Tampereen yliopisto

Oskari Aho

BLACK-SCHOLES-MALLI JA VOLATILITEETTIHYMY

Kirjallisuuskatsaus implisiittisen volatiliteetin mallintamiseen

Johtamisen ja talouden tiedekunta
Kandidaatintutkielma
Huhtikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Oskari Aho: Black-Scholes-malli ja volatiliteettihymy: Kirjallisuuskatsaus implisiittisen volatiliteetin mallintamiseen
Kandidaatintutkielma
Tampereen yliopisto
Kauppatieteiden tutkinto-ohjelma
Kansantaloustiede
Huhtikuu 2020

Optiokaupankäynnin määrä on moninkertaistunut 1970-luvulta lähtien. Kaupankäynnin kasvu jatkuu edelleen. Optiokaupankäynti on huomattava osa rahoitusjärjestelmää ja optioiden hinnoittelu on siksi mielenkiintoinen aihe niin akateemisesti, kuin myös rahoitusalan käytännön työn kannalta. Optioiden hinnoista johdettavissa oleva implisiittinen volatiliteetti on useiden vuosikymmenien ajan ollut tutkijoiden ja markkinaosapuolien mielenkiinnon kohde, sillä se kuvastaa markkinaosapuolien odotuksia option kohde-etuuden hinnan käyttäytymisestä tulevaisuudessa.

Tutkielman alkuosassa esiteltiin Black-Scholes yhtälö ja malliin liittyvät taustaoletukset, sekä implisiittinen volatiliteetti Black-Scholes-mallissa. Tutkielman kirjallisuuskatsauksessa koottiin tutkimuksia volatiliteettihymyn esiintymisestä mallinnettaessa call-optioiden implisiittistä volatiliteettia Black-Scholes-yhtälön avulla.

Kirjallisuuskatsauksen ensimmäisessä osassa havaittiin, että markkinadatasta johdettu implisiittinen volatiliteetti sai erilaisia arvoja, kun optiosopimuksessa määriteltyä toteutusajankohtaa tai toteutushintaa verrataan toiseen ajankohtaan tai hintaan. Empiiriset havainnot osoittautuivat olevan ristiriidassa Black-Scholes-mallin olettaman vakion kohde-etuuskohtaisen volatiliteetin kanssa.

Tutkielman viidennessä luvussa esiteltiin volatiliteettihymyn käsite ja tehtiin kirjallisuuskatsaus volatiliteettihymyn tutkimuksiin. Volatiliteettihymyä käytetään alalla kuvaamaan poikkeamia Black-Scholes-mallin olettamasta vakioisesta volatiliteetista. Luvussa esiteltiin myös teorioita volatiliteettihymyn muodostumisen syistä.

Tutkielmassa havaittiin, että optioiden hinnat eivät tyypillisesti kuvasta Black-Scholes-mallin oletusta volatiliteetin vakioisuudesta. Tutkielmassa havaittiin, että kuvattaessa graafisesti implisiittistä volatiliteettia suhteessa toteutushintaan tai -ajankohtaan, implisiittisen volatiliteetin kuvaaja muodostaa volatiliteettihymyn. Tutkimuksen viimeisessä luvussa pohdittiin volatiliteettihymyn merkitystä optiohinnoitteluun, sekä mahdollisia aiheita jatkotutkimukselle.

Avainsanat: Black-Scholes, volatiliteettihymy, optiohinnoittelu, implisiittinen volatiliteetti.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck –ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

1.1 Optiot

Johdannaiset ovat kaupankäynnin kohteena olevia sopimuksia, joiden yhdistävänä tekijänä on, että johdannaissopimuksen arvo riippuu kohde-etuuden arvosta. Tyypillinen kohde-etuus on yksinkertaisempi rahoitusinstrumentti tai muu kaupankäynnin kohteena oleva varallisuuserä.

Kirjallisuudessa johdannaissopimukset esitellään tyypillisesti riskienhallinnan välineenä. (esim. Knüpfer & Puttonen 2008, 224) Johdannaissopimuksilla yritykset voivat esimerkiksi suojautua raaka-aineen hinnanvaihteluilta, kun taas institutionaaliset sijoittajat ja yksityissijoittajat voivat suojautua esimerkiksi osakkeen hinnan vaihtelulta. Tyypillinen esimerkki johdannaissopimuksesta on alaluvussa 2.1 esiteltävä optio.

OCC, Options Clearing Corporation, on maailman suurin optiokauppoja selvittävä yritys. Pörssikauppoja selvittävät yritykset ovat riskienhallintayrityksiä, jotka varmistavat, että kaupan osapuolet suoriutuvat velvoitteista, joihin ne kaupankäynnillä sitoutuvat. OCC raportoi päivittäisen optiokaupan keskimääräiseksi volyymiksi vuonna 2019 noin 19,5 miljoonaa transaktiota (OCC 2020a). OCC:n raportoima luku kattaa vain OCC:n osuuden optioiden kaupankäynnistä, jättäen ulkopuolelle muiden optiokauppoja selvittävien yhtiöiden selvittämät transaktiot.

Optiokaupankäynnin määrä on kasvanut 1970-luvulta lähtien ja optiokaupankäynnin kasvu jatkuu edelleen. Optiokaupankäynti on huomattava osa rahoitusjärjestelmää ja siksi mielenkiintoinen aihe niin akateemisesti, kuin myös rahoitusalan käytännön työn kannalta.

1.2 Black-Scholes mallin ja implisiittisen volatiliteetin esittely

"When judged by its ability to explain the empirical data, option pricing theory is the most successful theory not only in finance, but in all of economics." (Ross 1987, 24)

Tutkielmassa alaluvussa 3.4 määriteltävä implisiittinen volatiliteetti on useiden vuosikymmenien ajan ollut tutkijoiden ja markkinaosapuolien mielenkiinnon kohde, sillä se kuvastaa markkinaosapuolien odotuksia option kohde-etuuden hinnan käyttäytymisestä tulevaisuudessa.

Alan standardi optioiden hinnoitteluun ja implisiittisen volatiliteetin mallintamiseen on Black-Scholes-yhtälö (Knüpfer & Puttonen 2009, 230; Hull 2008, 269). Luvussa 3 esiteltävä Black-Scholes-yhtälö mallintaa option hintaa markkinoilta havaittavien muuttujien ja implisiittisen volatiliteetin perusteella. Black-Scholes-yhtälöä käytetään niin universaalisti, että alalla saatetaan ilmoittaa optiosta vain implisiittinen volatiliteetti hinnan sijasta. Tällöin kaupankävijä syöttää implisiittisen volatiliteetin käyttämäänsä versioon Black-Scholes-yhtälöstä ja saa näin oman hintansa optiolle.

Black-Scholes-yhtälön laaja käyttö rahoitusalalla sen rajoitteista huolimatta johtuu todennäköisesti yhtälön yksinkertaisuudesta. Nykyaikaisten tietokoneiden laskentateholla yhtälön iteratiivinenkin ratkaiseminen onnistuu käytännössä välittömästi. Yhtälön rajoitteista huolimatta sen edellyttämät muuttujat ovat helposti määritettävissä markkinoilta, joka parantaa yhtälön käytettävyyttä päivittäisessä työssä.

Tutkielman neljännessä kappaleessa tehdään kirjallisuuskatsaus implisiittisen volatiliteetin empiiriseen tutkimukseen. Implisiittisen volatiliteetin tutkimus markkinahinnoista toteutetaan johtamalla implisiittinen volatiliteetti markkinoilla havaituista optioiden hinnoista. Katsauksessa havaitaan, että empiirisesti call-optioiden hinnoista johdettu implisiittinen volatiliteetti ei toteuta Black-Scholes-mallin oletusta volatiliteetin vakioisuudesta kohde-etuudelle.

Empiirisessä tutkimuksessa havaitaan kappaleessa 5 esiteltävä volatiliteettihymy. Volatiliteettihymy tarkoittaa toisaalta poikkeamaa Black-Scholes-mallin optiolle ennustamasta hinnasta, sekä toisaalta poikkeamaa implisiittisen volatiliteetin vakioisuuden oletuksesta. Viidennen kappaleen lopussa käsitellään teorioita volatiliteettihymyn syistä.

Monessa optiokauppaa käyvässä yhtiössä kaupankäyntiä toteuttavalla osastolla on omat mallinsa volatiliteettihymyn mallintamiseen. Tämän lisäksi kyseisissä yhtiöissä usein myös yhtiön riskienhallintaosastolla on oma mallinsa volatiliteettihymyn mallintamiseen. Volatiliteetin mallintaminen on jopa nähty suurimpana yhtiöiden kohtaamana mallintamisriskinä rahoitusalalla. (Emmanuel & Miller 2016, 5)

Kuudennessa kappaleessa esitellään tutkielman perusteella tehtyjä johtopäätelmiä ja tutkielman haasteita, sekä pohditaan mahdollisuuksia aiheen jatkotutkimukseen.

2 TEORIAA

2.1 Johdatus optioihin

Optio on kahden osapuolen välinen johdannaissopimus, joka antaa haltijalleen oikeuden ostaa tai myydä optiosopimuksen mukaisen kohde-etuuden määriteltynä ajanhetkenä. Erona optioiden ja futuurien välillä on se, että optio ei velvoita haltijaa toteuttamaan sopimuksen mukaista transaktiota. Call-optio antaa haltijalleen oikeuden ostaa kohde-etuutena olevan varallisuuserän ja put-optio oikeuden myydä kyseisen varallisuuserän. (Hull 2008, 185; Knüpfer & Puttonen 2017, 225)

Optiosopimuksissa sopimusosapuolilla on neljä mahdollista roolia, sillä call- ja put-optioita voi molempia sekä ostaa, että myydä. Tässä tapauksessa ostajien suhtautumista markkinaan, *positiota*, nimitetään pitkäksi ja myyjien positiota lyhyeksi. Option myymiseen viitataan jatkossa myös option kirjoittamisena.

Optioita on toteutusmahdollisuuksien mukaan kahta tyyppiä. Eurooppalaisen option mukaisen transaktion voi suorittaa vain sopimuksessa määriteltynä toteutuspäivämääränä. Amerikkalaisen option mukaisen transaktion voi suorittaa myös haluamanaan ajankohtana ennen toteutusajankohtaa. Tässä tutkimuksessa tarkastelun kohteena ovat eurooppalaiset optiot, sillä eurooppalaisten optioiden analysointi on yksinkertaisempaa aikaisen toteutuksen (eng. early exercise) mahdollisuuden puuttuessa. Eurooppalaisten optioiden hinnoittelusta voidaan kuitenkin johtaa hintoja myös amerikkalaisille optioille.

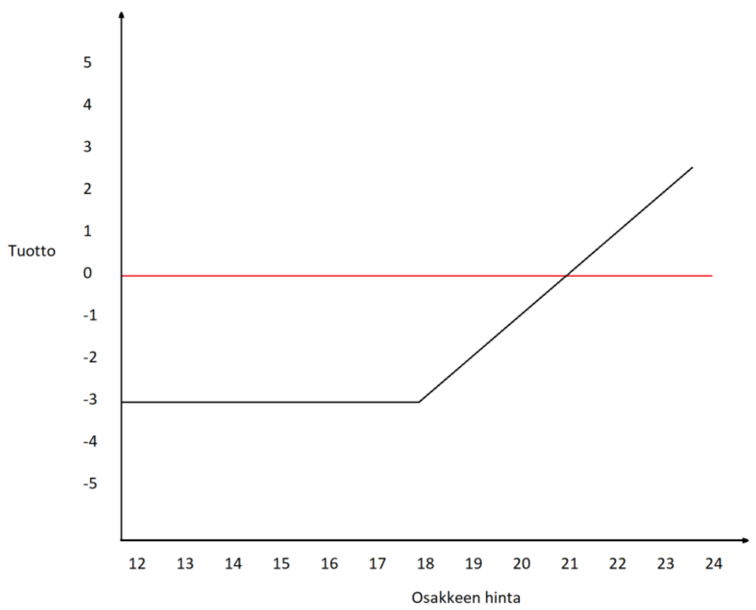
Toteutushinta (eng. exercise price) ja toteutuspäivämäärä (eng. exercise date) määritellään optiosopimuksessa. Toteutushinta on hinta, jolla optiosopimuksen kirjoittaja on valmis myymään option kohde-etuutena olevan omaisuuserän. Toteutuspäivämäärä on sopimuksessa määritelty päivämäärä, jolloin transaktion voi amerikkalaisen option tapauksessa viimeistään toteuttaa. Eurooppalaisen option tapauksessa toteutuspäivämäärä on option ainoa mahdollinen toteutusajankohta.

Option hinta on option preemio. Preemio on maksu, jonka option ostaja maksaa option myyjälle, eli option kirjoittajalle, mahdollisuudesta ostaa kohde-etuus optiosopimuksessa määriteltynä ajankohtana sopimuksessa määriteltyyn hintaan. Mikäli option ostaja ei toteuta optiosopimuksen mukaista transaktiota, muodostuu option kirjoittajan tuotto preemiosta.

Optio eroaa esimerkiksi futuurisopimuksesta siten, että futuurisopimuksen solmiminen ei edellytä minkäänlaista etukäteismaksua, vaan riittää, että sopimusosapuoli täyttää kauppapaikan tai sopimusosapuolten märittelemät marginaalit.

Cboe, Chicago Board Options Exchange, on vanhin ja suurin optiokauppaa harjoittavista johdannaispörsseistä. Cboe aloitti säänneltyjen optioiden pörssinsä vuonna 1973 (CBOE, 2020). Julkisesti listatuille optioille on määritelty tietyt ehdot, vakiotermit, jotka helpottavat optioiden hinnanmääritystä ja vertailua. Optioilla käydään kauppaa myös useissa muissa pörsseissä. Suurimpia pörssejä operoivia yhtiöitä optiokaupankäynnissä Cboe:n lisäksi ovat Nasdaq sekä Cboe:n omistama Bats (OCC 2020b).

Esimerkkinä optiosta olkoon eurooppalainen call-optio pörssiyhtiön osakkeesta. Esimerkkitilanteessamme option hinta, preemio, on 3 euroa. Optiosopimuksessa määritelty toteutuspäivä on 1. toukokuuta. Optiosopimuksessa määritelty toteutushinta optiolle on 18€. Mikäli osakkeen hinta 1. toukokuuta ylittää 18 euroa, kannattaa call-option haltijan toteuttaa optio, eli ostaa osake. Alla kuviossa 1 on kuvattu option haltijan tuotto (tappio) esimerkin tilanteessa.



Kuvio 1. Call-option tuottokuvaaja osakkeen hinnan suhteen

Taulukko 1. Call-option hallussapitäjän tuotto osakkeen hinnan suhteen

Osakkeen hinta	Tuotto (Tappio)
17	-4
18	-3
19	-2
20	-1
21	0
22	1
23	2
24	3

Call-optioita analysoitaessa termi out-of-the-money viittaa optioon, jonka toteutushinta on korkeampi kuin kohde-etuuden nykyinen hinta. Option toteuttaminen tuottaisi siis tappion. At-the-money optioissa toteutushinta on sama kuin kohde-etuuden nykyinen hinta. At-the-money-option toteuttaminen tarkoittaisi sitä, että sijoittaja ei tekisi option toteuttamisesta tuottoa (sijoittaja on kuitenkin maksanut optiosta aiemmalla ajanhetkellä preemion). In-the-money optio viittaa optioon, jonka toteutushinta on matalampi, kuin kohde-etuuden nykyinen hinta.

Suomalaisessa rahoituksen tutkimuskirjallisuudessa on käytetty myös termejä miinusoptio, tasaoptio sekä plusoptio. Kansainvälinen, englanninkielinen, tutkimuskirjallisuus käyttää option toteutushinnan suhteesta kohde-etuuden hintaan yleisesti myös termiä *moneyness*. Tällöin yllä esitellyistä suhteista in-the-money-option moneyness saa suurimman arvon.

2.2 Johdatus optioiden hinnoitteluun

Hullin (2018) mukaan kuusi faktoria vaikuttavat osakeoption hintaan:

1. Osakkeen hinta nykyisellä ajanhetkellä

2. Toteutushinta

3. Aika option toteutukseen (eng. time to expiration)

4. Osakkeen hinnan volatiliteetti

5. Riskitön korkotaso

6. Optiosopimuksen aikana maksettavat osingot

Alla olevassa taulukossa on esitelty osakeoption hinnan muutoksen suunta, kun yksi näistä tekijöistä muuttuu ja muut pysyvät ennallaan. Muutoksen suunta voidaan matemaattisemmin ilmaista myös faktorin osittaisderivaatan etumerkkinä myöhemmin kappaleessa 3.3 esiteltävässä hinnoitteluyhtälössä.

Taulukko 2. Option hinnanmuutoksen suunta yhden muuttujan kasvaessa olettaen muiden muuttujien pysyvän vakiona (esitys mukaillen Hull, 2008, 210)

Muuttuja	Eurooppalainen call-optio	Eurooppalainen put-optio
Osakkeen hinta	+	-
Toteutushinta	-	+
Aika toteutukseen	?	?
Volatiliteetti	+	+
Riskitön korkotaso	+	-
Osingot	-	+

2.3 Option hintaan vaikuttavat muuttujat

Aiemman esimerkin (kuvio 1, taulukko 1) mukaisesti call-option tuotto määräytyy osakkeen hinnan ja toteutushinnan erotuksena: osakkeen hinnan kasvaessa call-option arvo kasvaa ja vastavuoroisesti option toteutushinnan kasvaessa call-option arvo laskee. Put-option arvo vastaavasti laskee osakkeen hinnan kasvaessa ja kasvaa toteutushinnan kasvaessa.

On osoitettavissa, että amerikkalaisen option arvo kasvaa tai ei laske toteutusajankohdan siirtyessä kauemmas tulevaisuuteen (Hull, 2008, 210). Intuitiivisesti, kahta optiosopimusta verrattaessa myöhemmän toteutusajankohdan optio sisältää kaikki mahdollisuudet, joita aiemman toteutusajankohdan optiokin sisältää. Lisäksi kohde-etuuden hinta saattaa muuttua sijoittajan kannalta positiivisesti kahden toteutusajankohdan välillä.

Eurooppalaisen option arvo yleensä kasvaa toteutusajankohdan siirtyessä eteenpäin. Mikäli option kohde-etuutena on esimerkiksi osake, joka maksaa osinkoa vertailussa käytettävien toteutusajankohtien välillä, voi lyhyemmän maturiteetin option arvo olla suurempi.

Black-Scholes yhtälössä korkotasoksi on määritelty riskitön korkotaso. Riskittömän korkotason käyttö on yhtälössä perusteltua mallintamaan ainakin suurimpien markkinatoimijoiden lainauskustannuksia ja -tuottoja.

Korkotason kasvaessa sijoittajan vaatima tuotto osakkeesta kasvaa, olettaen että muiden tekijöiden arvot pysyvät ennallaan. Nykyhetkeen diskontattujen rahavirtojen arvo vastaavasti laskee. Korkotason kasvaessa näiden kahden tekijän yhteisvaikutus aiheuttaa call-option arvon nousun ja put-option arvon laskemisen (muiden tekijöiden pysyessä ennallaan).

Volatiliteetti kuvastaa epävarmuutta osakkeen hintavaihtelusta. Osakkeen omistajalle hinnan nousu ja lasku kompensoivat toisiaan. Osakkeenomistajien näkökulmasta volatiliteettia tarkasteltaessa on kuitenkin otettava huomioon, että keskimäärin sijoittajat kokevat sijoitustensa arvon voimakkaan vaihtelun negatiiviseksi.

Call-option haltijalle hinnan laskusta johtuva riski on rajoitettu. Call-option haltijan mahdollinen tappio on vain call-option preemio. Osakkeen hinnan noususta seuraava voitto on rajoittamaton. Vastavuoroisesti put-option haltijalle osakkeen hinnan noususta johtuva riski on rajattu preemioon, mutta hinnan voimakkaasta laskusta aiheutuva voitto on preemiota suurempi.

Tuoton ja riskin epäsymmetrisestä suhteesta johtuen option arvo kasvaa volatiliteetin kasvaessa. Tämä on nähtävissä myös alaluvussa 3.3 esiteltävästä Black-Scholes yhtälöstä.

Volatiliteetti voidaan määritellä osakkeen hinnan vaihteluksi tietyllä (tyypillisesti vuoden) aikavälillä:

μ = osakkeen odotettu tuotto

σ = osakkeen hinnan volatiliteetti.

Tuoton keskiarvo ajanjaksolla Δt on $\mu\Delta t$. Tuoton keskihajonta ajanjaksolla on $\sigma\sqrt{\Delta t}$ (Hull, 2008, 270).

3 BLACK-SCHOLES-MALLI

3.1 Mallin historia ja taustaoletukset

Fisher Black, Myron Scholes ja Robert Merton tekivät 1970-luvun alkupuolella läpimurron optioiden hinnoittelussa. Heidän teorioistaan johdettu Black-Scholes-Merton-malli mullisti optioiden hinnoittelutyön ja loi pohjan nykyisen rahoitusteoriaa, insinööritieteiden ja matematiikan metodeja sekä ohjelmointia hyödyntävän rahoitusjärjestelytieteen (eng. financial engineering) kehittymiselle.

Fisher Black ja Myron Scholes kehittivät Black-Scholes-mallin vuonna 1973. Black-Scholes-malli, sekä sen johtaminen esiteltiin artikkelissa *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. (Black & Scholes, 1973) Saman vuoden aikana Robert Merton osoitti, yhteistyössä Fisher Blackin ja Myron Scholesin kanssa, että osaa mallin rajoitteista voitiin hellittää. Mertonin lisäykset malliin mahdollistivat mallin laajemman hyödyntämisen myös muiden kuin vakioehtoisten eurooppalaisten call-optioiden hinnoittelussa.

Tutkielmassa käsitellään call-optioiden implisiittisen volatiliteetin mallintamista Black-Scholes-mallin avulla, joten malliin viitataan Black-Scholes-mallina. Tutkimuskirjallisuudessa mallia kutsutaan usein myös Black-Scholes-Merton-malliksi. Robert Merton ja Myron Scholes palkittiin työstään mallin parissa Nobel-palkinnolla vuonna 1997. Fisher Blackia ei palkittu, sillä hän menehtyi vuonna 1995 ja Nobel-palkintoa ei myönnetä postuumisti.

Black-Scholes-yhtälön johtamisessa on hyödynnetty seitsemää oletusta:

1. Option kohteena olevan osakkeen hinnan muutokset noudattavat lognormaalia mallia.

2. Markkinoilla ei ole transaktiokustannuksia ja kaikki arvopaperit voidaan jakaa osiin.

3. Option voimassaolon aikana osakkeelle ei makseta osinkoa.

4. Riskittömiä tuottomahdollisuuksia ei ole olemassa (eng. riskless arbitrage opportunities)

5. Johdannaiskauppa on jatkuvaa

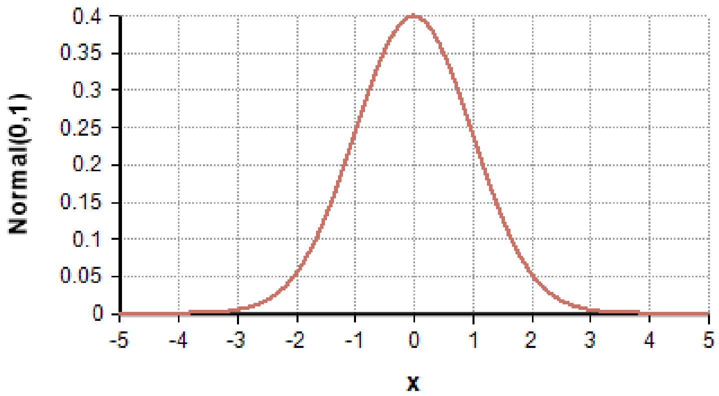
6. Kaupankävijät voivat ottaa lainaa ja lainata rahaa samalla riskittömällä korkotasolla

7. Lyhyen aikavälin riskitön korkotaso on vakio.

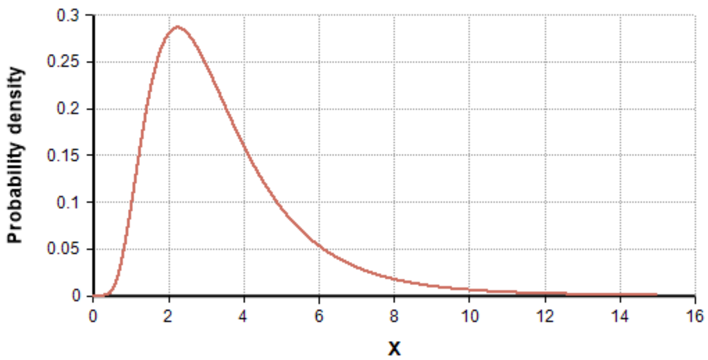
Kahden ei-päällekkäisen ajanjakson tuottojen oletetaan olevan riippumattomia toisistaan. Tuottojen oletetaan olevan lyhyellä aikavälillä normaalisti jakautuneet. Osakkeen tuoton odotettu jakauma voidaan esittää yhtälön 1 mukaisesti:

(1) $$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t,\ \sigma^2\sqrt{\Delta t})$$

jossa ΔS on muutos osakkeen hinnassa S tarkasteluaikavälillä Δt. Yhtälön termi $\phi(\mu\Delta t,\ \sigma^2\sqrt{\Delta t})$ viittaa siihen, että osakkeen hinnan suhteellinen muutos noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla μΔt ja varianssilla $\sigma^2\sqrt{\Delta t}$.



Kuvio 2 Normaalijakauman kertymäfunktio



Kuvio 3 Lognormaalin jakauman kertymäfunktio

Normaalijakauma on jakautunut tasaisesti keskiarvonsa, nollan, ympärille. Lognormaali jakauma taas on vinoutunut oikealle, jolloin sen keskiarvo, moodi ja mediaani saavat kaikki eri arvoja. Lognormaali jakauma saa vain positiivisia arvoja nollan ja äärettömän väliltä. On intuitiivisesti luonteva ajatus mallintaa osakkeiden hintoja lognormaalia jakaumaa käyttäen, sillä osakkeen hinta ei voi saada negatiivisia arvoja.

3.2 Osakehintojen lognormaalisuus

Lognormaalin muuttujan ominaisuutena on, että sen luonnollinen logaritmi on normaalisti jakautunut. Black-Scholes malli siis implikoi, että muuttuja lnS_T on normaalisti jakautunut. S_T merkitsee osakkeen hintaa ajanhetkellä T.

Voidaan osoittaa, että muuttujan lnS_T keskiarvolle ja keskihajonnalle on voimassa:

(2) $$lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \text{ ja } \sigma\sqrt{T}$$

jossa S_0 on osakkeen nykyinen hinta.

Malli viittaa tällöin siihen, että osakkeen hinnan muutos ajan muutoksen ollessa lyhyt on

(3) $$lnS_T - lnS_0 \sim \phi[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\ ,\ \sigma^2 T]$$

jossa S_T on osakkeen hinta tulevalla ajanhetkellä T. Muut merkinnät ovat vastaavia yhtälön 2 kanssa. Yhtälö 3 voidaan esittää muodossa

(4) $$ln\frac{S_T}{S_0} \sim \phi[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\ ,\ \sigma^2 T]$$

josta edelleen päästään muotoon

(5) $$lnS_T \sim \phi[lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\ ,\ \sigma^2 T]$$

Yhtälöstä 5 on nähtävissä, että muuttuja lnS_T on normaalisti jakautunut, jolloin muuttuja S_T on lognormaalisti jakautunut.

(esitys mukaillen Hull 2008, 270-272)

Lognormaalin jakauman ominaisuuksien ja yhtälön 5 perusteella voidaan osoittaa, että osakkeen hinnan S_T odotusarvo on

(6) $$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

ja varianssi osakkeen hinnalle S_T on

(7) $$varS_T = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\mu^2 T} - 1).$$

3.3 Black-Scholes yhtälö

Black-Scholes mallista johdettu Black-Scholes-hinnoitteluyhtälö esitetään yleensä muodossa:

(8) $$c = SN(d_{1)} - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Yhtälössä 8:

c = call-option hinta

S = kohde-etuuden hinta nykyhetkellä

N = standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio

X = option toteutushinta

e = Neperin luku

r = riskitön korkotaso

σ = kohde-etuuden hinnan volatiliteetti

T = option voimassaoloaika

(esitys mukaillen Knüpfer & Puttonen 2017, 229; Hull 2008, 291).

Yhtälö, sekä sen vaiheittainen johtaminen alaluvussa 3.2 esiteltyjen oletusten pohjalta, on esitelty esimerkiksi Blackin ja Scholesin (1973) sekä Mertonin (1973) tutkimuksissa sekä Hullin (2008) oppikirjassa.

3.4 Implisiittinen volatiliteetti Black-Scholes-yhtälössä

Kaavasta 8 on pääteltävissä, että ainoa tuntematon tekijä on kohde-etuuden hinnan volatiliteetti. Black-Scholes-yhtälöstä pystytään siis iteratiivisesti ratkaisemalla johtamaan kohde-etuudelle arvioitu, implisiittinen, volatiliteetti. Optiohintojen pohjalta ratkaistu implisiittinen volatiliteetti kuvaa markkinoiden käsitystä tulevaisuuden volatiliteetista. Volatiliteetin kerrotaan alan kirjallisuudessa usein kuvaavan sijoituksen riskiä. Volatiliteetti kuvaa sijoituksen tuoton vaihtelua tietyllä aikavälillä.

Black-Scholes yhtälössä volatiliteettia voidaan estimoida historiallisen, havaitun volatiliteetin pohjalta. Historiallisen volatiliteetin käytössä ongelmaksi muodostuu kuitenkin usein havaintojen lukumäärän määrittäminen. Käytettäessä suurempaa määrää havaintoja parannetaan estimoinnin tarkkuutta, mutta mitä vanhempia havaintoja käytetään, sitä huonommin data saattaa soveltua nykyiseen markkinaympäristöön.

Huomionarvoista on myös se, että volatiliteetti muuttujana saattaa estimoinnin myötä sisältää myös muiden muuttujien vaikutuksia. Esimerkiksi kaupankäynnin kustannukset voivat jossain määrin heijastua volatiliteetin estimaattiin, mikäli esimerkiksi korkotaso on määritelty virheellisesti (Emanuel & Miller 2016, 117).

4 AIEMPI TUTKIMUSKIRJALLISUUS

Optioiden hinnoittelu ja implisiittisen volatiliteetin estimointi on markkinaosapuolille keskeinen toiminto. Aihetta onkin tutkittu runsaasti Black-Scholes-mallin julkaisusta vuonna 1973 lähtien. Tutkimuksen kannalta olennaisimpia ovat Black-Scholes-mallia empiirisesti testanneet tutkimukset, mutta esittelen seuraavassa myös muita hinnoittelumalleja sivunneita tutkimuksia.

Ensimmäisiä Black-Scholes hinnoittelumallin testaajia olivat tutkijat Black ja Scholes. Tutkimuksessaan *The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency* vuonna 1972 Black ja Scholes tutkivat empiirisesti optioiden hinnoittelun tehokkuutta markkinoilla.

Black ja Scholes päätyivät tutkimuksessa tulokseen siitä, että option ostajat maksavat säännöllisesti korkeampia hintoja kuin mitä malli ennustaa, mutta optioiden kirjoittajat myyvät optiot hintaan, joka on hyvin lähellä mallin mukaista hintaa. Tästä oli pääteltävissä, että markkinoilla oli suuret transaktiokustannukset, jotka päätyivät optioiden ostajien maksettavaksi. Black ja Scholes havaitsivat empiirisessä tutkimuksessaan lisäksi sen, että ero ostajien maksaman hinnan ja mallin ennustaman hinnan välillä oli suurempi kun option kohteena oli matalariskiseksi arvioitu osake. Markkinan korkeista transaktiokustannuksista johtuen erotus ei tutkijoiden mukaan ollut kuitenkaan sijoittajan hyödynnettävissä riskittömän tuoton, eli arbitraasituoton, hankkimiseksi.

Vuonna 1980 Macbeth ja Merville tekivät empiirisen tutkimuksen call-optioiden hinnoittelusta. Macbeth ja Merville vertasivat Black-Scholes mallin tuottamia tuloksia Cox-hinnoittelumallin tuottamiin tuloksiin.

Macbeth ja Merville tarkastelivat tutkimuksessaan CBOE:n dataa joukosta osakkeiden call-optioita vuoden aikaväliltä. Tarkasteludatana olivat pörssipäivän päätöshinnat joulukuun viimeisestä päivästä 1975 joulukuun viimeiseen päivään 1976. Riskittömänä korkotasona Macbeth ja Merville käyttivät Yhdysvaltojen valtionlainojen korkotasoa. Lainan maturiteetti sovitettiin call-option maturiteettiin.

Macbeth ja Merville havaitsivat tutkimuksessaan, että Black-Scholes malli ylihinnoittelee out-of-the-money-optioita, hinnoittelee likimain oikein at-the-money optiot ja alihinnoittelee in-the-money optioita. Macbeth ja Merville huomauttivat tutkimuksessaan myös, että Black-Scholes-mallin käyttö vaatii jatkuvaa ”variance rate:n”, eli volatiliteetin muuttamista osakkeen hinnan muuttuessa.

Macbeth ja Merville tutkivat oikein- sekä ylihinnoiteltuja havaintoja ja huomasivat, että oikein hinnoitellut optiot olivat optioita, joiden hinta oli 0,5$ ja 2$ dollarin välillä ja toteutusajankohtaan oli enää vähän aikaa. Macbeth ja Merville arvelivat, että optioiden matala kaupankäyntivolyymi vaikutti hinnoitteluun ja potentiaalisesti mahdollisti tilanteen, jossa osakkeen ja option hinnat eivät täydellisesti seuraa toisiaan.

Thorp (1976) pyrki tutkimuksessaan parantamaan Black-Scholes-mallin sopivuutta dataan, sekä vaihtoehtoisesti tarkastelemaan, olisiko mallia käyttämällä mahdollista saada ylisuuria tuottoja johdannaismarkkinoilla. Thorp teki tutkimuksessaan saman havainnon kuin Black ja Scholes: transaktiokustannukset markkinoilla olivat suuret, joten optioiden hinnoittelu markkinoilla ei tapahtunut Black-Scholes-mallin oletusten mukaisesti.

Thorp piti myös haasteellisena riskittömän korkotason määrittelyä. Thorp tosin huomautti tutkimuksessaan, että korkotaso vaikuttaa hyvin vähän out-of-the-money optioihin, kohtuullisen vähän at-the-money optioihin ja eniten in-the-money optioihin. Valistunut sijoittaja voi kuitenkin suojata positionsa suhteessa in-the-money optioon, joten vaikutus hinnoitteluun jäi vähäiseksi.

Thorp pohti tutkimuksessaan myös laajemmin sitä, johtuuko mallista poikkeava hinnoittelu markkinoilla epätehokkaista markkinoista vai virheellisesti spesifioidusta mallista. Thorp päätyi keskittymään tutkimuksessaan korkotason ja volatiliteettin tarkastelun sijasta volatiliteettiin, sillä sen vaikutus optioiden hintoihin on suurempi kuin valitun riskittömän korkotason vaikutus. (Thorp 1976, 239)

Tutkimuksessaan Thorp esitti omien sanojensa mukaan matemaattisesti tarkemman johdannon Black-Scholes-malliin. Lisäksi Thorp argumentoi, että volatiliteetti todennäköisesti muuttuu osakkeen hinnan muuttuessa.

Rubinstein testasi vuonna 1985 tutkimuksessaan Black-Scholes mallin hinnanmuodostusta optiomarkkinoilla. (Rubinstein 1985)

Tutkimuksessaan Rubenstein nosti erityisesti esille kaksi Black-Scholes-mallin oletusta osakkeen hinnan liikkeeseen liittyen. Ensimmäinen oletus oli, että osakkeen hinta seuraa jatkuvaa kulkua yli ajan. Oletus tarkoittaa sitä, että osakkeen hinta ei voi tehdä ”hyppyä” toiseen arvoon ajan muutoksen $\triangle t$ ollessa 0. Toisena oletuksena oli, että osakkeen volatiliteetti ei määräydy stokastisesti. Black-Scholes-mallille on esitetty vaihtoehtoisia malleja, joissa näiden oletusten voimassaoloa ei ole osittain tai täysin edellytetty.

Rubinstein käytti tutkimuksessaan optiopörssi CBOE:n tuottamaa aineistoa, joka sisälsi kaikki markkinoilla havaitut osake- ja optiohinnat noin kahden vuoden aikaväliltä elokuusta 1976 elokuuhun 1978. Aineistoa oli tutkimuksessa käsitelty tutkimustulosten parantamiseksi. Esimerkiksi äärimmäisiä arvoja kuten päivän alussa tai lopussa tehtyjä kauppoja ei huomioitu, kuten ei myöskään kauppoja, joissa osto- ja myyntihinnan erotus (eng. bid-ask-spread) oli erittäin suuri.

Rubinstein toteutti tutkimuksen testeillä, jotka eivät edellytä oletusta havaintojen jakaumasta. Testin tehokkuus oli näin ollen matalampi, kuin esimerkiksi normaalisuusoletuksen omaavassa testauksessa. Menettelyllä mahdollistettiin kuitenkin nollahypoteesin hylkääminen korkeammalla luottamustasolla.

Rubinsteinin nollahypoteesina oli, että optiomarkkinoilla havaitut hinnat eivät eroa systemaattisesti Black-Scholes-mallista johdetuista optiohinnoista. Vaihtoehtoisina hypoteeseina Rubinstein esitti seuraavia hypoteeseja:

1. Testisuureet ovat määrin mitattuja,

2. Optiomarkkina ei täytä tehokkaan markkinan ehtoja, tai

3. Black-Scholes-mallin matemaattinen perustelu on väärä. (Rubinstein 1985, 457)

Aineiston muokkaamisen jälkeen Rubinstein jakoi aineiston 25:een kategoriaan. Optiot jaettiin kahden muuttujan mukaan: option maturiteetin (aika option toteutukseen) sekä suhteessa option toteutuskelpoisuuteen, eli osakkeen hinnasta ja optiosopimuksessa määritellystä toteutushinnasta muodostettuun suhdelukuun.

Maturiteetin suhteen optiot oli jaettu ryhmiin siten, että ryhmä joka oli lähinnä maturiteettia oli ”21-70 päivää toteutusajankohtaan” ja ryhmä, jolla oli pisin aika maturiteettiin oli ”yli 221 päivää toteutukseen”. Osakkeen hinnasta ja option toteutushinnasta muodostettu suhdeluku sai vaihteluvälejä väliltä (0.75-0.85) ”deep out-of-the-money” ja (1.15+) ”deep in-the-money”.

Optioista muodostettiin pareja siten, että osakkeen hinnan ja option toteutushinnan suhteen samassa kategoriassa olevista optioista toisella oli lyhyempi maturiteetti ja toisella pidempi maturiteetti.

Nollahypoteesin mukaisesti Rubinstein muodosti testimuuttujan, joka nollahypoteesin mukaan osoittaisi, että on 50% todennäköisyys saada implisiittiselle volatiliteetille korkeampi arvo tarkasteltaessa optiota, jonka maturiteetti on lähempänä.

Rubinstein kuitenkin havaitsi, että muodostetuista 343:sta parista 325:ssa lyhyemmän maturiteetin option implisiittinen volatiliteetti oli korkeampi. Nollahypoteesi hylättiin näin muodostettujen parien osalta selvästi kaikilla tavanomaisilla tilastollisesti merkitsevillä tasoilla.

Tutkimuksessa merkillepantavaa on se, että havainnot jaettiin kahteen ajanjaksoon. Ensimmäinen periodi sisälsi havainnot ajalta 23.08.1976 – 21.10.1977 ja toinen periodi havainnot ajalta 24.10.1977 – 31.08.1978. (Rubinstein 1985, 466-477)

Rubinstein teki aineistoista neljä johtopäätöstä:

1. Mitä lyhyempi option maturiteetti on (aika option toteutukseen), sitä korkeampi implisiittinen volatiliteetti optioon liittyy.

2. At-the-money optiosta ensimmäisellä ajanjaksolla: Mitä pidempi aika option toteutukseen, sitä korkeampi optioon liittyvä implisiittinen volatiliteetti on. At-the-money optiosta toisella ajanjaksolla: Mitä pidempi aika option toteutukseen, sitä matalampi optioon liittyvä implisiittinen volatiliteetti on.

3. Valtaosalle optioista, joilla on sama maturiteetti ensimmäisellä ajanjaksolla: mitä matalampi toteutushinta, sitä korkeampi implisiittinen volatiliteetti.

4. Valtaosalle optioista, joilla on sama maturiteetti toisella ajanjaksolla: mitä korkeampi toteutushinta, sitä korkeampi implisiittinen volatiliteetti. (Rubinstein, 1985, 474)

Rubinstein sovelsi tutkimuksessaan aineistoon myös vaihtoehtoisia optiohinnoittelumalleja, jotka eivät sisällä samoja oletuksia kuin Black-Scholes-hinnoittelumalli. Rubinsteinin testaamat vaihtoehtoiset mallit eivät kuitenkaan selittäneet vaihtelua implsiittisessä volatiliteesissa kuin korkeintaan osittain.

Rubinstein toteaa tutkimustulostensa olevan vastaavia kuin Blackin (1975) ja MacBethin sekä Mervillen (1979) havaitsemat tulokset. Empiirisesti havaitaan markkinoiden muodostamassa implisiittisessä volatiliteetissa epästationaarinen harha toteutushinnan suhteen.

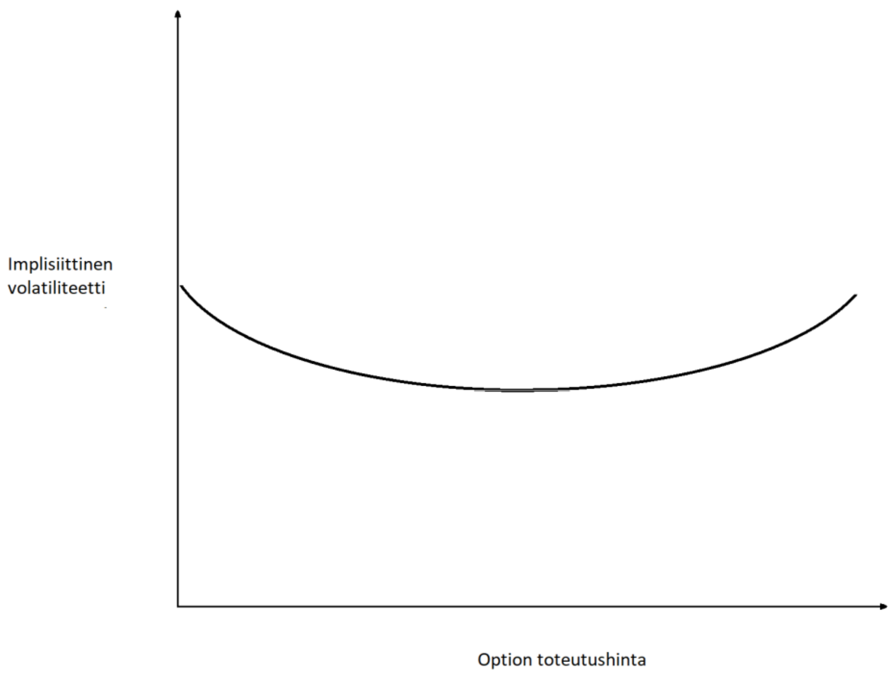
5 VOLATILITEETTIHYMY

5.1 Johdanto volatiliteettihymyyn

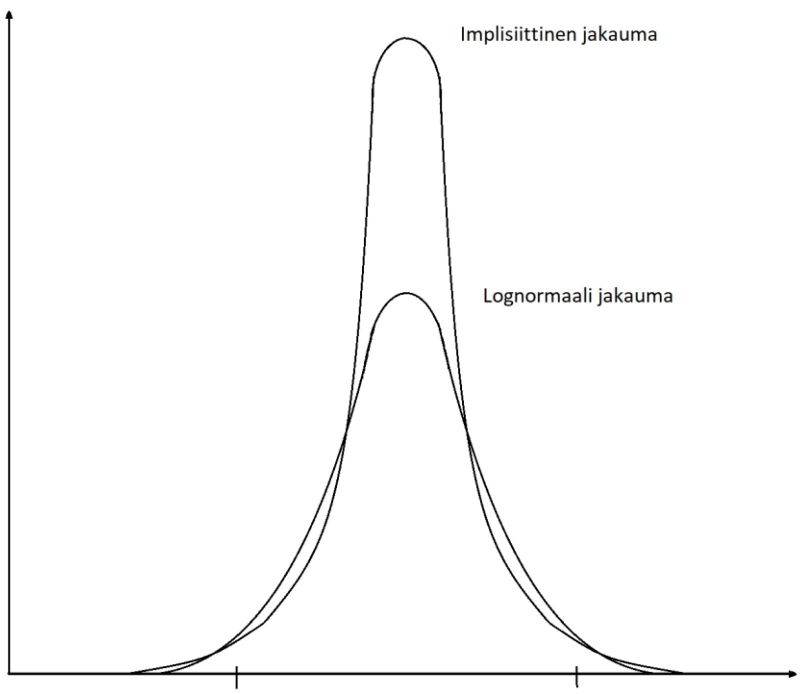
Kirjallisuuskatsauksessa johdannaismarkkinoita tarkasteltaessa havaittiin, että optioiden hinnat ja niistä johdettava implisiittinen volatiliteetti toteuttavat Black-Scholes-yhtälön oletukset vain harvoin. Lähimpänä Black-Scholes-mallin ennustamaa hintaa ja implisiittistä volatiliteettia ollaan tyypillisesti silloin, kun kyseessä on at-the-money optio, eli optio, jonka toteutushinta on lähellä siihen liittyvän kohde-etuuden hintaa.

Black-Scholes-yhtälön johtaminen sisältää oletuksen volatiliteetin vakioisuudesta. Todellisuudessa optiokaupankävijät käyttävät Black-Scholes-yhtälöä siten, että he antavat yhtälön volatiliteetin muuttua option maturiteetin ja hinnan funktiona (Hull, 2009, 381).

Volatiliteettihymystä yleisesti puhuttaessa volatiliteetin odotetaan yleisesti olevan muodoltaan kuvion 4 kaltainen. Kuviossa 2 on esitetty Hullin (2009) esitystapaa muotoillen tulkinta volatiliteettihymystä valuuttaoptioille.



Kuvio 4. Volatiliteettihymy valuutoille (esitys mukaillen Hull 2009, 383)



Kuvio 5. Implisiittisen volatiliteetin kertymäfunktio ja lognormaali kertymäfunktio (esitys mukaillen Hull, 2009, 383)

Kuviossa 4 esitelty volatiliteettihymy vastaa kuviossa 5 esitettyä implisiittisen volatiliteetin kertymäfunktiota. Kuviosta 5 on havaittavissa, että implisiittinen volatiliteetti saa suurempia arvoja kertymäfunktion pienillä ja suurilla arvoilla. Implisiittisen volatiliteetin jakaumalla on nk. paksut hännät, eli se saa lognormaalia jakaumaa todennäköisemmin äärimmäisiä arvoja. Implisiittisen volatiliteetin jakauman mediaani ja odotusarvo ovat lisäksi korkeampia kuin lognormaalissa jakaumassa eli jakauma on keskittynyt vahvemmin odotusarvonsa ympärille.

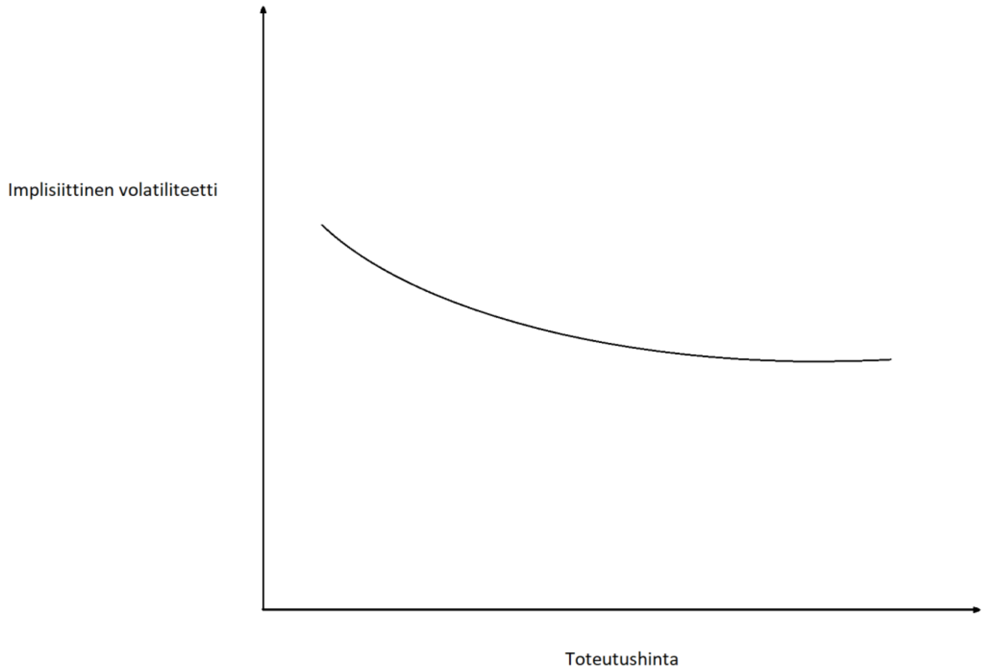
Black-Scholes-yhtälö on volatiliteetin suhteen monotonisesti kasvava. (kaava 9) Volatiliteetin kasvaessa option hinta kasvaa.

(9) $$\frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0$$

Kuviosta 4 on tulkittavissa, että implisiittisen volatiliteetin empiirisesti havaittu jakauma antaa volatiliteetille suurempia arvoja, kun option toteutushinta saa äärimmäisiä arvoja.

Kääntäen, Black-Scholes-mallin oletus lognormaalisti jakautuneesta osakkeen hinnan vaihtelusta tarkoittaa sitä, että malli alihinnoittelee äärimmäisen toteutushinnan optioita.

Volatiliteettihymy voi kuitenkin saada myös muita muotoja ja yleisesti puhutaan kuvaajan vinoudesta. Mukaillen Hullin (2009) esitystä osakkeiden volatiliteettihymystä, markkinoilla havaitaan empiirisesti usein kuvion 6 kaltainen implisiittisen volatiliteetin kehitys.



Kuvio 6. Volatiliteettihymy osakeoptioille (esitys mukaillen Hull, 2009, 386)

Implisiittisen volatiliteetin käyttäytymistä osakeoptioissa kuvaavasta kuviosta 6 on tulkittavissa, että vakiomuotoinen Black-Scholes malli ylihinnoittelee matalan toteutushinnan optioita ja alihinnoittelee korkean toteutushinnan optioita.

5.2 Tutkimuksia volatiliteettihymystä

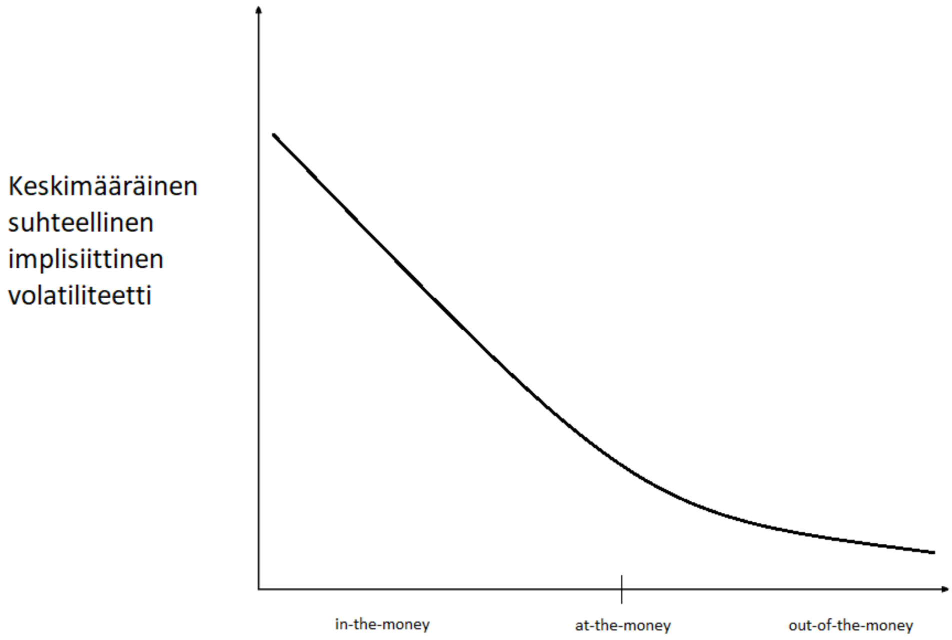
Tutkimuksessaan *The Information Frown in Option Prices* (Ederington & Quan 2005), Ederington ja Quan tarkastelivat markkinoilla havaittua implisiittistä volatiliteettia. Tutkimuksessaan Ederington ja Quan perustelivat virheelliseksi hypoteesin siitä, että optiohinnoista johdetun implisiittisen volatiliteetin tulisi kuvastaa markkinoiden parasta ennustetta kohde-etuuden volatiliteetista option voimassaolon aikana. Tutkijat nostivat esille kaksi huomiota.

Vertailtaessa optioita, joiden toteutusajankohta ja kohde-etuus ovat samoja mutta toteutushinnat eroavat, tulisi optioiden implisiittisen volatiliteetin muun muassa Black-Scholes-oletusten perusteella olla vakio optioiden välillä. Ederington ja Quan kuitenkin totesivat, että hypoteesi on laajasti testattu useilla aineistoilla ja empiirisesti osoitettu virheelliseksi. Näin muodostetut kuvaajat ovat muodoltaan jonkinlaisia alaluvussa 5.1 esiteltyjä volatiliteettihymyjä.

Toisena huomiona tutkijat esittivät, että implisiittisen volatiliteetin tulisi sisältää kaikki saatavilla oleva informaatio, kuten kohde-etuuden aiempi hintainformaatio. Implisiittisen volatiliteetin tulisi siis olla harhaton estimaattori tulevaisuuden volatiliteetille. Myös tämä hypoteesi on Ederingtonin ja Quanin mukaan hylätty useissa tutkimuksissa.

Aiemman tutkimuskirjallisuuden katsauksessa Ederington ja Quan kertoivat, että selitettäessä kohde-etuuden toteutunutta volatiliteettia regressiossa kohde-etuuden implisiittisellä volatiliteetilla, havaitaan että implisiittisen volatiliteetin kerroin saa arvoja alle yhden, eli implisiittinen volatiliteetti on harhainen toteutuneen volatiliteetin estimaattori. Verrattaessa samalla menettelyllä toteutunutta volatiliteettia ja historiallista volatiliteettia, havaitaan että regressiokerroin saa positiivisia arvoja, mikä viittaisi siihen, että implisiittinen volatiliteetti ei sisällä kaikkea tietoa kohde-etuuden aiemmista hinnanmuutoksista.

Empiirisessä testauksessa Ederington ja Quan käyttivät aineistonaan S&P500 futuurien ja S&P500 futuurioptioiden päivähintoja Chicago Mercantile Exchange-pörssissä. Havainnot oli kerätty aikaväliltä 1.1.1988 – 31.3.2003. Datan analysoinnissa pyrittiin minimoimaan myynti- ja toteutushintojen välisen erotuksen (eng. bid-ask-spread) aiheuttama harha hinnoissa. Tutkimuksessa käytetyt havainnot muodostettiin siten, että jäljellä olevien kaupankäyntipäivien määrä sai arvoja väliltä 20 – 44 ja jäljellä olevien kaupankäyntimäärien keskiarvo oli 30 päivää. Ederington ja Quan jaottelivat havainnot call- ja put-optioihin, sekä, samaan tapaan kuin tässä tutkielmassa aiemmin esitellyissä tutkimuksissa, luokkiin sen mukaan, onko optio out-of-the-money, at-the-money vai in-the-money. Havaintoja kerättiin parhaimmillaan 24:lle eri toteutushinnalle.



Kuvio 7. Volatiliteettihymy call-optioille Ederingtonin ja Quanin (2005) tutkimuksessa (esitys mukaillen Ederington & Quan 2005, 1436)

Ederington ja Quan havaitsivat kuvion 7 muotoisen volatiliteettihymyn tai -virnistyksen (eng. volatility sneer). Implisiittisen volatiliteetin suurimmat estimaatit olivat noin 75% korkeampia, kuin matalimmat estimoidut arvot.

Tutkimuksen toisessa empiirisessä osassa Ederington ja Quan muodostivat regressioyhtälöt, joista ensimmäisessä toteutunutta volatiliteettia selitettiin implisiittisellä volatiliteetilla ja toisessa toteutunutta volatiliteettia selitettiin implisiittisellä volatiliteetilla, sekä historiallisella volatiliteetilla (kaavat 5.2.1 ja 5.2.2). Historiallinen volatiliteetti oli laskettu edeltävän 40 kaupankäyntipäivän perusteella.

$$RLZ_{j,t} = \alpha_0 + \beta_1 ISD_{i,j} + u_{j,t} \qquad (5.2.1)$$

$$RLZ_{j,t} = \alpha_0 + \beta_1 ISD_{i,j} + \beta_2 HIS_t + u_{j,t} \qquad (5.2.2.)$$

(esitys mukaillen Ederington & Quan 2005, 1436)

Ederington ja Quan tiivistivät kirjallisuuskatsauksensa havaintoihin siitä, että useimmissa vastaavissa tutkimuksissa vakiotermi α_0 saa suurempia arvoja kuin nolla, implisiittisen volatiliteetin estimaatin kerroin β_1 saa arvoja nollan ja yhden väliltä, sekä historiallisen volatiliteetin estimaatin kerroin β_2 saa suurempia arvoja kuin nolla. Ederingtonin ja Quanin regressiot toisintavat vastaavat havainnot.

Hypoteesi siitä, että implisiittinen volatiliteetti olisi harhaton ja tehokas tulevan implisiittisen volatiliteetin estimaattori. hylätään tutkimuksessa. Ederingtonin ja Quanin aineistossa havaittiin kuitenkin, että suhteellisen korkeista toteutushinnoista johdettu implisiittinen volatiliteetti on harhaton ja tehokas tulevan volatiliteetin estimaattori.

5.3 Teorioita volatiliteettihymyn syistä

Ederington ja Guan (2005) esittivät mahdolliseksi volatiliteettihymyn syyksi muun muassa Christensenin ja Prabhalan (1998) sekä Ederingtonin ja Guanin (2002) ehdottaman markkinoiden epätehokkuuden. Markkinoiden epätehokkuudella on tässä viitattu esimerkiksi myynti- ja ostotoimeksiantojen erotukseen, sekä ongelmiin aikasarja-aineiston muodostamisessa.

Myynti- ja ostotoimeksiannon välinen ero kaupankäyntihinnassa vaikuttaa aineiston muodostumiseen sen mukaan, onko mittausajankohtaa edeltävä toimeksianto ollut myynti- vai ostotoimeksianto. Mitä suurempi myynti- ja ostotoimeksiannon välinen erotus hinnassa on, sitä suurempi virhe estimointiin syntyy.

Ongelmia aikasarja-aineiston muodostamisessa syntyy, mikäli option ja kohde-etuuden hinta mitataan eri ajankohtina. Jos toisessa muuttujassa tapahtuu mittausten välisenä aikana muutos, estimointiin sisältyy virheitä.

Epätehokkuuden teoriaa puoltaa se, että kaupankäynti in-the-money call-optioilla on huomattavasti vähäisempää, kuin out-of-the-money tai at-the-money optioilla. Ederington ja Guan päätyvät kuitenkin siihen, että markkinoiden epätehokkuus ei aiheuta estimointiin virhettä, joka selittäisi volatiliteettihymyn.

Ederington ja Quan päätyivät tutkimuksessaan esittämään volatiliteettihymyn syyksi suojautumisesta aiheutuvaa kysyntää optioissa, joiden toteutushinta eroaa merkittävästi markkinahinnasta (eng. hedging pressure) (Ederington & Quan 2005, 1430). Erityisesti institutionaaliset sijoittajat suojaavat sijoitusportfolioitaan ostamalla ja kirjoittamalla out-of-the money optioita.

Dennis ja Mayhew esittävät kolme hypoteesia volatiliteettihymyn syistä (Dennis & Mayhew 2000, 1). Heidän ensimmäinen hypoteesinsa oli, että markkinoiden transaktiokustannukset selittävät volatiliteettihymyn muotoa. Tämän hypoteesin mukaisesti myös osakkeen riskisyys saattaa vaikuttaa volatiliteettihymyn muotoon.

Heidän toinen hypoteesinsa oli, että kohde-etuuden (yhtiön) omaisuuden arvon implisiittinen volatiliteetti voi olla vakio, mutta lainanotto (eng. leverage) aiheuttaa volatiliteetin vaihtelun ja volatiliteettihymyn muodon.

Kolmantena hypoteesina Dennis ja Mayhew esittivät, että prosessi, joka määrittää kohde-etuuden omaisuuden arvon, ei noudata vakioisen volatiliteetin oletusta.

Tutkimuksessaan Dennis ja Mayhew havaitsivat, että volatiliteettihymy on yhteydessä yhtiökohtaiseen riskiin. He havaitsivat myös, että put- ja call-optioiden suhde selitti volatiliteettihymyä S&P500-indeksin optioissa. Yhteyden ei kuitenkaan havaittu olevan yhtä selkeä yksittäisten osakkeiden optioita tarkasteltaessa. Dennis ja Mayhew havaitsivat tarkastelussaan lisäksi tilastollisesti merkittävän yhteyden kaupankäynnin volyymin ja volatiliteettihymyn välillä.

6 JOHTOPÄÄTELMÄT JA AIHEITA JATKOTUTKIMUKSEEN

6.1 Johtopäätelmät

Aiemmissa kappaleissa käsitellyistä tutkimuksista havaitaan, että Black-Scholes-yhtälön käyttö implisiittisen volatiliteetin mallintamisessa ei valtaosan ajasta tuota mallin taustaoletusten kanssa johdonmukaisia tuloksia. Paradoksaalisesti Black-Scholes-yhtälö on kuitenkin alan standardi optiohinnoitteluun sekä implisiittisen volatiliteetin mallintamiseen call-optioissa, sekä laajennettuna versiona myös muissa johdannaisissa.

Tutkielmassa käsitellyistä paikoitellen ongelmallisista taustaoletuksista ja empiirisen testauksen osoittamista ongelmista huolimatta Black-Scholes-mallille ei ole pystytty luomaan korvaavaa mallia.

Uusia malleja optioiden hinnoitteluun on toki kehitetty. Modernimmat mallit esimerkiksi sallivat kohde-etuuden hinnan äkillisen muutoksen, niin kutsutun hypyn (eng. jump models). Tietyt mallit antavat volatiliteetin arvojen muuttua (eng. stochastic volatility models) tai mallit olettavat kohde-etuuden hintakäyttäytymisen erilaiseksi.

Taloustieteellisten mallien kehittämiseen pätee kuitenkin usein konventio, jonka mukaan yksinkertainen malli on käyttökelpoinen malli. Kun malliin lisätään muuttujia tai mallista poistetaan rajoitteita, mallin soveltaminen väistämättä monimutkaistuu.

Tutkielmassa kuvattu Black-Scholes-mallin yksinkertaisuus verrattuna vaihtoehtoisiin malleihin on varmasti yksi syistä sen laajaan käyttöön rahoitusalalla sekä akateemisessa tutkimuksessa. Mallin laajan soveltamisen vuoksi sen rajoitteiden ja heikkouksien ymmärtäminen on tärkeää.

Tutkielmassa on esitelty lukuisia syitä volatiliteettihymyn esiintymiselle. Kirjallisuuskatsauksen perusteella volatiliteettihymyn olemassaololle ei voida nimetä yhtä selvästi tilastollisesti merkitsevintä syytä, vaan volatiliteettihymyn todetaan johtuvan usean tekijän ja markkinaosapuolen käyttäytymisen yhteisvaikutuksista.

Markkinaosapuolten kannalta poikkeukset Black-Scholes-mallista aiheuttavat tarpeen volatiliteettihymyn mallintamiselle. Tutkijan näkökulmasta Black-Scholes-malli ja siihen liittyvät ongelmat ovat erittäin mielenkiintoisia, sillä malli on siten ainutlaatuinen, että sillä mallinnetaan päivittäin hintoja, joiden käyttäytyminen ei vastaa mallin oletuksia.

6.2 Aiheita jatkotutkimukseen

Tutkielmassa esiteltiin Black-Scholes-mallin taustaoletukset, Black-Scholes-malli, sekä mallin empiiriseen soveltamiseen liittyvän tutkimuskirjallisuuden katsaus. Tutkielmassa ei käsitelty laajasti vaihtoehtoisia optiohinnoittelumalleja

Jatkotutkimusaiheena olisi kiinnostavaa tutkia laajemmin Black-Scholes-mallin taustaoletuksia, sekä ehdotettuja vaihtoehtoisia oletuksia. Black-Scholes-mallia olisi mielenkiintoista verrata vaihtoehtoisiin optiohinnoittelumalleihin ja tarkastella mallien eroja.

Kirjallisuuskatsauksesta oli nähtävissä, että Black-Scholes-mallia on testattu laajasti empiiriseen aineistoon. Tutkimuskirjallisuus on kuitenkin keskittynyt vahvasti erittäin likvideihin suurten yritysten optioihin. Implisiittisen volatiliteetin mallintaminen esimerkiksi vähemmän likvideille pörssiyhtiöiden call-optioille voisi tuottaa uudenlaisia tuloksia.

Muita mielenkiintoisia tutkimusaiheita voisivat olla esimerkiksi eri hinnoittelumallien soveltaminen empiiriseen dataan ja hinnoittelumallien tuottamien tulosten vertailu, sekä erilaisten kohde-etuuksien tai johdannaistyyppien volatiliteettihymyjen vertailu.

LÄHDELUETTELO

Black, F. & Scholes, M. (1972). The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency. *The Journal of Finance*, 27(2), 399-417.

Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Black, F. (1975). Fact and Fantasy in the Use of Options, *Financial Analysts Journal*, 31:4, 36-41.

Capiński, M. & Kopp, E. The Black–Scholes Model, Cambridge University Press, 2012.

CBOE. Cboe History. http://www.cboe.com/aboutcboe/history. 29.04.2020.

Dennis, P. & Mayhew, S. (2000). Implied volatility smiles: Evidence from options on individual equities. Banking and Finance Department, Terry College of Business, University of Georgia, Working Paper.

Ederington, L. & Guan, W. (2005). The information frown in option prices. *Journal of Banking and Finance*, 29(6), 1429–1457.

Emanuel, D. & Miller. M, The Volatility Smile, John Wiley & Sons, Incorporated, 2016.

Geske, R. & Roll, R. (1984), On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula. *The Journal of Finance*, 39: 443-455.

Hull, J. (2008). Fundamentals of futures and options markets (6. ed.). Upper Saddle River (N.J.): Prentice Hall.

Hull, J. (2009). Options, futures and other derivatives. (7. ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Knüpfer, S. & Puttonen, V. (2017). Moderni rahoitus (9., uudistettu painos.). Helsinki: Alma Talent.

Macbeth, J. & Merville, L. (1979). An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model. *Journal of Finance* 34 (December 1979), 1173-86.

Macbeth, J. & Merville, L. (1980). Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models. *The Journal of Finance*, 35(2), 285-301.

Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.

OCC. (2020). Annual Volume and Open Interest Statistics. https://www.theocc.com/webapps/historical-volume-query. 29.04.2020.

OCC. (2020 Options and Futures Volume by Exchange. https://www.theocc.com/webapps/exchange-volume?reportType=D&instrumentType=both. 29.04.2020.

Ross, S. 1987. Finance. *The New Palgrave Dictionary of Economics*, vol. 2, edited by J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, 322– 336. London: Macmillan.

Rubinstein, M. (1985). Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through August 31, 1978. *The Journal of Finance*, 40(2), 455-480.

Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771-818.

Thorpe, E. 1976, Common stock volatilities in option formulas, Paper presented at the Seminar on the Analysis of Security Prices, May (University of Chicago, Chicago, IL).