

Tuomas Huusko

SUPRAJOHTAVAT KUBITIT

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatin tutkielma
Toukokuu 2020

TIIVISTELMÄ

Tuomas Huusko: Suprajohtavat kubitit
Kandidaatin tutkielma
Tampereen yliopisto
Tekniikan ja luonnontieteiden TkK-tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2020

Kvanttitietokoneet ovat laitteita, joiden kehitys tulee todennäköisesti muuttamaan maailmamme samalla tavalla kuin transistorin keksiminen ja kehittyminen on muokannut maailmaa viimeisen sadan vuoden aikana. Kvanttitietokoneiden perimmäisenä toimintaperiaatteena on kvanttimekaaniseen toimintaan ja vuorovaikutukseen kykenevät kubitit, joiden avulla kvanttitietokoneet voivat saavuttaa hyvin suuren laskentatehon. Koska kubitit kuitenkin käyttävät hyväkseen kvanttimekaniikan herkkiä ilmiöitä, on niiden rakentaminen ja toimiminen kuitenkin hyvin hankalaa. Kubitteja on keksitty ja tutkittu hyvin paljon erilaisista komponenteista rakennettuina. On olemassa niin sanottuja luonnollisia kubitteja, jotka käyttävät superpositiotiloina luonnosta löytyviä ominaisuuksia esimerkiksi elektronin spin, sekä keinotekoisia kubitteja, joiden kvanttimekaaniset parametrit voidaan itse valita niitä suunniteltaessa. Näihin keinotekoisiiin kubitteihin kuuluvat työssä tarkemmin esiteltävät suprajohtavat kubitit, joiden toiminta perustuu suprajohtavassa piirissä kulkevien johdinelektroniparien kvanttimekaanisiin ilmiöihin.

Tutkielman alussa esitellään ja kerrotaan hieman kvanttitietokoneiden historiasta ja toiminnasta yleisellä tasolla, minkä jälkeen siirrytään tutkimaan kubitteja ja niiden vaatimuksia sekä esitellään muutama käytössä oleva kubittityyppi. Tutkielman pääpaino on kuitenkin kirjallisuuslähteiden avulla tehtävässä suprajohtavien kubittien tutkimisessa ja niihin liittyvien kvanttimekaniikan ilmiöiden ja ongelmien selittämisessä fysiikan avulla.

Avainsanat: kvanttitietokone, kubitti, suprajohtavuus, Josephsonin liitos, kvanttipiiri, suprajohtava kubitti

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1	Johdanto	1
2	Kvanttitietokoneet	2
2.1	Historia	2
2.2	Kvanttitietokoneen toiminta	3
2.3	DiVincenzo kriteerit	3
2.4	Vertailu klassiseen tietokoneeseen	4
2.5	Ongelmat	4
3	Kubitit	6
3.1	Toiminnan perusteet	6
3.2	Erlaisia kubitteja	8
3.2.1	Spin-kubitti	8
3.2.2	Atomi-kubitti	8
4	Makroskooppiset kvanttipiirit	10
4.1	Suprajohtavuus	10
4.2	Kvanttimekaaninen LC-piiri	11
4.3	Josephsonin liitos	12
4.4	Perustyyppien esittely	15
4.4.1	Varauskubitti	16
4.4.2	Vuokubitti	17
4.4.3	Vaihekubitti	17
4.5	Hyödyt ja haitat	18
5	Yhteenveto	20
	Lähteet	21

1 JOHDANTO

Tässä työssä kerrotaan kuinka on mahdollista saavuttaa kvanttimekaniikan mukaisia ilmiöitä jopa makroskooppisessa kokoluokassa ja miten käyttää näitä ilmiöitä hyväksi laskeutuksessa ja ongelmanratkaisussa kvanttietokoneiden avulla. Kvanttietokoneet ovat laitteita, joiden laskentateho perustuu erittäin herkkiin kvanttibittien superpositioihin, jotka mahdollistavat monen eri tilan samanaikaisen käsittelyn. Tämä kvanttimekaanisen tilan herkkyys tuo mukanaan monia haasteita, joiden ratkaiseminen on yksi kvanttietokoneiden suurista kehityskohdista. Kvanttietokoneet koostuvat kvanttibiteistä eli kubiteista sekä näiden alustamiseen, ohjaamiseen ja lukemiseen tarvittavista johtimista. Kubiteiksi voidaan valita mikä tahansa kaksitilainen systeemi, joka pystyy muodostamaan näiden tilojen välisen kvanttimekaanisen superpositiotilan. Superpositiossa systeemin tila on samanaikaisesti valituissa 0- ja 1-tiloissa. Kubittien valmistaminen suprajohtavista komponenteista antaa valmistajalle suuren mahdollisuuden valita kubitin parametrit omien tarpeiden mukaan. Näitä parametrejä ovat esimerkiksi, kubitin kontrollisignaalin taajuus tai koherenssiaika.

Työssä kerrotaan kvanttietokoneiden yleinen toimintaperiaate sekä miten kubitteja on mahdollista valmistaa. Pääpaino on kuitenkin suprajohtavista elektronisista komponenteista koostuvien kvanttipiirien tutkimisessa. Näitä piirejä kutsutaan myös suprajohtaviksi kubiteiksi. Työ on kirjallisuusselvitys, joten se pyrkii antamaan lukijalleen hyvän kuvan jo tehdyistä tutkimuksista, sekä siitä mitkä ominaisuudet mahdollistavat suprajohtavien kubittien toimimisen.

Työn ensimmäisessä luvussa kerrotaan kvanttietokoneen toiminnan perusteita, sekä klassisen ja kvanttimekaanisen tietokoneen eroja. Luvussa kerrotaan myös mitä kriteerejä kubittien valintaan liittyy sekä mitä yleisiä ongelmia kvanttietokoneissa esiintyy. Seuraavassa luvussa määrittään kubitin, mitä siltä vaaditaan ja mitä voidaan sen avulla saavuttaa. Luku myös esittelee erilaisia valmistettuja kubittityyppejä, niihin liittyviä ongelmia ja hyötyjä, sekä miten luonnolliset kubitit eroavat tekokubiteista. Työn pääpainona on suprajohtaviin kubitteihin perehtyminen. Aluksi käydään läpi yksinkertaisin kvanttimekaaninen värähtelijä, ja miten ja miksi saamme tästä Josephsonin liitoksen avulla makroskooppisen kubitin. Lopuksi esitellään suprajohtavien kubittien kolme perustyyppiä ja niiden fysiikkallisia ominaisuuksia.

2 KVANTTITIETOKONEET

Kvanttitietokoneiksi kutsutaan tietokoneita, joiden toiminta perustuu kvanttimekaniikkaan. Kvanttimekaniikka kuvaa erittäin pienien partikkelien käyttäytymistä ja vuorovaikutusta. Kvanttimekaanisten ilmiöiden ansiosta kvanttitietokone pystyy laskemaan joitain operaatioita selvästi klassista tietokonetta nopeammin. Yksittäistä kvanttitietokoneen bittiä kutsutaan kubitiksi. [1] Kvanttilaskenta perustuu kubittisysteemin kvanttitilojen valmistamiseen, manipulointiin ja lukemiseen [2].

Tässä luvussa kerrotaan, miten idea kvanttitietokoneisiin syntyi, miten ne vertautuvat klassiseen tietokoneeseen ja miten ne toimivat. Lopuksi pohditaan myös hieman kvanttitietokoneiden ongelmia ja syitä, miksi kvanttitietokone ei välttämättä koskaan tule päihittämään klassista tietokonetta tietyissä tehtävissä.

2.1 Historia

Vuonna 1982 Richard Feynman kehitti ajatuksen niin kutsutusta kvanttitietokoneesta, joka käyttäisi kvanttimekaniikan ilmiöitä hyväksi laskemisessa. Idean esittelyn jälkeen ajatus keräsi kiinnostusta ja kvanttitietokoneita sekä niiden toimimiseen tarvittavia algoritmeja alettiin pohtimaan teoreettiselta kannalta. Myöhemmin Feynman ehdotti kvanttitietokoneiden pystyvän klassisia tietokoneita suurempaan laskentatehoon. [3]

David Deutsch ja Richard Jozsa kehittivät vuonna 1992 algoritmin, joka todisti ensimmäisenä, että tietyissä tilanteissa kvanttitietokoneet ovat huomattavasti klassisia tietokoneita nopeampia[1]. Tämä algoritmi toimi inspiraationa Peter Shorille, joka vuonna 1994 kehitti kvanttitietokoneille algoritmin suurien lukujen tekijöihin jakoon. Shorin algoritmin avulla kvanttitietokone pystyy jakamaan luvun tekijöihin paljon klassista tietokonetta nopeammin. Tämä algoritmi antaa kvanttitietokoneille kyvyn murtaa nykyisiä kryptografisia salauksia sekunneissa. [3]

Nykyään monet suuret tietotekniikkayritykset ovat lähteneet mukaan kvanttitietokoneiden kehitykseen. Vuoden 2019 syksyllä Google ilmoitti saavuttaneensa niin kutsutun kvanttiherruuden, mikä tarkoittaa heidän kvanttitietokoneen ratkaisseensa ongelman, joka olisi ollut lähes mahdoton ratkaista klassisen tietokoneen avulla. [4]

2.2 Kvanttitietokoneen toiminta

Klassinen tietokone käyttää laskentaan transistoreita, jotka ovat käytännössä kytkimiä asennossa 0 tai 1 riippuen niiden läpi menevä jännitteen suuruudesta. Tätä tilaa voidaan kuvata bitin avulla. Yhdellä bitillä on siis kaksi mahdollista, toisensa poissulkevaa tilaa, 0 ja 1. Transistoreiden koon pienentyessä tulee myös niiden toiminnassa ja suunnittelussa ottaa huomioon kvanttimekaniikan ilmiöt [5]. Klassisen tietokoneen laskenta perustuu transistoreiden välisiin vuorovaikutuksiin, joissa transistorin tila saattaa muuttua. Klassinen tietokone ei välitä yksittäisen elektronin tilasta transistorissa vaan tilojen keskiarvosta, minkä vuoksi kaikki operaatiot klassisella tietokoneella noudattavat klassista fysiikkaa. [6]

Bittien sijasta kvanttitietokone käyttää laskemiseen kvanttibittejä eli kubitteja, jotka voivat olla tilojen 0 ja 1 lisäksi näiden tilojen superpositiossa eli mitä vain niiden väliltä. Bittijä voidaan muokata käyttämällä loogisia portteja, jotka muokkaavat kubitin aaltoyhtälöä prosessissa, jota kuvaa unitaarinen matriisi.

Kvanttialgoritmin alussa kubitit ovat perustilassa, minkä jälkeen niitä aletaan operoimaan kvanttiporttien avulla. Algoritmit muokkaavat kubittien tilaa siten, että oikeaa vastausta vastaavien tilojen aaltofunktiot vahvistuvat ja väärin heikentyvät interferenssin avulla. Aaltofunktion vahvistuessa myös kubitin tai kubittisysteemin todennäköisyys romahtaa kyseiseen tilaan kasvaa. Tilaa mitatessa superpositio romahtaa ja mitattu tila on yksi tapaus kaikista mahdollisista tiloista. Kun mittaus suoritetaan monta kertaa, voidaan huomata, mikä tila on kaikista todennäköisin, minkä perusteella alkuperäisen ongelman ratkaisu voidaan päätellä. [1][5]

2.3 DiVincenzo kriteerit

Jotta kvanttitietokoneen rakentaminen ja oikea toimiminen olisi mahdollista, pitää sen noudattaa niin kutsuttuja DiVincenzon kriteerejä. Nämä vuonna 2000 ehdotetut kriteerit takaavat, että kvanttitietokone toimii oikein ja riittävällä tarkkuudella, jos käytettävät kubitit täyttävät ehdot. DiVincenzon kriteerit ovat seuraavat:

1. Skaalautuva kubittijärjestelmä.
2. Luotettava kubitin alustaminen.
3. Kubitit pysyvät riittävän kauan koherentissa tilassa.
4. Tarkat kvanttiportit, jotka muokkaavat kubittien tilaa.
5. Tarkka tilan mittaaminen.

Ensimmäiseen kriteeriin kuuluu, että kubitilla on 2 selvästi muista eroavaa tilaa, muuten laskuja ei voida pitää ehdottoman oikeina. Toinen kriteeri takaa, että kvanttialgoritmien laskeminen voidaan aloittaa aina puhtaasta tilasta eikä edellinen laskenta vaikuta tämän laskentakerran tuloksiin. Pitää siis olla kyky alustaa kubitti mihin tahansa tilaan. Jotta kubitti täyttää kolmannen vaatimuksen, pitää sen pysyä koherentissa tilassa vähintään yhtä

kauan kuin kvanttialgoritmin suorittaminen kestää. Kaksi viimeistä kriteeriä varmistavat, että laskujen lopputulos on oikein. [6][7]

2.4 Vertailu klassiseen tietokoneeseen

Jo pieni määrä superpositiossa olevia partikkeleja voi sisältää suuren määrän tietoa. Esimerkiksi vain 100 superpositiossa olevaa partikkeliä voivat kuvata jokaista numeroa 0:sta 2^{100} :aan (noin (10^{30})) samanaikaisesti, kun taas klassisesti näistä voidaan 100 bitillä kuvata vain yhtä lukua. [5]

N-kappaleisen systeemin kuvaaminen klassisesti vaatii N kappaletta bittejä, kun taas kvanttimekaanisesti se vaatii $2^N - 1$ imaginäärilukua. Tämä tarkoittaa, että klassisen tietokoneen simuloimassa kvanttietokonetta, tarvittavan klassisen muistin määrä kasvaa eksponentiaalisesti systeemin koon kasvaessa. [8] Tämän lisäksi kvanttialgoritmit manipuloivat kubitteja samanaikaisesti, mikä johtaa kvanttialgoritmien eksponentiaalisesti nopeampaan toimintaan klassiseen laskentaan verrattuna [5].

Kvanttietokoneet ovat parempia laskemaan ongelmia, joissa hyödytään mikäli tilanteita voidaan tutkia samanaikaisesti, mikä on mahdollista kvanttietokoneilla, koska kubitit ovat superpositiossa keskenään. Tutkijat ovat kuitenkin huomanneet, että vain tietyissä tapauksissa kvanttietokoneet ovat klassista tietokonetta huomattavasti parempia. Toisaalta klassinen tietokone sopii paremmin ainakin jokapäiväiseen käyttöön, sillä kvanttietokoneet vaativat vielä erityiset olosuhteet toimiakseen. Nyt ja tulevaisuudessa klassinen tietokone tulee kuitenkin lähes varmasti toimimaan kvanttietokoneen rinnalla. [5]

2.5 Ongelmat

Kvanttietokoneita on erittäin hankala suunnitella, valmistaa ja ohjelmoida, mikä suurimmilta osin johtuu siitä, että mikä tahansa vuorovaikutus ympäristön kanssa voi hajottaa kubitin superposition ja pilata laskennan tuloksen. Tämän vuoksi on erittäin tärkeää minimoida ympäristön vaikutus kvanttietokoneeseen niillä laskettaessa. Kvanttilojen virheiden korjaamiseen on kehitetty menetelmiä, mutta nämä kuluttavat suuren määrän käytössä olevista kubiteista. Tämä johtaa murto-osaan laskentakyvystä, jos verrataan virhevapaaseen laitteistoon. [1]

Dekoherenssi asettaa suuria haasteita kvanttietokoneen toteutuksille. Dekoherenssi tarkoittaa kvanttimekaanisen systeemin superposition hajoamista, koska systeemi vuorovaikutti ympäristönsä kanssa esimerkiksi fotonin sironnan takia. Dekoherenssia kubiteissa yleensä mallinnetaan kahden ajan avulla:

- T_1 kertoo keskimääräisen ajan, joka kestää kunnes kubitti purkautuu tilasta $|1\rangle$ tilaan $|0\rangle$ [6]. Suprajohtaville kubiteille noin 1-10 μ s[2].
- T_2 kertoo keskimääräisen ajan milloin energiaväli tilojen $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ välillä ei vaihtelee[2].

Dekoherenssia aiheuttavien tekijöiden löytäminen ja karsiminen on yksi tärkeimmistä haasteista kubittien kehityksessä [6].

3 KUBITIT

Kubitit ovat keskeinen osa kvanttietokoneen toimintaa. Ne vastaavat klassisen tietokoneen bittiä, mutta kvanttimekaanisten ilmiöiden takia voivat tilojen 0 ja 1 lisäksi myös olla näitä molempia samanaikaisesti. Tätä ilmiötä kutsutaan tilojen superpositioksi ja se on yksi syistä, jotka mahdollistavat kvanttietokoneiden suuren laskentatehon. Kubitteja voidaan muodostaa esimerkiksi elektronien spinistä tai käyttämällä suprajohtavia piirejä [7].

Tässä luvussa käsitellään kubittien toimintaa yleisellä tasolla sekä esitellään muutama kubittityyppi ja näiden hyviä ja huonoja ominaisuuksia. Luvun loppupuolella myös kerrotaan miten suprajohtavat kubit eroavat muista tunnetuista kubittityypeistä.

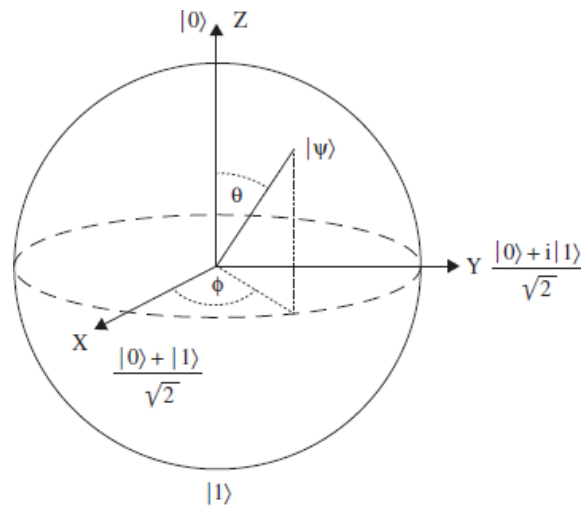
3.1 Toiminnan perusteet

Kubitiksi kutsutaan sellaista kaksi tilaista kvanttimekaanista systeemiä, joka on näiden kahden tilan superpositiossa. Kubitin tila superpositiossa voidaan esittää muodossa

$$|\phi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (3.1)$$

missä $|\phi\rangle$ on kubitin tila, α on perustilan todennäköisyysamplitudi, $|0\rangle$ on perustila, β on viritystilan todennäköisyysamplitudi ja $|1\rangle$ on viritystila.

Kubitin tilaa voidaan myös esittää niin sanotussa Blochin pallossa, esitetty kuvassa 3.1. Tässä kuvauksessa kubitin tilaa mallinnetaan imaginäärisessä pallossa olevan nuolen avulla. Pallon pohjois- ja etelänapa esittävät kubitin tiloja $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ ja vastaavasti tilat näiden välillä ovat joitain kubitin superpositioita. [1]

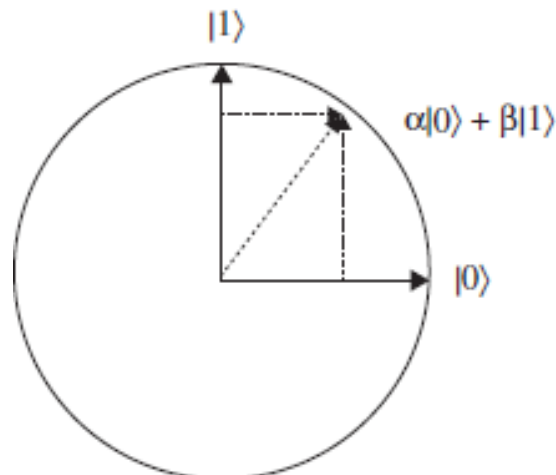


Kuva 3.1. Kubitin tila kuvattuna Blochin pallolla[1].

Blochin pallon avulla kubitin tila voidaan kuvata napakoordinaattien, θ (napakulma) ja ϕ (atsimuutti), avulla muodossa

$$|\phi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (3.2)$$

missä $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Blochin pallon kaltaista kuvantamista käytetään silloin, kun halutaan eri tiloja vastaavien todennäköisyysamplitudien saavan myös imaginäärisiä arvoja. Tämä lisää kubittien laskentatehokkuutta, mutta myös hankaloittaa laskemista. Tämän vuoksi myös pelkästään reaaliset todennäköisyysamplitudit ovat mahdollisia, jolloin kubitteja voidaan kuvata yksikköympyrän avulla, mikä on esitetty kuvassa 3.2. [1]



Kuva 3.2. Kubitin tila kuvattuna yksikköympyrässä[1].

Kubittia mitatessa sen superpositio romahtaa ja mitattu tulos on jollain todennäköisyyksillä joko 0 tai 1. Mittausvaiheessa kubitti siis käyttäytyy kuin klassinen bitti. [1]

Kubittien suuri laskentateho perustuu niiden kykyyn muodostaa lomittuneita kubittisys-

teemeitä muiden kubitien kanssa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että yhden kubitin tilan muokkaaminen vaikuttaa myös muihin kubitteihin systeemissä.

3.2 Erilaisia kubitteja

Koska kriteerien perusteella kubitilla tarvitsee olla vain kaksi toisistaan erotettavissa olevaa tilaa ja mahdollisuus olla näiden superpositiossa, voidaan kubitiksi valita esimerkiksi elektroni ja saattaa se superpositioon spinien suhteen tai valita atomin kaksi viritystilaa, jotka määritämme kubitin tiloiksi [7]. Koska nämä molemmat kubittityypit esiintyvät myös luonnossa, on niillä molemmilla suhteellisen pitkä luontainen koherenssiaika, mutta samasta luonteesta johtuu myös se, ettei kubitin parametreja ole mahdollista muokata [6].

Luonnollisten kubitien haasteet johtuvat suurimmilta osin juuri niiden luonnonmukaisesta mikroskooppisesta luonteesta. Kubittisysteemin parametrit aiheutuvat luonnonvakiosta eivätkä insinöörien kubittisuunnittelusta. [6] Suprajohtavia makroskooppisia elektronisia komponentteja yhdistelemällä voidaan kuitenkin valmistaa piirejä, jotka toimivat atomien tavoin. Tällaisia piirejä kutsutaan myös keinotekoisiksi atomeiksi tai suprajohtaviksi kubitteiksi. [6][7]

Luonnollisia atomeita ohjataan fotoneilla, kun taas keinotekoisia atomeita ohjataan virran, jännitteen tai mikroaaltosäteilyn avulla. Nämä kubitit voidaan suunnitella sisältämään haluttuja ominaisuuksia. [2]

Seuraavissa aliluvuissa käymme läpi eri kubittityyppien haasteita ja hyötyjä. Suprajohtavien piirien kohdalla toimintaa tarkastellaan tarkemmin seuraavassa pääluvussa.

3.2.1 Spin-kubitti

Elektronin spin voilla olla ylöspäin, alaspäin tai näiden superpositiossa, minkä takia se soveltuu hyvin kubitiksi. Spin on siis luonnollisesti kaksi tilainen systeemi, jota voidaan ohjata magneettisen dipolimomentin avulla. Spin-kubitti valmistetaan upottamalla elektroneja puolijohteessa oleviin kvanttipisteisiin. Elektroneja muokataan ja hallitaan puolijohteen pinnalla olevien elektrodien luomien sähkömagneettisten kenttien avulla. [6]

Koska spinin aiheuttaman dipolimomentin avulla tapahtuva elektronien välinen vuorovaikutus on heikkoa ja sen kantama on lyhyt, täytyy elektronit pitää lähellä toisiaan, jotta saadaan aikaan lomittunut kubittisysteemi. Tämä hankaloittaa ohjaussignaalin tuomista systeemiin ja ohjausjohtimien pinta-ala onkin suuri verrattuna kubitin alaan, mikä tekee skaalauksesta vaikeaa. [6]

3.2.2 Atomi-kubitti

Kun käytetään yksittäistä atomia kubittina, valitaan kyseisen atomin elektronitiloista kaksi tiloiksi $|0\rangle$ ja $|1\rangle$. Koska kyseessä on atomin luontaiset elektronitilat, oikein valittuina

spontaani hajoaminen tilojen välillä on hyvin epätodennäköistä, minkä takia yksittäisestä atomista valmistetussa kubitissa on hyvä itsekoherenssiaika. [6]

Minimoidaksemme todennäköisyyden atomin ja ympäristö molekyylien välisestä vuorovaikutuksesta johtuvan koherenssin tuhoutumiselle, pitää kubitia säilyttää erittäin korkeassa tyhjiössä. Tämän lisäksi pitää käytettävät elektronitilat valita siten, etteivät ne loimitaudu ympäristön kanssa, mikä johtaa tarpeeseen käyttää erittäin tehokkaita lasereita kubitin eri tilojen välillä siirtymiseen. [6]

4 MAKROSKOOPPISET KVANTTIPIIRIT

Makroskooppiset kvanttipiirit ovat elektronisista komponenteista valmistettuja piirejä, jotka toimivat atomien tavoin luoden transitoita kahden tilan välille [2]. Niitä kutsutaan myös suprajohtaviksi kubiteiksi. Tavallisessa virtapiirissä tapahtuvat sisäiset siroamistapahtumat, esimerkiksi johde-elektronien välillä, aiheuttavat sen, ettei virtapiiri ole kvanttimekaanisesti koherentti. Tämä ongelma ratkaistaan käyttämällä suprajohtavia komponentteja, jolloin johtimen sisäiset häviöt heikkenevät. [6]

Tässä luvussa tutustutaan ensin hieman laajemmin suprajohtavuuteen ja selitetään mihin häviöiden heikkeneminen perustuu. Tämän jälkeen esitellään yksinkertaisen kvanttimekaanisen värähtelypiirin, mihin yhdistämällä epälineaarinen Josephsonin liitos saadaan aikaan yksinkertaisin suprajohtava kubitti. Lopuksi esitellään kolme eri tyyppistä suprajohtavaa kubittia ja tutkitaan näiden fyysisiä ominaisuuksia.

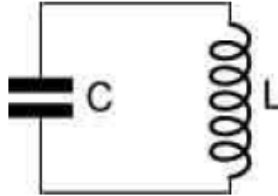
4.1 Suprajohtavuus

Ymmärtääkseen suprajohtavien kubittien ja niihin liittyvien Josephsonin liitosten toiminnan, pitää ensin ymmärtää hieman suprajohtavuudesta. Kun laskemme metallien lämpötilaa lähelle absoluuttista nollapistettä, tapahtuu muutos, joka saa aikaan metallin suprajohtavat ominaisuudet. Tässä kriittisessä lämpötilassa materiaali muuttuu normaalitilasta suprajohtavaan tilaan, jossa elektronien liikettä vastustavat voimat ovat lähes olemattomia. Materiaalissa elektronit pariutuvat niin sanotuiksi Cooperin pareiksi. Kriittisen lämpötilan yläpuolella elektronit hylkivät toisiaan, mutta tämän lämpötilan alapuolella on niiden kokonaisvuorovaikutus muuttuu hieman puoleensavetäväksi. [9]

Suprajohtavuuden avulla makroskooppisista komponenteista koostuvista virtapiireistä voidaan tehdä kvanttimekaanisia, sillä se hävittää johtimen sisällä tapahtuvat dekoherenssiä aiheuttavat elektronisironnat. Tämä johtuu niin kutsutusta suprajohtavasta energiavyöstä, jonka yläpuolelle mikään elektroni ei pääse. Suprajohtava energiavyö kertoo kuinka paljon energiaa tarvittaisiin Cooperin parien rikkomiseen takaisin yksittäisiksi elektroneiksi. Suprajohtavuus on siis koherenssia kasvattavan luonteen takia olennainen osa kvanttimekaanista virtapiiriä. [9]

4.2 Kvanttimekaaninen LC-piiri

Yksinkertainen kvanttimekaaninen piiri on suprajohtavasta käämistä, kondensaattorista ja näiden välisestä johtimesta koostuva LC-piiri, joka on esitetty kuvassa 4.1 [7]. Suprajohtavuuden takia piirissä ei tapahdu häviöitä, mikä mahdollistaa piirin kvanttimekaanisen luonteen.



Kuva 4.1. Kvanttimekaaninen LC-piiri. [7]

Piirin Hamiltonin funktio on muotoa

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (4.1)$$

missä Q on kondensaattorin varaus, C kondensaattorin kapasitanssi, Φ on käämin magneettivuon ja L käämin induktanssi [6][7]. Yleiselle harmoniselle värähtelijälle pätee Hamiltonin funktio, joka on muotoa

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2, \quad (4.2)$$

missä p on värähtelijän liikemäärä, m on massa, ω_0 kuvaa värähtelijän taajuutta ja x on värähtelijän paikka. Vertailemalla kaavoja (4.1) ja (4.2) huomataan, että kvanttimekaanista LC-piiriä voidaan ominaisuuksiltaan verrata harmoniseen värähtelijään. Piirin värähtelyn paikkaa voidaan siis kuvata käämin magneettivuon avulla, liikemäärää kondensaattorin varauksen avulla sekä harmonisen värähtelijän massaa piirin kapasitanssina. Tämän analogian avulla on mahdollista ratkaista LC-piirin energiatilojen yhtälö. LC-piirin värähtelytaajuus voidaan ratkaista vertaamalla Hamiltonin funktioiden potentiaalisia ja merkitsemällä nämä yhtä suuriksi:

$$\frac{\Phi^2}{2L} = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \quad (4.3)$$

Merkitsemällä paikkaa x ja massaa m nyt LC-piirin magneettivuona Φ ja kapasitanssina C , yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{\Phi^2}{2L} = \frac{1}{2}C\omega_0^2\Phi^2, \quad (4.4)$$

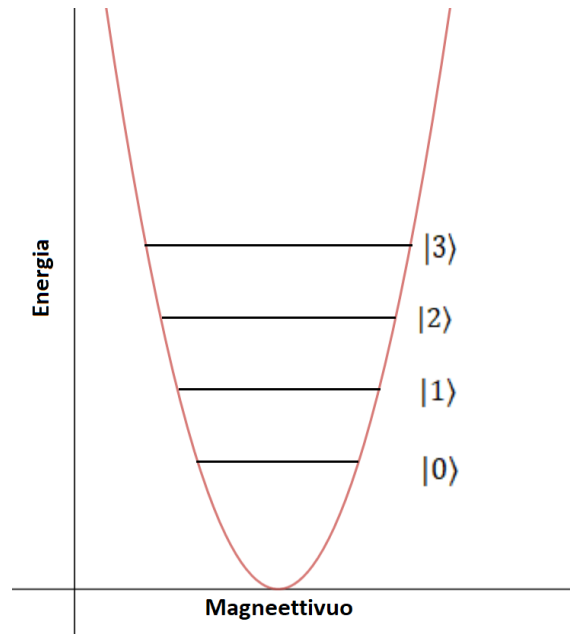
mistä ratkaisemalla saadaan

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.5)$$

Kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän energiatilat saadaan kaavasta

$$E = \hbar\omega(n + 1/2), \quad (4.6)$$

missä \hbar on redusoitu plankin vakio ja $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Värähtelijän potentiaali ja energiatilat on esitetty kuvassa 4.2.



Kuva 4.2. Kvanttimekaanisen LC-piirin potentiaalikäyrä ja energiatilat.

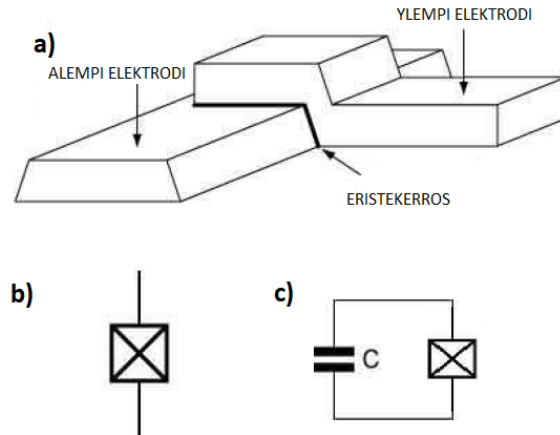
Kuvaa 4.2 sekä kaavaa (4.6) tutkimalla huomataan, että eri tilojen väliset energiat ovat keskenään yhtäsuuria, $E_{01} = E_{12} = E_{23} = \dots = E_{n,n+1}$. Tämän takia kyseinen LC-piiri ei sellaisenaan voi toimia kubittina. Tämä voidaan ratkaista tuomalla piiriin epälineaarinen komponentti, joka on yleensä Josephsonin liitos, jolloin eri tilojen väliset energiat muuttuvat. [7]

4.3 Josephsonin liitos

Josephsonin liitos, esitetty kuvassa 4.3, on ainoa nykyisin tunnettu epälineaarinen elektroninen elementti, jossa ei tapahdu häviöitä alhaisissa lämpötiloissa. Epälineaarisuus varmistaa ettei alimpien energiatilojen välit ole yhtäsuuria, jotta energiatilojen väliset siirtymät voidaan erottaa toisistaan. [2][6]

Josephsonin liitos koostuu kahdesta ohuesta suprajohtavasta johteesta, joiden välillä on eristekerros. Tämä eristekerros on niin ohut (tyypillisesti noin 1 nm), että se mahdollistaa varausten tunneloitumisen sen läpi elektrodien välillä. Eristekerros aiheuttaa elektrodien välille vaihe-eron, jota merkitään myös δ :lla. [6]

Josephsonin liitoksen eristekerros valmistus on helppohkoa metallien hapettumisen avulla. Tässä prosessissa esimerkiksi alumiinille muodostuu juuri sopivan paksuinen oksidiker-



Kuva 4.3. a. Kahden johtimen ja niiden välillä olevan eristeen muodostama Josephsonin liitos; b. Liitoksen sähkötekkinen piirrosmerkki; c. LC-piiri, jossa käämi korvattu epälineaarilla Josephsonin liitoksella. [7]

ros, jolloin sitä voidaan käyttää liitoksena. Koska alumiini on myös suprajohtavaa riittävän alhaisilla lämpötiloilla, on se useimmiten käytetty Josephsonin liitoksen valmistusmateriaali. [7]

Josephsonin liitoksen virta ja jännite voidaan esittää vaihe-ero δ :n funktioina. Näitä yhtälöitä kutsutaan myös Josephsonin relaatioiksi. Virran yhtälö on muotoa

$$I = I_C \sin(\delta), \quad (4.7)$$

missä I_0 on liitoksen kriittinen virta, joka tarkoittaa virtaa suprajohtavassa materiaalis- sa, jonka alapuolella materiaalilla on suprajohtavia ominaisuuksia ja sitä voidaan myös kuvata yhtälöllä

$$I_C = \frac{\pi \delta}{2eR_n}, \quad (4.8)$$

missä δ suprajohtavan energiavyön suuruus, e on alkeisvaraus ja R_n liitoksen normaali tilavastus [6][9]. Josephsonin liitoksen jännite voidaan esittää muodossa

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\delta}, \quad (4.9)$$

missä Φ_0 on magneettinen vuo kvantti ($\Phi_0 = 2 * 10^{-5} Wb$) ja $\dot{\delta}$ tarkoittaa samaa kuin $\frac{\partial \delta}{\partial t}$. [6][7][9]

Magneettivuon suuruus saadaan jänniteestä integroimalla, jolloin sen kaava on muotoa

$$\Phi = \int V(t) dt. \quad (4.10)$$

Nyt sijoittamalla kaavan (4.9) Josephsonin jännitteen edelliseen integraaliin, voimme rat-

kaista vaihe-eron δ suuruuden [6].

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\delta} dt \\ \implies \Phi &= \int \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\delta}{dt} dt \\ \implies \Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \delta \\ \implies \delta &= \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Sijoittamalla saadun vaihe-eron (4.11) kaavaan (4.7) saadaan virran kaava muotoon

$$I = I_C \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (4.12)$$

jota voidaan approksimoida $\Phi \approx 0$ ympäristössä sinifunktion sarjakehitelmän avulla muotoon

$$I \approx I_C \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (4.13)$$

josta voimme ratkaista magneettivuolle arvon

$$\Phi \approx \frac{\Phi_0}{2\pi I_C} I, \quad (4.14)$$

Kun tiedämme suhteen $\Phi = LI$, saamme Josephsonin liitoksen alkeisinduktanssille arvon

$$L_{J0} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_C}. \quad (4.15)$$

Yleisesti liitoksen induktanssin arvo tietyllä vaihe-erolla saadaan laskettua kaavan

$$L_J(\delta) = \left(\frac{\partial I}{\partial \Phi}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial \Phi} \left(I_C \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right)\right)^{-1} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_C \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)} = \frac{L_{J0}}{\cos(\delta)} \quad (4.16)$$

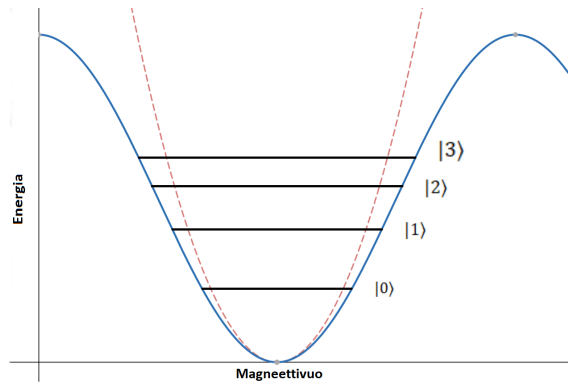
avulla [7]. Tästä huomaamme, että Josephsonin liitos toimii epälineaarisen käämin tavoin. Josephsonin liitoksen energia voidaan, laskea piirin tehon integraalina eli

$$E = \int IV dt. \quad (4.17)$$

Lasketaan nyt energian arvo sijoittamalla kaavat (4.7) ja (4.9) integraaliin, jolloin saamme

$$E = \int I_C \sin(\delta) \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\delta}{dt} dt = \int I_C \sin(\delta) \frac{\Phi_0}{2\pi} d\delta = -E_J \cos(\delta), \quad (4.18)$$

missä $E_J = \frac{\Phi_0 I_C}{2\pi}$, jota kutsutaan myös Josephsonin energiaksi. [6][7][9] Josephsonin liitoksen energiaa ja eri energiatiloja on mallinnettu kuvassa 4.4. Kuvasta voimme nähdä, että epälineaarisuus aiheuttaa eri tilojen välille erisuuria energiavälejä, jolloin siirtymät eri tilojen välillä voi erottaa toisistaan, mikä mahdollistaa piirin toimimisen kubittina.



Kuva 4.4. Josephsonin liitoksen potentiaali ja energiatilat

Yksittäiselle liitokselle voidaan johtaa Hamiltonin funktio, joka on muotoa

$$H = E_{CJ}(N - Q_r/2e)^2 - E_J \cos(\delta), \quad (4.19)$$

missä $E_{CJ} = \frac{(2e)^2}{2C_J}$ on Coulombin varausenergia yhdelle Cooperin elektroniparille liitoksen kapasitanssissa C_J , N kertoo liitoksessa olevien Cooperin parien lukumäärän ja Q_r on liitoksen jäännösvarauksen suuruus. Varaus Q_r kuvaa liitoksessa olleen varauksen määrää ennen kuin se liitettiin osaksi virtapiiriä. Makroskooppisten komponenttien takia Hamiltonin funktion parametreissa E_C , E_J ja Q_r havaitaan vaihteluita, jotka aiheuttavat virhettä. E_C ja E_J termejä voidaan korjata parantamalla valmistuksen tarkkuutta, mutta jäännösvarauksen Q_r aiheuttaman virheen vaimentamista varten pitää suprajohtava kvanttipiiri suunnitella komponenteiltaan tukahduttamaan tätä.[7] Ongelma on kuitenkin saatu ratkaistua kolmen perustyyppin avulla, joista kerrotaan seuraavassa luvussa lisää.

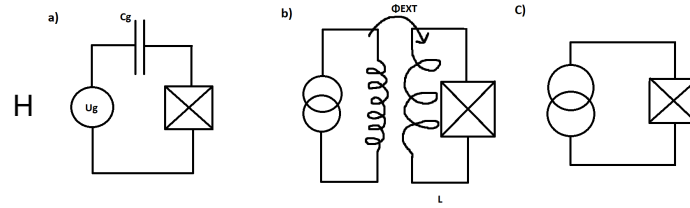
4.4 Perustyyppien esittely

Josephsonin kubitin aikaan saamiseen pitää jäännösvarauksen Q_r vaihtelun aiheuttamat ongelmat saada mahdollisimman pieniksi, mikä voidaan ratkaista kolmen peruskubitityypin avulla. Nämä kolme eri tyyppiä ovat:

- Varauskubitti
- Vuokubitti
- Vaihekubitti.[7]

Suprajohtavien kubittien perustyyppien kytkennät on esitetty kuvassa 4.5. Kuvista voidaan huomata, että virtapiirit ovat kohtuullisen yksinkertaisia ja ne rakentuvat komponenteista, joiden parametreja on helppo valita ja muokata.

Seuraavissa alaluvuissa käsitellään hieman lisää näitä kubittityyppejä, sekä kerrotaan niiden ainutlaatuisista ominaisuuksista ja miten ne ratkaisevat jäännösvarauksen aiheuttaman ongelman.



Kuva 4.5. Eri kubittityyppien perusvirtapiirit. a. Varaukubitti; b. Vuokubitti; c. Vaihekubitti

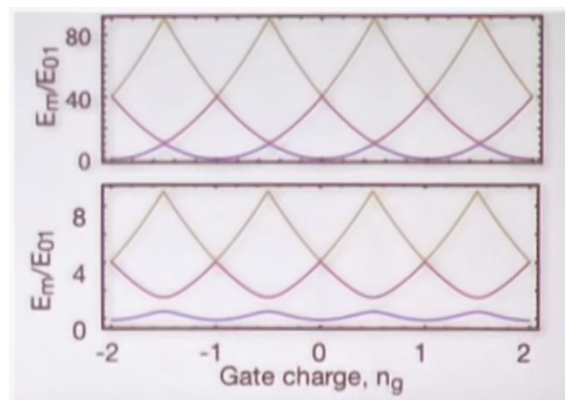
4.4.1 Varaukubitti

Varaukubitti on yksinkertaisin kolmesta suprajohtavien kubittien perustyyppistä, minkä vuoksi se olikin ensimmäinen käytännössä toimimaan saatu suprajohtava kubitti. Varaukubitin arkkityyppi on niin kutsuttu Cooperin pari laatikko (Cooper pair box), joka on kuvattu kuvassa 4.5a. [7]

Tässä tyyppissä jäännösvarauksen vaihtelut tasoitetaan porttikondensaattorin kanssa sarjassa olevan ulkoisen jännitelähteen avulla. Nyt piirin kokonaiskapasitanssi on $C = C_J + C_g$, sekä varaus $Q = (2e)N - Q_r - C_g U$, sillä yleisesti $Q = CU$. Näitä kaavoja käyttäen, varaukubitin Hamiltonin funktio tulee muotoon

$$H = E_C(N - N_g)^2 - E_J \cos(\delta), \quad (4.20)$$

missä $E_C = \frac{(2e)^2}{2(C_J + C_g)}$ ja $N_g = \frac{Q_r + C_g U}{2e}$. Cooperin laatikon ominaisarvot voidaan ratkaista Mathieu-funktioiden avulla. Nämä ominaisenergiat arvoille $\frac{E_J}{E_C} = 0.1$ ja $\frac{E_J}{E_C} = 1$ on esitetty kuvassa 4.6 N_g :n funktiona. Kuvasta huomataan, että suhteen kasvaessa eri energiatilat alkavat erottua toisistaan, sekä jäännösvarauksen vaikutus pienenee. Jäännösvarausta voi hahmottaa värähtelynä N_g -akselin suhteen, jolloin mitä vähemmän yksittäinen energiatila vaihtelee N_g :n suhteen, sitä vähemmän jäännösvaraus aiheuttaa ongelmia. Tämä vaihtelu pienenee, kun porttikapasitanssi kasvaa, kubittia voidaan siis parantaa suunnittelemalla piirin komponentit oikeisiin parametreihin. Cooperin laatikossa superpositiossa on siis Cooperin parien lukumäärä virtapiirissä. [2][7][10]



Kuva 4.6. Cooperin laatikon potentiaali, jäljitellen lähdettä [7].

Cooperin laatikon E_J/E_C suhde on hyvin pieni, minkä takia kyseinen kubittityyppi onkin nykyään jo hävinnyt käytöstä. Energioiden suhdetta on suurennettu kasvattamalla kondensaattoria, joka on synnyttänyt uuden varauskubitin toteutuksen, TRANSMON-kubitin, joka onkin nykyään yksi suosituimmista suprajohtavista kubittimalleista.

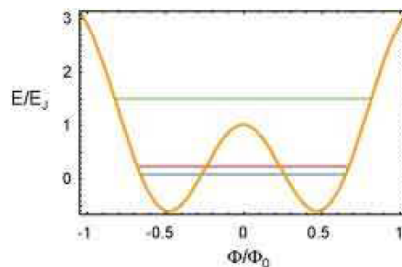
4.4.2 Vuokubitti

Vuokubittissa, kuva 4.5b, on jännitelähteen sijasta suprajohtava käämi, joka aiheuttaa virtapiiriin muutosta. Vuokubittia saatetaan myös kutsua RF-SQUID:ksi (Radio frequency superconducting quantum interference device). Tässä kubittityypissä Josephsonin liitoksen päät on yhdistetty silmukaksi, jonka läpäisee ulkoinen magneettivuo Φ_{EXT} . Tällä suprajohtavalle piirille voidaan johtaa Hamiltonin funktio, joka on muotoa

$$H = \frac{q^2}{2C_J} + \frac{\phi^2}{2L} - E_J \cos\left(\frac{2e}{\hbar}(\phi - \Phi_{EXT})\right), \quad (4.21)$$

missä q on Josephsonin liitoksen varaus ja ϕ on jännitteen integraali induktanssin L läpi. [7]

Kuvassa 4.7 on esitetty vuokubitin energiatilat vuon funktiona. Kuvasta huomataan, että systeemiin muodostuu kaksi tasapainotilaa, jotka vastaavat symmetristä ja antisymmetristä kahden aaltofunktion yhdistelmää.



Kuva 4.7. Vuokubitin potentiaalifunktio [7].

Vuokubittia voidaan myös hahmottaa kaksitilaisena kvanttimekaanisena systeeminä, jossa tilaa voidaan kuvata eri suuntaisina virtoina silmukan ympäri. Tämä helpottaa myös kubitin lukemista, sillä tietty virran suunta silmukassa aiheuttaa tietyn suuntaisen magneettikentän, joka voidaan mitata kubitin ympärillä olevan käämin avulla. [7]

4.4.3 Vaihekubitti

Vaihekubittissa kytketään virtapiiriin Josephsonin liitoksen kanssa sarjaan tasavirtalähde. Tämä kubittityyppi on esitelty kuvassa 4.5c. Vuo- ja vaihekubitti minimoivat jäännösvarauksen merkityksen suuren E_J/E_{CJ} suhteen avulla. Tällöin pieni vaihtelu jäännösvarauksessa ei haittaa, koska ulkoinen varaus on niin paljon suurempi. Vaihekubittiin saa-

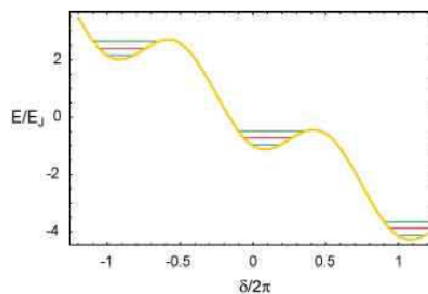
daan aikaan suuri epälineaarisuus vaikuttamalla liitokseen virralla I , joka on erittäin lähellä Josephsonin liitoksen kriittistä virtaa I_C . Vaihekubitteja kutsutaankin joskus myös nimellä Current-biased junction. [7]

Vaihekubitin Hamiltonin funktio saadaan muotoon

$$H = E_{CJ}q^2 - I_0\phi_0\delta - E_J\cos\delta, \quad (4.22)$$

missä $\phi_0 = \Phi_0/2\pi$, $E_{CJ} = \frac{(2e)^2}{2C_J}$ ja δ on vaihe-ero liitoksen läpi.

Kuvassa 4.8 on esitetty vaihekubitin potentiaali. Kuvasta nähdään hyvin kubitin pyykki-lautaa muistuttava funktio.



Kuva 4.8. Vaihekubitin potentiaalifunktio [7].

Vaihekubitissa on sisäänrakennettuna kubitin lukeminen, ominaisuus jota muissa kubitteissa ei ole. Se perustuu yksittäisen tilan mahdollisuuteen tunnetuista ulos systeemisistä. Tätä todennäköisyyttä voidaan suurentaa ulkoisen voiman, esimerkiksi magneettikentän, vaikutuksella. Tämän tunnetuimisen todennäköisyys on huomattavasti suurempi $|1\rangle$ -tilassa olevalle kubitille kuin $|0\rangle$ -tilan kubitille. [2][7]

4.5 Hyödyt ja haitat

Kun kvanttietokone rakennetaan käyttäen kubitteina suprajohtavia piirejä, tulee mukana monia hyötyjä, mutta myös joitain haittavaikutuksia.

Suprajohtavaan kubittiin voidaan suunnitella juuri halutut parametrit yhdistelemällä halutut elektroniset komponentit. Tämä joustavuus on yksi suprajohtavien kubittien vaikuttavimmista hyödyistä. Koska suprajohtavat kubitit käyttävät komponentteina klassisia elektronisia komponentteja, on niiden testaaminen ja mittaaminen helppoa ennestään kehitettyjen teknologioiden avulla. Suprajohtavia kubitteja on myös helppoa ohjata ja debugata käytössä olevien elektroniikan tekniikoiden avulla. [6]

Suprajohtavat kubitit toimivat vain, jos virtapiiriin sisäiset resistanssit heikkenevät suprajohtavuuden ansiosta siten, että systeemi pystyy säilyttämään koherenssin. Toisaalta, jotta lämpöliike ei aiheuta kubitin tilan vaihtelua, pitää $\hbar\omega_{01} \gg k_bT$. Suprajohtaville kubitteille tämä taajuus ω_{01} on noin 5-20 GHz:n luokkaa. Kubittisysteemin lämpötila on siis ol-

tava lähellä absoluuttista nolapistettä, mikä saavutetaan asettamalla kubitit kryostaattiin. Kryostaatin lämpötila on yleisesti suprajohtavan kubitin tapauksessa noin 20 mK, minkä saavuttaminen vaatii hyvin harvinaisen ja kalliin laitteiston. [6][7]

Suprajohtavien kubittien suuren koon vuoksi ovat ne hyvin herkkiä dekoherenssille. Dekoherenssin päihittäminen onkin yksi tärkeimmistä kehityksen kohteista kubittien evoluutiossa. Keinotekoisien luonteensa takia suprajohtavat kubitit eivät koskaan ole täydellisesti identtisiä, mikä johtaa suuriin ongelmiin, jos kubittien värähtelytaajuutta ei pystytä hallitsemaan tietyssä tilanteessa. Kubiteissa, joissa taajuuden hallinta on mahdollista, tämä epäidenttisuuden aiheuttama häiriö helpottuu. [6]

Koska suprajohtavat kubitit eivät ole puhtaasti kaksi tasoisia systeemejä, pitää niitä käsitellessä tehdä tarkkoja toimenpiteitä, jotka joissain tapauksissa hidastavat kvanttiporttien toimintaa. Esimerkiksi transmon-kubitissa siirtymän $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ välillä aiheuttava taajuus eroa vain noin 4% siirtymän $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ taajuudesta. [6]

5 YHTEENVETO

Kvanttitietokoneiden oikea toiminta siis vaatii, että kubittisysteemi on tarpeeksi erillään ulkoisesta systeemistä, jotta koherenssi säilyy, mutta samalla kubittia pitää olla mahdollisuus muokata ja lukea. Dekoherenssin poistaminen onkin kvanttitietokoneiden kehityksen suurin haaste ja parantelun kohde. Kvanttitietokoneet vaativat siis hyvin paljon erilaisista suunnittelua toimiakseen oikealla tavalla. Tämän toteuttaminen on kuitenkin mahdollista, kun otamme huomioon kaikki siihen liittyvät asiat. Suprajohtavien kubittien ehdoton vahvuus on niiden kyky mukautua tarpeisiin, elektronisten komponenttien parametrien avulla. Pitää kuitenkin muistaa, että suprajohtavat kubitit eivät ole ainoa tapa saavuttaa kvanttimekaaninen bitti, ja jokin muu tapa saattaa ollakin parempi.

Tulevaisuudessa kvanttitietokoneiden tutkiminen ja kehitys tulee luultavasti lisääntymään sitä mukaa kun mahdollisuus ja todennäköisyys kvanttiherruuteen, eli kvanttitietokoneen ylivoimaiseen laskentatehoon klassiseen tietokoneeseen verrattuna, kasvaa. On siis hyvin mahdollista, että kvanttitietokoneet käyvät läpi samanlaisen kehitysprosessin kuin klassinen tietokone: 50 vuodessa on mahdollista parantaa tehokkuutta eksponentiaalisesti ja saada nykyään huoneen kokoiset laitteet mahtumaan taskun pohjalle.

LÄHTEET

- [1] Lala, P. K. *Quantum Computing: A Beginner's Introduction*. eng. 2019.
- [2] You, J. ja Nori, F. Superconducting Circuits and Quantum Information. eng. *arXiv.org* (2006-01-18). URL: <http://search.proquest.com/docview/2089824814/>.
- [3] Bone, S. ja Castro, M. A brief history of quantum computing. *Imperial College in London*, http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_97/journal/vol4/spb3 (1997).
- [4] Gibney, E. Hello quantum world! Google publishes landmark quantum supremacy claim. *Nature* 574.7779 (2019-10-01), 461, 462. ISSN: 14764687.
- [5] Aaronson, S. The Limits of Quantum Computers. *Scientific American* 298.3 (2008-03-01), 50–57. ISSN: 0036-8733.
- [6] Sank, D. T. Fast, Accurate State Measurement in Superconducting Qubits (2014), 229. URL: <http://www.escholarship.org/uc/item/73m3g1h0>.
- [7] Devoret, M. H., Wallraff, A. ja Martinis, J. M. Superconducting Qubits: A Short Review (2004-11-06).
- [8] Shor, P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. eng. *SIAM Journal on Computing* 26.5 (1997-10), 1484, 1509. ISSN: 0097-5397.
- [9] Tinkham, M. *Introduction to superconductivity*. eng. Mineola, N.Y., 2004.
- [10] Martinis, J. M. ja Osborne, K. Superconducting Qubits and the Physics of Josephson Junctions (20040216).