

Joonas Ojala

# LANDAU-TASOT JA VARATTU HIUKKANEN MAGNEETTIKENTÄSSÄ

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Kandidaatintyö  
Toukokuu 2020

# TIIVISTELMÄ

Joonas Ojala: Landau-tasot ja varattu hiukkanen magneettikentässä  
Kandidaatintyö  
Tampereen yliopisto  
Teknis-luonnontieteellinen tutkinto-ohjelma  
Toukokuu 2020

---

Tämän kandidaatintyön tarkoituksena on toimia helposti lähestyttävänä ja itsenäisenä johdantona sähkömagneettisten kenttien ja kvanttimekaniikan yhdistämiseen. Klassisesta mekaniikasta tiedetään varatun hiukkasen liikkuvan magneettikentässä ympyrärataa pitkin. Siirryttäessä pienen mittakaavaan ja riittävän voimakkaisiin magneettikenttiin, nämä ympyräradat kvantisoituvat. Tämä havaitaan energiaspektrissä tasanteina, joita kutsutaan Landau-tasoiksi. Tässä kandidaattitutkielmassa perehdytään aiheeseen liittämällä sähkömagneettiset kentät näiden potentiaali-muodon avulla Schrödingerin yhtälöön. Työssä esitellään mittainvarianssia ja perehdytään Hamiltonin funktion fysikaaliseen perustaan. Tämän jälkeen esitellään Schrödingerin yhtälön perusteet ja syvennytään Landau-tasojen laskemiseen niin analyyttisesti kuin numeerisesti. Numeerinen laskenta tehdään diskreettiä differenssimenetelmää käyttäen.

Tutkielma on suunnattu fysiikan toisen ja kolmannen vuoden yliopisto-opiskelijoille, mutta kuka tahansa jolla on pintapuolinen ymmärrys mekaniikasta, sähkömagnetismista ja lukio-tason matematiikasta saanee tutkielmasta hyötyä. Sähkömagnetismin ja kvanttimekaniikan rajapinta osoittautuu erittäin oleelliseksi, mutta yksinkertaiseksi lähtökohdaksi kvanttimekaniikan soveltamiseksi käytäntöön. Tämä oleellinen aihe jää monista peruskurssien oppimääristä pois ja tämän työn tarkoitus onkin koota tietoa helposti sisäistettäväksi ja mahdollisimman itsenäiseksi kokonaisuudeksi.

Avainsanat: Kvanttimekaniikka, Sähkömagnetismi, Landau-taso, Mittafunktio, Analyyttinen mekaniikka, Diskreetti differenssimenetelmä

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# SISÄLLYSLUETTELO

1	Johdanto . . . . .	1
2	Klassinen sähkömagnetismi . . . . .	2
2.1	Analyttinen mekaniikka . . . . .	3
2.2	Sähkömagnetismi Hamiltonin mekaniikassa . . . . .	4
3	Schrödingerin yhtälö magneettikentässä . . . . .	5
3.1	Kvanttimekaniikka . . . . .	5
3.2	Varatun hiukkasen Landau-tasot magneettikentässä . . . . .	6
3.2.1	Landau-mittafunktio . . . . .	6
3.2.2	Symmetrinen mittafunktio . . . . .	8
3.3	Degeneraatio . . . . .	8
3.3.1	Spin . . . . .	9
3.3.2	Zeeman-efekti elektronille . . . . .	9
4	Schrödingerin yhtälön numeerinen ratkaisu . . . . .	11
4.1	Diskreetti differenssimenetelmä . . . . .	11
4.1.1	Derivaatta . . . . .	11
4.1.2	Derivaatan matriisiesitys . . . . .	12
4.2	Numeerinen ratkaisu . . . . .	13
4.2.1	Ongelman esittely . . . . .	13
4.2.2	Tulokset . . . . .	14
5	Yhteenveto . . . . .	18
	Lähteet . . . . .	19

## KUVALUETTELO

3.1	Energiatasot . . . . .	7
3.2	Energiaspektri, $N=200$ . Lainattu lähteestä [9]. . . . .	7
4.1	Energiatasot . . . . .	15
4.2	Aaltofunktio, $n=1$ . . . . .	15
4.3	Aaltofunktio, $n=2$ . . . . .	15
4.4	Aaltofunktio, $n=3$ . . . . .	15

## **OHJELMA- JA ALGORITMILUETTELO**

4.1	Koodi Schrödingerin yhtälön ratkaisemiseksi numeerisesti . . . . .	17
-----	--	----

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

$\vec{B}$	magneettikenttä
$\vec{E}$	sähkökenttä
$\epsilon$	permittiivisyys
$\hbar$	Planckin vakio
$k$	aaltoluku
$m$	massa
MATLAB	numeerinen laskentaohjelmisto
$\mu$	permeabiliteetti
$n$	pääkvanttiluku
$\mathbf{p}$	varaustiheys
$p$	liikemäärä
$q$	varaus
$v$	nopeus

# 1 JOHDANTO

Sähkömagnetismi on yksi neljästä fysiikan perusvuorovaikutuksista. Magnetismin olemassaolosta on tiedetty jo tuhansia vuosia, mutta sen yhteys sähköön on selvinnyt vasta 1800-luvulla. [1, pp. 403-405] On havaittu, että magneettikentän läsnäolo muuttaa merkittävästi varatun hiukkasen käyttäytymistä. Moninaiset sähköiset ja magneettiset ilmiöt onnistuttiin 1800-luvun puolivälissä yhdistämään ja ne selittivät tyydyttävästi havaitun vuorovaikutuksen sähkömagnetismin ja materian välillä [2, p. 444]. 1900-luvulle siirryttäessä fysiikka oli onnistunut kuvaamaan monet makroskooppiset ilmiöt.

Siirryttäessä mittaskaalassa pienempään, nanoskaalan kokoluokkaan havaitaan, että monet fysiikassa käytetyt, arkipäiväisestä kokemuksesta lähtöisin olevat käsitteet ovat riittävästi kuvaamaan äärimmäisen pienen mittakaavan ilmiöitä. Alettiin siirtyä kvanttimekaniikan maailmaan, jossa hiukkaset käyttäytyvät aaltomaisesti ja päinvastoin, suureet ovat kvantisoituneita ja systeemin kehityksen määrittävät indeterministiset todennäköisyydet. [1, pp. 307-308] Nykyään lähes kaikki fysiikan mullistavimmat sovellukset pohjautuvatkin juuri kvanttimekaniikkaan ja kvanttimekaniikan kehitys on ollut merkittävimpiä ja uraauurtavimpia löydöksiä modernin fysiikan alalla. Kvanttimekaniikan yhdistäminen perusvuorovaikutuksiin on luonnollisesti suuren mielenkiinnon kohteena fysiikan tutkimuksessa. Käytännölliseksi lähtökohdaksi kvanttimekaniikan soveltamiseksi käytäntöön osoittautuu sähkömagnetismin ja kvanttimekaniikan rajapinta. Näiden yhteenliittäminen onkin edellytys lähes kaikelle modernille nanoskaalan fysiikalle ja sen perustavanlaatuisen ymmärtäminen on välttämätöntä käytännön sovelluksissa.

Tässä kandidaatintyössä tarkoituksena on ymmärtää miten sähkömagneettiset potentiaalit kytkeytyvät hiukkasen Schrödingerin yhtälöön ja kuinka ratkaista vakiomagneettikentässä liikkuvan hiukkasen spektri. Klassisesta mekaniikasta tiedetään varatun hiukkasen kulkevan ympyrärataa. Siirryttäessä pieneen mittakaavaan, nämä ympyräradat kvantisoituvat ja tämä havaitaan energia spektrissä ilmenevinä tasavälisinä tasanteina. Luvussa 2 keskitytään klassiseen sähkömagnetismin teoriaan, potentiaalifunktioihin, mittainvarianssiin, sekä syvennytään Hamiltonin funktion fysikaaliseen taustaan analyyttisen mekaniikan avulla. Luvussa 3 perehdytään itse kvanttimekaniikkaan ja ratkaistaan analyyttisesti yksinkertaisen systeemin Landau-tasot. Luvussa 4 ratkaistaan vastaavan systeemin energiaspektri numeerisesti diskreetillä differenssimenetelmällä käyttäen MATLAB-ohjelmistolla. Tämän tutkielman tarkoitus on esittää ja jäsenellä tarjolla ole tieto siten, että ensimmäisen tai toisen vuoden yliopisto-opiskelijat voivat asiaa ymmärtää.

## 2 KLASSINEN SÄHKÖMAGNETISMI

Sähkömagneettisten kenttien ja niiden perustana oleva vuorovaikutus on onnistuttu 1800-luvulla tiivistämään Maxwellin yhtälöiksi. Ne voidaan esittää muodossa:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Nämä yhtälöt määrittävät täydellisesti sähkö- ja magneettikenttien käyttäytymisen. jotta hiukkasen käyttäytymistä voidaan mallintaa, tarvitaan lisäksi yhtälö joka kertoo kenttien vaikutuksen varattuun hiukkaseen. Tätä kuvaa Lorentzin voima, joka kertoo varattuun hiukkaseen kohdistuvan voiman sen liikkuessa magneettikentän läpi

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.2)$$

[1, p. 425] Klassisesta mekaniikasta tutusta keskihakuvoimasta  $\frac{mv^2}{r}$  ja Lorentzin voimasta päädytään nonrelativistisessa tapauksessa yhtälöön

$$\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}. \quad (2.3)$$

Varauksen  $q$  omaava hiukkanen siis kiertää ympyrärataa kulmataajuudella  $\omega_c$ . Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen ilmaiseminen sähkö- ja magneettikenttien avulla on kuitenkin rajoittunutta, sillä niiden vaikutus havaitaan hiukkasen kokemana voimana eikä se sovellu yleiseen tapaukseen. Sähkömagneettisen kentät on mahdollista ilmaista yleisemmin potentiaalitenttinä

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.5)$$

jossa  $\psi(\vec{r}, t)$  on skalaaripotentiali ja  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  on vektoripotentiali. [2, p. 445-447], [3, p. 247] Yllä esitellyt potentiaalifunktiot eivät ole yksikäsitteisiä, vaan kutsutaan mittainvariantiksi (gauge-invariant). Potentialeihin on mahdollista lisätä mittafunktio muuttamat-



ta niiden kuvaamien sähkö- ja magneettikenttien fysikaalista tulkintaa:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\alpha, \quad (2.6)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial}{\partial t}\alpha \quad (2.7)$$

mille tahansa funktiolle  $\alpha(\vec{x}, t)$ . [2, pp. 446-447], [3, p. 247] Nämä mittafunktiot voidaan valita usein eri tavoin ja tiettyjen mittafunktioiden tarjoamaa symmetriaa tullaan käyttämään käsittelyn mahdollistamiseksi.

## 2.1 Analyttinen mekaniikka

Tämän alaluvun tarkoituksena on kuvata Hamiltonin funktion fysikaalinen perusta. Sen syvä ymmärtäminen ei ole oleellista kandidaatin työn aiheen ymmärtämiseksi, mutta aiheen perusteelliseksi käsittelemiseksi tulokset on esitelty tässä. Oleellisena tuloksena on yhtälö 2.12, jota sovelletaan luvusta 2.2 eteenpäin.

Analyttinen mekaniikka on joukko vaihtoehtoisia formulaatioita tutulle klassiselle mekaniikalle. Lähtökohtana on formuloida mekaniikan lainalaisuudet lähtien liikkeelle yleispätevämmistä koordinaateista kuin mitä tutut paikka, nopeus tai liikemäärä ovat. N hiukkaselle näitä koordinaatteja on valinnasta riippumatta  $3N$  kappaletta ja nämä ovat  $q(t_i) = q(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$  sekä tätä vastaava nopeus  $\dot{q}(t_i)$ . Nämä nopeudet  $\dot{q}(t_i)$  eivät siis yleisesti vastaa kappaleen nopeutta perinteisessä mielessä. Systeemin tilaa päädytään kuvaamaan faasiavaruudessa Lagrangen funktiolla

$$L = T - V, \quad (2.8)$$

jossa  $T$  on liike-energia ja  $V$  on potentiaalienergia. [4, p. 21] Tällöin systeemin tilan muutosta kuvaava perustavanlaatuisin periaate on Hamiltonin periaate. Sen mukaan systeemi kehittyy siten, että vaikutusfunktionaali (action functional)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) dt, \quad (2.9)$$

on stationaarinen, eli että  $\partial S / \partial q_i = 0$  [4, pp. 34-35]. Tämä vaatimus johtaa systeemin kehitystä kuvaavaan Lagrangen yhtälöön

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.10)$$

kaikille  $1, \dots, 3N$ . [5, pp. 59-63] Lagrangen yhtälö pohjautuu siis koordinaatteihin  $q_i$  ja näiden aikaderivaattoihin  $\dot{q}_i$ . Tämä johtaa edellä esiteltyyn Lagrangen yhtälöön, joka on toisen asteen yhtälö. Systeemin aikakehitys voidaan määrittää myös toisella, vaihtoehtoisella menetelmällä ja näin päädytään Hamiltonin mekaniikkaan. Fysiikka näiden taustalla on sama, mutta formulaatio hieman erilainen. Hamiltonin mekaniikassa koordinaatin  $q_i$

korvaa kanoninen liikemäärä Kanoninen liikemäärä määritellään yhtälöllä

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \quad (2.11)$$

ja se kuvaa systeemin liikemäärää suhteessa määrättyihin koordinaatteihin. Se ei välttämättä ole sama kuin mekaaninen liikemäärä. [4, p. 55] Kanonisen liikemäärän etu  $\dot{q}_i$ :hin nähden on se, että toisin kuin  $q_i$  ja  $\dot{q}_i$ ,  $q_i$  ja  $p_i$  ovat toisistaan riippumattomat. Näin ollen näiden avulla johdettu systeemin aikakehitystä kuvaavat yhtälöt ovat toisen asteen yhtälön sijaan ensimmäistä astetta, mutta niitä on kaksinkertainen määrä. [4, p. 335] Riippuen tilanteesta, tämä voi olla toivottavaa. Kaikki tarvittava on nyt esitelty Hamiltonin funktion määrittämiseksi. Se määritellään yhtälöllä

$$H(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) := \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i p_i - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad (2.12)$$

ja on yleisistä periaatteista johdettu, erittäin käytännöllinen yhtälö jota tullaan käyttämään systeemin tilan määrittämiseksi sähkömagneettisessa kentässä. [5, p. 278] Usein Hamiltonin funktio kuvaa systeemin kokonaisenergiaa, mutta ei yleisessä tapauksessa. Analyytisessä mekaniikassa Hamiltonin funktiosta voidaan johtaa systeemin aikakehitys Hamiltonin liikeyhtälöiden avulla. Nämä eivät kuitenkaan ole oleellisia tutkielman kannalta ja ne sivuutetaan.

## 2.2 Sähkömagnetismi Hamiltonin mekaniikassa

Yhtälön 2.8 avulla voidaan määrittellä Lagrangianin funktion

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\psi + q\vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (2.13)$$

jossa  $q_i := x_i = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\dot{q}_i := v_i = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  [4, p. 22].

Yhtälöstä 2.11 saadaan kanoniseksi liikemääräksi

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}, \quad (2.14)$$

joka kuvaa systeemin todellista liikemäärää sähkömagneettisen kentän läsnäollessa [4, p. 56]. Näin määritelty liikemäärä on mittainvariantti [6, p. 2]. Yhtälöstä 2.12 saadaan määriteltyä klassinen Hamiltonin funktio

$$H = \frac{(m\vec{v} + q\vec{A})^2}{2m} + q\psi, \quad (2.15)$$

joka on myös kvanttimekaaniseen käsittelyyn sopiva Hamiltonin funktion muoto [4, p. 342].

## 3 SCHRÖDINGERIN YHTÄLÖ MAGNEETTIKENTÄSSÄ

### 3.1 Kvanttimekaniikkaa

Kvanttimekaniikka on 1900-luvun alkupuolella kehittynyt fysiikan ala, jossa pyritään kuvaamaan fysiikan ilmiöitä hyvin pienessä mittakaavassa [1, p. 307-308]. Tässä luvussa pyritään perehtymään aiheeseen käymällä läpi keskeiset käsitteet ymmärrettävästi, ohittaen täsmällinen matemaattinen käsittely.

Kvanttimekaniikan keskiössä on aaltofunktion  $\Psi$  käsite, joka kuvaa systeemin tilaa [7, p. 201]. Se on abstrakti, usein kompleksinen matemaattinen olio, jonka fysikaalinen tulkinta ei ole triviaali. Sen itseisarvon neliölle  $|\Psi|^2$  on kuitenkin selkeä tulkinta; se kertoo todennäköisyystiheyden  $\mathbf{P}$  kyseisessä pisteessä ja tästä johtuen aaltofunktiot on normalisoitu siten, että  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 = 1$ . [2, pp. 81-83] Jotta systeemin fysikaalisia suureita voidaan määrittää, tulee aaltofunktiota operoida operaattoreilla, joiden voidaan ajatella vastaavan mittauksia. Jokaista mitattavaa suuretta vastaa oma hermittinen operaattorinsa, joita kuvataan matriisien avulla. Hermiittinen tarkoittaa sitä, että operaattorin ominaisarvot ovat reaalisia (kts. esim. [8]). Nämä ominaisarvot vastaavatkin mitattaessa saatuja mahdollisia arvoja. Mittauksen lopputulemaa ei voida ennustaa tarkasti, ainoastaan operaattorin  $A$  odotusarvo  $\langle A \rangle$  voidaan määrittää etukäteen yhtälöllä  $\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* A \Psi$ . [7, pp. 242-245] Aaltofunktion aikakehitystä kuvataan Schrödingerin yhtälöllä

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad (3.1)$$

jossa  $\hat{H}$  on edellisessä luvussa esitelty Hamiltonin operaattori. [3, p. 44] Tähän operaattoriin sisällytetään kaikki systeemin tilaan vaikuttavat tekijät. Jos aaltofunktio voidaan erottaa tulomuotoon  $\Psi(\vec{x}, t) = \Gamma(t)\psi(\vec{x})$ , voidaan kirjoittaa ajasta riippumaton Schrödingerin yhtälö

$$H\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}), \quad (3.2)$$

jonka ratkaisut kuvaavat systeemin stationäärisiä tiloja. [1, pp. 327-328] Erittely muotoon  $\Gamma(t)\psi(\vec{x})$  voidaan tehdä, jos Hamiltonin funktio ei riipu ajasta. Tällöin systeemin kokonaisenergia  $E$  on vakio. Systeemin aikakehitys ja energiatilat voidaan siis käsitellä erillään toisistaan. Systeemin aikakehitys saadaan tällöin yhtälöstä  $\Gamma(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$  [7, pp. 226-227]. Systeemin stationääristen tilojen energian odotusarvot pysyvät samoina aaltofunk-

tion aikakehityksestä huolimatta, sillä aikakehitys kumoutuu pois odotusarvoa laskettaessa. Kvanttimekaniikassa liikemäärän  $p$  korvaa operaattori  $-i\hbar\nabla$  [2, p. 54]. Yhtälöstä 2.15 saadaan Schrödingerin yhtälöksi varatulle hiukkaselle seuraava

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{1}{2m}((-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 + q\vec{V})\Psi. \quad (3.3)$$

Näitä tietoja sovelletaan seuraavassa alaluvussa määrittämään magneettikentässä olevan hiukkasen Landau-tasot sekä Schrödingerin yhtälön ratkaisu.

## 3.2 Varatun hiukkasen Landau-tasot magneettikentässä

Tässä luvussa esitellään ratkaisu varatun hiukkasen Landau-tasojen määrittämiseksi homogeenisessa, z-akselin suuntaisessa magneettikentässä  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , jättäen spin huomiotta (kts. luku 3.3.1). Hiukkasen varaus on  $q$ , massa  $m$  ja käsittely tehdään 2-ulotteisesti. Koska sähkökenttä on nolla, on tällöin  $\phi = 0$ . On mahdollista valita vektorikenttä  $\vec{A}$  monin eri tavoin, sillä ei ole olemassa yksikäsitteistä ratkaisua. Tarkastellaan seuraavaksi erilaisten mittafunktioiden valintaa kyseisen ongelman ratkaisemiseksi. Ratkaisu pohjautuu erityisesti Bhuiyanin ja Marsiglian paperiin [9].

### 3.2.1 Landau-mittafunktio

Tarkastellaan Landau-mittafunktion valintaa, eli mittafunktiota

$$\vec{A} = (0, xB, 0). \quad (3.4)$$

Tällöin on selvästi  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ , eli kyseessä on haluttu systeemi. Selvästi myös magneettikenttä  $B$  on invariantti  $xy$ -tason translaation suhteen, mutta  $A$  vain  $y$ -suuntaisen translaation suhteen. Mittafunktio tarjoaa kuitenkin translationaalista symmetriaa, jota voidaan käyttää hyväksi ongelman ratkaisemiseksi. [10, p. 18] Tiedetään että translaatioinvarianssi johtaa liikemäärän säilymiseen, joten tätä voidaan käyttää hyväksi [7, p. 580]. Hamiltonin funktioksi saadaan yhtälöstä 2.15

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [p_x^2 + (p_y - qBx)^2]. \quad (3.5)$$

[9, p. 14] Koska  $[p_y, \hat{H}] = 0$ , on perusteltua kirjoittaa aaltofunktio tulomuodossa. Tällöin

$$\Psi(\vec{x}) = e^{ik_y y} \psi(x) \quad (3.6)$$

ja voidaan kirjoittaa yhtälön 3.2 mukainen, ajasta riippumattomaan Schrödingerin aaltoyhtälö

$$\frac{1}{2m} [(p_x^2 + (\hbar k_y - qBx)^2)] \psi(x) = E\psi(x). \quad (3.7)$$

[11, p. 168], [9, p. 14] Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{H}_\chi \chi(x) = E\chi(x), \quad (3.8)$$

missä

$$\hat{H}_\chi = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m\omega_c^2}{2} (x - k_y l_B^2)^2. \quad (3.9)$$

Yhtälössä 3.9 esiintyvä  $\omega_c = qB/m$  on syklotronitaajuus, joka esiintyy myös yhtälössä 2.3, ja  $l_B = \sqrt{\hbar/qB}$  on magneettinen pituus, joka on karakteristinen mittakaava kvanttilmiöille magneettikentässä. [10, p. 19] Tätä käytetään myöhemmin numeerisen ratkaisun skaalaamisessa dimensiottomaksi. Tämä nähdään origosta syrjäytetyn harmonisen värähtelijän yhtälöksi (kts. esim. [7, pp. 246-248]) ja energiaksi saadaan

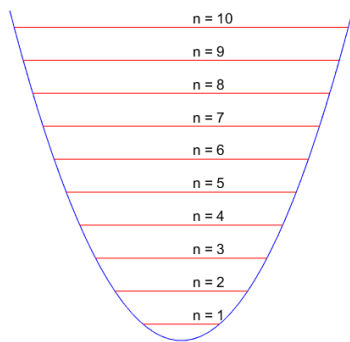
$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (3.10)$$

Näitä energiatiloja sanotaan Landau-tasoina ja ne, samoin kun Landau-mittafunktio, on nimetty Neuvostoliittolaisen Lev Landaun (1908-1968) mukaan. [12, p. 177] Aaltofunktion muodoksi saadaan uhkaavan näköinen

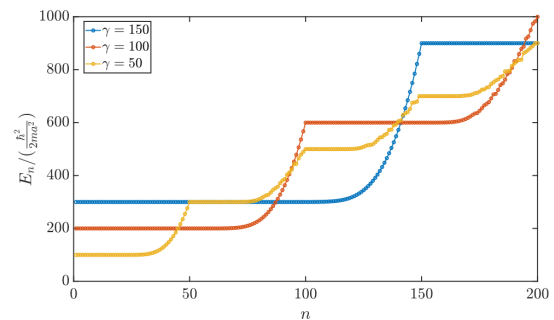
$$\Psi_{n,k_y} = e^{ik_y y} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} l_B}} e^{-\frac{(x+k_y l_B^2)^2}{2l_B^2}} \hat{H}_n\left[\frac{x+k_y l_B^2}{l_B}\right] \quad (3.11)$$

missä  $\hat{H}_n$  ovat Hermiten polynomeja [9, p. 14]. Aaltofunktion muotoon palataan myöhemmin.

**Kuva 3.1.** Energiatasot



**Kuva 3.2.** Energiaspektri,  $N=200$ . Lainattu lähteestä [9].



Kuvaajassa 3.2 energiatilat on piirretty kuvaajaan suuruusjärjestyksessä. Nähdään että samalle energiatasolle sijoittuu useita eri energiatiloja. Kuvaajassa  $\gamma$  kuvaa kunkin Landau-tason degeneraatiota.

### 3.2.2 Symmetrinen mittafunktio

Koska mittafunktion valinta on mielivaltainen, voidaan sama ongelma ratkaista käyttäen toista mittafunktiota. Yleinen valinta on symmetrinen mittafunktio  $\vec{A} = -yB/2\hat{x} + xB/2\hat{y}$ . Edelleen  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ , eli kuvataan edelleen samaa magneettikenttää. Nyt edellisen mittafunktion tarjoama translationaalinen symmetria hylätään rotationaalisen symmetrian tähden. Ongelman ratkaisu on esitelty lähteessä [9] ja sen tarkempi käsittely sivuutetaan tässä. Ratkaisuksi saadaan Landau-mittafunktiota vastaavat energiatilat

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \quad (3.12)$$

[9, p. 6] Vastaava aaltofunktio on

$$\Psi_{n_r, l} = \frac{1}{l_B} \sqrt{\frac{n_r!}{(n_r + |l|)!}} \left(\frac{r}{\sqrt{2}l_B}\right)^{|l|} e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}} L_{n_r}^{|l|} \left(\frac{r^2}{2l_B^2}\right) \frac{e^{il\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.13)$$

[9, p. 6].

Saadut energiatilat ovat samat molemmilla mittafunktioilla laskiessa. Kuitenkin, eri mittafunktioita vastaavat aaltofunktiot 3.11 ja 3.13 poikkeavat huomattavasti. Tästä poikkeamasta aiheuttaa ongelmia systeemin todennäköisyystulkinnalle. Tämä on eriskummallista, sillä fysiikan pitäisi olla mittainvarianttia, eli mittafunktion valinnalla ei pitäisi olla vaikutusta fysikaaliseen tulkintaan. Jotta kaksi aaltofunktiota voivat kuvata samaa systeemiä tulee niiden poiketa korkeintaan vaihekertoimen verran [9, p. 7]. Kyseiset aaltofunktiot poikkeavat huomattavasti enemmän, jopa niiden avaruudellinen muoto on erilainen. Ratkaisu tähän ongelmaan johtuu systeemissä piilevästä degeneraatiosta, johon syvennyttään hieman seuraavassa luvussa. Itse aaltofunktioiden eroihin ei syvennyttä tarkemmin mutta mainittakoon, että aaltofunktioista voidaan ottaa superpositio degeneroituneista energiatiloista siten, että aaltofunktiot ovat vaihekerrointa lukuunottamatta samat. Degeneroituneen systeemin todennäköisyystulkinta edellyttää siis mittainvarianssin huomioimista ja tämä on yleisessä tapauksessa hankalaa. [9, p. 15]

### 3.3 Degeneraatio

Energiatilat saatiin laskettua käyttäen kahta eri mittafunktiota, ja niiden todettiin olevan samat. Tällöin saadaan

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \quad (3.14)$$

Huomataan että energia ei riipu  $k_y$ :n arvosta. Nämä energiatilat eivät siis ole yksikäsitteisiä, niissä esiintyy degeneraatiota (degeneracy), sillä samaa  $E$ :n arvoa vastaa useita eri  $k_y$ . Degeneraatio on mittainvariantti, eli degeneraatiota ilmenee myös symmetrisen mittafunktion avulla ratkaistussa ongelmassa. Tämä degeneraatio  $G$  on erittäin suuri. Dege-

neraation suuruudelle voidaan antaa rajallisessa alueessa  $A$  likimääräinen arvo.

$$G = \frac{BA}{h/q}. \quad (3.15)$$

[9, p. 8] Esimerkiksi arvolla  $B = 1T$ ,  $A = 10nm^2$  jokaisen energiatilan degeneraation lukuarvoksi saadaan  $2.4 \cdot 10^6$ . Tämä degeneraatio on merkittävän suuri ja tämä selittää erot eri mittafunktioilla ratkaistujen aaltofunktioiden välillä.

### 3.3.1 Spin

Jotta systeemiä voidaan kuvata perusteellisesti, tarvitaan systeemin kuvaamiseen esitelä ylimääräinen kvanttiluku. Tätä kutsutaan spiniksi ja se on alkeishiukkasille ominainen, puhtaasti kvanttimekaaninen ilmiö. Vaikka hiukkanen ei teknisesti pyörikään, spinin käyttäytyminen muistuttaa etäisesti pyörimistä ja se aiheuttaa ylimääräisen magneettisen momentin hiukkaselle. [1, p. 548] Spinillä on ominaisuus, että mitattaessa sillä täsmällinen arvo ainoastaan mitattuun suuntaan, ja korreloiva todennäköisyys mihin tahansa toiseen suuntaan [13, p. 111]. Spinin käsittely jätettiin yksinkertaisuuden vuoksi huomiotta, mutta sen vaikutus reaali maailmassa on huomioitava.

### 3.3.2 Zeeman-efekti elektronille

Tässä alaluvussa käsitellään esimerkin vuoksi Zeeman-efekti elektronille spinin vaikutuksen ymmärtämiseksi. Spinin suuruus saadaan yhtälöstä:

$$|S| = \sqrt{s(s+1)}\hbar. \quad (3.16)$$

missä  $s$  on spin-quanttiluku. Elektronille  $s = \frac{1}{2}$ , joten

$$|S| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (3.17)$$

Mahdolliset arvot elektronin spinin z-suuntaiselle komponentille ovat

$$S_z = \pm \frac{1}{2}\hbar. \quad (3.18)$$

Hiukkanen tasaisessa, yhdensuuntaisessa ja liikesuuntaan nähden kohtisuorassa magneettikentässä  $\vec{B} = B_z \hat{z}$

$$V_M = \mu \cdot \vec{B} = \mu \vec{B} \quad (3.19)$$

Elektronin magneettinen momentti voidaan kirjoittaa

$$\mu = \frac{\mu_B(g_l \vec{L} + g_s \vec{S})}{\hbar} \quad (3.20)$$

missä  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  on Bohrin magnetoni ja se kuvaa elektronin magneettisen momentin suuruutta. Tässä  $L$  vastaa elektronin liikkeestä ja  $S$  spinistä aiheutuvaa magneettista momenttia. Vastaavat painotuskertoimet  $g$  ovat luonnonvakioita joiden lukuarvo voidaan määrittellä kvanttielektrodynamiikasta. [2, p. 466] [1, pp. 548-550].  $g_l \approx 2$  ja  $g_s \approx 1$ . Jos  $L = 0$ , yhtälöstä 3.20 nähdään, että koska  $\vec{S} = \pm \frac{1}{2}\hbar$ , on  $\mu$ :lla kaksi mahdollista arvoa. Tällöin eri  $S_z$  omaavat elektronit kokevat eri potentiaalin yhtälön 3.19 mukaisesti ja niiden energiatilat jakautuvat, eli degeneraatio pienenee. Tätä ilmiötä sanotaan Zeeman-efektiksi ja se on nimetty hollantilaisen Pieter Zeemanin mukaan. Tämä ilmiö on jätetty käsittelyssä pois yksinkertaisuuden vuoksi.



## 4 SCHRÖDINGERIN YHTÄLÖN NUMEERINEN RATKAISU

Schrödingerin yhtälön ratkaisut ovat harvoin ratkaistavissa analyttisin menetelmin, mikä vuoksi käytännössä yhtälöt joudutaan ratkaisemaan numeerisin menetelmin. Keskitytään seuraavaksi yhteen numeeriseen ratkaisumenetelmään, diskreettiin differenssimenetelmään (discrete difference method).

### 4.1 Diskreetti differenssimenetelmä

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen differenssimenetelmällä perustuu nimensä mukaisesti diskretisointiin. Jatkuva funktio, samoin kun siihen operoivat derivaattaoperaattorit approksimoidaan siten, että ne jaetaan tasavälisiin, diskreetteihin osiin. Saadut diskreetit funktiot voidaan esittää matriiseina ja näin differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen yksinkertaistuu lineaarialgebraksi. [14] Se, moneksiko osaksi diskretointi tehdään, vaikuttaa luonnollisesti ratkaisun tarkkuuteen.

#### 4.1.1 Derivaatta

Funktion derivaatan määritelmä perustuu erotusosamäärän raja-arvoon

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.1)$$

Derivaattaa voidaan approksimoida käyttäen pientä arvoa  $h$ :lle:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.2)$$

Käytännössä parempi tulos saadaan korvaamalla yhtälö 4.1 ekvivalentilla ilmaisulla

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (4.3)$$

jolloin voidaan approksimoida

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (4.4)$$

[15, pp. 3-4]

### 4.1.2 Derivaatan matriisiesitys

Edellisessä alaluvussa esiteltyt approksimaatiot derivaatalle voidaan esittää myös matriisimuodossa jos niiden ajatellaan operoivan  $k + 2$ -ulotteiseen pystyvektoriin. Yhtälö 4.3 voidaan esittää matriisimuodossa Toeplitzin matriisilla:

$$M_{k \times k+2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jos reunaehdot jätetään huomiotta, tätä voidaan approksimoida neliömatriisina:

$$M \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[15, pp. 5-8] Tällöin reunaehdot aiheuttavat enemmän virhettä, mutta matriisin käsittely helpottuu huomattavasti. Reunaehdot voitaisiin olettaa esimerkiksi periodisiksi, mutta tämä sivuutetaan. Vastaavanlainen esitys voidaan löytää myös toiselle derivaatalle:

$$M_{2k \times k+2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & & & & \\ & -1 & 2 & 1 & & & \\ & & -1 & 2 & 1 & & \\ & & & -1 & 2 & 1 & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & & & & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



kerin tuloa (kts. [16, p. 6]). Termi  $\frac{\partial^2 x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 y'}{\partial y'^2}$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 y'}{\partial y'^2} \approx \text{kron}(M_2, I) + \text{kron}(I, M_2), \quad (4.9)$$

jossa merkintä *kron* tarkoittaa Kronckerin tuloa ja *I* identiteettimatriisia. Samoin kun operaattorit esitetään matriiseina, mielletään aaltofunktio  $\psi$  vektoriksi. 2-ulotteisen aaltofunktion esittäminen matriisina ei kuitenkaan ole triviaalia. Diskreetti 2-ulotteinen matriisi

$$\psi_{\text{diskreetti}} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{22} & \dots \\ \dots & \ddots & \\ \psi_{k1} & & \psi_{kk} \end{bmatrix}$$

voidaan muuttaa 1-ulotteiseksi vektoriksi seuraavasti:

$$\psi_{1d} = [\psi_{11}, \psi_{21}, \dots, \psi_{n1}, \psi_{12}, \psi_{22}, \dots, \psi_{n2}, \dots]^T$$

Jos määritellään operaattori

$$X = [1, 2, 3, \dots, n-1, n]^T$$

saadaan vastaava paikkaoperaattori *X* määriteltyä kompaktisti Kroneckerin tulon avulla. Termiä  $2ix' \frac{\partial}{\partial y'}$  vastaa

$$2ix' \frac{\partial}{\partial y'} \approx 2i \cdot \text{kron}(X, M) \quad (4.10)$$

ja termiä  $x'^2$

$$x'^2 \approx \text{kron}(X^2, I) \quad (4.11)$$

jossa potenssiin korotus tarkoittaa elementtikohtaista potenssiin korotusta. Koko yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa:

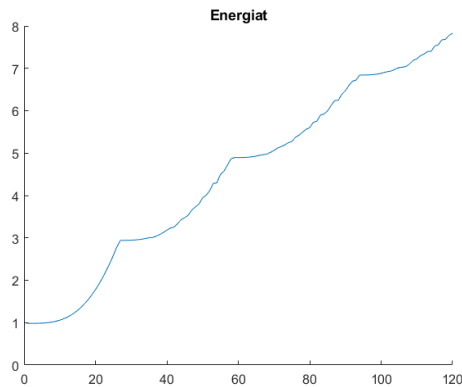
$$\hat{A}\psi = (\text{kron}(M'_2, I) + \text{kron}(I, M'_2) + 2i \cdot \text{kron}(X, M') + \text{kron}(X^2, I))\psi = E\psi, \quad (4.12)$$

Yhtälö on yksinkertaistunut ominaisarvoyhtälöksi, joka voidaan esittää muodossa  $(H - EI)\psi = 0$  ja ratkaista esimerkiksi Gaussin algoritmilla (kts. esim. [17]). Ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat kyseistä energiatilaa vastaava aaltofunktio  $\psi$ . Gaussin algoritmi on tässä sivuutettu ja ominaisarvot on ratkaistu MATLAB-ohjelmiston eig-komennolla. Kyseinen komento antaa suoraan ominaisvektorit.

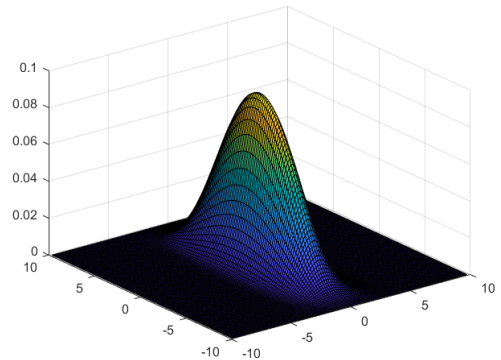
## 4.2.2 Tulokset

Menetelmällä saatavat energiaspektri on nähtävissä kuvaajasta 4.1 ja ohessa on myös pääkvanttilukuja *n* vastaavat aaltofunktiot. Aaltofunktiot eivät kuitenkaan välttämättä vastaa fysikaalista todennäköisyysjakamaa, kuten luvussa 3.2.2 mainittiin. Ratkaisussa on käytetty  $N = 120$ ,  $L = 20$ . L kuvaa siis systeemin fysikaalista kokoa magneettisen pituu-

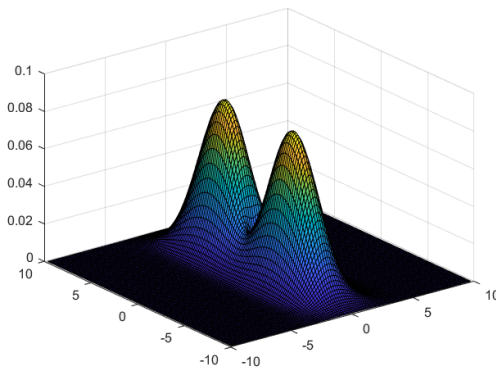
den  $l_B$  yksiköissä. Jotta diskretointi antaa fysikaalisesti oikeita tuloksia, tulee olla voimassa hierarkia  $N \gg L \gg 1$ . Suurempi  $N$ :n arvo antaisi luonnollisesti tarkempia tuloksia, mutta tietokoneen muisti rajoittaa valintaa. Tämä ehto rajoittaa valitsemaan pienen  $L$  ja näin kuvattu numeerinen ratkaisu vastaa geometrialtaan pientä systeemiä ja tästä johtuu pehmeät siirtymät tasanteiden välillä. Energiatasot on piirretty alla olevaan kuvaajaan ja niistä on kuitenkin nähtävissä yhtälön 3.14 mukainen, tasainen jakautuminen. Kolmea alinta energiatasoa vastaavat aaltofunktiot on piirretty kuvaajaan. Johtuen suhteellisen pienes-



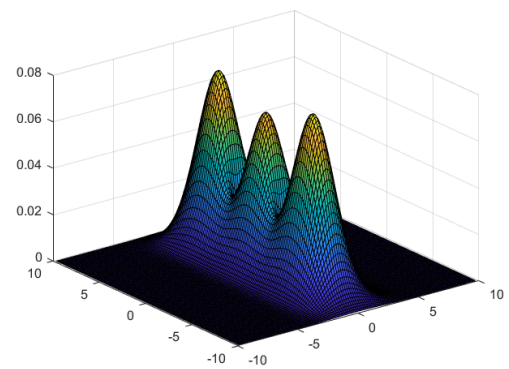
**Kuva 4.1.** Energiatasot



**Kuva 4.2.** Aaltofunktio,  $n=1$



**Kuva 4.3.** Aaltofunktio,  $n=2$



**Kuva 4.4.** Aaltofunktio,  $n=3$

tä parametrin  $N$  arvosta, numeerinen ratkaisu ei vastaa täydellisesti analyttistä ratkaisua 3.14. Jotta saataisiin aiemmin esitellyjä analyttisiä tuloksia vastaavia tuloksia, tulisi systeemin koon  $L$  oltava riittävän suuri ja jakovälien lukumäärän  $N$  noin 200. Energiadiagrammista on kuitenkin havaittavissa likimain tasaväliset tasanteet  $y$ -arvojen 1, 3, 5, 7 kohdilla. Energiatilat on siis annettu  $\frac{E}{\frac{1}{2}\hbar\omega_c}$  moninkertoina. Poikkeama analyttiseen ratkaisuun verrattuna syntyy siitä, että diskretaatio on tasavälinen ja liian harva. Pienillä energioilla aaltofunktion värähtely on vähäistä ja diskretoitu systeemi vastaa hyvin todellista systeemiä. Korkeammilla energioilla värähtely on huomattavasti tiheämpää, eikä käytetty diskretointiväli riitä kuvaamaan sitä tarkasti. Ratkaisun paikkaansapitävyyttä voidaan tutkia silmämääräisen graafisen analyysin lisäksi myös degeneraation avulla. Kuvaajasta voidaan kuitenkin approksimoida systeemin degeneraatio. Tämä voidaan tehdä yhtälön 3.15 avulla. Koska  $x = lx'$ , ilmoitetaan systeemin koko magneettisen pituuden  $l$  monin-

kertana. Tällöin systeemin koko SI-järjestelmän yksiköissä on  $L_{SI} = Ll$ . Nyt  $A = L^2l^2$  ja tästä päädytään lopulta muotoon

$$G = \frac{L^2}{2\pi}. \quad (4.13)$$

Energiakuvaajassa energia on esitetty kvanttiluvun funktiona, joten kuvaajasta voidaan helposti lukea energiatasojen degeneraatio. Ensimmäiselle tasanteen degeneraatio on 27, toisen 31 ja kolmannen 36. Analyttinen arvo yhtälön 4.13 mukaan on 64. Tämä degeneraatio oletettavasti kasvaa ja konvergoituu kohti analyttistä tulosta kun lukua  $N$  kasvatetaan.

Käytetty diskreetti differenssimenetelmä on idealtaan yksinkertainen ja laskentamenetelmältään suoraviivainen, mutta sen vaatimat erittäin suuret  $N^2 \times N^2 \times N^2$  matriisit aiheuttavat ongelmia käytännössä. Jotta laskuja voidaan toteuttaa käytännössä, on laskentamenetelmää syytä parantaa.

```

1 N = 50;
2 L = 20;
3
4 %tasavälein h määritelty x-koordinaattivektori
5 h=L/(N+1);
6 x=-L/2+h:h:L/2-h;
7
8
9 %derivaattamatriisien määrittely
10 Apumatriisi=-2*eye(N)+diag(ones(1,N-1),1)+diag(ones(1,N-1),-1);
11 Der2 = ((1/h^2))*Apumatriisi;
12 Apumatriisi2=diag(ones(1,N-1),1)+diag(-ones(1,N-1),-1);
13 Der = ((1/(2*h)))*Apumatriisi2;
14
15 %schrödingerin yhtälön määrittely
16 Lap = -kron(Der2,eye(N))-kron(eye(N),Der2);
17 Xx = kron(diag(x).^2,eye(N));
18 Mix = 2*i*kron(diag(x),Der);
19 schrod_E = Lap + Xx + Mix;
20 schrod_E=sparse(schrod_E);
21
22 %ominaisarvojen ja ominaisvektorien ratkaiseminen
23 [V,D] = eigs(schrod_E,N,0);
24
25 %plotataan energiatilat ja kolme ensimmäistä aaltofunktiota
26 D=diag(D);
27 figure;hold; plot(D); title('Energiat');
28
29 for i=1:3
30     psi0=reshape(V(:,i),[N,N]);
31     figure(i)
32     clf
33     surf(x,x,abs(psi0)*2)
34 end

```

*Ohjelma 4.1. Koodi Schrödingerin yhtälön ratkaisemiseksi numeerisesti*

## 5 YHTEENVETO

Työssä käytiin läpi sähkömagneettisten kenttien läsnäolon vuorovaikutusta hiukkaseen kvanttimekaniikan näkökulmasta ja perehdyttiin taustalla oleviin fysikaalisiin periaatteisiin. Maxwellin yhtälöt kirjoitettiin potentiaalimuodossa. Lisäksi ratkaistiin homogeenisessä magneettikentässä olevan varatun hiukkasen Landau-tasot analyttisesti kahdella eri mittafunktiolla ja numeerisesti yhdellä, sekä sivuttiin näiden todennäköisyystulkintaa ja degeneraatiota. Numeerisen ja analyttisen ratkaisun tuloksia vertailtiin keskenään.

Klassisesti hiukkaen kulkee ympyrärataa taajuudella

$$\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}.$$

z-suuntaista magneettikenttää kuvataan seuraavasti:

$$\vec{A} = (0, xB, 0). \quad (5.1)$$

Magneettikentässä olevan varatun hiukkasen Schrödingerin yhtälöksi todettiin

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{1}{2m} ((-i\hbar \nabla - q\vec{A})^2 + q\vec{V}) \Psi,$$

joka on havaitaan harmonisen oskillaattorin yhtälöksi. Ratkaisuna saadut Landau-tasot sijoittuvat energiaspektriin tasavälein kohdille

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Luvussa 4 esitelty numeerinen ratkaisu erosi analyttisestä ratkaisusta johtuen käytetystä diskreetistä differenssimenetelmästä. Energijakaumasta 4.1 on kuitenkin selkeästi havaittavissa odotetut Landau-tasot ja se noudattaa kvalitatiivisesti odotettua käyttäytymistä. Jotta ratkaisu vastaisi analyttistä ratkaisua, tulisi systeemin koon oltava riittävän iso. Riittävän tarkkuuden saavuttamiseksi menetelmä vaatisi huomattavaa muistikapasiteettiä, johon tavallinen kotitietokone ei kykene. Numeerisen ratkaisun kuitenkin voidaan ajatella vastaavan pientä fysikaalista systeemiä ja tulokset ovat päteviä. Käytetyn diskreetin differenssimenetelmän voi todeta olevan yksinkertainen, mutta laskentatehovaatimuksiensa johdosta käytännössä rajallinen menetelmä schrödingerin yhtälön ratkaisuun.



## LÄHTEET

- [1] Mansfield, M. ja O'Sullivan, C. *Understanding Physics*. 2. Wiley, 2011.
- [2] Robinett, R. W. *Quantum Mechanics*. First edition. Oxford, New York, United States: Oxford University Press, 1997. ISBN: 0-19-509202-3.
- [3] Gasiorowicz, S. *Quantum Physics*. Third edition. Minnesota, United States: Wiley International, 2003. ISBN: 978-0-471-05700-0.
- [4] Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Third edition. Columbia University: Pearson, 2001. ISBN: 9780201657029.
- [5] Kibble, T. W. *Classical Mechanics*. 5th edition. London: Imperial College Press, 2004. ISBN: 978-1860944352.
- [6] Khriplovich, e. a. *Gauge Invariance and Canonical Variables*. <https://arxiv.org/pdf/physics/9904003.pdf>. Accessed on 2020-05-19.
- [7] Tipler, P. A. *Modern Physics*. Fifth edition. United States: W. H. Freeman ja Company, 2008. ISBN: 978-0716775508.
- [8] Weisstein, E. W. "Hermitian Matrix." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/HermitianMatrix.html>. Accessed on 2020-05-20.
- [9] Bhuiyan, A. *Landau Levels and the Issue of Gauge Invariance in Confined Spaces*. <https://arxiv.org/pdf/2001.03860.pdf>. Accessed on 2020-02-23.
- [10] Tong, D. *The Quantum Hall Effect*. <https://arxiv.org/pdf/1606.06687.pdf>. Accessed on 2020-02-23.
- [11] Tong, D. *Lectures on Applications of Quantum Mechanics*. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/aqm/justsix.pdf>. Accessed on 2020-02-23.
- [12] Rosen, '. *Encyclopedia of Physics*. First edition. United States: Facts On File, Inc., 2004. ISBN: 978-0816049745.
- [13] Mäkinen, I. *Quantum Mechanics*. [https://moodle.tuni.fi/pluginfile.php/101579/mod\\_resource/content/3/kvanttiI\\_notes.pdf](https://moodle.tuni.fi/pluginfile.php/101579/mod_resource/content/3/kvanttiI_notes.pdf). Accessed on 2020-03-29.
- [14] Frey, P. *Lecture notes: "The finite difference method"*. [https://www.ljll.math.upmc.fr/frey/cours/UdC/ma691/ma691\\_ch6.pdf](https://www.ljll.math.upmc.fr/frey/cours/UdC/ma691/ma691_ch6.pdf). Accessed on 2020-05-21.
- [15] Söderlind, G. *Numerical Analysis: Numerical Methods for Differential Equations*. [http://www.maths.lth.se/na/courses/FMN130/media/material/Chapter4.08a\\_.pdf](http://www.maths.lth.se/na/courses/FMN130/media/material/Chapter4.08a_.pdf). Accessed on 2020-03-29.
- [16] Schäcke, K. *On the Kronecker Product*. <https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/kronthesisschaecke04.pdf>. Accessed on 2020-05-14.

- [17] Weisstein, E. W. "*Gaussian Elimination*." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/GaussianElimination.html>. Accessed on 2020-05-20.