_2 \neq 0$

$\Leftrightarrow k_1k_2 = -1,$

mikä todistaa kahden kohtisuoran suoran kulmakertoimien tulon olevan -1.

□

Tasolle muodostetaan yleisen muodon yhtälö vastaavasti kuin Lauseessa 2.2 suoralle. Lauseessa 2.4 käytetään tason yhtälön vakiosta merkintää e, koska tässä työssä kirjain d on varattu etäisyyden tunnukseksi. Monissa muissa lähteissä, kuten lukiokirjoissa, tason yhtälön vakion tunnuksena käytetään kirjainta d (esimerkiksi [10]).

Lause 2.4. *Jokainen normaalimuodossa oleva avaruuden $\mathbb{R}^3$ tason yhtälö voidaan esittää yleisessä muodossa*

$$ax + by + cz = e. \tag{2.4}$$

Todistus. Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^3$ tason s normaali $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$, paikkavektori $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T$ jokin tasolle kuuluva piste. Tällöin

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = e, \end{aligned}$$

missä $ax_0 + by_0 + cz_0 = e$. □

2.1.5 Normi, projektio ja vektoreiden välinen kulma

Tässä luvussa käsitellään vektoreiden pistetulon ominaisuuksia, joiden avulla saadaan laskettua projektio ja normi sekä vektoreiden välinen kulma [19, s. 17–25].

Määritelmä 2.9. Vektorin $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T$ *normi* avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on positiivinen reaaliluku

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Lauseen 2.1 mukaan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ eli pituuden laskemiseen käytettävän neliöjuuren arvo on aina positiivinen kaikilla muilla reaaliluvuilla paitsi nollavektorilla.

Yhdistämällä pistetulo ja normi voidaan laskea vektoreiden välisiä kulmia. Tästä saadaan muodostettua yhteys kosiniin ja laskettua vektoreiden välinen kulma.

Määritelmä 2.10. Kahden vektorin $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ pistetulo on yhtä suuri kuin niiden pituuksien tulo kerrottuna niiden välisen kulman θ *kosinilla*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

missä vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ eivät ole nollavektoreita, lähtevät samasta pisteestä ja niiden välinen kulma θ kuuluu välille $[0, \pi]$. Tällöin vektorien välinen kulma θ on

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Määritelmän 2.10 avulla voidaan tarkastella pistetulon ominaisuuksia geometrisesti ja huomata yhteys Pythagoraan lauseeseen ja kosinilauseeseen. Jos vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, edellä esitetystä pistetulosta saadaan yhteys Määritelmään 2.2. Tällöin

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos 90^\circ = 0.$$

(a) *Vektoreiden välinen kulma yksikköympyrällä*

(b) *Vektorit ja niiden välisen kulman kosini*

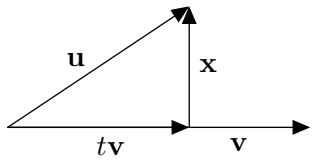
Kuva 2.2. *Projektion yhteys kosiniin yksikköympyrällä*

Toinen Määritelmästä 2.10 saatava merkitys on yhteys yksikköympyrään, kun vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat yksikkövektoreita. Tällöin

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v},$$

jolloin ne ovat yksikköympyrällä kuvan 2.2 mukaisesti. Kuvissa 2.2a ja 2.2b ovat samat vektorit ja niiden välinen kulma. Kuvasta 2.2a saadaan kuvan 2.2b tilanne, mistä saadaan vektoreiden välinen kosini ja kulma. Toisin sanoen yksikkövektoreiden pistetulosta saadaan niiden kosini, joka on samalla yksikkövektoreiden projektio.

Edellä on tarkasteltu vektoreiden välisen kulman ominaisuuksia. Vektoreiden välinen kulma voidaan määrittää ainoastaan sellaisille vektoreille, jotka lähtevät samasta pisteestä ja niiden välinen kulma voi olla enintään π eli 180 astetta. Näillä ehdoilla varmistutaan siitä, että vektoreiden välinen kulma voidaan määrittää yksikäsitteisesti. Yksikäsitteisyyden ansioista vektoreiden välisillä kulmilla on monia käyttökohteita esimerkiksi fysiikassa.



Kuva 2.3. *Havainnollistus Lauseen 2.5 tilanteesta*

Lause 2.5. *Olkoot vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita, joista vektori $\mathbf{v}$ ei ole nollavektori. Tällöin niistä voidaan muodostaa vektorin $\mathbf{u}$ projektio vektorille $\mathbf{v}$ eli vektorin $\mathbf{u}$ vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen osuus*

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

Todistus. Olkoot $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita, joista $\mathbf{v}$ ei ole nollavektori ja $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$. Tällöin $\mathbf{u}$ voidaan lausua vektoreiden $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{x}$ avulla seuraavasti $\mathbf{u} = t\mathbf{v} + \mathbf{x}$ eli $\mathbf{x} = \mathbf{u} - t\mathbf{v}$, missä $t \in \mathbb{R}$. Todistusta havainnollistaa kuva 2.3.

Koska vektorit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{v}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa eli $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$, niin

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = t\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} && \text{Osittelulaki} \\
\Leftrightarrow\ &\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) && \text{Skalaarin siirtosääntö} \\
\Leftrightarrow\ &t = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.
\end{aligned}$$

Tämän avulla saadaan laskettua projektio

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = t\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

□

Jos tutkitaan kahden vektorin välistä kulmaa siten, että vektorit yhdistetään toisiinsa kolmannella vektorilla, voidaan huomata Määritelmän 2.10 yhteys kosinilauseeseen. Projektion avulla voidaan muodostaa suorakulmainen kolmio ja tällöin vektoreiden välistä kulmaa voidaan tarkastella suoraan esimerkiksi kosinin ja vektoreiden pituuksien avulla ilman kosinilausetta. Tilannetta voi havainnollistaa esimerkiksi kuvan 2.3 avulla. Siinä ovat vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$, ja projektion jälkeen havaitaan vektorien välisen kulman olevan edelleen sama kuin alkuperäisellä vektorilla ja on muodostunut suorakulmainen kolmio.

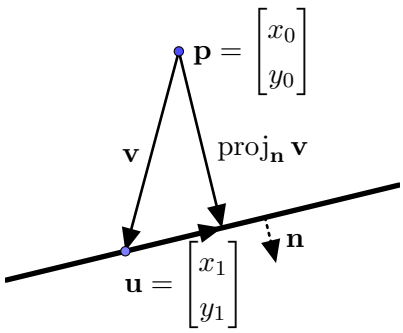
2.2 Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyydelle suorasta voidaan muodostaa yhtälö vektoreiden avulla Lauseen 2.6 mukaisesti [19, s. 38–40].

Lause 2.6. *Olkoon suoran l yleinen muoto $ax + by + c = 0$, kun $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tällöin pisteen $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ ja suoran l välinen lyhyin etäisyys d avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on*

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Todistus. Todistetaan lause projektion avulla. Olkoon $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T$ jokin suoran l piste. Ratkaistaan suoran l yleisestä muodosta suoran normaalivektori $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$.



Kuva 2.4. *Havainnekuva Lauseen 2.6 tilanteesta*

Tällöin voidaan laskea projektio etäisyydelle eli vektorin $\mathbf{v}$ projektio vektorille $\mathbf{n}$, kun vektori $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{u}$ ja

$$\begin{aligned} d = \|\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{v}\| &= \left\| \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) \mathbf{n} \right\| = \left| \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \right| \|\mathbf{n}\| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\left| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{bmatrix} \right|}{\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|} \\ &= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

kun $c = -(ax_1 + by_1)$.

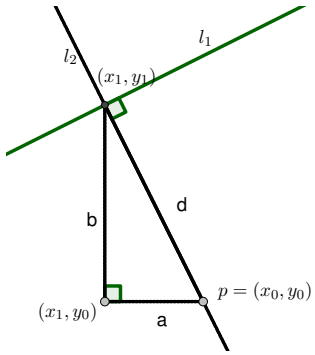
Tutkitaan seuraavaksi, onko vakio c aina sama edellä määritelty vakio. Muodostetaan vektorin $\mathbf{p} - \mathbf{v}$ projektio normaalivektorille $\mathbf{n}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}-\mathbf{v})\| &= \left\|\left(\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{v})}{\|\mathbf{n}\|^2}\right)\mathbf{n}\right\| = \left|\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{v})}{\|\mathbf{n}\|}\right| = \frac{|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{v})|}{\|\mathbf{n}\|} \\ &= \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0-(ax_1+by_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned}$$

Jos tutkittava suoran piste olisikin $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T$ ja tämän suoran yhtälö normaalivektori $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$, normaalimuodosta voidaan yleistää $ax + by = ax_2 + by_2$. Tällöin vakio $c = ax_2 + by_2$.

Koska saadaan projisoitua $\mathbf{p}-\mathbf{v}$ normaalille, jokaisen suoran mielivaltaisen pisteen avulla voidaan muodostaa yhtälö pisteen etäisyydelle suorasta. □

Lauseesta 2.6 saatu etäisyyden yhtälö voitaisiin todistaa myös geometrisesti [4] sekä ratkaista Pythagoraan lauseen avulla, kuten esimerkissä 2.1. Esimerkin tilannetta havainnollistaa kuva 2.5.



Kuva 2.5. *Havainnollistus esimerkin 2.1 tilanteesta*

Esimerkki 2.1. Olkoon tutkittava piste $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ ja (x_1, y_1) jokin suoran l_1 piste. Suoran l_1 pisteestä voidaan muodostaa suora l_2, joka kulkee pisteiden (x_0, y_0) ja (x_y, y_1) kautta, missä $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ ja suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Saatu kohtisuoruus on lyhyin etäisyys pisteiden välillä. Näiden tietojen perusteella voidaan ratkaista suoran l_2 kulmakerroin Lauseen 2.3 mukaisesti ja muodostaa toisen asteen yhtälö. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow a(y_1 - y_0) = b(x_1 - x_0) \\ &\Rightarrow (a(y_1 - y_0)) - (b(x_1 - x_0)) = 0 \\ &\Rightarrow (a(y_1 - y_0) - b(x_1 - x_0))^2 = 0 \\ &\Rightarrow a^2(y_1 - y_0)^2 - 2ab(y_1 - y_0)(x_1 - x_0) + b^2(x_1 - x_0)^2 = 0 \\ &\Rightarrow a^2\Delta y^2 - 2ab\Delta y\Delta x + b^2\Delta x^2 = 0 \\ &\Rightarrow a^2\Delta y^2 + b^2\Delta x^2 = 2ab\Delta y\Delta x, \qquad (2.5)\end{aligned}$$

missä $a = \Delta x$ ja $b = \Delta y$ ovat reaalilukuja.

Etsitään seuraavaksi yhtälöä, johon edellä saadun yhtälön (2.5) oikean puolen ratkaisu voidaan sijoittaa. Tutkitaan erilaisia vaihtoehtoisia binomikaavan ratkaisuja, joista saadaan yhdeksi tekijäksi $2ab\Delta y\Delta x$. Tällöin saadaan seuraavat neljä yhtälöä

$$(a\Delta y - b\Delta x)^2 = a^2\Delta y^2 - 2ab\Delta x\Delta y + b^2\Delta x^2, \tag{2.6}$$
$$(a\Delta y + b\Delta x)^2 = a^2\Delta y^2 + 2ab\Delta x\Delta y + b^2\Delta x^2, \tag{2.7}$$
$$(a\Delta x - b\Delta y)^2 = a^2\Delta x^2 - 2ab\Delta x\Delta y + b^2\Delta y^2, \tag{2.8}$$
$$(a\Delta x + b\Delta y)^2 = a^2\Delta x^2 + 2ab\Delta x\Delta y + b^2\Delta y^2. \tag{2.9}$$

Havaitaan, että yhtälöstä (2.9) saadaan $2ab\Delta x\Delta y$ ja toisaalta siinä olevat $a^2\Delta x^2$ ja $b^2\Delta y^2$ eivät kumoa toisiaan, kun yhtälö (2.5) sijoitetaan yhtälön (2.9) oikealle puolelle. Tällöin oikeasta puolesta saadaan muodostettua yhtälö

$$\begin{aligned}(a\Delta x + b\Delta y)^2 &= a^2\Delta x^2 + 2ab\Delta x\Delta y + b^2\Delta y^2 && \text{Sij. yhtälö (2.5)}\\ &= a^2\Delta x^2 + b^2\Delta y^2 + a^2\Delta y^2 + b^2\Delta x^2\\ &= a^2\Delta x^2 + b^2\Delta x^2 + a^2\Delta y^2 + b^2\Delta y^2\\ &= (a^2 + b^2)(\Delta x^2 + \Delta y^2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

mistä saadaan luotua yhteys etäisyyden yhtälöön Pythagoraan lauseesta. Yleisesti Pythagoraan lause on $a^2 + b^2 = c^2$ ja tarkasteltavassa tilanteessa asetetuilla alkuarvoilla $\Delta x = a$ ja $\Delta y = b$ saadaan ratkaistua Pythagoraan lause muotoon $\Delta x^2 + \Delta y^2 = d^2$, missä d on lyhyin etäisyys pisteiden välillä. Pythagoraan lauseesta saadun yhteyden avulla yhtälö 2.10 voidaan kirjoittaa muodossa

$$(a\Delta x + b\Delta y)^2 = (a^2 + b^2)(\Delta x^2 + \Delta y^2) = (a^2 + b^2)d^2. \tag{2.11}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (2.11) etäisyys d, kun tarkastellaaan yhtälön (2.9) molempia puolia. Tällöin

$$\begin{aligned}&(a\Delta x + b\Delta y)^2 = a^2\Delta x^2 + 2ab\Delta x\Delta y + b^2\Delta y^2\\ \Leftrightarrow\ &(a\Delta x + b\Delta y)^2 = (a^2 + b^2)d^2\\ \Leftrightarrow\ &(a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0))^2 = (a^2 + b^2)d^2\\ \Leftrightarrow\ &(ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0)^2 = (a^2 + b^2)d^2\\ \Leftrightarrow\ &d^2 = \frac{(ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0)^2}{(a^2 + b^2)}\\ \Leftrightarrow\ &d^2 = \frac{(-(ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)))^2}{a^2 + b^2}\\ \Leftrightarrow\ &d^2 = \frac{(-(ax_0 + by_0 + c))^2}{a^2 + b^2}\\ \Leftrightarrow\ &d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},\end{aligned}$$

missä $-c = ax_1 + by_1$, sillä (x_1, y_1) on suoran $ax + by + c = 0$ eräs piste.

2.3 Pisteen etäisyys tasosta

Pisteen etäisyydelle tasosta saadaan muodostettua yhtälö vastaavasti kuin pisteen etäisyys suorasta. Lauseessa 2.7 esitetään pisteen etäisyyden tasosta yhtälö. [19, s. 40–41]

Lause 2.7. *Olkoon tason s yleinen muoto $ax + by + cz + e = 0$, kun $a, b, c, e \in \mathbb{R}$. Tällöin pisteen $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T$ ja tason välinen lyhyin etäisyys d avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on*

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + e \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Todistus. Todistetaan lause projektion avulla. Olkoon $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^T$ jokin tason s piste. Ratkaistaan tason s yleisestä muodosta normaalivektori $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$. Tällöin voidaan laskea etäisyyden projektio eli vektorin $\mathbf{v}$ projektio vektorille $\mathbf{n}$, kun vektori $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{u}$. Etäisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned} d = \|\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{v}\| &= \left\| \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) \mathbf{n} \right\| = \left| \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \right| \|\mathbf{n}\| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\left| \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{bmatrix} \right|}{\left\| \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \right\|} \\ &= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$

kun $e = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$. Tämä toteutuu kaikilla pisteillä. Tarkastelu voitaisiin tehdä vastaavasti kuin Lauseen 2.6 todistuksessa. □

2.4 Näkökulmia opetukseen

Matematiikan opetusta on tutkittu paljon ja matematiikan opetukseen on tarjolla erilaisia lähestymisnäkökulmia. Kuitenkaan geometrian oppimista sekä siihen liittyviä oppimisvaikeuksia ei ole tutkittu yhtä paljon kuin matematiikan numeerista ja algebrallista osa-aluetta. [9, s. 86–109] Tässä luvussa perehdytään tarkemmin siihen, miten pisteen etäisyyttä suorasta ja tasosta voidaan opettaa sekä siihen millaisia haasteita analyyttisen geometrian oppimisessa voi olla.

2.4.1 Pisteen etäisyyden suorasta ja tasosta opettaminen

Pisteen etäisyyttä tasosta ja suorasta voidaan opettaa monin eri tavoin. Erilaisia opetustapoja voivat olla perinteinen oppikirjalähtöinen opiskelu tai aktivoiva opiskelu esimerkiksi peleillä, leikeillä, piirtämällä tai musiikilla. Näihin liittyvä esimerkki on tätä työtä varten koostettu GeoGebra-työkirja [15], jota käsitellään tarkemmin luvussa 4.

Koska pisteen etäisyys suorasta ja tasosta on vain pieni osa-alue analyyttisessa geometriassa, sen opettamiseen ei ole yleensä mahdollista käyttää montaa oppituntia. Oppikirjojen mallisuunnitelmissa pisteen etäisyyteen suorasta käsittelyyn oppitunneilla varataan aikaa yhdestä kolmeen oppituntia [2, 10]. Geometrian opetuksen aikataulupaineeseen esitetään yhdeksi ratkaisuksi dynaamisen geometrian ohjelmistojen hyödyntämistä opetuksessa [9, s. 103]. Yksi dynaamisen geometrian ohjelmisto on GeoGebra.

Tässä työssä hyödynnetään tietotekniikan ja GeoGebran opetusmenetelmiä oppimisen tukena. Vuoden 2016 lukion opetussuunnitelman perusteet korostaa matematiikassa ja muissa oppiaineissa tietoteknisten taitojen oppimista ja hyödyntämistä. Sen mukaan analyyttisen geometrian kurssin tavoitteisiin kuuluu erilaisten teknisten apuvälineiden käytön osaaminen. Tietoteknisiä ja analyyttisen geometrian taitoja tarvitaan, kun tutkitaan ja ratkaistaan analyyttisessä geometriassa pistejoukkoja, yhtälöitä ja erilaisia käytännön ongelmia. [13]

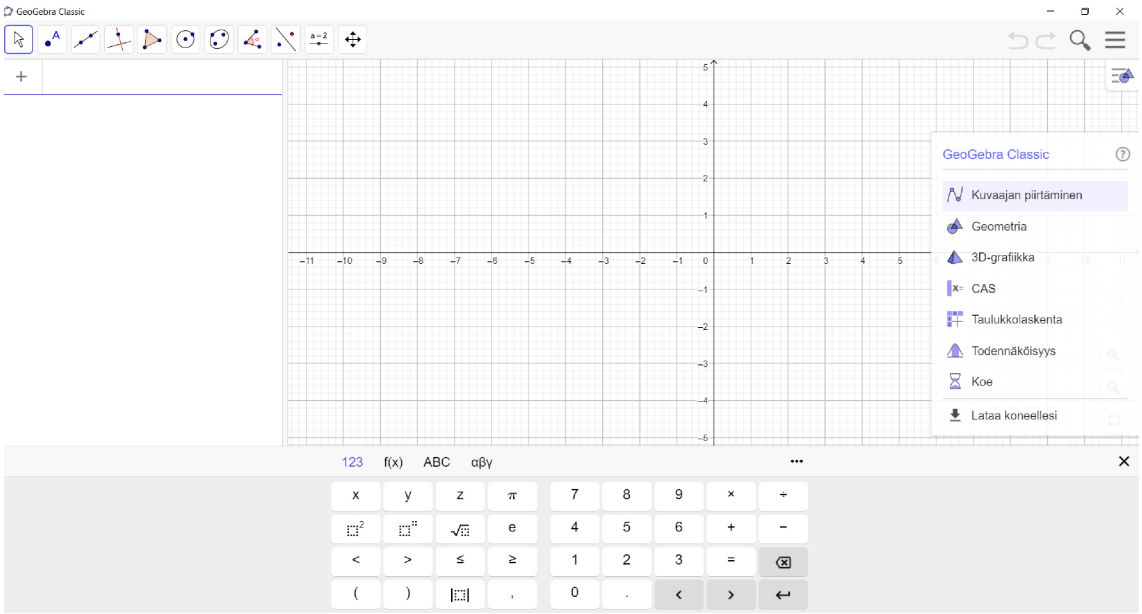
Luvuissa 2.1–2.3 käsiteltyjä aiheita voidaan havainnollistaa GeoGebralla. GeoGebralla näitä ilmiöitä, kuten erilaisia suoria, vektoreiden välisiä kulmia ja pistetulon käyttäytymistä, voidaan havainnollistaa ja muokata vaivattomasti. Erityisesti jos opiskelijat pääsevät tutustumaan näihin matemaattisiin ominaisuuksiin yksilöllisesti, he voivat tutustua ominaisuuksiin, verrata niitä toisiinsa ja ymmärtää ilmiöitä syvällisemmin. Syvällinen oppiminen ja ymmärtäminen tukee opiskelijoiden myöhempien taitojen kehitystä sekä tekee ilmiöistä konkreettisempia.

2.4.2 GeoGebra opetuksessa

GeoGebra on yksi sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa käytössä oleva sovellus [11]. GeoGebran käyttöjärjestelmä on suomenkielinen ja selkeä myös vähemmän matemaattisia ohjelmia käyttäneille, koska se antaa tarvittaessa ohjeita eri työkalujen käyttöön. Kuvassa 2.6 on GeoGebra Classic -ohjelmiston version 6 aloitusnäyttö.

GeoGebran ohjelmistoja voi käyttää suoraan verkkoselaimessa tai ladata ilmaiseksi omalle koneelleen. GeoGebra Classic -sovellukseen kuuluvat monet GeoGebran perussovellukset, kuten geometria, CAS ja todennäköisyyslaskentatoiminnot. [6]

GeoGebran käyttämisen avuksi on erilaisia opettajien ja muiden käyttäjien tekemiä opetusvideoita, koulutuksia ja valmiita materiaaleja, jotka ovat saatavilla opetuskäyttöön ja tutustuttavaksi GeoGebran etusivulta ilman kirjautumista tai rekisteröitymistä. Tuotettuja



Kuva 2.6. *GeoGebran aloitusnäyttö tietokonesovelluksessa*

materiaaleja on mahdollista hakea GeoGebran etusivun hakutyökalun avulla. GeoGebralla tuotetut materiaalit ovat avoimen lähdekoodin aineistoa, jotka on lisensoitu epäkaupallisella Creative Commons (CC BY-NC-SA 3.0) -lisenssillä. Käytännössä tämä tarkoittaa opettajan näkökulmasta sitä, että GeoGebralla tuotettuja materiaaleja voi vapaasti hyödyntää opetuksessa, kunhan mainitsee aineiston tekijän nimen. [6]

Valmiiden sovellusten ja aineistojen käytön lisäksi GeoGebraan on helppo tuottaa omaa opetusmateriaalia ja jakaa sitä muiden käyttöön. Aineistojen jakaminen julkiseen levitykseen ei ole välttämätöntä ja aineiston voi jakaa linkin avulla. Yksinkertaisimmat GeoGebran yksittäiset sovellukset voidaan luoda piirtämällä geometrisia kuvioita tai syöttämällä yhtälöitä ja arvoja syöteikkunaan. Nämä tiedostot voidaan tallentaa GeoGebran palvelimelle yleisesti saataville tai vain omalle koneelleen. Monimutkaisemmissa GeoGebralla luoduissa tiedostoissa voidaan hyödyntää GeoGebran ohjelmointia. Tällöin vaihtoehtoina ovat GeoGebra-koodikielen skripti tai ohjelmointi JavaScriptillä. [6]

2.4.3 Oppimisen haasteet

Haasteet matematiikan opiskelussa voidaan jakaa motivaatio- ja ympäristötekijöihin sekä kognitiivisiin kykyihin liittyviin tekijöihin. Kognitiivisiin taitoihin kuuluvat tiedonkäsittelytaidot, joita ovat esimerkiksi tehtävän välivaiheiden ja ratkaisumallin suunnittelu sekä kyky kielentää tehtävää. Joissakin tilanteissa pelkkä halu oppia matematiikkaa tai tutkittavaa ilmiötä edistää oppimista ja estää oppimisvaikeuksia, mikä kuvaa motivaation merkitystä oppimisvaikeuksien estämisessä. Ympäristötekijöitä ovat ihmiset, paikat ja olosuhteet. Jos matematiikan oppimiseen saa apua ongelmatilanteissa, matematiikan oppiminen parantuu. [17]

Edellä kuvattiin yleisesti matematiikan oppimisvaikeuksia. Pisteen ja suoran välisen etäisyyden ymmärtämisen haasteista voidaan tunnistaa ainakin seuraavat asiat: ongelmat ilmiön sanoittamisen ja ymmärtämisen yhdistämisessä arkielämään ja konkreettisiin tilanteisiin, pisteen etäisyys suorasta -yhtälön ymmärtäminen ja käyttö oikeassa muodossa. Pisteen etäisyyden suorasta hahmottamista vaikeuttaa, jos opiskelija ei havaitse yhteyttä havaintojensa ja matematiikan välillä. Tällainen voi olla esimerkiksi kohtisuoruuden ymmärtäminen tai yhtälön sieventäminen oikeaan muotoon laskukaavaa varten. Joillekin opiskelijoille haasteena voi olla esimerkiksi kyky selittää matematiikkaa sanallisesti. Tällöin pisteen etäisyys suorasta vaikuttaa abstraktilta ja olevan kaukana arkielämästä. [26] Erityisesti hahmottamiseen liittyvien vaikeuksien havaitseminen on usein melko haastavaa. Havaitsemisongelmat paljastuvat yleensä vasta siinä tilanteessa, kun opiskelijaa pyydetään selittämään sanallisesti jotakin virheellistä ratkaisumalliaan. [17, 20]

Edellä mainittuihin ongelmakohtiin yritetään löytää ratkaisuja tätä kandidaatin työtä varten luodussa GeoGebra-kirjassa. Tehtävien valinnassa ja toteutuksessa on huomioitu tehtävien mielenkiintoisuus, monipuoliset oppimisympäristöt ja yleisimmät matematiikan haasteet. Tämä näkyy esimerkiksi tehtävien valinnassa ja niiden toteutuksessa. Niissä on yritetty löytää erilaisia ja eritasoisia tietoteknisillä apuvälineillä ratkaistavia ongelmia. Tehtäviä on mahdollista ratkaista ryhmissä, mikä mahdollistaa vertaisoppimisen. Tehtävien tavoitteena on olla mielenkiintoisia ja tarjota lisämotivaatiota erilaisten ongelmien ratkaisuun ja niiden käsittelyyn.

Tehtävien valinnassa on yritetty huomioida valittujen tehtävien monipuolisuus ja aktivoivuus, jotta tehtävistä löytyisi eri tasoisille opiskelijoille mielenkiintoisia ja sopivia haasteita. Toisille opiskelijoille manuaaliset tehtävät sopivat paremmin ja toisille luovat tehtävät [24]. Tällaiset tehtävät auttavat joitakin opiskelijoita ymmärtämään matematiikkaa kokonaisuutena. Joillekin opiskelijoille sopivat paremmin tavalliset ja johdonmukaiset tehtävät, eivätkä he halua opiskella matematiikkaa taiteellisesti. Omaa luovuutta vaativien tehtävien tarkoituksena on aktivoida opiskelijoita toiminnalliseen matematiikan opiskeluun ja kehittää heidän käytännön ongelmanratkaisutaitoja. Tällaisessa opetustavassa yhdistyvät muun muassa sekä Freinet'n, Montessorin että Deweyn aikanaan esittämät näkemykset monipuolisesta ja toiminnallisesta oppimisesta. [18]

2.5 Matematiikan ylioppilaskirjoitukset

Matematiikan ylioppilaskirjoitukset järjestettiin ensimmäisen kerran sähköisenä keväällä 2019. Näissä ylioppilaskirjoituksissa toinen selkeä muutos oli pisteytyksessä. Tehtäväkohtaisiksi enimmäispisteiksi tuli uudistuksen myötä 12 entisen kuuden pisteen sijaan. [23]

Matematiikan ylioppilaskirjoitusten rakenne pysyi sähköistymisen myötä samana kuin edellisinä vuosina eli koe koostuu A- ja B-osasta. A-osa tehdään ilman symbolisen laskennan apuvälineitä ja joidenkin sovellusten toiminta tietokoneessa on estetty. A-osa koostuu neljästä tehtävästä, joista jokaiseen on vastattava. B-osassa käytettävissä ovat kaikki koejärjestelmään hyväksytyt sovellukset. B-osa jakautuu kahteen osaan B1- ja B2-osaan. B1-osassa on viisi tehtävää ja niistä kolmeen saa vastata. B2-osassa on neljä tehtävää ja niistä kolmeen on vastattava. [23]

2.5.1 Käytössä olevat apuvälineet ja ohjelmistot

Ylioppilaskirjoituksissa käytettävälle koneelle on annettu "laatuvaatimuksia", jotka koskevat esimerkiksi tietokoneen näytön kokoa ja USB-porttien lukumäärää. Tietokoneessa on oltava vähintään paikka kuulokeliitännälle, Ethernet-johdolle, langalliselle hiirelle ja ylioppilaskirjoitusjärjestelmän Abitti-muistitikulle. Jos laitteessa ei ole riittävästi USB-portteja, adaptereiden käyttö sallitaan. Adapteria hankkiessa on huomioitava, etteivät kaikki markkinoilla olevat adapterit ole yhteensopivia ylioppilaskokeessa käytettävän Abitti-käyttöjärjestelmän kanssa. [21]

Toistaiseksi matematiikan ylioppilaskirjoituksissa saa käyttää konkreettista laskinta B-osan tehtävissä. Sallittuihin laskimiin kuuluvat kaikki funktiolaskimet sekä symboliset ja graafiset laskimet, joiden muisti on mahdollista tyhjentää. Lisäksi kokelaat voivat käyttää paperista taulukkokirjaa ja käyttää paperia suunnittelunsa apuna. Nämä kolme perinteistä mahdollisuutta eivät ole käytössä enää kevään 2021 matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, vaan ne korvataan täysin sähköisillä vastineilla. [23]

Tällä hetkellä matematiikan ylioppilaskokeessa tietokoneessa on käytettävissä lukuisia sovelluksia, joiden voimassa oleva listaus on ylioppilastutkintolautakunnan ohjeissa. Matematiikassa suurin mielenkiinto kohdistuu A- ja B-osassa käytössä oleviin sovelluksiin ja mahdollisiin rajoituksiin eri osioissa. B-osassa käytössä ovat kaikki symbolisen laskennan sovellukset, kuten GeoGebra, Texas Instruments TI-Nspire CAS ja Casio ClassPad Manager. Sen sijaan molemmissa osioissa opiskelijoilla on käytössään laajennettu nelilaskin, jonka ominaisuuksiin kuuluu esimerkiksi asteiden ja neliöjuurten laskeminen. [23]

2.5.2 Hyvä ylioppilaskirjoitusvastaus

Ylioppilastutkintolautakunnan sivuilla on malliesimerkkejä matematiikan sähköisten ylioppilaskirjoitusten vastauksista, joiden sisältöä opettajat ja ylioppilastutkintolautakunta ovat arvioineet [25]. Vaatimuksissa ja pisteytyskriteereissä esiintyyy henkilöiden välisiä näkemyseroja siitä, mikä on hyvin perusteltu vastaus. Tästä huolimatta malliesimerkeistä saa käsityksen hyvän vastauksen piirteistä.

Hyvä matematiikan vastaus on hyvin perusteltu selkeä kokonaisuus. Vastaus etenee loogisesti, ja välivaiheita perusteluineen on riittävästi. Lukijan on pystyttävä ymmärtämään vastauksen rakenne ja sen taustalla oleva matemaattinen ajattelu. Matemaattista ajattelua voi tuoda esille tekstin, kuvien ja yhtälöiden avulla. Käytettyjen muuttujien merkitys pitää selittää sanallisissa ja soveltavissa tehtävissä. [25]

Vastauksesta on hyvä tarkistaa saatu arvo. Tehtävässä on huomioitava, kysytäänkö lopullisessa vastauksessa tarkkaa arvoa vai likiarvoa. Likiarvon pyöristyksessä on mietittävä, mikä on tehtävässä annettujen tietojen perusteella haluttu tarkkuus. Lopuksi on vielä tarkistettava, että kaikkiin tehtävässä esitettyihin kysymyksiin on vastattu ja lopullinen vastaus toteuttaa alkuperäisen tehtävänannon.

Matematiikan ylioppilaskokeessa vastaukset syötetään koejärjestelmän vastausikkunaan, johon voi kirjoittaa kaavoja, tekstiä sekä liittää kuvia. Kuvassa 2.7 on esimerkki pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävästä, joka on laadittu Abitti-Editrilla edellä esitettyjen hyvän vastauksen kriteerien ja ylioppilastutkintolautakunnan suositusten perusteella. Abitti-Editori on vastaava kuin ylioppilaskokeessa käytössä olevaa vastausikkuna [1].

Syksyn 2011 pitkän matematiikan ylioppilastehtävä:

Pisteen etäisyys suorasta saadaan laskettua kaavalla $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Suoran yhtälö on $4x + 3y = 2 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2 = 0$ ja piste $(3, -2)$.

Näiden välinen lyhin etäisyys saadaan, kun sijoitetaan

$$d = \frac{|4 \cdot 3 - 3(-2) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{16}{5} = 3\,\frac{1}{5}$$

Vastaus: $\dfrac{16}{5}$

Kuva 2.7. *Abitti-Editorilla tehty esimerkkivastaus*

Kuvan 2.7 ylioppilastehtävän (pitkä matematiikka syksy 2011, 3c) tehtävänantona oli: "Määritä pisteen $(3, 2)$ etäisyys suorasta $4x - 3y = 2$." Kuvan tehtävä on aloitettu esittelemällä ratkaisuun kuuluva kaava taulukkokirjasta. Tämän jälkeen suoran yhtälö on ratkaistu tarvittavaan muotoon, minkä jälkeen annetut lukuarvot ja suoran yhtälö sijoitettu kaavaan. Lopuksi vastaus on esitetty erikseen murtolukuna.

2.6 Käyttökohteita pisteen etäisyydelle suorasta ja tasosta

Opiskelijat pohtivat ja kyseenalaistavat usein sitä, mihin jotakin tiettyä matematiikan osa-aluetta tarvitaan elämässä, tai mitä käyttökohteita sillä on [9, s. 16, 47–50]. Opettajan näkökulmasta oppimista edistää, jos opiskelijat ymmärtävät aiheen yhteydet käytäntöön. Käytännön sovellusten ja moniammatillisen opetuksen avulla voidaan lisätä opiskelijoiden motivaatiota aihetta kohtaan. [9, s. 280–289][18, s. 149–151] Tämän luvun tarkoituksena on esittää kaksi erilaista käytännön tilannetta, joissa hyödynetään pisteen etäisyyttä suorasta osana teknistä sovellusta.

Useissa sovelluksissa pisteen etäisyys suorasta on taustalla vaikuttava tekijä. Esimerkkejä, sovellutuksia ja käyttökohteita pisteen etäisyydelle suorasta sekä tasosta ovat koneoppiminen sekä lahopuu–analyysi. Koneoppimisen taustalla pisteen etäisyys suorasta on käytössä joissakin datan analysointia ja käsittelyä vaativissa tilanteissa. [22, s. 145–150] Lukio-opetuksessa koneoppimista, datan analysointia ja suorien sovittamista dataan voidaan harjoitella ja tutustua erilaisten helppokäyttöisten Internet-sovellusten avulla. Näistä esimerkkinä erilaiset ajankohtaiset seurantadiagrammit ja -tilastot, jotka perustuvat avoimeen dataan.

Pisteen etäisyyttä suorasta hyödynnetään metsäkartoituksissa lahopuu–analyysissä. Yhdysvalloissa tehtyjen tutkimusten mukaan kohtisuoran etäisyyden avulla tehty analyysi on tarkempi kuin muut menetelmät, kun arvioidaan lahopuiden tilavuutta ja pinta-alaa. Vinon tai haaroittuneen puun tilavuutta laskettaessa tarvitaan lisäksi muita matemaattisia menetelmiä paremman tarkkuuden saavuttamiseksi. [27]

Käytännön sovellukset opetuksen tukena tuovat matematiikan lähemmäksi opiskelijoiden arkea ja laajentavat käsitystä matematiikan merkityksestä. Mahdolliset yritysvierailut, -yhteistyö ja aihepiiriin liittyvät videot voivat lisätä opiskelijoiden kiinnostusta tekniikan aloja kohtaan ja samalla voidaan tukea opiskelijoita tulevaisuutensa pohdinnoissa. Näin tarjotaan opiskelijoille erilaisia oppimisympäristöjä, motivoidaan ja tuetaan erilaisia oppijoita.

3 PISTEEN ETÄISYYS SUORASTA JA TASOSTA YLIOPPILASKIRJOITUKSISSA

Tutkittaessa pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksien tehtäviä vuoden 2000 keväästä syksyyn 2019, voidaan havaita, että pisteen etäisyyttä suorasta on kysytty neljä kertaa. Pisteen etäisyyttä tasosta ei ole kysytty kertaakaan kyseisellä aikavälillä. Suoran yhtälön muodostamista on edellytetty jokaisessa matematiikan ylioppilaskokeessa. Tämä kuvaa näiden osa-alueiden välistä priorisointieroa. Suoran yhtälön muodostamisen ymmärrys on edellytys pisteen ja tason etäisyyden suorasta laskemiselle. Ylioppilaskokeiden pisteen etäisyyden suorasta tehtävien sisältöä ja laatua on luokiteltu taulukossa 3.1.

Taulukko 3.1. *Pisteen etäisyys suorasta pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa tehtävätyyppeineen syksystä 1999 syksyyn 2019*

Kirjoituskerta	Tehtävä	Kysymyksen tyyppi	Pisteet
syksy 2002	5	Soveltava	6/6
syksy 2004	13	Soveltava	6/6
syksy 2011	3c	Sijoitustehtävä	2/6
kevät 2018	5	Soveltava	6/6

Taulukossa 3.1 tehtävät on jaettu sen mukaan ratkeaako tehtävä suoraan sijoittamalla annetut lukuarvot yhtälöön vai vaaditaanko tehtävässä myös muiden osa-alueiden soveltamista, kuten ymmärrystä suoran ja ympyrän yhtälön muodostamiseen tai vektoreiden käsittelyyn. Pistesarake ilmaisee kysymyksen painoarvoa. Jos pisteet ovat 6/6, tehtävä arvostellaan kokonaisuutena eikä pisteen etäisyys suorasta ole ollut erillinen osa tehtävässä. Sijoitustehtävässä painoarvo on ollut 2/6 ja pisteen etäisyys on ollut yksi tehtävän osakohdista.

Taulukon 3.1 ylioppilaskirjoitustehtävistä kaksi on esitelty tässä työssä muita tehtäviä tarkemmiin. Ne ovat syksyn 2011 ja kevään 2018 pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävät. Syksyn 2011 ylioppilastehtävää tarkasteltiin luvun 2.5.2 yhteydessä. Kyseisen tehtävän ratkaisemisessa ei vaadita monimutkaista päättelykykyä ratkaisun suhteen. Tehtävän ratkaisuun riittää tarvittavien yhtälöiden tuntemus ja lukuarvojen sijottamisen hallitseminen.

Kevään 2018 ylioppilaskoetehtävä on lähes vastaava kuin työtä varten luodun GeoGebra-kirjan soveltava tehtävä (kuva A.6). Ylioppilaskoetehtävässä ei kysytä suoraa lähintä olevaa ympyrän kehän pistettä, mikä tekee tehtävästä suoraviivaisemman kuin GeoGebra-kirjan soveltava tehtävä. Ylioppilaskoetehtävässä voidaan ratkaista suoraan lyhyin etäi-

syys ympyrän ja suoran välillä pisteen etäisyytenä ympyrän keskipisteeseen, mistä vähennetään lopuksi ympyrän säde.

Vuoden 2002 ylioppilaskoetehtävässä annettiin esitietoina eräs suoran piste, suoran normaali ja piste, johon lyhyin etäisyys halutaan määrittää. Tässä tehtävässä opiskelijan on vaadittavien yhtälöiden lisäksi tunnettava käsitteet ja hahmotettava tilanne.

Vuoden 2004 ylioppilaskoetehtävä on taulukon 3.1 tehtävistä tyyliltään erilaisin. Siinä pitää aluksi ratkaista, mikä käyrän pisteistä on lähimpänä annettua suoraa ja piirtää kuva tilanteesta. Näiden tietojen avulla ratkaistaan kyseinen etäisyys. Vaadittu tilannekuva auttaa tehtävän tarkastajaa varmistumaan siitä, että tehtävää ratkaistessa on ymmärretty ja hahmotettu ratkaistava tilanne teorian rinnalla. Muissa taulukon ylioppilastehtävissä vastauksien tukena on voinut omavalintaisesti käyttää esimerkiksi tekstiä, kuvia ja yhtälöitä.

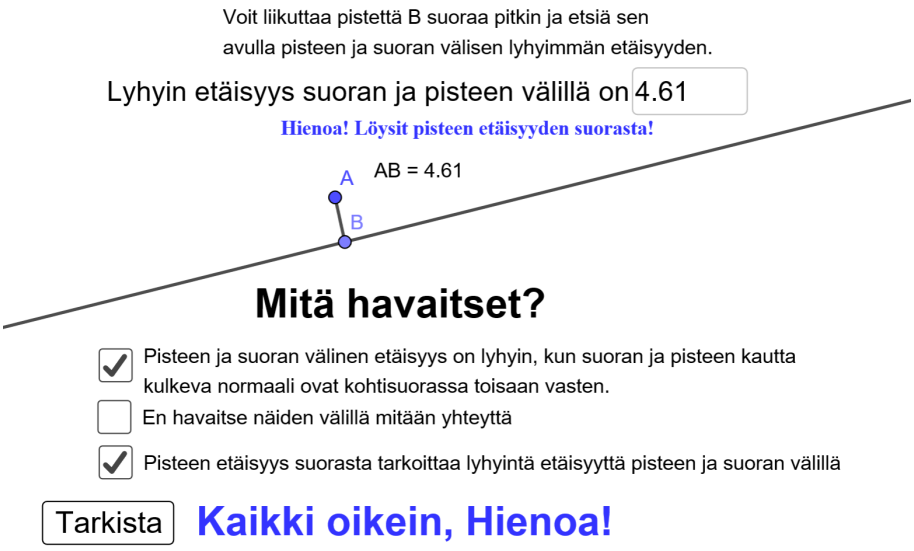
Taulukon 3.1 perusteella tyypillisesti pisteen etäisyyttä suorasta osaamista mitataan soveltavilla tehtävillä. Todennäköisesti sähköisten ylioppilaskokeiden myötä soveltavien tehtävien määrä lisääntyy entisestään. Uudet graafiset ja symboliset ohjelmat ovat ylioppilaskokeissa kaikkien saatavilla ja opiskelijoilla on mahdollisuus havainnollistaa yhä monimutkaisempia kuvioita jopa kolmiulotteisesti. Koska sähköiset ylioppilaskirjoitukset mahdollistavat grafiikkaohjelmien entistä tasapuolisemman ja paremman saatavuuden, voitaisiin tulevaisuudessa tehtävissä hyödyntää ja vaatia kuvien käyttöä vastausten tukena. Samalla voitaisiin varmistua opiskelijoiden kyvystä hallita ohjelmia entistä monipuolisemmin ja riittävällä tasolla.

4 OPETUSMATERIAALINA GEOGEBRA-KIRJA

GeoGebra mahdollistaa omien työkirjojen luomisen. Työkirjaan voi koota esimerkiksi yksittäisiä aihepiirejä ja niihin liittyviä tehtäviä tai kattavia kokonaisia kursseja käsitteleviä GeoGebra-apletteja. GeoGebra-apletti tarkoittaa yksittäistä GeoGebra-tiedostoa, johon on voitu valmiiksi tehdä ohjelmointi ja tarvittavat kuvaajat. Tässä alaluvussa esitellään tätä työtä varten luotua GeoGebra-kirjaa, jonka aiheena on pisteen ja tason etäisyys suorasta. Siinä tehtävät jaetaan neljään lukuun: johdanto- ja perustehtäviin sekä soveltaviin ja luoviin tehtäviin. Luvussa esiteltävä GeoGebra-kirja tehtävineen on saatavilla GeoGebran sivuilta osoitteesta: `https://www.geogebra.org/m/q3eht4g9`. Kuvat tehtävien alkutilanteesta esitellään liitteessä A. [15]

4.1 Johdantotehtävät

Johdantoluvussa opiskelijalta ei edellytetä tietoa aiheesta tai sen teoriasta. Teoria opitaan tekemällä havaintoja ja tehtävissä edetään tehtävän ohjeiden mukaan. Tehtävät on pyritty laittamaan vaikeusjärjestykseen. Ensimmäisessä tehtävässä on aluksi tavoitteena löytää lyhyin etäisyys ilman mitään apulaskuja omien havaintojen avulla. Kun lyhyin etäisyys on löytynyt, tehtävä jatkuu monivalintakysymyksellä. Monivalintakysymys käsittelee tehtävän ja kohtisuoruuden välistä yhteyttä.



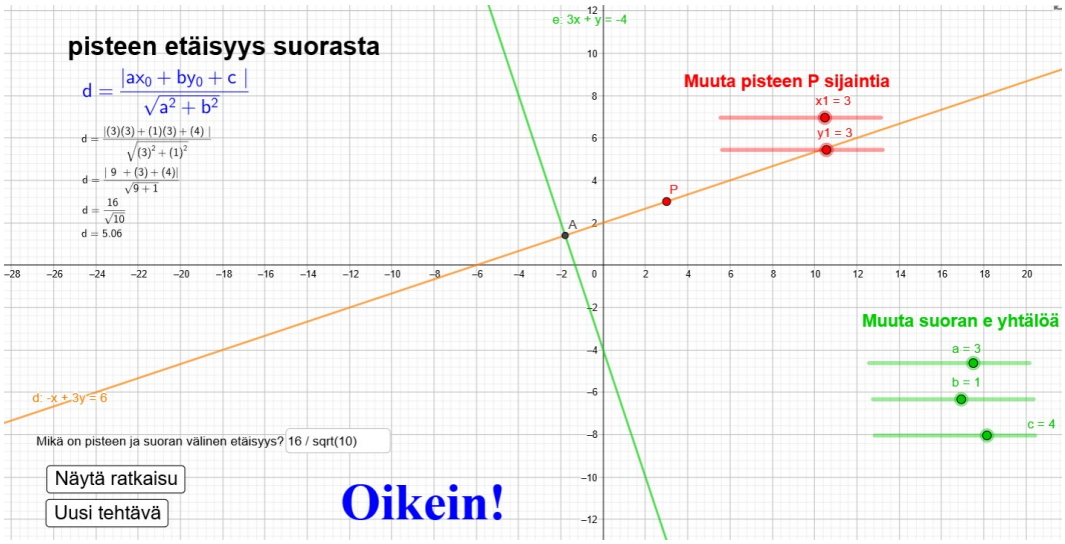
Kuva 4.1. *Tehtävä 1.1 Loppuratkaisu*

Kuvassa 4.1 esitellään ensimmäinen johdantotehtävä, kun lyhyin etäisyys on ratkaistu oikein. Tehtävään tulee monivalintakysymys, joka käsittelee löydetyn lyhyimmän etäisyyden yhteyttä teoriaan. ”Tarkista”-painikkeesta tehtävä ilmoittaa monivalintojen olevan joko oikein tai väärin.

Muissa johdantotehtävissä tutustutaan pisteen etäisyyden suorasta piirtämiseen ja mittaamiseen GeoGebran avulla. GeoGebran graafisen piirtämisen toiminnolla voidaan ratkaista likiarvot kysytyille pisteen etäisyyksille suorista. Kolmannessa johdantotehtävässä tarkistetaan, onko kuvaan piirretty oikea etäisyys ja kulma. Jos näitä ei ole piirretty eli määritelty, tehtävän tarkistuskoodi ilmoittaa virheellisestä koodista. Muissa tapauksissa tehtävän tarkistin pystyy tarkistamaan etäisyyksien ja kulman oikeellisuuden.

4.2 Perustehtävät

Perustehtävät ovat johdantotehtäviä haastavampia, koska laskeminen yhdistetään johdantotehtävissä opittuun teoriaan. Ensimmäisessä perustehtävässä lasketaan etäisyyksiä. Tehtävän voi tehdä useita kertoja, koska siinä voidaan arpoa uudet pisteet ja suorat yhä uudelleen. Laskuihin on saatavissa joka kerta vastaukset välivaiheineen. Tehtävissä on mahdollista verrata omia vastauksia mallivastaukseen ja oppia välivaiheiden käyttöä.



Kuva 4.2. *Tehtävä 2.1 Loppuratkaisu*

Kuvassa 4.2 näkyy vastauksen jälkeinen malliratkaisu. Malliratkaisua voi katsoa, missä tahansa tehtävän vaiheessa erillisestä painikkeesta. ”Uusi tehtävä” -painike piilottaa malliratkaisun ja arpoo uuden tehtävän. Toinen perustehtävä on ensimmäisen kaltainen, mutta siinä täydennetään lukuarvot tyhjiin vastauskenttiin ja lasketaan pisteen etäisyys suorasta.

4.3 Soveltavat ja luovat tehtävät

Soveltavia tehtäviä on GeoGebra-kirjassa vain yksi kappale. Tehtävässä yhdistellään matemaattisia käsitteitä ja analyyttisen geometrian kurssin aihepiirejä. Tehtävän ratkaisuun tarvitaan pisteen etäisyyden suorasta lisäksi ymmärrystä leikkauspisteistä, suoran normaalista ja ympyrän yhtälöstä. Tehtävä sopii kertaustehtäväksi, koska siinä yhdistyvät useat analyyttisen geometrian aihepiirit, ja tehtävä edellyttää kykyä yhdistellä sisältöjä.

GeoGebra-kirjan viimeisenä osiona ovat luovat tehtävät. Niiden ideana on tarjota ideoita vaihtoehtoiseen matematiikan opiskeluun, jossa yhdistyy "matemaattinen vapaus" ja mahdollisuus taiteellisuuteen. Luovat tehtävät eivät edellytä GeoGebran käyttöä, mutta niitä voi yhdistää erilaisten teknisten apuvälineiden kanssa, kuten video- ja animaatiotyökalut. Luovissa tehtävissä opiskelijat voivat päättää, millä tavalla he haluavat käsitellä teoriaa. Teorian voi käsitellä esimerkiksi sarjakuvan kautta, mistä on esimerkki kuvassa A.7.

4.4 Havaintoja tehtävistä

Luovat tehtävät sopivat hyvin tulevan lukion opetussuunnitelman perusteiden (LOPS 2021) sisältöihin, joissa korostuvat monitieteellisyys ja luovuus [14]. Luovat ja muut GeoGebra-kirjassa esitetyt tehtävät mahdollistavat samanaikaisesti teknisten ja matemaattisten taitojen harjoittamisen. Oppimisessa ja harjoittelussa yhdistyvät sekä kokeilu että tarkoituksenmukaisuus.

Työn teoriaosassa esiteltiin oppimisen haasteita, joita liittyy pisteen etäisyyteen suorasta ymmärtämiseen, kuten hahmottamisen ja sanallistamisen vaikeudet. GeoGebra-tehtävissä on mahdollista luoda realistinen ja mukautuva tilannekuva, mikä tukee kykyä havaita ja yhdistää matemaattisia merkintöjä käytäntöön. Havainnollistamista pyrittiin hyödyntämään kaikissa harjoitustehtävissä valmiilla, muokattavilla ja itsetoteuttavilla kuvilla.

Sanallistaminen korostuu ensimmäisessä perustehtävässä sekä luovissa tehtävissä. Muuten se on jäänyt GeoGebra-kirjassa vähäiselle. GeoGebraan voi yhdistää erillisiä sanallistamista tukevia tehtäviä, mutta tätä ominaisuutta ei tässä GeoGebra-kirjassa ole hyödynnetty. GeoGebran apletin sisällä ei ole valmista kysymyspohjaa, vaan se täytyy itse ohjelmoida ja laatia tai toteuttaa erillisenä osiona tehtävän yhteyteen.

5 YHTEENVETO

Tämän työn tavoitteena on ollut uuden opetusmateriaalin ja uusien ideoiden tuottaminen lukion matematiikan opetukseen. Työtä varten tehtiin GeoGebra-kirja, johon toteutettiin seitsemän eritasoista ja erilaista GeoGebra-tehtävää. Kirjaa varten tuotettuja tehtäviä ei ole testattu opiskelijoilla eikä saatu sitä kautta kokemusta tehtävien toimivuudesta. Tehtävien toimivuus on tarkistettu testisyötteillä.

GeoGebra-kirjalla on haluttu edistää matematiikan oppimista ja opetusta sekä tuoda opetukseen ajankohtaisia ilmiöitä ja teemoja. Keskeisenä osa-alueena työssä on ollut kattavan kuvan luominen pisteen etäisyyden suorasta taustalla olevasta teoriasta. Kohtisuoruuden ymmärrys ja havaitseminen edistävät aiheen opetusta ja oppimista. Tehtävissä on pyritty huomioimaan aiheeseen liittyvät oppimisen haasteet ja tukemaan ymmärryksen lisäämistä.

Ilmiöiden tarkastelu laajennettiin lukion matematiikan opetuksen viime vuosien suurempiin muutoksiin, joita ovat vuoden 2016 lukion opetussuunnitelman perusteet, sähköiset ylioppilaskirjoitukset ja tietotekniikan merkitys opetuksessa. Tietokoneista on tullut arkipäiväinen osa opetusta ja jokaisella lukio-opiskelijalla on oma tietokone, jolla voi harjoitella ja osallistua ylioppilaskirjoituksiin. Työn näkökulmaa pyrittiin laajentamaan kohti tulevaa lukion opetussuunnitelman perusteita (LOPS 2021).

GeoGebra tukee ylioppilaskirjoituksiin valmistautumista. GeoGebran käyttö on helppo oppia, koska yhtälöt voi syöttää samassa muodossa kuin paperille, se on ilmainen, ja sen käyttöjärjestelmä sekä toiminnot ovat suomenkielisiä. Opettajien on mahdollista saada tukea valmiista materiaaleista ja koulutuksista opetukseensa. Opiskelijoille GeoGebra mahdollistaa reaaliaikaisen palautteen sekä tuen, jos tehtävään on ohjelmoitu tarkistus- ja vihjetoiminnot.

Uusilla opetusmetodeilla halutaan lisätä opiskelun mielenkiintoisuutta, helpottaa opiskelua ja edistää opiskelijoiden ymmärrystä. Opiskelijat voivat opiskella erilaisissa ryhmissä, eri tahdissa ja löytää itselleen sopivan haastavia tehtäviä. Samalla opiskelijoiden tietotekniset taidot kehittyvät, minkä toivotaan vastaavan ja edistävän työelämässä tarvittavia taitoja.

LÄHTEET

[1] *Abitti, Kaavaeditorin kehitysversio*. URL: https://math-demo.abitti.fi/ (viitattu 12. 09. 2019).

[2] S. Alatupa, P. Heiskanen, P. Kaakinen, J. Lehtonen, M. Leikas ja J. Tahvanainen. *Tekijä, Pitkä matematiikka 5*. 1. painos. Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2017.

[3] *Analyyttinen geometria MAA5, Suoran yhtälöt*. Sievin lukio. 26. huhtikuuta 2017. URL: https://peda.net/sievi/sievin-lukio/oppiaineet2/mp/m5ag/tkapp/l3ms:file/download/afdbab0144dc5da3d2f5158ebefaba8469ca121f/Analyyttinen_Geometria_MAA5_LUKU3.2.pdf (viitattu 16. 06. 2019).

[4] *Distance between Point and Line*. Brilliant.com. URL: https://brilliant.org/wiki/distance-between-point-and-line/ (viitattu 26. 05. 2019).

[5] S. S. Epp. *Discrete Mathematics with Applications*. International Edition, 4. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.

[6] *GeoGebra - kotisivu*. GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org/ (viitattu 20. 07. 2019).

[7] S. I. Grossman. *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations*. 3. painos. Saunders College Publishing, 1995.

[8] P. Heiskanen, P. Kaakinen, J. Lehtonen, M. Leikas ja J. Tahvanainen. *Tekijä, Pitkä matematiikka 4*. 1. painos. Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2017.

[9] J. Joutsenlahti, H. Silfverberg ja P. Räsänen. *Matematiikan opetus ja oppiminen*. 1. painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2018.

[10] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela ja J. Tahvanainen. *Pitkä matematiikka 4, analyyttinen geometria*. 1. painos. Helsinki: WSOY, 2005.

[11] *Koejärjestelmässä käytettävissä olevat ohjelmat*. Ylioppilastutkintolautakunta. URL: https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat (viitattu 05. 09. 2019).

[12] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet*. Opetushallitus. Vammala, 2003. URL: https://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf.

[13] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Opetushallitus. Helsinki, 2015. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf.

[14] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Opetushallitus. Helsinki, 2019. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf.

[15] M. Mäenpää. *Pisteen etäisyys suorasta ja tasosta*. GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org/m/q3eht4g9 (viitattu 23. 02. 2020).

[16] J. Metsämuuronen. *Oppia ikä kaikki – Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015*. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. 2017. URL: https://karvi.fi/app/uploads/2017/03/KARVI_0117.pdf (viitattu 10. 09. 2019).

[17] R. Mononen, P. Aunio, E. Väisänen, J. Korhonen ja A. Tapola. *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. 1. painos. Jyväskylä: PS-kustannus, 2017.

[18] J. Paalasmaa. *Aktivoi oppilaasi*. Jyväskylä: PS-kustannus, 2014.

[19] D. Poole. *Linear Algebra. A Modern Introduction*. 2. painos. Thomson Brooks/Cole, 2006.

[20] P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. 2. painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2004.

[21] *Sopivan tietokoneen hankinta*. Abitti. URL: https://www.abitti.fi/fi/ohjeet/tietokoneen-hankinta/ (viitattu 24. 06. 2019).

[22] S. Suthaharan. *Machine Learning Models and Algorithms for Big Data Classifications – Thinking with Examples for Effective Learning*. New York: Springer, 2016.

[23] *Tiedote matematiikan opettajille ja opiskelijoille*. Ylioppilastutkintolautakunta. 25. tammikuuta 2018. URL: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/matematiikka_tiedote_digitaalinen_koe.pdf (viitattu 29. 04. 2019).

[24] M. Toivola, P. Peura ja M. Humaloja. *Flipped Learning, käänteinen oppiminen*. 1. painos. Edita. Otava Kirjapaino Oy, 2017.

[25] T. Vikberg. *Digitaalisia esimerkkivastauksia matematiikan koekysymykseen*. Ylioppilastutkintolautakunta. 19. helmikuuta 2018. URL: https://www.ylioppilastutkinto.fi/ajankohtaista/blogitekstit/541-matematiikan-vastaukset (viitattu 16. 09. 2019).

[26] V. Virtanen. *Paraabelit ja pisteen etäisyys suorasta lukion pitkässä matematiikassa*. Oulun yliopisto. Pro gradu -tutkielma, 2019. URL: http://jultika.oulu.fi/files/nbnfioulu-201904241524.pdf.

[27] M. S. Williams, H. T. Valentine, J. H. Gove ja M. J. Ducey. Additional results for perpendicular distance sampling. *Canadian Journal of Forest Research* 35.4 (2005), 961–966.

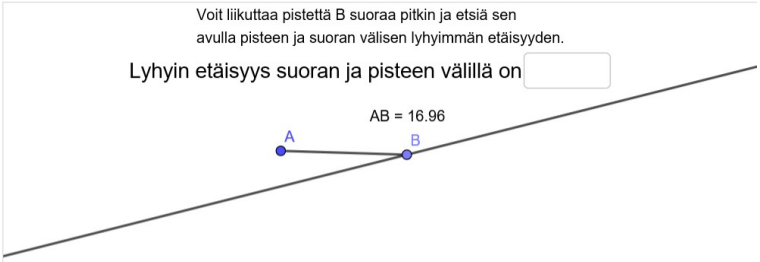
[28] R. E. Williamson ja H. F. Trotter. *Multivariable Mathematics*. 4. painos. Pearson Education, Inc, 2004.

[29] *Yliopistojen todistusvalinnan pisteytykset*. Opintopolku. URL: https://opintopolku.fi/wp/opo/korkeakoulujen-haku/mika-korkeakoulujen-opiskelijavalinnoissa-muuttuu-vuoteen-2020-menessa/yliopistojen-todistusvalinnat-2020 (viitattu 19. 02. 2020).

A GEOGEBRA - TEHTÄVÄT

Tässä liitteessä esitellään GeoGebra kirjan [15] tehtävät yksitellen. Kirja on saatavissa `https://www.geogebra.org/m/q3eht4g9`. Tehtäviä on yhteensä kuusi kappaletta, jotka voidaan jaotella johdantotehtäviin (1), perustehtäviin (2) ja soveltaviin tehtäviin (3). Lopuksi esitellään luovia (4) ideoita pisteen etäisyyden opettamiseen. Näitä ideoita voi yhdistää monialaisiin ja oppiainerajat ylittävään opetukseen ja oppimiseen.

Tehtävä 1.1 *Mikä on lyhyin etäisyys suoran ja pisteen A välillä? Havaitsetko jonkin säännön, jota lyhyin pisteen ja suoran välinen etäisyys noudattaa? Yritä ratkaista tehtävä raahaamalla pistettä B suoraa pitkin. Kun uskot löytäneesi lyhyimmän etäisyyden, syötä arvo vastauskenttään ja paina Enter. Jos vastaus on oikein, tehtävä jatkuu monivalintakysymyksellä.*



Kuva A.1. *Tehtävä 1.1 tehtävän alussa*

Tehtävä 1.2 GeoGebralla piirtäminen

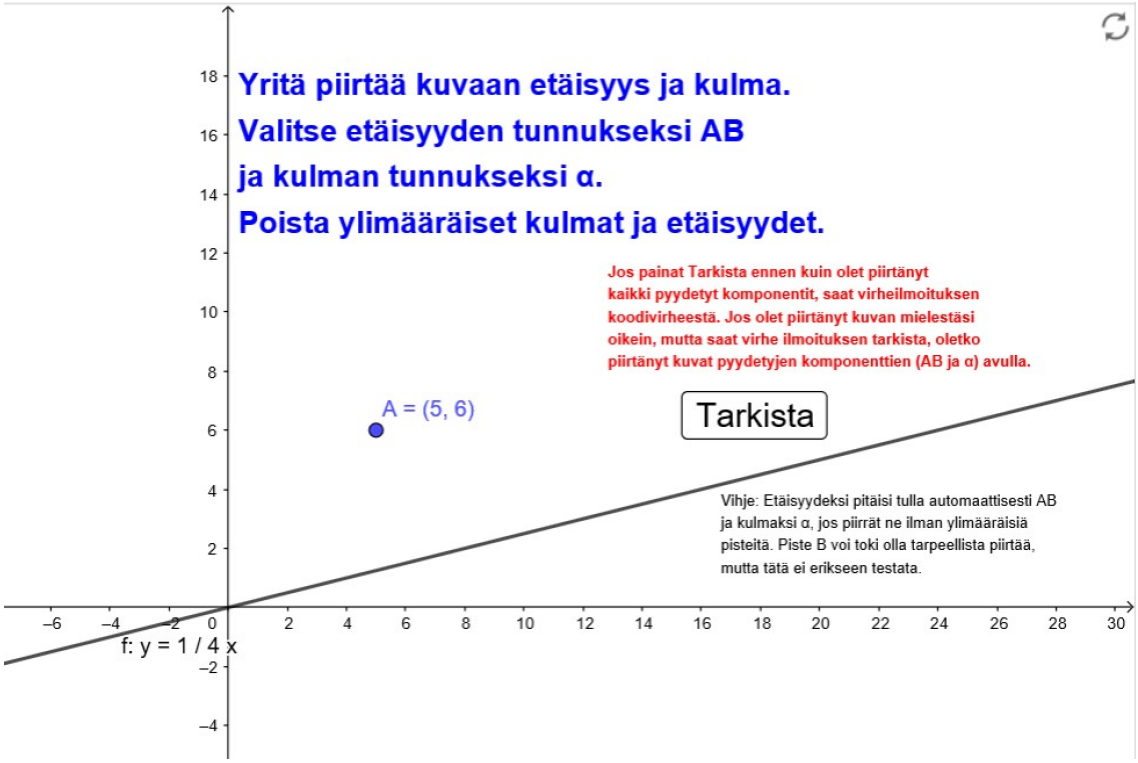
Ohjeet lyhyimmän etäisyyden piirtämiseksi:

1. Piirrä jokin suora, voit käyttää apuna joko syöttökenttää tai piirtää suoran mielivaltaisten pisteiden kautta.
2. Valitse jokin piste (A tai käytä syöttökenttää), jonka etäisyyttä suorasta haluat laskea.
3. Seuraavaksi piirrä suora, joka kulkee kohtisuorasti suoraaa vastaan ja kulkee valitsemasi mielivaltaisen pisteen kautta. Tähän voit käyttää esimerkiksi normaalin piirtämiseen tarkoitettua toimintoa ( ).
4. Kun olet saanut piirrettyä normaalin, etsi normaalin ja suoran välinen leikkauspiste. Leikkauspisteen saat esimerkiksi leikkauspiste ( ) -toiminnosta.
5. Nyt saat mitattua pisteen ja suoran välisen etäisyyden, kun valitset etäisyyden mittaamiseen (cm) tarkoitetun toiminnon.

Hienoa! Tsemppiä seuraavien kuvioiden ratkaisemiseen ja mallintamiseen!

Kuva A.2. *Tehtävä 1.2 Ohjeistus piirtämiseen*

Tehtävä 1.3 *Piirrä ja mittaa kuvaan sekä etäisyys AB että kulma α.*

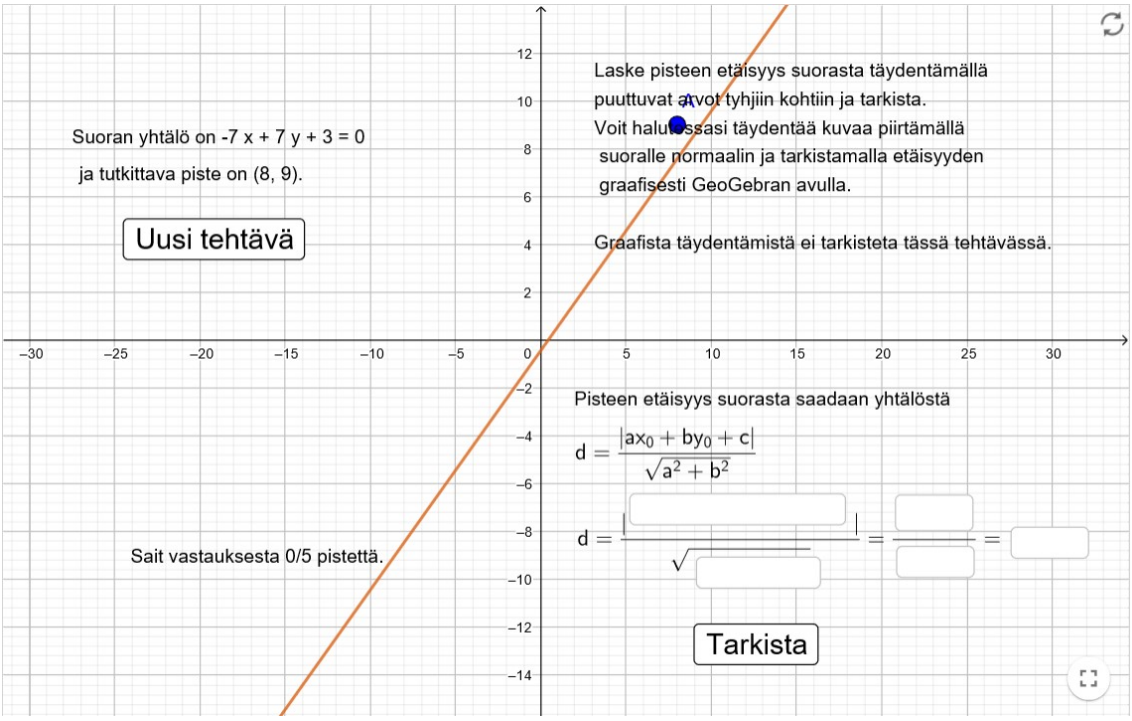


Kuva A.3. *Tehtävä 1.3 Piirrä ja mittaa*

Tehtävä 2.1 *Laske etäisyys.*

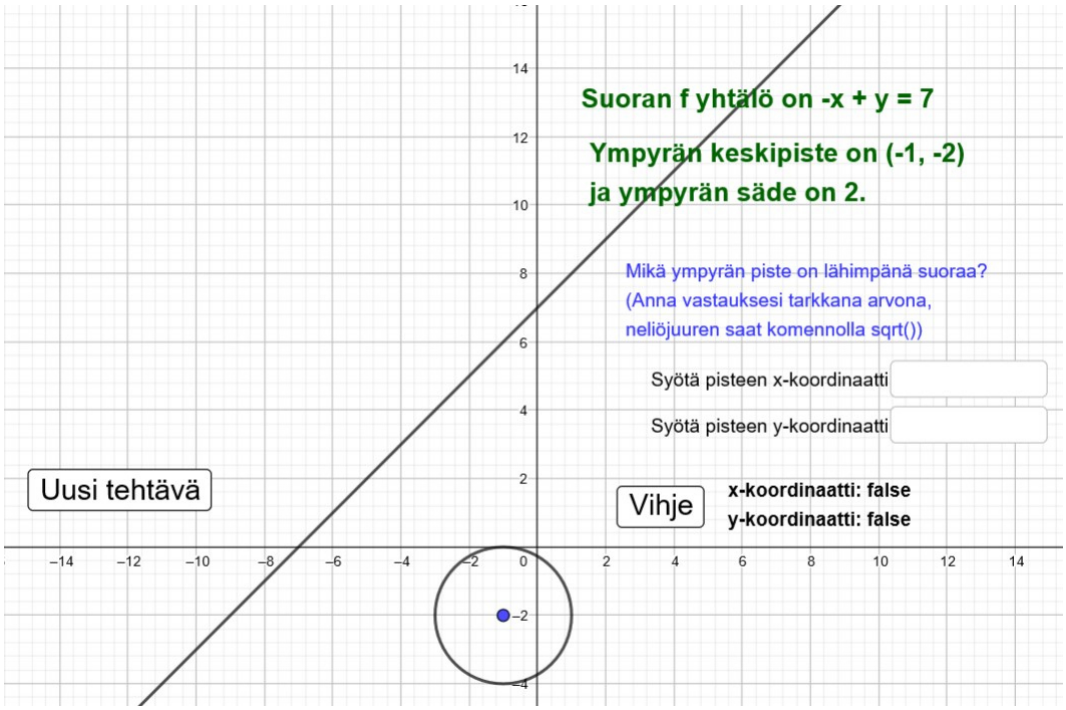
Kuva A.4. *Tehtävä 2.1 Etäisyyden laskeminen malliratkaisuineen*

Tehtävä 2.2 *Täydennä puuttuvat kentät*



Kuva A.5. *Tehtävä 2.2 Pisteen etäisyys suorasta, yhtälön täydennys*

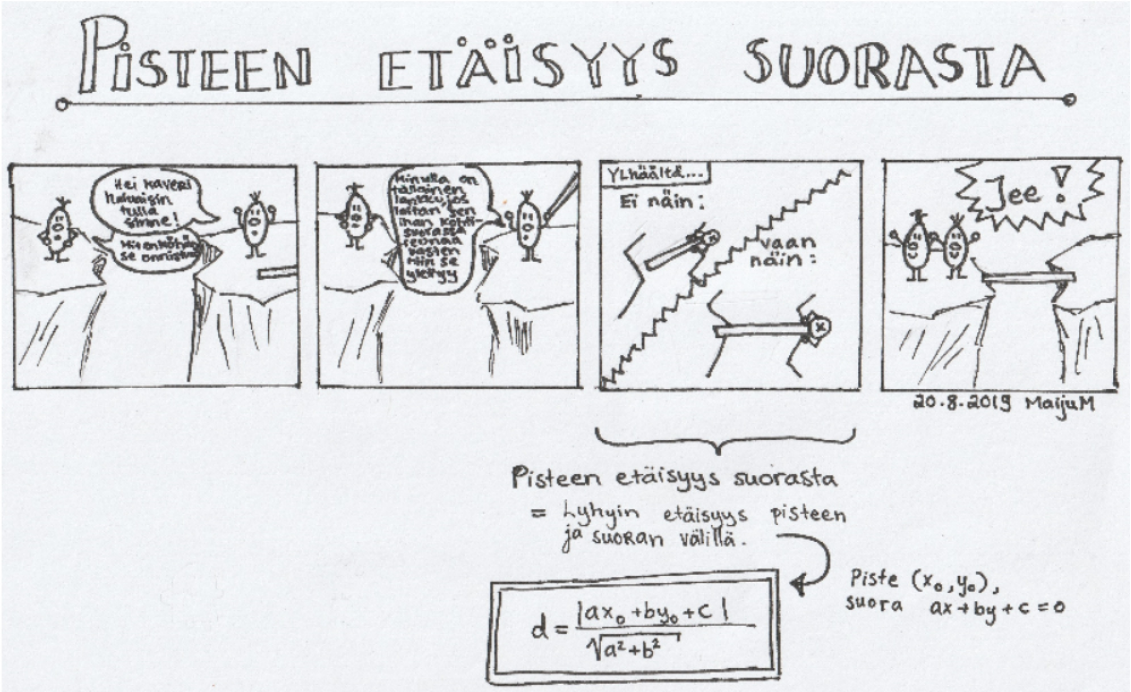
Tehtävä 3.1 *Ratkaise koordinaatit sekä lyhyin etäisyys ympyrän ja suoran väliltä*



Kuva A.6. *Tehtävä 3.1 Etäisyyden laskeminen malliratkaisuineen*

Tehtävä 4 *Ideoita pisteen etäisyyden suorasta käsittelyyn toiminnallisin ja luovin tavoin.*

1. **Sarjakuva, satu, runo, räppi:**
   Toteuta oma teoksesi aiheesta pisteen etäisyys suorasta/tasosta.
2. **Opetusvideo:**
   Animoi oma opetusvideo
   TAI
   Yritä selittää aihe itsellesi, voit äänittää tai kuvata videon aiheesta
3. **Tutki luonnonilmiöitä**
   Löydätkö luokasta tai kotoasi ilmiöitä, tilanteita tai paikkoja, joihin voisit soveltaa pisteen etäisyyttä suorasta. Esimerkiksi, mikä on etäisyys lähimmälle tielle oikeasti ja kuinka paljon se olisi, jos etsisit kohtisuoran reitin.



Kuva A.7. *Tehtävä 4 Luovat tehtävät*

B GEOGEBRA - MALLIRATKAISUT LASKUTEHTÄVIIN

Tehtävä 2.1

Suoran yhtälö on $8x - 5y = -4 \Leftrightarrow 8x - 5y + 4 = 0$ ja pisteen P koordinaatit $(-8, 10)$. Tällöin pisteen ja suoran välinen etäisyys on `110/sqrt(89)`.

Välivaiheineen pisteen etäisyys suorasta on

$$d = \frac{|8 \cdot (-8) - 5 \cdot 10 + 4|}{\sqrt{8^2 + 5^2}} = \frac{|-110|}{\sqrt{89}} = \frac{110}{\sqrt{89}}.$$

Tehtävä 2.2

Tässä aukkotehtävässä kenttiin voi syöttää yhtälöt joko sievennettynä tai kaikkine välivaiheineen, kunhan vastaus on looginen tehtävän muihin vastauskenttiin. Esimerkiksi seuraavat välivaiheet tuottavat GeoGebran koodin automaattitestissä täydet viisi pistettä:

$$d = \frac{|\texttt{-7·8+7·9+3}|}{\sqrt{8^2\texttt{+}9^2}} = \frac{\texttt{10}}{\texttt{sqrt(}145\texttt{)}} = \texttt{sqrt(145)*2/29}.$$

Tehtävä 3.1

Lyhyin etäisyys suoran ja ympyrän kehän väliselle pisteelle löydetään suoralta, joka muodostaa normaalin suoraa vastaan ja kulkee ympyrän keskipisteen kautta.

Tehtävänannosta saadaan suoran yhtälö $-x + y = 7 \Leftrightarrow -x + y - 7 = 0$ sekä laskettua ympyrän yhtälö, kun sen keskipiste on $(-1, -2)$ ja säde $r = 2$. Tällöin ympyrän yhtälö on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 = 4.$$

Ratkaistaan suoran normaalin yhtälö. Tarkastellaan ensin suoran $-x + y = 7 \Leftrightarrow y = x + 7$ yhtälöä, josta saadaan suoran kulmakertoimeksi yksi. Tällöin normaalin kulmakertoimen on oltava -1, koska suoran ja sen normaalin kulmakertoimen tulo on miinus yksi.

Normaali kulkee ympyrän keskipisteen kautta, joten se on yksi suoran normaalin pisteistä. Tämän tiedon avulla voimme muodostaa normaalin yhtälön. Nyt yhtälöksi saadaan

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Leftrightarrow y + 2 = -(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 3.$$

Tämän jälkeen voidaan ratkaista normaalin ja ympyrän leikkauspisteet esimerkiksi sijoittamalla edellä saatu normaalin yhtälö ympyrän yhtälöön

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + ((-x-3)+2)^2 = 4 &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (-x-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 4 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0.\end{aligned}$$

ja toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla nollakohdiksi saadaan $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Kuvasta nähdään, että suoraa lähimpänä oleva ympyrän kehän piste on x-akselilla negatiivisempi, joten valitaan edellä saatujen leikkauspisteiden koordinaateista $x = -1 - \sqrt{2}$. Matemaattisesti tilanteen voisi tarkistaa laskemalla etäisyydet suorasta molemmille normaalin ja ympyrän kehän leikkauspisteille.

Jos $x = -1 - \sqrt{2}$, niin $y = -x - 3 = -(-1 - \sqrt{2}) - 3 = -2 + \sqrt{2}$. Nämä koordinaatit ovat vastaus ensimmäiseen osioon. Toisessa osiossa lasketaan saadun pisteen etäisyys alkuperäiseen suoraan.

Tällöin pisteen etäisyydeksi suoraan saadaan

$$\begin{aligned}d &= \frac{\left|-(-1-\sqrt{2}) + (-2+\sqrt{2}) - 7\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|1 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 7\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|2\sqrt{2} - 8\right|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 + 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$