Tampereen yliopisto

Katariina Niemi

KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖN RATKAISU TEHRANIN MENETELMÄLLÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2020

Tiivistelmä

Katariina Niemi: Kolmannen asteen yhtälön ratkaisu Tehranin menetelmällä
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä ja todistaa Fleur T. Tehranin vuonna 2016 esittelemä menetelmä kolmannen asteen yhtälön ratkaisemiseksi. Tutkielma sisältää esimerkkejä Tehranin ratkaisumenetelmän käyttämisestä erilaisille yhtälöille sekä kolmannen asteen yhtälön ratkaisemisen historiaa. Lähdeteoksena tutkielmassa käytetään Tehranin kirjoittamaa artikkelia ratkaisumenetelmästä.

Kolmannen asteen yhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, jonka termien korkein aste on kolme. Sillä voi olla enintään kolme ratkaisua, joista vähintään yksi on aina reaalinen ja kaksi muuta ovat joko reaalilukuja tai kompleksikonjugaattipari. Kun ratkaisujen kertaluvut otetaan huomioon, ratkaisuja on aina yhteensä kolme eli jokin ratkaisuista saattaa toistua useamman kerran. Tehranin ratkaisumenetelmä voidaan jakaa kolmeen tapaukseen yhtälön erilaisten ratkaisujen lukumäärän mukaan.

Ensimmäinen ja toinen tapaus ovat erikoistapauksia ja ne toimivat vain tietyn muotoisille kolmannen asteen yhtälöille. Niistä yhtälön ratkaisu saadaan ratkaistua algebrallisesti melko yksinkertaisilla laskutoimituksilla. Ensimmäisen tapauksen mukaisella yhtälöllä on vain yksi reaalinen ratkaisu, joka toistuu kolmesti. Toisen tapauksen mukaisella yhtälöllä on puolestaan kaksi reaalista ratkaisua, joista toinen esiintyy kahdesti.

Kolmas tapaus on yleisempi ja se toimii kaikille kolmannen asteen yhtälöille. Sen avulla kolmannen asteen yhtälö saadaan ratkaistua numeerisesti ja se sisältää huomattavasti enemmän laskutoimituksia kuin yhden ja kahden ratkaisun menetelmät. Kolmannen tapauksen mukaisella yhtälöllä on ratkaisuna yksi reaalinen ratkaisu ja lisäksi joko kaksi reaalilukuratkaisua tai kompleksikonjugaattipari.

Yhden ja kahden ratkaisun menetelmät ovat yksinkertaisempia ja tarkempia kuin kolmen ratkaisun menetelmä, joka on huomattavasti työläämpi. Tämän vuoksi kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen kannattaa aloittaa yhden ja kahden ratkaisun

menetelmistä, ja vasta tarvittaessa käyttää kolmen ratkaisun menetelmää.

Avainsanat: Tehranin ratkaisumenetelmä, kolmannen asteen yhtälön ratkaisu, kolmannen asteen yhtälö, Fleur Tehrani

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto **5**

2 Historiaa **6**

3 Yleistä kolmannen asteen yhtälöstä **7**

3.1 Kolmannen asteen yhtälön määritelmä 7

3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava 8

4 Tehranin ratkaisumenetelmä **9**

4.1 Yksi ratkaisu 9

4.2 Kaksi ratkaisua 11

4.3 Kolme ratkaisua 13

Lähteet **22**

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee kolmannen asteen yhtälön ratkaisemista Tehranin ratkaisumenetelmän avulla. Tohtori Fleur T. Tehrani esitteli menetelmän vuonna 2016 *The Mathematical Gazette* -lehdessä.

Tutkielman luvussa 2 esitellään kolmannen asteen yhtälön ratkaisemisen historiaa. Luvussa esitellään muun muassa muinaisten egyptiläisten ja kreikkalaisten motivaatiota kolmannen asteen yhtälön ratkaisemiseksi sekä nykyään Cardanon ratkaisuna tunnetun ratkaisumenetelmän syntymistä.

Luvussa 3 määritellään kolmannen asteen yhtälö ja esitellään sen mahdolliset ratkaisut. Kolmannen asteen yhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, jonka termien korkein aste on kolme. Sillä voi olla enintään kolme ratkaisua, joista vähintään yksi on aina reaalinen ja kaksi muuta ovat joko reaalisia tai kompleksikonjugaatteja. Kun ratkaisujen kertaluvut huomioidaan, ratkaisuja on aina yhteensä kolme eli jokin ratkaisuista saattaa toistua useamman kerran. Pohjatiedoksi tässä luvussa esitellään toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

Tehranin ratkaisumenetelmän käyttö eri tapauksissa sekä niiden todistukset esitellään luvussa 4. Ensimmäisessä tapauksessa ratkaisu saadaan algebrallisesti ja niitä on vain yksi, joka on reaalinen. Toisessa tapauksessa ratkaisu saadaan myös algebrallisesti ja tällöin yhtälöllä on kaksi reaalilukuratkaisua. Näissä menetelmissä on ehtoja, minkä vuoksi ne eivät sovellu kaikille kolmannen asteen yhtälöille. Kolmas tapaus on yleinen ja se sopii kaikille kolmannen asteen yhtälöille. Siinä ratkaisu saadaan numeerisesti iteroimalla ja se voi olla reaalilukujen lisäksi myös kompleksikonjugaattipari. Luvussa esitellään myös esimerkkejä Tehranin ratkaisumenetelmän käytöstä kussakin tapauksessa.

Lukijalta edellytetään lukiotasoisen matematiikan ymmärtämistä. Lukijan esimerkiksi oletetaan hallitsevan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käyttämisen sekä iteroinnin. Lisäksi lukijan täytyy ymmärtää kompleksilukujen esittäminen imaginääriyksikön avulla. Päälähteenä käytetään Tehranin artikkelia *A simple approach to solving cubic equations*.

2 Historiaa

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisun selvittäminen aloitettiin jo muinaisten egyptiläisten ja kreikkalaisten keskuudessa. Nämä ratkaisut perustuivat geometriaan, sillä heillä ei ollut vielä tietämystä algebrasta. He tunsivat yksinkertaisia kolmannen asteen yhtälöitä, mikä johtui muun muassa heidän ongelmistaan kuution kahdentamisessa. [1, s. 8]

Kreikkalainen Hippokrates Khioslainen osoitti ensimmäisenä noin vuonna 430 eaa., että kuution kahdentaminen voidaan sieventää löytämällä kaksi geometristä keskiarvoa annetun janan ja toisen puolet pidemmän janan väliltä. Hän ei kuitenkaan onnistunut löytämään näitä geometrisiä keskiarvoja. Kreikkalaiset loivat myös perustan kolmannen asteen yhtälön ratkaisulle leikkaavien kartioiden avulla, kun vuonna 429 eaa. syntynyt Menaechmus keksi ensimmäisenä kartioleikkauksen. Kreikkalainen algebran tutkija Diofantos Aleksandrialainen onnistui ratkaisemaan yhden kolmannen asteen yhtälön noin vuonna 300 jaa. Tämä ratkaisu sisälsi juurten rationaaliosan, mutta ei negatiivisia lukuja tai irrationaalilukuja. [1, s. 8–9]

Arabit paransivat kreikkalaisten menetelmiä ja hindujen avustuksella he löysivät likimääräiset ratkaisut numeerisille yhtälöille algebrallisin menetelmin. Arabien suurin saavutus oli kuitenkin kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen leikkaavien kartioiden avulla. [1, s. 9]

Scipo Ferro onnistui ensimmäisenä ratkaisemaan kolmannen asteen yhtälön algebrallisesti. Yhtälö oli muotoa $x^3 + mx = n$, mutta hän piti ratkaisun salassa. Toisen ratkaisun antoi Nicolo Tartaglia. Hän onnistui kehittämään epätäydellisen ratkaisun yhtälöön $x^3 + px^2 = q$ ja esitti sen julkisesti. Vuonna 1541 Tartaglia keksi yleisen ratkaisun yhtälölle $x^3 + px^2 = q$ muuttamalla sen muotoon $x^3 + mx = n$. Hän jakoi tietonsa Cardanon kanssa, joka lupasi pitää sen salassa. Cardano kuitenkin julkaisi ratkaisun teoksessaan *Ars Magna*. Tartaglian kehittämä, mutta Cardanon julkaisema menetelmä tunnetaan nykyään nimellä Cardanon ratkaisu. [1, s. 10–11]

Cardanon ratkaisumenetelmä on edelleen yleisesti käytetty ratkaisumenetelmä kolmannen asteen yhtälölle. Tässä tutkielmassa esitellään Tehranin ratkaisumenetelmä, joka on hieman yksinkertaisempi kuin Cardanon ratkaisumenetelmä. Tehranin menetelmä on osittain algebrallinen ja osittain numeerinen, ja se koostuu yksinkertaisista laskutoimituksista.

3 Yleistä kolmannen asteen yhtälöstä

Tässä luvussa esitetään määritelmä kolmannen asteen yhtälölle sekä käsitellään sen eri tapauksia. Lisäksi esitellään toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

3.1 Kolmannen asteen yhtälön määritelmä

Määritelmä 3.1. Kolmannen asteen yhtälö on muotoa

$$f(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0 \tag{3.1}$$

eli sen termien korkein aste on kolme.

Kolmannen asteen yhtälöllä voi olla enintään kolme ratkaisua. Esitellään seuraavaksi tapaukset, joissa kolmannen asteen yhtälöllä on yksi, kaksi tai kolme ratkaisua (vrt. [3, s. 225–226]). Mikäli kolmannen asteen yhtälöllä yksi reaalilukuratkaisu, se toistuu kolme kertaa. Tällöin funktio on muotoa

$$f(x) = (x - r_1)^3 = x^3 - 3r_1x^2 + 3r_1^2x - r_1^3, \tag{3.2}$$

jossa ratkaisu r_1 on nyt toistuva reaalilukuratkaisu.

Mikäli kolmannen asteen yhtälöllä on kaksi reaalilukuratkaisua, niistä toinen toistuu kaksi kertaa. Tällöin funktio on muotoa

$$f(x) = (x - r_1)^2(x - r_2) = x^3 + x^2(-2r_1 - r_2) + x(r_1^2 + 2r_1r_2) - r_1^2r_2 \tag{3.3}$$

missä ratkaisut r_1 ja r_2 ovat reaalilukuratkaisut.

Mikäli kolmannen asteen yhtälöllä kolme ratkaisua, niistä yksi on reaalilukuratkaisu ja kaksi muuta ovat joko reaalilukuratkaisuja tai kompleksikonjugaattipari. Tällöin funktio on muotoa

$$f(x) = (x - r_1)(x^2 + \beta_1x + \beta_2) = x^3 + x^2(\beta_1 - r_1) + x(\beta_2 - \beta_1r_1) - \beta_2r_1, \tag{3.4}$$

missä ratkaisu r_1 on yhtälön reaalilukuratkaisu.

Tehranin ratkaisumenetelmää käyttäessä merkintöjä α_1, α_2 ja α_3 käytetään kuvaamaan termien x^2, x ja 1 kertoimia määritelmän 3.1 mukaisesti.

Esimerkki 3.2. Yhtälölle (3.2) kertoimet α_1, α_2 ja α_3 ovat

$$\alpha_1 = -3r_1, \qquad \alpha_2 = 3r_1^2 \qquad \text{ja} \qquad \alpha_3 = -r_1^3.$$

Yhtälölle (3.3) kertoimet ovat

$$\alpha_1 = -2r_1 - r_2, \qquad \alpha_2 = r_1^2 + 2r_1r_2 \qquad \text{ja} \qquad \alpha_3 = -r_1^2 r_2.$$

Vastaavasti yhtälölle (3.4) kertoimet ovat

$$\alpha_1 = \beta_1 - r_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1 r_1 \qquad \text{ja} \qquad \alpha_3 = -\beta_2 r_1.$$

Jokainen kolmannen asteen yhtälö saadaan määritelmän 3.1 muotoon jakamalla yhtälö kolmannen asteen termin x^3 kertoimella.

3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Tehranin ratkaisumenetelmässä hyödynnetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, joten esitellään se.

Lause 3.3. *Olkoon toisen asteen yhtälö muotoa*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

jossa $a \neq 0$. *Tällöin sen ratkaisut saadaan kaavalla*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.5}$$

Todistus. Ks. [2, s. 54]. □

4 Tehranin ratkaisumenetelmä

Tehranin ratkaisumenetelmä perustuu kolmannen asteen yhtälön kertoimien α_1, α_2 ja α_3 uudelleenjärjestämiseen. Tämän vuoksi tarkasteltavat yhtälöt tulee muuttaa muotoon, jossa termin x^3 kertoimena on yksi. Saatuja yhtälöitä muokataan ja tarvittaessa iteroidaan. Tehrani on jakanut ratkaisumenetelmän erilaisiin tapauksiin ratkaisujen lukumäärän mukaan. Seuraavissa pykälissä tarkastellaan tarkemmin jokaista tapausta.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen Tehranin menetelmällä kannattaa aloittaa lauseen 4.1 menetelmästä ja mikäli yhtälö ei ratkea tämän menetelmän avulla, kannattaa siirtyä lauseen 4.3 menetelmään. Mikäli tämäkään menetelmä ei toimi, vasta sitten kannattaa siirtyä lauseen 4.5 menetelmään.

Lauseiden 4.1 ja 4.3 ratkaisumenetelmät ovat erikoistapauksia ja lauseen 4.5 ratkaisumenetelmä on yleinen ja toimii kaikille yhtälöille. Lauseen 4.5 ratkaisumenetelmä on monimutkaisin ja siinä ratkaisu saadaan numeerisesti, kun taas lauseiden 4.1 ja 4.3 ratkaisumenetelmillä yhtälöiden ratkaisut saadaan algebrallisesti.

4.1 Yksi ratkaisu

Lauseen 4.1 ratkaisumenetelmällä saadaan ratkaistua kolmannen asteen yhtälöitä, joilla on vain yksi kolmesti toistuva reaalilukuratkaisu. (Vrt. [3, s. 225].)

Lause 4.1. *Olkoon kolmannen asteen yhtälö muotoa*

$$f(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0.$$

Lasketaan muuttuja γ kaavalla

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\alpha_2}, \tag{4.1}$$

jossa $\alpha_2 > 0$. Jos saatu muuttuja γ toteuttaa ehdot

(i) $\alpha_1 = -3\gamma$ *ja*

(ii) $\alpha_3 = -\gamma^3$,

niin $\gamma = r_1$.

Todistus. Esimerkin 3.2 mukaan kolmannen asteen yhtälön termien kertoimet ovat

$$\alpha_1 = -3r_1, \tag{4.2}$$

$$\alpha_2 = 3r_1^2, \tag{4.3}$$

$$\alpha_3 = -r_1^3. \tag{4.4}$$

Nämä pätevät siis kolmannen asteen yhtälölle, jolla on yksi reaalilukuratkaisu.

Kertoimen α_2 yhtälöstä (4.3) ratkaistaan ratkaisu r_1 ja merkitään sitä muuttujalla γ, jolloin saadaan yhtälö (4.1). Neliöjuuren sisälle halutaan positiivinen luku, jotta menetelmä pysyy yksinkertaisena eikä tarvitse käyttää kompleksilukuja. Tämän vuoksi kertoimen α_2 tulee olla positiivinen ja se on ehtona ratkaisumenetelmän käytölle.

Tämän jälkeen kokeillaan, toteuttaako saatu muuttuja γ myös kertoimien α_1 ja α_3 yhtälöt (4.2) ja (4.4). Sijoitetaan siis näihin yhtälöihin $r_1 = \gamma$. Mikäli molemmat yhtälöt toteutuvat, kolmannen asteen yhtälön ratkaisu on siis $r_1 = \gamma$. □

Jos yhtälö ei ratkea tällä menetelmällä, sillä on useampi kuin yksi ratkaisu tai sitä ei voida ratkaista tällä menetelmällä ehdon $\alpha_2 > 0$ vuoksi. Tällöin kannattaa kokeilla lukujen 4.2 ja 4.3 ratkaisumenetelmiä.

Tutkitaan tilannetta, joissa kolmannen asteen yhtälöllä on yksi ratkaisu.

Esimerkki 4.2. Olkoon yhtälö

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0.$$

Ratkaistaan yhtälö lauseen 4.1 ratkaisumenetelmän mukaan. Tälle yhtälölle kertoimet ovat $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = 12$ ja $\alpha_3 = -8$. Nyt lisäksi kerroin $\alpha_2 > 0$, joten kaavan (4.1) mukaan voidaan laskea muuttuja γ, joka on

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{12}{3}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Tutkitaan muut ehdot.

- Nyt $\alpha_1 = -6 = -3 * 2 = -3\gamma$ eli ehto (i) pätee.
- Myös $\alpha_3 = -8 = -2^3 = -\gamma^3$ eli ehto (ii) pätee.

Siis $r_1 = \gamma = 2$ on yhtälön ratkaisu ja se toistuu kolme kertaa.

4.2 Kaksi ratkaisua

Lauseen 4.3 ratkaisumenetelmällä saadaan ratkaistua kolmannen asteen yhtälöitä, joilla on kaksi reaalilukuratkaisua. (Vrt. [3, s. 225–226].)

Lause 4.3. *Olkoon kolmannen asteen yhtälö muotoa*

$$f(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0. \tag{4.5}$$

Lasketaan muuttujat γ_1 *ja* γ_2 *kaavalla*

$$\gamma_1, \gamma_2 = -\frac{\alpha_1}{3} \pm \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 3\alpha_2}}{3}, \tag{4.6}$$

jossa $\alpha_2 \leq \frac{\alpha_1^2}{3}$*. Ratkaistaan myös apumuuttujat* λ_1 *ja* λ_2 *siten, että*

$$\lambda_1 = -2\gamma_1 - \alpha_1 \tag{4.7}$$

ja vastaavasti

$$\lambda_2 = -2\gamma_2 - \alpha_1. \tag{4.8}$$

Mikäli kerroin $\alpha_3 = -\gamma_1^2\lambda_1$*, niin yhtälön ratkaisut ovat* $r_1 = \gamma_1$ *ja* $r_2 = \lambda_1$*. Jos taas kerroin* $\alpha_3 = -\gamma_2^2\lambda_2$*, niin yhtälön ratkaisut ovat* $r_1 = \gamma_2$ *ja* $r_2 = \lambda_2$*.*

Todistus. Esimerkin 3.2 mukaan saatiin kertoimet

$$\alpha_1 = -2r_1 - r_2, \tag{4.9}$$

$$\alpha_2 = r_1^2 + 2r_1 r_2, \tag{4.10}$$

$$\alpha_3 = -r_1^2 r_2. \tag{4.11}$$

Nämä ovat siis kolmannen asteen yhtälölle, jolla on kaksi reaalilukuratkaisua. Kertoimen α_1 yhtälöstä (4.9) saadaan, että

$$r_2 = -\alpha_1 - 2r_1. \tag{4.12}$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (4.10), saadaan

$$\alpha_2 = r_1^2 + 2r_1(-\alpha_1 - 2r_1) = -3r_1^2 - 2\alpha_1 r_1, \tag{4.13}$$

ja edelleen

$$3r_1^2 + 2\alpha_1 r_1 + \alpha_2 = 0. \tag{4.14}$$

Nyt kolmannen asteen yhtälö on siis muutettu toisen asteen yhtälöksi ratkaisun r_1 suhteen. Ratkaistaan yhtälöstä (4.14) ratkaisu r_1 lauseen 3.3 toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Merkitään ratkaisuja muuttujilla γ_1 ja γ_2. Saadaan yhtälö

$$\gamma_1, \gamma_2 = -\frac{-2\alpha_1 \pm \sqrt{(2\alpha_1)^2 - 4 * 3\alpha_2}}{2 * 3}, \tag{4.15}$$

josta saadaan sieventämällä

$$\gamma_1, \gamma_2 = -\frac{\alpha_1}{3} \pm \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 3\alpha_2}}{3},$$

joka on ratkaisumenetelmässä käytetty lauseke (4.6). Yhtälön ratkaisusta halutaan jälleen reaalinen tulos, joten neliöjuurilausekkeen sisällön tulee olla positiivinen. Täten

$$\alpha_1^2 - 3\alpha_2 > 0 \qquad \text{eli saadaan, että} \qquad \alpha_2 \leq \frac{1}{3}\alpha_1^2,$$

mikä oli ehtona tämän ratkaisumenetelmän toimivuudelle.

Seuraavaksi muodostetaan apumuuttujat λ_1 ja λ_2. Kertoimen α_1 yhtälöstä (4.9) saatiin ratkaisu r_2 yhtälön (4.12) mukaisesti. Merkitään ratkaisua r_2 apumuuttujilla λ_1 ja λ_2, ja ratkaisua r_1 muuttujilla γ_1 ja γ_2, jolloin saadaan yhtälöiden (4.7) ja (4.8) mukaiset lausekkeet apumuuttujille λ_1 ja λ_2.

Lopulliset ratkaisut r_1 ja r_2 saadaan selville kokeilemalla, toteuttavatko muuttujien γ_1, γ_2, λ_1 ja λ_2 saamat arvot kertoimen α_3 lausekkeen (4.11). Nyt siis $r_1 = \gamma_1$ tai $r_1 = \gamma_2$ ja $r_2 = \lambda_1$ tai $r_2 = \lambda_2$. Siis jos

$$\alpha_3 = -\gamma_1^2\lambda_1,$$

niin ratkaisut ovat $r_1 = \gamma_1$ ja $r_2 = \lambda_1$. Jos taas

$$\alpha_3 = -\gamma_2^2\lambda_2,$$

niin ratkaisut ovat $r_1 = \gamma_2$ ja $r_2 = \lambda_2$. □

Esimerkki 4.4. Olkoon yhtälö

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 175 = 0.$$

Tämän yhtälön kertoimet ovat $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -45$ ja $\alpha_3 = 175$. Nyt kerroin $\alpha_2 < 0$ eli lauseen 4.1 ratkaisumenetelmää ei voida käyttää. Ratkaistaan yhtälö lauseen 4.3 ratkaisumenetelmän mukaan. Nyt

$$-45 \leq \frac{(-3)^2}{3} = 3$$

eli ehto ratkaisumenetelmän käytölle toteutuu. Ratkaistaan muuttujat γ_1 ja γ_2 yhtälön (4.6) mukaan, jolloin saadaan

$$\gamma_1, \gamma_2 = -\frac{(-3)}{3} \pm \frac{\sqrt{(-3)^2 - 3 * (-45)}}{3} = 1 \pm 4$$

eli $\gamma_1 = -3$ ja $\gamma_2 = 5$. Ratkaistaan apumuuttujat λ_1 ja λ_2 yhtälöiden (4.7) ja (4.8) mukaan. Saadaan

$$\lambda_1 = -2 * (-3) - (-3) = 9 \qquad \text{ja}$$
$$\lambda_2 = -2 * 5 - (-3) = -7.$$

Tutkitaan yhtälön ratkaisut. Nyt

$$\alpha_3 = -\gamma_1^2 \lambda_1 = -(-3)^2 * 9 = -81 \neq 175,$$

joten muuttujat γ_1 ja λ_1 eivät ole yhtälön ratkaisut. Sen sijaan

$$\alpha_3 = -\gamma_2^2 \lambda_2 = -5^2 * (-7) = 175,$$

joten yhtälö pätee eli muuttujat $\gamma_2 = r_1 = 5$ ja $\lambda_2 = r_2 = -7$ ovat yhtälön ratkaisut.

4.3 Kolme ratkaisua

Tehranin yleinen menetelmä perustuu kertoimien α_1, α_2 ja α_3 uudelleen järjestämiseen ja niiden avulla saatujen yhtälöiden iteroimiseen. Tämä ratkaisumenetelmä sopii kaikille kolmannen asteen yhtälöille. (Vrt. [3, s. 226–228].)

Lause 4.5. *Olkoon kolmannen asteen yhtälö muotoa*

$$f(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0.$$

Ratkaistaan yhtälö seuraavien vaiheiden mukaan.

(i) *Lasketaan ensin termi x_1 kaavalla*

$$x_1 = -\frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} - \alpha_1. \tag{4.16}$$

(ii) *Lasketaan sitten termi x_2 kaavalla*

$$x_2 = \frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} - \alpha_1, \tag{4.17}$$

(iii) *Lasketaan seuraavaksi termit* $y_1 = f(x_1)$ *ja* $y_2 = f(x_2)$. *Termien* y_1 *ja* y_2 *tulee olla erimerkkiset. Jos ne eivät ole, valitaan uudet termit* x_1 *ja* x_2 *seuraavasti:*

- *Jos* $\alpha_3 < 0$, *niin uusi termi* x_1 *on aiemmin saatu termi* x_2. *Uusi termi* x_2 *saadaan kaavasta* (4.17) *siten, että annetaan kertoimelle* $|\alpha_1|$ *sopiva kokonaislukukerroin. Kerroin tulee valita siten, että uudet termit* x_1 *ja* x_2 *ovat erimerkkiset ja että* $x_2 > x_1$.
- *Jos* $\alpha_3 > 0$, *niin uusi termi* x_2 *on aiemmin saatu termi* x_1. *Uusi termi* x_1 *saadaan kaavasta* (4.16) *siten, että annetaan kertoimelle* $|\alpha_1|$ *sopiva kokonaislukukerroin. Kerroin tulee valita siten, että uudet termit* x_1 *ja* x_2 *ovat erimerkkiset ja että* $x_1 < x_2$.

(iv) *Lasketaan kulmakerroin* k *kaavalla*

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.18}$$

(v) *Lasketaan ensimmäinen arvaus ratkaisulle* r_1 *kaavalla*

$$r_1 = x_1 - \frac{y_1}{k}. \tag{4.19}$$

(vi) *Lasketaan kerroin* β_1 *kaavalla*

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_3}{r_1^2} - \frac{\alpha_2}{r_1}. \tag{4.20}$$

(vii) *Lasketaan arvo ratkaisulle* r_1 *kaavalla*

$$r_1 = \beta_1 - \alpha_1. \tag{4.21}$$

(viii) *Toistetaan kohtia* (vi) *ja* (vii) *eli iteroidaan, kunnes ratkaisu on tarpeeksi tarkka.*

(ix) *Mikäli iteraatiot eivät suppene tai värähtele, lasketaan keskiarvo kahden peräkkäisen iteraation ratkaisuista* r_1 *ja valitaan ylä- tai alaraja ratkaisulle* r_1, *joka tuottaa funktiolle* $f(r_1)$ *vastakkaisen merkin. Näitä toistamalla saadaan lopullinen ratkaisu* r_1.

(x) *Kun ratkaisu* r_1 *on selvitetty riittävällä tarkkuudella, muut ratkaisut saadaan kaavalla*

$$r_2, r_3 = -\frac{k_1}{2} \pm \frac{\sqrt{k_1^2 + \frac{4\alpha_3}{r_1}}}{2}, \tag{4.22}$$

jossa $k_1 = r_1 + \alpha_1$.

Todistus. Esimerkin 3.2 mukaan yhtälön kertoimet ovat

$$\alpha_1 = \beta_1 - r_1, \tag{4.23}$$

$$\alpha_2 = \beta_2 - r_1\beta_1, \tag{4.24}$$

$$\alpha_3 = -r_1\beta_2. \tag{4.25}$$

Nämä pätevät siis kolmannen asteen yhtälölle, jolla on kolme ratkaisua. Yhtälöstä (4.25) saadaan ratkaistua kerroin β_2 siten, että

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_3}{r_1}. \tag{4.26}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöihin (4.23) ja (4.24), jolloin saadaan

$$\alpha_1 = \beta_1 - r_1 \qquad \text{ja} \tag{4.27}$$

$$\alpha_2 = -r_1\beta_1 - \frac{\alpha_3}{r_1}. \tag{4.28}$$

Yhtälöstä (4.28) saadaan ratkaistua muuttuja β_1, jolloin

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_3}{r_1^2} - \frac{\alpha_2}{r_1}. \tag{4.29}$$

ja yhtälöstä (4.27) saadaan ratkaisu r_1 siten, että

$$r_1 = \beta_1 - \alpha_1. \tag{4.30}$$

Kertomalla yhtälö (4.29) puolittain termillä r_1^2 ja siirtämällä kaikki termit samalle puolelle, saadaan yhtälö

$$\beta_1 r_1^2 + \alpha_2 r_1 + \alpha_3 = 0. \tag{4.31}$$

Yhtälö (4.31) on nyt toisen asteen yhtälö ratkaisun r_1 suhteen. Ratkaistaan se määritelmän 3.3 toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Saadaan yhtälö

$$r_1 = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_3\beta_1}}{2\beta_1}. \tag{4.32}$$

Ratkaisusta r_1 halutaan reaaliluku, joten neliöjuuren sisällä olevan lausekkeen täytyy olla positiivinen. Siis

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_3\beta_1 > 0 \qquad \text{eli} \qquad \beta_1\alpha_3 \leq \frac{\alpha_2^2}{4}.$$

Epäyhtälön oikea puoli on aina positiivinen, joten jos α_3 ja β_1 ovat erimerkkiset, niin epäyhtälön vasen puoli on negatiivinen ja epäyhtälö on siten tosi. Jos sekä α_3

ja β_1 ovat molemmat negatiivisia, jaetaan epäyhtälön molemmat puolet kertoimella α_3. Tällöin saadaan epäyhtälö

$$\beta_1 \geq \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_3}. \tag{4.33}$$

Tämän yhtälön molemmat puolet ovat nyt siis negatiivisia. Jos α_3 ja β_1 ovat molemmat positiivisia, jaetaan yhtälö vastaavasti kertoimella α_3. Nyt saadaan epäyhtälö

$$\beta_1 \leq \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_3}. \tag{4.34}$$

Tämän yhtälön molemmat puolet ovat nyt siis positiivisia. Kun yhtälöt (4.33) ja (4.34) yhdistetään, saadaan itseisarvoepäyhtälö

$$|\beta_1| \leq \frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|}. \tag{4.35}$$

Yhtälöstä (4.27) saadaan, että

$$\beta_1 = r_1 + \alpha_1. \tag{4.36}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (4.35), jolloin saadaan epäyhtälöksi

$$|r_1 + \alpha_1| \leq \frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} \tag{4.37}$$

ja edelleen

$$-\frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} - \alpha_1 \leq r_1 \leq \frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} - \alpha_1. \tag{4.38}$$

Merkitään, että

$$x_1 = -\frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} - \alpha_1 \qquad \text{ja} \qquad x_2 = \frac{\alpha_2^2}{4|\alpha_3|} - \alpha_1.$$

Nyt siis

$$x_1 \leq r_1 \leq x_2$$

eli ratkaisu r_1 on tällä välillä. Ratkaistaan funktion arvot välin päätepisteissä ja merkitään niitä termeillä y_1 ja y_2. Siis

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{ja} \qquad y_2 = f(x_2).$$

Nyt termien y_1 ja y_2 tulisi olla vastakkaismerkkiset. Mikäli ne ovat samanmerkkiset, niin kertoimet α_3 ja β_1 ovat vastakkaismerkkiset. Valitaan tällöin uudet termit x_1 ja x_2 seuraavasti.

Jos $\alpha_3 < 0$, niin $\beta_1 > 0$ ja siten yhtälön (4.36) mukaan $r_1 > -\alpha_1$. Tässä tilanteessa voidaan valita, että uusi termi x_1 on yhtä suuri kuin termi x_2. Valitaan uusi termi x_2, joka saadaan kerrointa $|\alpha_1|$ kokonaisluvulla kertomalla suuremmaksi kuin termi x_1, jotta saadaan funktiot $f(x_2)$ ja $f(x_1)$ erimerkkisiksi.

Jos taas $\alpha_3 > 0$, niin $\beta_1 < 0$ ja jälleen yhtälön (4.36) mukaan $r_1 < -\alpha_1$. Tässä tilanteessa voidaan valita, että uusi termi x_2 on yhtä suuri kuin x_1. Valitaan uusi termi x_1, joka on kerrointa $|\alpha_1|$ kokonaisluvulla kertomalla saatu pienemmäksi kuin termi x_2, jotta funktiot $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ ovat erimerkkiset.

Nyt voidaan piirtää suora termien x_1 ja x_2 välille siten, että suora leikkaa akselin läheltä ratkaisua r_1. Suoran yhtälö on muotoa

$$y_2 = y_1 + k(x_2 - x_1),$$

josta suoran kulmakerroin on muotoa

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Kun suora leikkaa x-akselin kohdassa $y_2 = 0$, saadaan ratkaisu x_2 yhtälöstä

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{k}. \tag{4.39}$$

Tämän yhtälön ratkaisu x_2 on ensimmäinen arvaus ratkaisulle r_1. Varsinainen ratkaisu r_1 saadaan toistamalla kaavoja (4.29) ja (4.30), kunnes ratkaisu on riittävän tarkka.

Loput ratkaisut saadaan yhtälön auki kerrotusta muodosta $f(x) = (x - r_1)(x^2 + \beta_1 x + \beta_2) = 0$, josta on nyt siis ratkaistu ensimmäinen osa $x - r_1$. Yhtälön loppuosa $x^2 + \beta_1 x + \beta_2$ on siis myös nolla, joten se ratkeaa lauseen 3.3 toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Nyt siis

$$r_2, r_3 = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2}}{2}.$$

Sijoitetaan tähän yhtälöistä (4.23) ja (4.25) ratkaistut kertoimet β_1 ja β_2. Nyt saadaan

$$r_2, r_3 = \frac{-(\alpha_1 + r_1) \pm \sqrt{(\alpha_1 + r_1)^2 + \frac{4\alpha_3}{r_1}}}{2}.$$

Merkitään polynomia $\alpha_1 + r_1$ kirjaimella k_1, jolloin saadaan haluttu muoto yhtälöstä. Nyt siis

$$r_2, r_3 = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + \frac{4\alpha_3}{r_1}}}{2},$$

jossa r_2 ja r_3 ovat yhtälön loput ratkaisut. □

Esimerkki 4.6. Olkoon yhtälö

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Tämän yhtälön kertoimet ovat $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$ ja $\alpha_3 = 1$. Nyt voidaan havaita, että lauseiden 4.1 ja 4.3 ratkaisumenetelmät eivät toimi tälle yhtälölle. Käytetään siis lauseen 4.5 yleistä ratkaisumenetelmää. Ratkaistaan ensin muuttujat x_1 ja x_2 kaavoilla (4.16) ja (4.17). Saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{(-3)^2}{4|1|} - 2 = -\frac{17}{4} \qquad \text{ja} \\ x_2 &= \frac{(-3)^2}{4|1|} - 2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Lasketaan sitten funktion ratkaisu näillä arvoilla. Nyt

$$\begin{aligned} y_1 = f(x_1) &= (-\frac{17}{4})^3 + 2 * (-\frac{17}{4})^2 - 3 * (-\frac{17}{4}) + 1 = -\frac{1721}{64} \qquad \text{ja} \\ y_2 = f(x_2) &= (\frac{1}{4})^3 + 2 * (\frac{1}{4})^2 - 3 * (\frac{1}{4}) + 1 = \frac{25}{64}. \end{aligned}$$

Ratkaistaan kulmakerroin k kaavan (4.18) mukaan, jolloin saadaan

$$k = \frac{\frac{25}{64} - (-\frac{17}{64})}{\frac{1}{4} - (-\frac{17}{4})} = \frac{97}{16} \approx 6,0625.$$

Ensimmäinen arvaus ratkaisulle r_1 saadaan kaavalla (4.19). Siis

$$r_1 = -\frac{17}{4} - \frac{(-\frac{1721}{64})}{\frac{97}{16}} = \frac{18}{97}.$$

Aloitetaan tämän jälkeen iterointi kaavoilla (4.20) ja (4.21). Ratkaistaan kerroin β_1 yhtälön (4.20) mukaan. Saadaan

$$\beta_1 = -\frac{1}{(\frac{18}{97})^2} - \frac{(-3)}{\frac{18}{97}} = -\frac{4171}{324} \approx -12,87345679.$$

Lasketaan ratkaisu r_1 kaavalla (4.21), jolloin saadaan

$$r_1 = -\frac{4171}{324} - 2 \approx -14,87345679.$$

Iterointia jatketaan, kunnes tulos saadaan halutulla tarkkuudella. Tulokset iteraatioista on koottu taulukkoon 4.1.

Taulukko 4.1. Iteroinnin tulokset.

Iteraatio	Kerroin β_1	Ratkaisu r_1
1	-12,87345679	-14,87345679
2	-0,206221990	-2,206221990
3	-1,565238476	-3,565238476
4	-0,920130916	-2,920130916
5	-1,144623476	-3,144623476
6	-1,055135256	-3,055113526
7	-1,089090162	-3,089090162
8	-1,075954323	-3,075954323
9	-1,080998613	-3,080998613
10	-1,079056017	-3,079056017
11	-1,079803305	-3,079803305
12	-1,079515713	-3,079515713

Taulukosta 4.1 voidaan nähdä, että ratkaisu $r_1 \approx -3,080$. Ratkaisut r_2 ja r_3 saadaan kaavalla (4.22). Siis

$$r_2 = -\frac{(-3,080+2)}{2} + \frac{\sqrt{(-3,080+2)^2 + \frac{4*1}{(-3,080)}}}{2} \approx 0,540 + 0,182i \qquad \text{ja}$$
$$r_3 = -\frac{(-3,080+2)}{2} - \frac{\sqrt{(-3,080+2)^2 + \frac{4*1}{(-3,080)}}}{2} \approx 0,540 - 0,182i.$$

Yhtälön kaikki ratkaisut ovat siis

$$\begin{aligned} r_1 &\approx -3,080, \\ r_2 &\approx 0,540 + 0,182i \qquad \text{ja} \\ r_3 &\approx 0,540 - 0,182i. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.7. Olkoon yhtälö

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0.$$

Tämän yhtälön kertoimet ovat $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$ ja $\alpha_3 = -1$. Voidaan havaita, että lauseiden 4.1 ja 4.3 ratkaisumenetelmät eivät toimi tälle yhtälölle, joten käytetään lauseen 4.5 ratkaisumenetelmää. Ratkaistaan ensin muuttujat x_1 ja x_2 kaavoilla (4.16) ja (4.17). Saadaan

$$x_1 = -\frac{(1)^2}{4|-1|} - 3 = -\frac{13}{4} \qquad \text{ja}$$
$$x_2 = \frac{(1)^2}{4|-1|} - 3 = -\frac{11}{4}.$$

Nyt funktion arvoiksi saadaan

$$y_1 = f(x_1) = (-\frac{13}{4})^3 + 3 * (-\frac{13}{4})^2 + (-\frac{13}{4}) - 1 = -\frac{441}{64} \qquad \text{ja}$$
$$y_2 = f(x_2) = (-\frac{11}{4})^3 + 3 * (-\frac{11}{4})^2 + (-\frac{11}{4}) - 1 = -\frac{119}{64}.$$

Nyt y_1 ja y_2 ovat samanmerkkiset, joten täytyy valita uudet termit x_1 ja x_2. Koska $\alpha_3 < 0$, niin uusi termi $x_1 = -\frac{11}{4}$. Uudesta termistä x_2 halutaan nyt positiivinen ja suurempi kuin termistä x_1, joten muuttujan $|\alpha_1|$ kertoimeksi otetaan luku (-1). Tällöin

$$x_2 = \frac{(1)^2}{4|-1|} - (-1) * 3 = \frac{13}{4}.$$

Uusilla termien x_1 ja x_2 arvoilla saadaan funktion arvoiksi

$$y_1 = f(x_1) = (-\frac{11}{4})^3 + 3 * (-\frac{11}{4})^2 + (-\frac{11}{4}) - 1 = -\frac{119}{64} \qquad \text{ja}$$
$$y_2 = f(x_2) = (\frac{13}{4})^3 + 3 * (\frac{13}{4})^2 + (\frac{13}{4}) - 1 = \frac{4369}{64}.$$

Kulmakertoimeksi k saadaan kaavan (4.18) mukaan

$$k = \frac{\frac{4369}{64} - (-\frac{119}{64})}{\frac{13}{4} - (-\frac{11}{4})} = \frac{187}{16} \approx 11,6875.$$

Ensimmäiseksi arvaukseksi ratkaisulle r_1 saadaan kaavalla (4.19)

$$r_1 = -\frac{11}{4} - \frac{(-\frac{119}{64})}{\frac{187}{16}} = -\frac{57}{22}.$$

Aloitetaan tämän jälkeen iterointi kaavoilla (4.20) ja (4.21). Ratkaistaan kerroin β_1 yhtälön (4.20) mukaan. Saadaan

$$\beta_1 = -\frac{(-1)}{(-\frac{57}{22})^2} - \frac{1}{(-\frac{57}{22})} = \frac{1738}{3249} \approx 0,5349338258.$$

Lasketaan ratkaisu r_1 kaavalla (4.21), jolloin saadaan

$$r_1 = -\frac{1738}{3249} - 3 \approx -2,465066174.$$

Iterointia jatketaan, kunnes tulos saadaan halutulla tarkkuudella. Tulokset iteraatioista on koottu taulukkoon 4.2.

Taulukko 4.2. Iteroinnin tulokset.

Iteraatio	Kerroin β_1	Ratkaisu r_1
1	0,5349338258	-2,465066174
2	0,5702356544	-2,429764346
3	0,5809462750	-2,419053725
4	0,5842717624	-2,415728238
5	0,5853116364	-2,414688364
6	0,5856375242	-2,414362476
7	0,5857397257	-2,414260274

Taulukosta 4.2 voidaan nähdä, että ratkaisu $r_1 \approx -2,414$. Ratkaisut r_2 ja r_3 saadaan kaavalla (4.22). Nyt siis

$$r_2 = -\frac{(-2,414)+3}{2} + \frac{\sqrt{(-2,414+3)^2 + \frac{4*(-1)}{(-2,414)}}}{2} \approx 0,414 \qquad \text{ja}$$
$$r_3 = -\frac{(-2,414)+3}{2} - \frac{\sqrt{(-2,414+3)^2 + \frac{4*(-1)}{(-2,414)}}}{2} \approx -1,000.$$

Yhtälön kaikki ratkaisut ovat siis

$$r_1 \approx -2,414$$
$$r_2 \approx 0,414 \qquad \text{ja}$$
$$r_3 \approx -1,000.$$

Lähteet

[1] Guilbeau, L. *The history of the solution of the cubic equation*, Mathematics News Letter, Vol. 5, No. 4 (1930) 8–12.

[2] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S. *Lukion pitkä matematiikka, Pyramidi 2: Polynomifunktiot*. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2005.

[3] Tehrani, F. *A simple approach to solving cubic equations*, The Mathematical Gazette; Leicester Vol. 100, Iss. 548 (2016) 225–232.