Tampereen yliopisto

Jouni Kivivuori

LINEAARISTEN DIFFERENSSIYHTÄLÖIDEN SOVELLUKSIA TALOUDEN AIHEPIIRISTÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2020

Tiivistelmä

Jouni Kivivuori: Lineaaristen differenssiyhtälöiden sovelluksia talouden aihepiiristä
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tässä pro gradu -tutkielmassa esitetään lineaaristen vakiokertoimisten differenssiyhtälöiden teoriaa ja sovelluksia talouden aihepiiristä. Tarkastelu rajataan lineaarisiin ensimmäisen ja toisen kertaluvun differenssiyhtälöihin. Sovelluksissa käsitellään finanssimatematiikkaa, kansantalouden dynamiikkaa ja varastomuutosmalleja.

Tutkielmassa esitetään aluksi lineaaristen differenssiyhtälöiden yleistä teoriaa. Sen jälkeen esitetään lineaarisen ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön ratkaisu ja ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälön sovelluksia. Sovelluksissa tarkastellaan finanssimatematiikkaa, erityisesti korkolaskentaa ja jaksollisia suorituksia, Roy Harrodin dynaamiseen teoriaan pohjautuvaa kansantulon kasvumallia ja Lloyd A. Metzlerin esittämää passiivisten varastomuutosten systeemiä.

Tämän jälkeen esitetään lineaarisen toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön ratkaisu. Homogeenisen differenssiyhtälön yleistä ratkaisua tarkastellaan erikseen. Lisäksi tarkastellaan määräämättömien kertoimien menetelmää täydellisen differenssiyhtälön yksityisratkaisun löytämiseksi. Tutkielman lopuksi esitetään toisen kertaluvun differenssiyhtälön sovelluksia. Ensin tarkastellaan Paul Samuelsonin kerroin-kiihdytinmallia ja erityisesti kansantulon tasapainoarvoa ja sen stabiilisuuden ehtoja mallissa. Sitten tarkastellaan Metzlerin esittämää varastomuutosmallia, jossa varastomuutokset ovat syklisiä.

Tutkielman lukijan oletetaan hallitsevan hyvin lukion pitkän matematiikan oppimäärän. Tutkielman pääasiallisena lähteenä on Samuel Goldbergin differenssilaskentaa ja sen sovelluksia käsittelevä teos *Introduction to Difference Equations*.

Avainsanat: differenssiyhtälöt

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän pro gradu -tutkielman ensisijaisena tavoitteena on antaa lukijalle perustiedot lineaaristen vakiokertoimisten differenssiyhtälöiden ratkaisemisesta. Tarkastelu rajataan lineaarisiin ensimmäisen ja toisen kertaluvun differenssiyhtälöihin. Differenssiyhtälöiden matemaattisen tarkastelun lisäksi tutkielmassa esitetään joitakin differenssiyhtälöiden sovelluksia talouden aihepiiristä. Sovelluksissa käsitellään finanssimatematiikkaa, kansantalouden dynamiikkaa ja varastomuutosmalleja. Tavoitteena on tuoda esiin, kuinka differenssiyhtälöitä käytetään erilaisten ilmiöiden mallintamisessa. Differenssiyhtälöitä sovelletaan taloustieteen ohella erityisesti signaalinkäsittelyssä, mutta ne ovat sovellettavissa muillakin tieteenaloilla.

Tutkielman pääasiallisena lähteenä on Samuel Goldbergin differenssilaskentaa ja sen sovelluksia käsittelevä teos *Introduction to Difference Equations*. Goldbergin esitystä täydennetään useiden muiden lähteiden avulla. Taloustieteeseen liittyvien differenssilaskennan sovellusten osalta viitataan myös tieteellisiin artikkeleihin.

Differenssiyhtälöissä tarkastellaan yleensä jonkin sellaisen tuntemattoman funktion y arvoja $y(k)$, jonka määrittelyjoukko on numeroituva. Silloin differenssiyhtälön määrittelyjoukkona on usein ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{N}_0$. Toisin on differentiaaliyhtälöissä, joissa tuntematonta funktiota tarkastellaan jollakin ”jatkuvalla” reaalilukuvälillä. Differenssiyhtälöt soveltuvat monien sellaisten ilmiöiden mallintamiseen, joita koskevaa tietoa saadaan säännöllisin välimatkoin toisiaan seuraavista tarkastelupisteistä, esimerkiksi ajan ollessa kyseessä aina kunkin tarkasteluperiodin alkuhetkellä.

Annetaan esimerkki tilanteesta, jossa differenssiyhtälöitä voidaan soveltaa. Oletetaan, että pankkiin talletetaan 100 euroa. Vuosikorko 6 % liitetään pääomaan aina vuoden lopussa ja myös korolle maksetaan korkoa. Ensimmäisen vuoden lopussa 100 euron alkutalletus kasvaa koron määrällä, jolloin uudeksi talletuspääomaksi saadaan 106 euroa. Toisen vuoden lopussa talletus kasvaa vuoden alun talletuspääomalle laskettavan koron määrällä. Korkoon sisältyy tällöin myös ensimmäisenä vuonna ansaitulle korolle maksettava korko. Uudeksi talletuspääomaksi saadaan siten 112,36 euroa. Kunkin jakson talletuspääoma määräytyy aina edellisen jakson talletuspääoman perusteella, ja se on laskettavissa rekursiivisesti, kun alkutalletus, korkojaksojen määrä ja korkoprosentti tiedetään. Edellä kuvattu tilanne tunnetaan koronkorkolaskun nimellä. Koronkorkolasku on mallinnettavissa lineaarisella ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisella differenssiyhtälöllä. Differenssiyhtälön ratkaisu antaa kunkin korkojakson loppuun mennessä kertyneen talletuspääoman. Koronkorkolaskenta esitetään tutkielman alaluvussa 3.2.

Tutkielma on jäsennelty siten, että luvussa 2 määritellään funktion differenssi. Sen jälkeen annetaan differenssiyhtälön määritelmä ja esitetään eräitä differenssiyhtälön ominaisuuksia koskevia määritelmiä. Lisäksi luvussa 2 esitetään joitakin lineaarisen differenssiyhtälön ratkaisua koskevia lauseita, joita tarvitaan jatkotarkasteluissa. Yksi lauseista on lineaarisia differenssiyhtälöitä koskeva eksistenssi- ja yksikäsitteisyyslause. Luvussa kiteytyy tutkielman matemaattisen sisällön kannalta keskeinen kysymys: Miten saadaan täydellisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu? Tähän kysymykseen esitetään vastaus tutkielman seuraavissa luvuissa.

Luvussa 3 esitetään aluksi lineaarisen ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu. Sen jälkeen tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön sovelluksia finanssimatematiikan aihepiiristä. Tämän jälkeen tarkastellaan Roy Harrodin dynaamiseen teoriaan pohjautuvaa kansantulon kasvumallia ja Lloyd A. Metzlerin esittämää passiivisten varastomuutosten systeemiä, jotka ovat mallinnettavissa ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisten differenssiyhtälöiden avulla. Mallien perusteella pystytään muodostamaan käsitys tarkasteltavien funktioiden, kansantulon ja kokonaistulon, käyttäytymisestä periodilta toiselle siirryttäessä. Erityisen mielenkiinnon kohteena on funktioiden arvojen pitkän aikavälin kehitys.

Tutkielman päättävässä luvussa 4 esitetään aluksi lineaarisen toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu. Tämän jälkeen tarkastellaan homogeenisen differenssiyhtälön yleistä ratkaisua ja niin sanottua määräämättömien kertoimien menetelmää, jota voidaan käyttää täydellisen differenssiyhtälön yksityisratkaisun hakemiseen. Ensimmäisenä toisen kertaluvun differenssiyhtälön sovellusesimerkkinä tarkastellaan Paul Samuelsonin kerroin-kiihdytinmallia. Erityisesti tarkastellaan kansantulon tasapainoarvoa ja sen stabiilisuuden ehtoja Samuelsonin kerroin-kiihdytinmallissa. Toisena sovellusesimerkkinä tarkastellaan Metzlerin esittämää varastomuutosmallia, jossa varastomuutosten syklisyys toteutuu.

Lineaarisiin vakiokertoimisiin differenssiyhtälöihin liittyvä teoria pyritään tutkielmassa esittämään siten, että asiat on mahdollista, ainakin pääosin, ymmärtää lukion matematiikan pitkän oppimäärän pohjalta. Differenssiyhtälöitä käsitellään lukiomatematiikassa rekursiivisina lukujonoina. Tutkielmassa lukujonojen yleinen tarkastelu jätetään melko vähälle huomiolle. Sen sijaan kompleksiluvut, jotka voivat olla lukijalle jonkin verran vieras asia, esitetään melko perusteellisesti. Differenssiyhtälöiden ratkaisemista havainnollistetaan esimerkein. Taloustieteen perusasioiden tuntemus auttaa lukijaa ymmärtämään talouden aihepiiriin kuuluvia sovelluksia. Tutkielmassa pääpaino on kuitenkin sovellusten matemaattisessa tarkastelussa. Opinnäytetyön rajattu laajuus ei anna mahdollisuutta sovellusesimerkeiksi valittujen mallien syvemmälle tarkastelulle. Lukijan on kuitenkin tärkeää tiedostaa, millaisille oletuksille esitettävät mallit perustuvat.

2 Differenssiyhtälöiden yleistä teoriaa

2.1 Funktion differenssi

Luvussa 2 esitetään lyhyesti muutamia aiheen tarkastelussa tarvittavia apuneuvoja. Alaluvussa 2.1 esitetään ensin funktion differenssin määritelmä ja sitten määritellään identiteettioperaattori ja siirto-operaattori. Differenssiyhtälö määritellään alaluvussa 2.2.

Määritelmä 2.1. [6, ss. 14 ja 19–20]. Olkoon y joukossa S määritelty funktio ja h sellainen nollasta eroava vakio, että jos x kuuluu funktion y määrittelyjoukkoon, niin myös $x+h$ kuuluu siihen. Tällöin funktion y *ensimmäinen differenssi* Δy on sellainen funktio, että

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x). \tag{2.1}$$

Lisäksi funktion *n. differenssi* $\Delta^n y$ saadaan funktion edeltävän differenssin $\Delta^{n-1} y$ differenssinä eli

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{2.2}$$

Ensimmäinen differenssi kertoo funktion arvon muutoksen, kun lähtöarvo kasvaa yhden askelen tai intervallin verran. Luonnehdinta on mielekäs, kun askelpituus h on ei-negatiivinen vakio. Funktion y määrittelyjoukkona S on jatkossa joko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ tai jokin sen aito osajoukko.

Jätetään yläindeksi merkitsemättä funktion ensimmäiseen differenssiin. Kun lisäksi sovitaan, että $\Delta^0 y = y$ eli että funktion *nollannella differenssillä* ei ole vaikutusta funktioon, voidaan kaava (2.2) esittää muodossa

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Esimerkki 2.1. (Vrt. [11, s. 16]). Olkoon Δy funktion y ensimmäinen differenssi. Tällöin funktion y *toinen differenssi* $\Delta^2 y$ on funktion y ensimmäisen differenssin differenssi eli

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y(x) &= \Delta(\Delta y(x)) \\
&= \Delta(y(x+h) - y(x)) \\
&= (y(x+2h) - y(x+h)) - (y(x+h) - y(x)) \\
&= y(x+2h) - 2y(x+h) + y(h).
\end{aligned}$$

Esimerkin 2.1 perusteella on ilmeistä, että funktion differenssi on esitettävissä muodossa, jossa ei esiinny differenssioperaattoria lainkaan. Differenssilaskentaa käsitellään laajasti esimerkiksi teoksissa [6, ss. 9–49] ja [15, ss. 12–45].

Määritellään vielä *identiteettioperaattori* I ja *siirto-operaattori* E, joita tarvitaan aiheen käsittelyssä.

Määritelmä 2.2. [6, s. 20]. Olkoon y joukossa S määritelty funktio. Identiteettioperaattori I määritellään siten, että jos x kuuluu funktion y määrittelyjoukkoon, niin funktiolle y on voimassa yhtälö

$$Iy(x) = y(x).$$

Määritellään tässä yhteydessä lisäksi, että $\Delta^0 y(x) = Iy(x) = y(x)$.

Määritelmä 2.3. [6, ss. 21–22]. Olkoon y joukossa S määritelty funktio ja h sellainen nollasta poikkeava vakio, että jos x kuuluu funktion y määrittelyjoukkoon, niin myös $x + h$ kuuluu siihen. Tällöin siirto-operaattori E määritellään siten, että funktion Ey arvo määrittelyjoukon S arvolla x on

$$Ey(x) = y(x + h).$$

Kun lisäksi määritellään, että $E^0 y(x) = Iy(x) = y(x)$, on funktion *n. siirto* $E^n y(x) = E(E^{n-1} y(x))$, kun n kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon $\mathbb{N}$. Edeltävä määritelmä voidaan esittää myös muodossa $E^n y(x) = y(x + nh)$, jolloin se on voimassa, kun n kuuluu ei-negatiivisten kokonaislukujen joukkoon $\mathbb{N}_0$.

Huomautus. Differenssioperaattorin sijaan käytetään laskuissa usein siirto-operaattoria ja identiteettioperaattoria, sillä voimassa on identiteetti $\Delta \equiv E - I$ (ks. [6, ss. 34–39]). Funktion $y(x)$ differenssi (2.1) voidaan kirjoittaa muodossa $\Delta y(x) = Ey(x) - Iy(x)$.

2.2 Differenssiyhtälön määritelmä ja ominaisuuksia

Määritelmä 2.4. [6, s. 50]. Olkoon x muuttuja ja y sen tuntematon funktio. *Differenssiyhtälö* liittää funktion y arvon ja sen differenssin tai differenssien arvot toisiinsa jokaisella funktion y ja sen differenssien ($\Delta y, \Delta^2 y, \ldots$) määrittelyjoukon S arvolla x.

Mikäli differenssiyhtälön tarkastelussa alkuarvoksi x_0 valitaan jokin ei-negatiivinen kokonaisluku ja askelpituudeksi h luku 1, rajautuu määrittelyjoukoksi ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{N}_0$ tai jokin sen aito osajoukko. Tavallisesti kokonaislukumuuttuja k merkitään funktioon alaindeksiksi, joten merkinnän $y(k)$ sijasta kirjoitetaan y_k. Jatkossa määrittelyjoukkona S on yleensä $\mathbb{N}_0$. Differenssiyhtälö voidaan tällöin esittää muodossa

$$F(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n}) = 0, \tag{2.3}$$

missä n on funktion kertaluku. Esitysmuotoon (2.3) päästään soveltamalla siirto-operaattorin määritelmää 2.3. ([9, s. 13].)

Määritelmä 2.5. [6, ss. 53–54]. Joukossa S määritelty differenssiyhtälö on *lineaarinen*, jos se voidaan esittää muodossa

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \cdots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k), \tag{2.4}$$

missä $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$ ja g ovat muuttujan k funktioita ja määritelty kaikilla muuttujan k arvoilla joukossa S.

Differenssiyhtälöä (2.4) kutsutaan *täydelliseksi* tai *epähomogeeniseksi* differenssiyhtälöksi, kun taas differenssiyhtälöä

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \cdots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = 0, \tag{2.5}$$

jossa yhtälön oikean puolen funktio $g(k)$ on identtisesti nolla, kutsutaan *homogeeniseksi* differenssiyhtälöksi. Yhtälöä (2.5) voidaan nimittää myös *homogeeniyhtälöksi*.

Määritelmä 2.6. [6, s. 54]. Joukossa S määritellyn lineaarisen differenssiyhtälön (2.4) *kertaluku* on n, jos differenssiyhtälössä esiintyvät kertoimet f_0 ja f_n eroavat aina nollasta kaikilla määrittelyjoukon S arvoilla.

Tutkielmassa tarkastellaan ainoastaan lineaarisia ensimmäisen ja toisen kertaluvun differenssiyhtälöitä. Lineaarinen toisen kertaluvun ($n = 2$) differenssiyhtälö on muotoa

$$f_0(k)y_{k+2} + f_1(k)y_{k+1} + f_2(k)y_k = g(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

ja sen termien y_{k+2} ja y_k kertoimet eroavat kumpikin aina nollasta, eli

$$f_0(k) \neq 0 \text{ ja } f_2(k) \neq 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Lineaarisen toisen kertaluvun differenssiyhtälön (2.6) alkuarvoehdot toteuttavan ratkaisun (vrt. [6, s. 56]) määrittämiseksi riittää tuntea alkuarvoina kaksi peräkkäistä funktion y arvoa. Jos alkuarvoina tunnetaan esimerkiksi funktion arvot y_0 ja y_1, voidaan differenssiyhtälöstä

$$f_0(0)y_2 + f_1(0)y_1 + f_2(0)y_0 = g(0), \qquad k = 0,$$

ratkaista funktion arvo y_2. Edeltävä yhtälö voidaan kirjoittaa ensiksi muotoon

$$f_0(0)y_2 = g(0) - f_1(0)y_1 - f_2(0)y_0$$

ja jakaa sitten puolittain termin y_2 kertoimella $f_0(0)$. Jakolasku on sallittu, sillä ehdon (2.7) mukaan kerroin $f_0(0) \neq 0$. Seuraavaksi voidaan funktion arvojen y_1 ja y_2 avulla ratkaista funktion arvo y_3 differenssiyhtälöstä, joka saadaan, kun muuttuja $k = 1$. Jakolasku on jälleen sallittu, sillä kerroin $f_0(1) \neq 0$. Näin etenemällä saadaan differenssiyhtälön (2.6) annetut alkuarvoehdot toteuttava ratkaisu. Alla esitettävän lauseen 2.1 perusteella ratkaisu on yksikäsitteinen. ([6, ss. 60–61].)

Esitetään seuraavaksi lineaarisia differenssiyhtälöitä koskeva eksistenssi- ja yksikäsitteisyyslause muodossa, joka on voimassa lineaarisille n. kertaluvun differenssiyhtälölle. Lauseen 2.1 todistus esitetään pääpiirteissään teoksessa [6, ss. 61–62].

Lause 2.1. *Lineaarisella n. kertaluvun differenssiyhtälöllä*

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \cdots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k), \tag{2.8}$$

joka on määritelty kaikilla kokonaisluvun k peräkkäisillä arvoilla joukossa S, on olemassa yksi ja vain yksi ratkaisu y, joka toteutuu mielivaltaisesti valituilla n:llä peräkkäisellä muuttujan k arvolla.

Jos differenssiyhtälölle on löydetty alkuarvoehdot täyttävä ratkaisu, on tämä ratkaisu silloin lauseen 2.1 perusteella differenssiyhtälön ainoa mahdollinen ratkaisu.

Lause 2.2. *Jos $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ ovat kaksi lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön* (2.5) *ratkaisua, niin myös $C_1y^{(1)} + C_2y^{(2)}$, missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisesti valittuja vakioita, on differenssiyhtälön ratkaisu.*

Todistus (vrt. [6, ss. 122–123]). Todistetaan lause pelkästään lineaarisille toisen kertaluvun homogeenisille differenssiyhtälöille, jotka ovat muotoa

$$f_0(k)y_{k+2} + f_1(k)y_{k+1} + f_2(k)y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

On siis todistettava, että jos ratkaisut $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ toteuttavat differenssiyhtälön (2.9), niin myös ratkaisujen lineaarikombinaatio $C_1y^{(1)} + C_2y^{(2)}$ toteuttaa differenssiyhtälön, eli että yhtälö

$$f_0(k)\left(C_1y^{(1)}_{k+2} + C_2y^{(2)}_{k+2}\right) + f_1(k)\left(C_1y^{(1)}_{k+1} + C_2y^{(2)}_{k+1}\right) + f_2(k)\left(C_1y^{(1)}_{k} + C_2y^{(2)}_{k}\right) = 0$$

on tosi kaikilla muuttujan k arvoilla. Edellä muodostetun yhtälön vasemman puolen lauseke voidaan esittää muodossa

$$C_1\left(f_0(k)y^{(1)}_{k+2} + f_1(k)y^{(1)}_{k+1} + f_2(k)y^{(1)}_{k}\right) + C_2\left(f_0(k)y^{(2)}_{k+2} + f_1(k)y^{(2)}_{k+1} + f_2(k)y^{(2)}_{k}\right).$$

Oletuksen perusteella $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, joten kummankin sulkulausekkeen arvo on 0, ja siten koko summalausekkeen arvo on 0. □

Täydellisen differenssiyhtälön ratkaiseminen etenee usein niin, että ensin etsitään homogeeniyhtälön ratkaisu ja sitten täydellisen yhtälön jokin yksityisratkaisu y^*. Ratkaisutapa perustellaan lauseessa 2.3.

Lause 2.3. *Jos funktio Y on lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön* (2.5) *ratkaisu ja y^* lineaarisen täydellisen differenssiyhtälön* (2.4) *jokin ratkaisu, niin silloin $Y + y^*$ on täydellisen yhtälön* (2.4) *ratkaisu.*

Todistus (vrt. [6, ss. 123–124]). Todistetaan lause pelkästään lineaarisille toisen kertaluvun differenssiyhtälöille (2.6). Oletuksen mukaan

$$f_0(k)Y_{k+2} + f_1(k)Y_{k+1} + f_2(k)Y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

ja

$$f_0(k)y^*_{k+2} + f_1(k)y^*_{k+1} + f_2(k)y^*_k = g(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen päästään yhtälöön

$$f_0(k)\big(Y_{k+2} + y^*_{k+2}\big) + f_1(k)\big(Y_{k+1} + y^*_{k+1}\big) + f_2(k)\big(Y_k + y^*_k\big) = g(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

mikä osoittaa, että $Y + y^*$ on täydellisen yhtälön (2.4) ratkaisu. □

Lineaariselle differenssiyhtälölle pyritään löytämään yleinen ratkaisu. Täydelliselle differenssiyhtälölle löydetty yksityisratkaisu y^* ei yksin riitä. Lauseen 2.3 perusteella tiedetään, että jos Y on homogeenisen differenssiyhtälön ratkaisu, niin silloin $Y + y^*$ on täydellisen differenssiyhtälön ratkaisu. Goldberg asettaakin kysymyksen, onko mahdollista valita funktio Y siten, että $Y + y^*$ sisältää kaikki täydellisen yhtälön ratkaisut. Vastaus Goldbergin kysymykseen on myönteinen. Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön jonkin yksityisratkaisun summana. ([6, s. 124].)

Lineaarisen differenssiyhtälön yleiseen ratkaisuun palataan ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön osalta alaluvussa 3.1 ja toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön osalta alaluvussa 4.1.

3 Lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälö

3.1 Ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön ratkaisu

Alaluvussa 3.1 johdetaan lineaarisen ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön ratkaisu. Esitys pohjautuu Goldbergin teokseen [6, ss. 63–65 ja 124–126].

Lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälö on muotoa

$$f_0(k)y_{k+1} + f_1(k)y_k = g(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

missä funktioiden f_0 ja f_1 arvot eroavat nollasta kaikilla muuttujan k saamilla arvoilla (vrt. määritelmät 2.5 ja 2.6). Silloin kun funktiot f_0 ja f_1 ovat vakiofunktioita, ne ovat siis nollasta eroavia vakioita. Yhtälö (3.1) voidaan tällöin saattaa esitysmuotoon

$$y_{k+1} = -\frac{f_1(k)}{f_0(k)}y_k + \frac{g(k)}{f_0(k)}.$$

Jos oletetaan, että funktioiden f_0 ja f_1 ohella myös funktio g on vakiofunktio, voidaan yhtälö esittää muodossa

$$y_{k+1} = Ay_k + B, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

missä A ja B ovat vakioita ja vakio $A \neq 0$. Jos vakiofunktio g on identtisesti nolla, on vakion B arvo yhtälössä (3.2) nolla ja kyseessä on homogeeninen differenssiyhtälö. ([6, s. 63].)

Differenssiyhtälössä (3.2) funktion arvo y_{k+1} saadaan sitä edeltävän funktion arvon y_k perusteella rekursiivisesti alkuarvoa y_0 lukuun ottamatta. Differenssiyhtälö (3.2) toimii siten rekursiokaavana, joka antaa lukujonon jäsenet, kun lukujonon ensimmäinen jäsen on annettu. Lukujonon ensimmäisenä jäsenenä on alkuarvo y_0.

Johdetaan seuraavaksi lineaarisen ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön (3.2) ratkaisu (ks. [6, s. 56]). Olkoon alkuarvo y_0 annettu. Tarkastellaan differenssiyhtälöä (3.2), kun muuttuja k saa arvot 0, 1 ja 2 [6, s. 63]. Kun muuttuja $k = 0$, saadaan differenssiyhtälön (3.2) perusteella yhtälö

$$y_1 = Ay_0 + B. \tag{3.3}$$

Funktion arvo y_1 määräytyy alkuarvon y_0 perusteella yhtälöstä (3.3). Sijoitetaan funktion arvon y_1 lauseke yhtälöstä (3.3) edelleen yhtälöön, joka saadaan differenssiyhtälöstä (3.2), kun muuttuja $k = 1$. Näin päästään yhtälöön

$$y_2 = Ay_1 + B = A(Ay_0 + B) + B = A^2y_0 + B(1 + A). \tag{3.4}$$

Sijoitetaan vastaavasti funktion arvon y_2 lauseke yhtälöstä (3.4) yhtälöön, joka saadaan, kun muuttuja $k = 2$. Näin saatu yhtälö

$$y_3 = Ay_2 + B = A[A^2 y_0 + B(1 + A)] + B$$

voidaan sieventää edelleen muotoon

$$y_3 = A^3 y_0 + B(1 + A + A^2). \tag{3.5}$$

Yhtälöiden (3.3), (3.4) ja (3.5) perusteella voidaan arvata [6, s. 64], että differenssiyhtälön (3.2) ratkaisu on

$$y_k = A^k y_0 + B(1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.6}$$

Osoitetaan tämän valistuneen arvauksen paikkansapitävyys.

Ratkaisussa (3.6) esiintyvä sulkulauseke on yhteensä k termiä sisältävän geometrisen sarjan summa [6, s. 64]. Sarjan ensimmäinen jäsen on 1, ja sarjan peräkkäisten jäsenten suhdeluku on A. Geometrisen sarjan summa voidaan esittää muodossa

$$1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1 - A^k}{1 - A}, & \text{kun } A \neq 1, \\ k, & \text{kun } A = 1. \end{cases}$$

Näin ollen ratkaisu (3.6) voidaan esittää muodossa

$$y_k = \begin{cases} A^k y_0 + B\dfrac{1 - A^k}{1 - A}, & \text{kun } A \neq 1, \\ y_0 + Bk, & \text{kun } A = 1. \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

Lause 3.1. *Lineaarisella ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisella differenssiyhtälöllä* (3.2)*, jonka alkuarvo y_0 tunnetaan, on vain yksi ratkaisu* (3.7).

Todistus (vrt. [6, ss. 64–65]). Kun muuttuja $k = 0$, on differenssiyhtälön ratkaisu (3.7) identtisesti tosi.

Todistetaan seuraavaksi suoraan sijoittamalla, että differenssiyhtälöllä (3.2) on ratkaisu (3.7), kun vakio $A \neq 1$. Ratkaisun (3.7) perusteella

$$y_{k+1} = A^{k+1} y_0 + B\frac{1 - A^{k+1}}{1 - A},$$

joten on todistettava, että yhtälö

$$A^{k+1} y_0 + B\frac{1 - A^{k+1}}{1 - A} = A\left(A^k y_0 + B\frac{1 - A^k}{1 - A}\right) + B \tag{3.8}$$

on identtisesti tosi eli tosi muuttujan arvoilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Riittää tarkastella yhtälön (3.8) oikean puolen lauseketta. Lauseke voidaan aluksi sieventää muotoon

$$A^{k+1} y_0 + B\left[1 + \frac{A(1 - A^k)}{1 - A}\right].$$

Lausekkeen hakasulkeisiin merkittyä osaa voidaan muokata edelleen seuraavasti:

$$1 + \frac{A(1-A^k)}{1-A} = \frac{1-A+A(1-A^k)}{1-A} = \frac{1-A^{k+1}}{1-A}.$$

Muokkauksen tulos osoittaa, että yhtälö (3.8) on identtisesti tosi.

Todistetaan vielä, että differenssiyhtälöllä (3.2) on ratkaisu (3.7), kun vakio $A = 1$. Tällöin ratkaisun (3.7) perusteella

$$y_{k+1} = y_0 + B(k+1).$$

On siis todistettava, että yhtälö

$$y_0 + B(k+1) = A(y_0 + Bk) + B \tag{3.9}$$

on tosi muuttujan arvoilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Oletuksen mukaan vakio $A = 1$. Yhdistämällä yhtälön oikean puolen termit Bk ja B yhteisen tekijän B avulla nähdään, että yhtälö (3.9) on identtisesti tosi.

Ratkaisu (3.7) on lauseen 2.1 perusteella yksikäsitteinen, joten se on differenssiyhtälön (3.2) ainoa ratkaisu. □

Seurauslause 3.1.1. *Olkoon funktio y differenssiyhtälön* (3.2) *ratkaisu joukossa* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Tällöin löytyy sellainen reaalivakio C, että*

$$y_k = \begin{cases} CA^k + B\dfrac{1-A^k}{1-A}, & \text{kun } A \neq 1, \\ C + Bk, & \text{kun } A = 1. \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Todistus (vrt. [6, s. 65]). Riittää asettaa vakio C yhtä suureksi kuin funktion arvo y_0 ja soveltaa lausetta 3.1. □

Seurauslauseessa 3.1.1 esitetty kaava (3.10) antaa differenssiyhtälön (3.2) kaikki ratkaisut. Jokainen mielivaltaisen reaalivakion C arvo yksilöi yhden ratkaisun. Toisaalta mikä tahansa funktion y arvo riittää vakion C arvon määrittämiseen kaavan (3.10) avulla. ([6, s. 65].)

Palataan nyt edellä alaluvussa 2.2 esitettyyn kysymykseen, voidaanko lineaarisen täydellisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu saada homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön jonkin yksityisratkaisun summana [6, s. 124]. Tarkastellaan lineaarista ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimista differenssiyhtälöä (3.2), joka annetaan nyt muodossa

$$y_{k+1} - Ay_k = B, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.11}$$

Täydellistä yhtälöä (3.11) vastaavan homogeeniyhtälön

$$y_{k+1} - Ay_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

yleinen ratkaisu Y on seurauslauseen 3.1.1 perusteella

$$Y_k = CA^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä vakio C on mielivaltainen reaalivakio [6, ss. 124–125].

Oletetaan, että on löydetty täydellisen yhtälön (3.11) jokin yksityisratkaisu y^*. Tällöin lauseen 2.3 perustella myös summa $CA^k + y^*$ on täydellisen yhtälön ratkaisu. Seuraavaksi esitettävä lause 3.2 vastaa kysymykseen, onko summa $CA^k + y^*$ samalla täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu eli antaako se kaikki yhtälön ratkaisut.

Lause 3.2. *Tarkastellaan lineaarista ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimista differenssiyhtälöä*

$$y_{k+1} - Ay_k = B, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Tällöin funktio Y, jonka lauseke on

$$Y_k = CA^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä vakio C on mielivaltainen reaalivakio, on täydellistä yhtälöä vastaavan homogeeniyhtälön

$$y_{k+1} - Ay_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

yleinen ratkaisu.

(b) Jos y^* *on täydellisen yhtälön jokin yksityisratkaisu, niin silloin* $Y + y^*$ *on täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu. Jokaiselle täydellisen yhtälön ratkaisulle y löytyy sellainen reaalivakio C, että*

$$y_k = CA^k + y_k^*, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Todistus (vrt. [6, s. 125]). Kohta (a) on tosi seurauslauseen 3.1.1 perusteella. Todistetaan seuraavaksi kohta (b). Olkoon y mikä tahansa täydellisen yhtälön ratkaisu. Funktio $Y + y^*$ on lauseen 2.3 perusteella täydellisen yhtälön ratkaisu kaikilla vakion C saamilla arvoilla. On siis osoitettava, että on olemassa sellainen vakion C arvo, jolla ratkaisut $Y + y^*$ ja y ovat samat. Edellä esitetyn lineaarisia differenssiyhtälöitä koskevan eksistenssi- ja yksikäsitteisyyslauseen 2.1 perusteella kaksi ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälön ratkaisua ovat samat, jos ne saavat saman arvon, kun muuttuja $k = 0$. Jos siis vakion C arvo voidaan valita siten, että

$$y_0 = CA^0 + y_0^*,$$

ovat ratkaisut samat. Koska potenssi $A^0 = 1$ ja vakio $A \neq 0$, on vakion C arvon oltava

$$C = y_0 - y_0^*.$$

Siis etsitty reaalivakion C arvo löytyy. □

Esimerkki 3.1. (Vrt. [6, ss. 125–126]). Tarkastellaan differenssiyhtälöä

$$y_{k+1} = 2y_k - 4, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

Täydellistä yhtälöä (3.12) vastaavan homogeeniyhtälön

$$y_{k+1} - 2y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

yleinen ratkaisu Y on

$$Y_k = C2^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.13}$$

missä C on mielivaltainen reaalivakio.

Täydellisen yhtälön yleistä ratkaisua varten tarvitaan homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun (3.13) lisäksi vielä täydellisen yhtälön (3.12) jokin yksityisratkaisu. Kokeillaan, toteuttaako vakiofunktio yhtälön. Valitaan yritefunktioksi $y_k^* = D$, missä D on vakio, ja sijoitetaan yrite yhtälöön (3.12). Sijoitus antaa yhtälön

$$D = 2D - 4,$$

joten yksityisratkaisuksi saadaan

$$y_k^* = D = 4.$$

Differenssiyhtälön (3.12) täydellinen ratkaisu on siten lauseen 3.2 perusteella

$$y_k = Y_k + y_k^* = C2^k + 4, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Etsitään vielä se differenssiyhtälön (3.12) yksityisratkaisu, joka toteuttaa annetun alkuarvon $y_0 = 6$. Esitetään lisäksi yksityisratkaisun arvot y_1, y_2 ja y_3.

Vakion C arvo voidaan määrittää lauseen 3.2 perusteella seuraavasti:

$$C = y_0 - y^* = 6 - 4 = 2.$$

Alkuarvoehdon toteuttava täydellisen yhtälön yksityisratkaisu on näin ollen

$$y_k = 2 \cdot 2^k + 4, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.14}$$

ja ratkaisun ensimmäiset neljä arvoa ovat

$$\begin{aligned} y_0 &= 6 \\ y_1 &= 2 \cdot 2^1 + 4 = 8 \\ y_2 &= 2 \cdot 2^2 + 4 = 12 \\ y_3 &= 2 \cdot 2^3 + 4 = 20. \end{aligned}$$

Yksityisratkaisu (3.14) voidaan esittää edelleen lukujonona (y_k), missä y_k on lukujonon *yleinen jäsen* [6, s. 69]. Lukujonon jäseninä ovat ratkaisun arvot muuttujan k saamien arvojen mukaisessa järjestyksessä lueteltuina eli $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ Esimerkin tapauksessa lukujono on

$$6, 8, 12, 20, \ldots$$

Tämän lineaarisen ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön ratkaisua koskevan tarkastelun jälkeen esitetään muutamia ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön sovelluksia talouden aihepiiristä. Ensiksi esitettävät sovellukset kuuluvat finanssimatematiikkaan. Sen jälkeen tarkastellaan kahta sovellusta taloustieteen aihepiiristä.

3.2 Korkolaskentaa

Yksinkertaisessa korkolaskussa korkoa lasketaan vain alkuperäiselle pääomalle, kuten pankkitalletukselle tai lainasummalle. Tarkastellaan koron laskemista talletukselle tilanteessa, jossa korkojaksona on yksi vuosi. Olkoot S_0 alussa tehty talletus, S_k vuodelta k kertynyt talletus, joka siis sisältää alkutalletukselle S_0 lasketun koron vuodelta k, ja r vuotuinen korkokanta desimaalilukuna ilmaistuna. Vuosikorolle käytetään merkintää $100r$ % p.a., missä lyhenne p.a. tulee latinan sanoista *per annum*. Yksinkertainen korkolasku voidaan tällöin mallintaa lineaarisella vakiokertoimisella differenssiyhtälöllä

$$S_{k+1} = S_k + rS_0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.15}$$

missä alkuarvo S_0 tunnetaan. ([6, ss. 87–88].)

Differenssiyhtälö (3.15) on alaluvussa 3.1 tarkasteltua muotoa (3.2). Differenssiyhtälössä (3.2) esiintyvät vakiot saavat yksinkertaisen korkolaskun yhtälössä (3.15) arvot $A = 1$ ja $B = rS_0$. Yksinkertaista korkolaskua kuvaavan differenssiyhtälön (3.15) ratkaisu on siten lauseen 3.1 perusteella

$$S_k = S_0 + rS_0k$$

eli

$$S_k = S_0(1 + kr), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Yksinkertaisen korkolaskun ratkaisu (3.16) antaa jakson k loppuun mennessä kertyneen pääoman määrän. Kertynyt pääoma saadaan alkupääoman S_0, jakson k ja korkokannan r funktiona. Kun alkupääoma $S_0 > 0$ ja korkokanta $r > 0$, kasvaa pääomalle kertyvä korko lineaarisesti periodilta toiselle edettäessä. ([6, ss. 87–88].)

Koronkorkolaskussa kultakin korkojaksolta kertynyt korko liitetään pääomaan aina jakson lopussa, jolloin myös korolle lasketaan korkoa toisin kuin yksinkertaisessa korkolaskussa. Korkojakso voi olla lyhempi kuin yksi vuosi, jolloin jakson korkokanta i on jakson pituutta vastaava osuus vuosikorosta. Siten esimerkiksi vuosikorkoa 4 % p.a. vastaava puolivuosikorko on 2 % p.s. (lat. *per semester*) eli $i = 0{,}02$, ja vuosikorkoa vastaava neljännesvuosikorko on 1 % p.q. (lat. *per quartal*) eli $i = 0{,}01$.

Olkoot S_0 alkutalletus ja S_k talletus, joka on kertynyt kuluneilta jaksoilta aina jakson k loppuun saakka, sekä i jakson korkokanta. Tällöin koronkorkolasku voidaan mallintaa lineaarisella vakiokertoimisella differenssiyhtälöllä

$$S_{k+1} = S_k + iS_k \quad \text{eli} \quad S_{k+1} = (1 + i)S_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.17}$$

missä $S_k = S_0$, kun $k = 0$. Differenssiyhtälössä (3.2) esiintyvät vakiot saavat koronkorkolaskun yhtälössä (3.17) arvot $A = 1 + i$ ja $B = 0$. Koronkorkolaskua kuvaavan differenssiyhtälön (3.17) ratkaisu on näin ollen lauseen 3.1 perusteella

$$S_k = (1 + i)^k S_0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

Ratkaisussa esiintyvää lauseketta $1 + i$ kutsutaan *korkotekijäksi*. ([6, s. 88].)

Tarkastellaan yksityiskohtaisemmin pääoman kertymistä koronkorkolaskussa, kun talletus on tehty yhdeksi vuodeksi. Jaetaan vuosi kahteen tai useampaan yhtä pitkään jaksoon. Mitä lyhyempi jakson pituus on, sitä useammin korko liitetään pääomaan. Jakson korkokanta i saadaan jakamalla vuotuinen korkokanta r jaksojen lukumäärällä m. Kun jaksojen lukumäärä kasvaa rajatta, lähenee koronkorkolaskun ratkaisussa (3.18) esiintyvän korkotekijän potenssin raja-arvo

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \lim_{m/r\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m/r}\right)^{m/r}\right)^r$$

potenssia e^r, missä kantalukuna on *Neperin luku* e ja eksponenttina vuotuinen korkokanta r [12, ss. 52–53]. *Jatkuvassa korkolaskussa* korko liitetään jatkuvasti pääomaan, ja kertynyt pääoma lasketaan eksponenttifunktion avulla (ks. [12, ss. 52–54] ja [19, ss. 56–57]).

Esimerkki 3.2. Jatkuva korkolasku kasvattaa 100 euron talletusta vuosikoron r ollessa 6 % niin, että kertynyt pääoma vuoden lopussa on

$$\mathrm{e}^{0{,}06}\cdot 100 = 106{,}184$$

eli yhteensä 106,18 euroa (vrt. [12, s. 54]).

Talletuksen prosentuaalista kasvua yhden vuoden aikana kutsutaan *vuotuiseksi efektiiviseksi korkoprosentiksi* (vrt. [18, s. 58]). Talletuksen S_0 vuotuinen efektiivinen korkoprosentti r_E (vrt. [12, s. 55]), kun koronkorkolaskussa vuoteen sisältyvien jaksojen lukumäärä on m ja vuotuinen korkokanta r, on

$$\begin{aligned} r_E &= \frac{S_m - S_0}{S_0} \\ &= \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m S_0 - S_0}{S_0} \\ &= \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.3. Talletuksen vuotuinen efektiivinen korkoprosentti, kun vuotuinen korkokanta on 6 % ja korko lisätään pääomaan aina kahden kuukauden välein, on

$$r_E = \left(1+\frac{0{,}06}{6}\right)^6 - 1 = 0{,}06152$$

eli 6,152 % (vrt. [18, s. 59]). Edellä lasketun vuotuisen efektiivisen korkoprosentin vertaaminen vuosikorkokantaan tarjoaa esimerkin siitä, kuinka pääoman kertyminen on nopeampaa koronkorkolaskussa kuin yksinkertaisessa korkolaskussa.

Tarkastellaan seuraavaksi *jaksollisia* suorituksia eli korkojaksoittain toistuvia yhtä suuria suorituksia. Ensimmäisenä esimerkkinä jaksollisista suorituksista tarkastellaan toistuvasti jakson lopussa tehtyä vakiosuuruista talletusta R. Olkoot A_k pääoma, joka on kertynyt jakson k loppuun mennessä, ja jakson korkokanta i. Pääoman kertymistä voidaan tällöin mallintaa lineaarisella vakiokertoimisella differenssiyhtälöllä

$$A_{k+1} = (1+i)A_k + R, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.19}$$

missä kertynyt pääoma alkuhetkellä $A_0 = 0$. ([6, s. 91].)

Differenssiyhtälön (3.2) vakiot saavat yhtälössä (3.19) arvot $A = 1 + i$ ja $B = R$. Näin ollen differenssiyhtälön (3.19) ratkaisu on lauseen 3.1 perusteella

$$A_k = R\frac{1-(1+i)^k}{1-(1+i)} = R\frac{(1+i)^k - 1}{i}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.20}$$

Ratkaisu (3.20) voidaan esittää toistuvan vakiosuuruisen talletuksen R ja *jakson lopussa tehtävien yhtä suurten suoritusten prolongointitekijän* $s_{\overline{k}|\,i}$ (ks. [19, s. 49]) tulona

$$A_k = R\, s_{\overline{k}|\,i}, \tag{3.21}$$

missä prolongointitekijä on

$$s_{\overline{k}|\,i} = \frac{(1+i)^k - 1}{i}. \tag{3.22}$$

Toisena esimerkkinä jaksollisista suorituksista tarkastellaan tilannetta, jossa lainapääomaa A lyhennetään yhtä suurissa maksuerissä R aina jakson lopussa ja jossa jakson korkoprosentti on i. Maksuerästä suoritetaan ensiksi päältä pois lainan korot, ja jäljelle jäävällä osuudella lyhennetään pääomaa. Jos lainan takaisinmaksuajan pituus on kiinteä, lainaa kutsutaan *annuiteettilainaksi*. Olkoon P_k jäljellä oleva lainapääoma k:nnen maksuerän lopussa. Se kasvaa korkoa seuraavan jakson loppuun saakka, jolloin suoritetaan uusi maksuerä R. Tällöin jäljellä oleva lainapääoma P_{k+1} saadaan differenssiyhtälöstä

$$P_{k+1} = P_k + iP_k - R$$

eli

$$P_{k+1} = (1+i)P_k - R, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.23}$$

Lisäksi tiedetään, että lainapääoman määrä alkuhetkellä on

$$P_0 = A. \tag{3.24}$$

Ratkaistaan edellä muodostettu differenssiyhtälö (3.23). ([6, ss. 88–89].)

Differenssiyhtälön (3.2) vakiot saavat yhtälössä (3.23) arvot $A = 1+i$ ja $B = -R$. Ratkaisu jäljellä olevaa lainapääomaa mallintavalle differenssiyhtälölle (3.23), missä lainapääoman alkuarvo (3.24) tunnetaan, on siten lauseen 3.1 perusteella

$$P_k = (1+i)^k A + (-R)\frac{1-(1+i)^k}{1-(1+i)}$$

eli

$$P_k = A(1+i)^k - R\frac{(1+i)^k - 1}{i}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.25}$$

Ratkaisussa (3.25) yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi on alussa otetun lainasumman koronkorkolaskussa kertynyt määrä jakson k päätyttyä. Toinen termi on jaksollisten yhtä suurien maksuerien R samassa ajassa kerryttämä määrä. Näiden erotus antaa jäljellä olevan lainan määrän. ([6, s. 89].)

Edellä esitetyn perusteella voidaan ratkaista, kuinka suuri jaksollisen vakiosuuruisen maksuerän eli *annuiteetin* R on oltava, kun lainasumma A maksetaan takaisin n erässä [19, s. 50]. Tällöin n. maksuerän jälkeen lainapääoman P_n määrän on oltava 0. Ratkaisun (3.25) perusteella saadaan siten yhtälö

$$0 = A(1+i)^n - R\frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

mistä annuiteetti R voidaan ratkaista [6, s. 89]. Annuiteetiksi R saadaan

$$R = A(1+i)^n \frac{i}{(1+i)^n - 1} = A\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Annuiteettilainan takaisinmaksuerän R suuruus voidaan edelleen laskea kätevästi niin sanotun *kuoletustekijän* $c_{\overline{n}|\,i}$ avulla, kun tiedetään jaksojen (maksuerien) lukumäärä n ja jakson korkoprosentti i [19, s. 50]. Annuiteetti R saadaan tällöin yhtälöstä

$$R = A\, c_{\overline{n}|\,i}, \tag{3.26}$$

missä A on lainasumma. Annuiteetit lasketaan tosin nykyään yhä useammin taulukkolaskelmaohjelmistolla.

Kuoletustekijän $c_{\overline{n}|\,i}$ käänteisluku on *jakson lopussa suoritettujen yhtä suurten maksujen diskonttaustekijä* $a_{\overline{n}|\,i}$ (ks. [19, ss. 49–50]). Diskonttaustekijää $a_{\overline{n}|\,i}$ käytetään laskettaessa jaksollisten yhtä suurten suoritusten nykyarvojen summaa (vrt. [19, ss. 49–50]). Jos yhtälössä (3.26) tunnetaan annuiteetin R suuruus, niin lainan pääoma-arvo alkuhetkellä saadaan yhtälöstä

$$A = R\frac{1}{c_{\overline{n}|\,i}} = R\, a_{\overline{n}|\,i}, \tag{3.27}$$

missä jakson lopussa suoritettujen yhtä suurten maksujen diskonttaustekijä on

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.28}$$

3.3 Kansantulon kasvumalli

Differenssiyhtälöiden avulla voidaan mallintaa kansantalouden kehitystä ajassa periodeittain. Tarkastellaan kansantulon kasvumallia, joka pohjautuu erityisesti Roy Harrodin esittämään dynaamiseen teoriaan (ks. tarkemmin [1, ss. 350–357] ja [8, ss. 14–33]). Tarkastelussa seurataan Goldbergin [6, ss. 93–96] esitystä asiasta. Kasvumallia graafisesti analysoinut K. E. Boulding (erityisesti [2, ss. 492–495]) kutsuu mallin dynamiikkaa ”Harrod–Domar–Hicks -dynamiikaksi” [6, s. 93]. Seuraavassa keskitytään lähinnä mallin matemaattiseen tarkasteluun.

Kansantulon kasvumallissa esiintyy vain kolme funktiota: kansantulo Y, yksityinen kulutus C ja investoinnit I. Funktiot on määritelty ajanhetkillä $t = 0, 1, 2, \ldots$ Kullakin periodilla kansantulo Y_t käytetään yksityiseen kulutukseen C_t ja investointeihin I_t eli

$$Y_t = C_t + I_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.29}$$

Kulutuksen ajatellaan riippuvan lineaarisesti kansantulosta. Kulutusfunktio voidaan tällöin esittää muodossa

$$C_t = c + mY_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.30}$$

missä vakio c on kulutuksen C_t arvo, kun $Y_t = 0$, ja vakio m eli *rajakulutusalttius* ilmaisee, kuinka kulutus muuttuu kansantulon muuttuessa yhden yksikön verran. Kulutusfunktio säilyy mallissa koko ajan samana, sillä vakiot c ja m eivät riipu ajasta t. Vakioille asetetaan seuraavat rajoitukset:

$$c \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad 0 < m < 1. \tag{3.31}$$

Rajakulutusalttiudelle m asetetun ehdon perusteella kansantulon kasvu lisää kulutusta mutta ei täydellä määrällään. ([6, ss. 93–96].)

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa taloudessa vallitsee täystyöllisyys ja talouden tuotantokapasiteetti on täyskäytössä. Osa kansantulosta kulutetaan, loput investoidaan. Investoinnit kasvattavat tuotantokapasiteettia, mikä nostaa kansantulon tasoa seuraavalla periodilla. Kansantulon kasvusta kulutetaan rajakulutusalttiuden m määräämä osuus. Täystyöllisyyden ylläpitäminen edellyttää, että investointien on kasvettava. Kansantuote jatkaa tasaisesti kasvuaan, jos investoinnit kasvavat riittävästi. Investointien kasvuvauhtia, joka riittää täystyöllisyyden ylläpitämiseen, Harrod kutsuu nimellä *warranted rate* (engl.). (Vrt. [2, ss. 492–493].)

Seuraavaksi esitetään, kuinka investointien taso vaikuttaa kansantuloon. Olkoon vakio r niin kutsuttu *kasvutekijä* (engl. *growth factor*), joka ilmaisee, kuinka kansantulo muuttuu investointien kasvaessa yhden yksikön verran [6, s. 94]. Investointien lisäyksen oletetaan kasvattavan kansantuloa, joten kasvutekijä on

$$r > 0. \tag{3.32}$$

Kansantulon muutos voidaan tällöin esittää yhtälöllä

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = rI_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.33}$$

Talouden dynamiikan analyysi on rakennettavissa edellä esitetyille yhtälöille. Johdetaan yhtälöiden perusteella aluksi differenssiyhtälöt kansantulolle Y ja investoinneille I.

Kansantulon kehitystä kuvaava differenssiyhtälö saadaan, kun yhtälöön (3.33) sijoitetaan investointien ja yksityisen kulutuksen lausekkeet yhtälöistä (3.29) ja (3.30).

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - Y_t &= rI_t \\ &= r(Y_t - C_t) \\ &= rY_t - r(c + mY_t) \end{aligned}$$

eli

$$Y_{t+1} = [1 + r(1 - m)]Y_t - rc, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.34}$$

Yhtälö (3.34) on lineaarinen ensimmäisen kertaluvun vakiokertoiminen differenssiyhtälö, jonka ratkaisu tunnetaan lauseen 3.1 perusteella. Ennen yhtälön ratkaisemista johdetaan kuitenkin differenssiyhtälö myös investointimenoille. ([6, ss. 94–95].)

Yhtälön (3.29) perusteella voidaan kirjoittaa investointien differenssiä ΔI_t koskeva yhtälö

$$\begin{aligned} I_{t+1} - I_t &= (Y_{t+1} - C_{t+1}) - (Y_t - C_t) \\ &= (Y_{t+1} - Y_t) - (C_{t+1} - C_t), \end{aligned}$$

joka sievenee yhtälöitä (3.33) ja (3.30) soveltamalla edelleen muotoon

$$\begin{aligned} I_{t+1} - I_t &= rI_t - m(Y_{t+1} - Y_t) \\ &= rI_t - mrI_t. \end{aligned}$$

Lopuksi päädytään homogeeniseen differenssiyhtälöön

$$I_{t+1} = [1 + r(1 - m)]I_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

Rajakulutusalttiudesta m ja kasvutekijästä r tehtyjen oletusten (3.31) ja (3.32) nojalla $r(1 - m) > 0$, joten investoinnit I_t on kasvava ajan t funktio. Vaikka kasvuvauhti on vakio $r(1 - m)$, johtaa se ajan kuluessa investointien rajoittamattomaan kasvuun. Lauseen 3.1 differenssiyhtälölle (3.35) antama ratkaisu on

$$I_t = [1 + r(1 - m)]^t I_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.36}$$

missä I_0 on investointien alkuarvo. ([6, s. 95].)

Kansantuloa Y koskevan differenssiyhtälön (3.34) ratkaisu saadaan lauseen 3.1 perusteella, kun sijoitetaan vakioksi $A = 1 + r(1 - m)$ ja $B = -rc$. Kun alkuarvo Y_0 tunnetaan, ratkaisu on

$$Y_t = [1 + r(1 - m)]^t Y_0 - rc\frac{1 - [1 + r(1 - m)]^t}{1 - [1 + r(1 - m)]}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.37}$$

Ottamalla potenssilauseke $[1+r(1-m)]^t$ yhteiseksi tekijäksi saadaan ratkaisu (3.37) ensiksi muotoon

$$Y_t = [1 + r(1 - m)]^t \left(Y_0 - \frac{-rc}{1 - [1 + r(1 - m)]}\right) + \frac{-rc}{1 - [1 + r(1 - m)]}$$

ja tästä edelleen sievennettyyn muotoon

$$(3.38)\qquad Y_t = [1 + r(1-m)]^t \left(Y_0 - \frac{c}{1-m}\right) + \frac{c}{1-m}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Jos yhtälössä (3.38) kansantulon alkuarvo Y_0 on suurempi kuin $c/(1-m)$, kasvaa kansantulo Y_t ajan t kuluessa rajoituksetta, sillä potenssin kantalukuna olevan lausekkeen $1 + r(1-m)$ arvo on suurempi kuin 1. ([6, s. 95].)

Harrod tarkastelee erikoistapausta, jossa kulutusfunktion vakio c saa arvon 0. Tällöin differenssiyhtälöt (3.36) ja (3.38) ovat samaa muotoa. Kansantulon ja investointien on sellaisessa tilanteessa kasvettava samalla vauhdilla $r(1-m)$, jotta täystyöllisyys säilyisi. Tämä kasvuvahti on Harrodin mallin mukainen *warranted rate*. ([6, ss. 95–96].)

3.4 Passiivisten varastomuutosten systeemi

Lloyd A. Metzler esitti 1941 teorian varastoinvestointien syklisyydestä (ks. [14, ss. 113–129]). Suomessa Sirkka Hämäläinen on analysoinut *Metzlerin perusmallia* ja siihen esitettyjä muutoksia artikkelissaan ”Varastoinvestointien ja suhdannevaihtelujen välistä riippuvuutta koskevista teoreettisista hypoteeseista” (ks. tarkemmin [10, ss. 165–179]). Varastoinvestointien sijaan voidaan puhua varastomuutoksista [10, s. 165]. Tässä alaluvussa tarkastellaan Metzlerin lähtökohdakseen ottamaa varastomuutosmallia, jossa kulutushyödykkeiden tuotanto määräytyy pelkästään odotetun myynnin perusteella (ks. [14, ss. 115–116]). Tätä ensimmäistä varastomuutosmallia voidaan nimittää passiivisten varastomuutosten systeemiksi, sillä varastojen tasolla ei ole vaikutusta tuotantomäärään. Toinen varastomuutosmalli, jossa varastojen tasossa tapahtuvat muutokset otetaan huomioon ja jossa varastomuutokset ovat syklisiä, esitetään alaluvussa 4.5. Tutkielmassa keskitytään varastomuutosten dynamiikan matemaattiseen mallintamiseen Goldbergin [6, ss. 98–102] asiaa koskevan esityksen pohjalta.

Kummassakin varastomuutosmallissa varastot toimivat puskurina kulutushyödykkeiden kysynnän ylittäessä niiden tuotannon määrän (ks. [14, s. 115]). Ensimmäisessä varastomuutosmallissa oletetaan, että yrittäjät eivät ota huomioon varastojen tasossa tapahtuneita muutoksia päättäessään kulutushyödykkeiden tuotantomäärästä, mitä Metzlerin mukaan ei voida pitää realistisena oletuksena [14, s. 117]. Tuotanto varastoja varten s_t on siis ensimmäisessä varastomuutosmallissa nolla. Kummassakin varastomuutosmallissa oletetaan, että kullakin periodilla osa talouden kokonaistuotannosta käytetään kiinteisiin autonomisiin investointeihin v_0, jotka eivät määräydy mallin perusteella (vrt. [10, s. 166]). Periodin t kokonaistulo y_t (eli kokonaistuotanto [10, s. 170]) on ensimmäisessä varastomuutosmallissa yhtä suuri kuin kyseisen periodin tuotannon u_t ja kiinteiden autonomisten investointien v_0 summa. Kokonaistulolle voidaan siten esittää yhtälö

$$(3.39)\qquad y_t = u_t + v_0.$$

Toisessa varastomuutosmallissa kokonaistulon yhtälön (3.39) oikean puolen summalausekkeeseen lisätään tuotanto varastoja varten s_t. ([6, ss. 99–100].)

Kummassakin varastomuutosmallissa päätös tuotantomäärästä tehdään aina kunkin periodin alussa edellisen periodin toteutuneen myynnin perusteella. Oletetaan, että kunkin periodin myynti on aina rajakulutusalttiuden β suuruinen osuus periodin kokonaistulosta. Lisäksi oletetaan, että periodin t suunnitelman mukainen tuotantomäärä u_t on yhtä suuri kuin edellisen periodin $t-1$ toteutunut myynti eli

$$u_t = \beta y_{t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.40}$$

Edellä tehtyjen oletusten ja kokonaistulon yhtälön (3.39) perusteella voidaan esittää passiivisten varastomuutosten systeemi. ([6, ss. 99–100].)

Kun suunnitelman mukainen tuotantomäärä myyntiä varten u_t yhtälöstä (3.40) sijoitetaan yhtälöön (3.39), saadaan ensimmäisen kertaluvun vakiokertoiminen differenssiyhtälö

$$y_t = \beta y_{t-1} + v_0, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.41}$$

Indeksointia muokkaamalla yhtälö (3.41) saadaan alkamaan periodista $t = 0$. Tällöin kokonaistulon y_t differenssiyhtälö on

$$y_{t+1} = \beta y_t + v_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.42}$$

Differenssiyhtälön (3.42) ratkaisu saadaan jälleen lauseen 3.1 perusteella, kun differenssiyhtälön (3.2) vakioiden arvoiksi sijoitetaan $A = \beta$ ja $B = v_0$. Lisäksi alkuarvo y_0 oletetaan tunnetuksi. Yhtälön (3.42) ratkaisu on tällöin

$$y_t = \beta^t y_0 + v_0 \frac{1-\beta^t}{1-\beta}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

ja se voidaan sieventää edelleen muotoon

$$y_t = \beta^t \left(y_0 - \frac{v_0}{1-\beta} \right) + \frac{v_0}{1-\beta}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.43}$$

Ratkaisussa (3.43) on tulontekijänä potenssi β^t, jonka kantalukuna on rajakulutusalttius β. Rajakulutusalttiuden β arvon ollessa välillä $0 < \beta < 1$ pienenee potenssin arvo sitä mukaa, kun eksponentissa oleva muuttuja t saa yhä suurempia lukuarvoja. Silloin kokonaistulon arvoista muodostuva lukujono (y_t) suppenee kohti raja-arvoa $y^* = v_0/(1-\beta)$, jonka suuruus riippuu rajakulutusalttiudesta β ja kiinteistä autonomisista investoinneista v_0. Jos kokonaistulon arvo on alkutilanteessa yhtä suuri kuin raja-arvo y^*, ei kokonaistulossa tapahdu muutoksia seuraavilla periodeilla. Silloin kun kokonaistulon alkuarvo on suurempi kuin raja-arvo y^*, pienenee kokonaistulo monotonisesti kohti raja-arvoa y^*. Jos taas kokonaistulon alkuarvo on pienempi kuin raja-arvo y^*, kasvaa kokonaistulo monotonisesti kohti raja-arvoa y^*. (Vrt. [6, ss. 86 ja 100–101].)

Esimerkki 3.4. (Vrt. [6, ss. 101–102]). Valaistaan passiivisten varastomuutosten systeemiä esimerkin avulla. Oletetaan, että rajakulutusalttiuden β arvo on 0,5 ja kiinteät autonomiset investoinnit v_0 ovat 100 yksikköä. Oletetaan lisäksi, että on saavutettu tasapainotila, jossa kokonaistulo y_t on pysyvästi 200 yksikköä. Kokonaistulo on tällöin yhtä suuri kuin raja-arvo $y^* = v_0/(1-\beta) = 100/(1-0{,}5) = 200$ yksikköä. Tilanne kuitenkin muuttuu, kun kiinteät autonomiset investoinnit v_0 laskevat 20 yksikköä. Tällöin uudeksi raja-arvoksi tulee $y^* = 80/(1-0{,}5) = 160$ yksikköä.

Olkoon periodi $t = 0$ ensimmäinen periodi, jolloin kiinteät autonomiset investoinnit v_0 saavat arvon 80 yksikköä. Kiinteiden autonomisten investointien muutoksen ei kuitenkaan ajatella vielä näkyvän periodin kokonaistulossa (ks. [6, ss. 101–102]). Periodin kokonaistulon arvon oletetaan siten edelleen olevan 200 yksikköä. Lisäksi alkuvaraston arvoksi periodin lopussa oletetaan 100 yksikköä. Passiivisten varastomuutosten systeemin kehitys periodilta toiselle edettäessä esitetään taulukossa 3.1 (vrt. [6, s. 102]).

Periodilla $t = 1$ tuotanto myyntiä varten u_1 on 100 yksikköä perustuen edellisen periodin toteutuneeseen myyntiin. Kokonaistulo on tällöin $y_1 = u_1 + v_0 = 100 + 80 = 180$ yksikköä, ja myynti on siten $\beta y_1 = 0{,}5 \cdot 180 = 90$ yksikköä. Koska periodilla tuotetaan 10 yksikköä enemmän kuin myydään, kasvavat varastot 10 yksiköllä. Periodilla $t = 2$ tuotanto on laskettu 90 yksikköön. Periodin kokonaistulon laskiessa 170 yksikköön jää myynti 85 yksikköön. Varastot kasvavat siten 5 yksikköä.

Taulukko 3.1. Passiivisten varastomuutosten systeemi.

Periodi t	Tuotanto $u_t = \beta y_{t-1}$	Kokonaistulo $y_t = u_t + v_0$	Myynti βy_t	Varastot i_t
0	–	200	100	100
1	100	180	90	110
2	90	170	85	115
3	85	165	82,5	117,5
4	82,5	162,5	81,25	118,75
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
	80	160	80	120

Kokonaistulon y_t arvot voidaan laskea ratkaisun (3.43) avulla. Esimerkin tilanteessa kokonaistulon arvot saadaan yhtälöstä

$$y_t = 0{,}5^t(200 - 160) + 160$$

eli

$$y_t = 40 \cdot 0{,}5^t + 160, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.44}$$

Alkutilanteessa kokonaistulon arvo on 200 yksikköä. Arvo ylittää raja-arvon, joka on 160 yksikköä. Samalla kun kokonaistulo y_t lähestyy periodilta toiselle edettäessä raja-arvoa 160 yksikköä, lähestyy myynti 80 yksikköä. Myynnin väheneminen näkyy vastaavan suuruisena varastojen kasvuna. (Vrt. [6, s. 102].)

4 Lineaarinen toisen kertaluvun differenssiyhtälö

4.1 Toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön ratkaisu

Luvussa 4 siirrytään lineaarisen toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön tarkasteluun. Alaluvussa 4.1 käsitellään sekä homogeenisen että täydellisen differenssiyhtälön yleistä ratkaisua Goldbergin [6] esitystä seuraten ja sitä jonkin verran täydentäen. Alaluvussa 4.2 esitetään perusteellisesti homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu. Alaluvussa 4.3 esitetään niin sanottu määräämättömien kertoimien menetelmä, jota voidaan käyttää täydellisen differenssiyhtälön yksityisratkaisun löytämiseksi. Alaluvuissa 4.4 ja 4.5 keskitytään toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön sovelluksiin.

Lineaarinen toisen kertaluvun vakiokertoiminen differenssiyhtälö voidaan esittää muodossa

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.1}$$

missä kertoimet a_1 ja a_2 ovat vakioita, $a_2 \neq 0$ ja yhtälön oikean puolen funktio r_k on määritelty kaikilla muuttujan k arvoilla määrittelyjoukossa $\mathbb{N}_0$. Täydellistä differenssiyhtälöä (4.1) vastaava homogeeninen differenssiyhtälö on muotoa

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.2}$$

missä yhtälön oikean puolen funktio r_k on identtisesti nolla. ([6, s. 122].)

Toisen kertaluvun differenssiyhtälön esitysmuotoon (4.1) päästään muokkaamalla edellä alaluvussa 2.2 esitettyä differenssiyhtälöä (2.6), jossa termien y_{k+2} ja y_k kertoimet $f_0(k)$ ja $f_2(k)$ oletetaan aina nollasta eroaviksi. Tehdään nyt lisäoletus, että kertoimet $f_0(k)$, $f_1(k)$ ja $f_2(k)$ ovat vakioita. Yhtälö (4.1) saadaan tällöin jakamalla yhtälö (2.6) puolittain termin y_{k+2} nollasta eroavalla vakiokertoimella $f_0(k)$ ja nimeämällä yhtälön termit uudelleen seuraavasti [6, s. 122]:

$$a_1 = \frac{f_1(k)}{f_0(k)}, \; a_2 = \frac{f_2(k)}{f_0(k)} \; \text{ ja } \; r_k = \frac{g(k)}{f_0(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Otetaan ensimmäiseksi tarkasteltavaksi homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu. Tutkitaan, mitä ehtoja homogeenisen differenssiyhtälön (4.2) yksityisratkaisuille $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ tulee asettaa, jotta niistä muodostettu funktio Y eli funktio

$$Y_k = C_1 y_k^{(1)} + C_2 y_k^{(2)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.3}$$

missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita, olisi homogeenisen differenssiyhtälön (4.2) yleinen ratkaisu [6, ss. 128–131].

Yleinen ratkaisu Y antaa minkä tahansa homogeenisen yhtälön yksityisratkaisun y, kun vakioiden C_1 ja C_2 arvot vain valitaan sopivasti. Eksistenssi- ja yksikäsitteisyyslauseen 2.1 perusteella tiedetään, että kaksi lineaarisen toisen kertaluvun differenssiyhtälön ratkaisua ovat samat silloin, kun ne antavat samat arvot kahdella peräkkäisellä muuttujan k arvolla, esimerkiksi muuttujan arvoilla $k = 0$ ja $k = 1$. Jos siis vakioiden C_1 ja C_2 arvot voidaan valita niin, että yhtäsuuruudet

$$Y_0 = y_0 \qquad \text{ja} \qquad Y_1 = y_1 \tag{4.4}$$

ovat voimassa millä tahansa arvoilla y_0 ja y_1, niin funktio Y on silloin homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu. ([6, ss. 128–129].)

Kun identiteettien (4.4) vasemman puolen lausekkeet kirjoitetaan funktion Y antamassa muodossa (4.3), saadaan lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{cases} C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)} = y_0 \\ C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} = y_1 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} y_0^{(1)} C_1 + y_0^{(2)} C_2 = y_0 \\ y_1^{(1)} C_1 + y_1^{(2)} C_2 = y_1, \end{cases} \tag{4.5}$$

josta tuntemattomat vakiot C_1 ja C_2 pyritään ratkaisemaan. Ratkaisun on toteutettava kumpikin yhtälö samanaikaisesti. Yhtälöparin (4.5) yksikäsitteisen ratkaisun löytymiselle voidaan esittää ehto yhtälöparin vasemman puolen kertoimista muodostettavan matriisin determinantin avulla. Yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo riippuu tarkemmin siitä, ovatko matriisin pystyvektorit, jotka siis muodostuvat yksityisratkaisujen saamista arvoista muuttujan arvoilla $k = 0$ ja $k = 1$, lineaarisesti riippumattomia vai eivät. (Vrt. [6, ss. 128–129].)

Vektoreiden lineaarinen riippuvuus vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$ tarkoittaa sitä, että kumpi tahansa kahdesta vektorista voidaan saada kertomalla toinen vektoreista skalaarilla [7, s. 504]. Annetaan seuraavaksi vektoreiden lineaariselle riippuvuudelle ja riippumattomuudelle määritelmä, joka esitetään monissa lineaarialgebraa käsittelevissä oppikirjoissa, kuten teoksessa [7, s. 504].

Määritelmä 4.1. Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektoriavaruuden V vektoreita. Vektorit ovat *lineaarisesti riippuvia*, jos on olemassa n sellaista skalaaria $c_1, c_2, \ldots, c_n$, joista kaikki eivät ole yhtä suuria kuin 0 ja jotka toteuttavat yhtälön

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Jos vektorit eivät ole lineaarisesti riippuvia, niin niiden sanotaan olevan *lineaarisesti riippumattomia*.

Lineaarisen yhtälöparin ratkaisun esittämistä varten otetaan matriisilaskennasta käyttöön muutama apuneuvo. Ensiksi määritellään 2×2 -neliömatriisin determinantti [7, s. 448]. Sen jälkeen määritellään neliömatriisin käänteismatriisi [7, s. 416].

Määritelmä 4.2. Olkoon matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2 -neliömatriisi. Matriisin A *determinantti* on tällöin

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Määritelmä 4.3. Olkoot matriisit A ja B $n \times n$ neliömatriiseja. Jos matriisi B toteuttaa ehdon $AB = BA = I$, missä matriisi I on *identiteettimatriisi*, on matriisi B matriisin A *käänteismatriisi* ja sille käytetään merkintää A^{-1}. Jos matriisille A löytyy käänteismatriisi, sanotaan matriisin A olevan *kääntyvä*.

Lause 4.1. *Olkoon matriisi*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2 *-neliömatriisi. Matriisilla A on käänteismatriisi, jos ja vain jos* $\det A \neq 0$. *Tällöin matriisin A käänteismatriisi A^{-1} on*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Todistus [7, s. 420]. Lauseen todistus esitetään mainitussa teoksessa. □

Lause 4.2. *Lineaarisella kaksi tuntematonta muuttujaa x_1 ja x_2 sisältävällä yhtälöparilla*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \textit{eli matriisiyhtälöllä} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos $\det A \neq 0$. *Yksikäsitteinen ratkaisu, jos se on olemassa, on*

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Todistus [7, ss. 374 ja 420–421]. Lauseen todistus esitetään mainitussa teoksessa. □

Esitetään seuraavaksi homogeenisen differenssiyhtälön (4.2) yleinen ratkaisu.

Lause 4.3. *Olkoot $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ kaksi homogeenisen differenssiyhtälön* (4.2) *yksityisratkaisua ja olkoon funktio Y niiden lineaarikombinaatio*

$$Y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)},$$

missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Jos determinantti

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = y_0^{(1)} y_1^{(2)} - y_0^{(2)} y_1^{(1)} \neq 0, \tag{4.6}$$

niin funktio Y on homogeenisen differenssiyhtälön (4.2) *yleinen ratkaisu.*

Todistus [6, s. 131]. Lauseen 2.2 perusteella funktio Y on differenssiyhtälön (4.2) ratkaisu. Siksi nyt on osoitettava vain, että vakiot C_1 ja C_2 voidaan minkä tahansa homogeeniyhtälön yksityisratkaisun y kohdalla valita niin, että ratkaisut Y ja y ovat samat. Eksistenssi- ja yksikäsitteisyyslauseen 2.1 perusteella riittää osoittaa, että funktiot Y ja y saavat samat arvot kahdella perättäisellä muuttujan k arvolla, esimerkiksi silloin kun $k = 0$ ja $k = 1$. Vakioiden C_1 ja C_2 arvot on valittava siten, että $Y_0 = y_0$ ja $Y_1 = y_1$ millä tahansa arvoilla y_0 ja y_1. Vakioiden C_1 ja C_2 on tällöin toteuttava lineaarinen yhtälöpari (4.5). Koska oletuksen mukaan vakioiden C_1 ja C_2 kertoimien muodostaman 2×2 -neliömatriisin determinantin arvo on eri suuri kuin 0, on yhtälöparilla (4.5) lauseen 4.2 perusteella yksikäsitteinen ratkaisu ja jokaista arvojen y_0 ja y_1 valintaa vastaa yksikäsitteinen pari vakioita C_1 ja C_2. □

Lauseessa 4.3 ehto homogeenisen differenssiyhtälön (4.2) yleisen ratkaisun olemassaololle esitetään determinantin avulla. Differenssiyhtälöiden yhteydessä ehto (4.6) esitetään tavallisesti Casoratin determinantin avulla (vrt. [6, s. 134] ja [11, ss. 63–65]). Määritellään Casoratin determinantti seuraavaksi.

Määritelmä 4.4. Olkoot $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ mitkä tahansa kaksi joukossa $\mathbb{N}_0$ määriteltyä funktiota. *Casoratin determinantti* $w(k)$ on tällöin

$$w(k) = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Homogeeniselle differenssiyhtälölle löytyy yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos Casoratin determinantin $w(0)$ arvo on eri suuri kuin 0. Tällöin yksityisratkaisut $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ ovat lineaarisesti riippumattomat. (Ks. [11, ss. 63–65].)

Yksityisratkaisujen lineaarinen riippumattomuus on siis edellä haettu ehto. Yksittäisratkaisujen on oltava lineaarisesti riippumattomia muodostaakseen ratkaisujen perusjoukon [6, ss. 132 ja 134].

Määritelmä 4.5. Kaksi homogeenisen differenssiyhtälön (4.2) yksityisratkaisua $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$, jotka toteuttavat ehdon (4.6), muodostavat homogeenisen differenssiyhtälön *ratkaisujen perusjoukon* (engl. *fundamental set of solutions*).

Seuraavaksi tarkastellaan täydellisen differenssiyhtälön (4.1) ratkaisua ja vastataan Goldbergin [6, ss. 130 ja 132] esittämään kysymykseen, onko täydellisen yhtälön (4.1) yleinen ratkaisu homogeenisen yhtälön (4.2) yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön (4.1) jonkin yksityisratkaisun summa $Y + y^*$.

Lause 4.4. *Jos y^* on täydellisen differenssiyhtälön* (4.1) *jokin yksityisratkaisu ja ratkaisut $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ muodostavat homogeenisen differenssiyhtälön* (4.2) *ratkaisujen perusjoukon, niin silloin täydellisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on*

$$y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + y^*,$$

missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.

Todistus [6, s. 132]. Lauseen 2.3 perusteella funktio y on täydellisen differenssiyhtälön (4.1) ratkaisu. Todistus etenee aivan samaan tapaan kuin lauseen 4.3 todistus. Nyt on todistettava, että on olemassa sellaiset vakiot C_1 ja C_2, jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y_0^{(1)}C_1 + y_0^{(2)}C_2 = y_0 - y_0^* \\ y_1^{(1)}C_1 + y_1^{(2)}C_2 = y_1 - y_1^*. \end{cases}$$

Koska $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ muodostavat oletuksen mukaan differenssiyhtälön ratkaisujen perusjoukon, ovat etsityt vakiot C_1 ja C_2 olemassa millä tahansa arvoilla y_0 ja y_1. □

Vastaus Goldbergin esittämään kysymykseen on siten lauseen 4.4 perusteella myönteinen. Tämän differenssiyhtälön ratkaisua koskevan yleisen tarkastelun jälkeen siirrytään tarkastelemaan yksityiskohtaisesti homogeenisen differenssiyhtälön yleistä ratkaisua.

4.2 Homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu

Homogeenisen toisen kertaluvun differenssiyhtälön (4.2) yleinen ratkaisu perustuu kahden lineaarisesti riippumattoman ratkaisun muodostaman ratkaisujen perusjoukon (ks. määritelmä 4.5) löytämiselle [6, s. 134]. Esitetään seuraavaksi, kuinka ratkaisujen perusjoukko voidaan löytää. Homogeeniyhtälöllä on aina lisäksi triviaaliratkaisu $y_k = 0$.

Tarkastellaan alaluvussa 4.1 esitettyä homogeenista differenssiyhtälöä (4.2), joka toistetaan tässä yhtälönä

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Jätetään esityksen sujuvoittamiseksi differenssiyhtälön muuttujan k määrittelyjoukko $\mathbb{N}_0$ merkitsemättä näkyviin.

Haetaan differenssiyhtälön (4.7) ratkaisua sijoituksella

$$y_k = m^k, \qquad m \neq 0, \tag{4.8}$$

missä esiintyvänä tuntemattomana vakiona m voi olla myös kompleksiluku ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Sijoitus johtaa yhtälöön

$$m^{k+2} + a_1 m^{k+1} + a_2 m^k = 0,$$

joka voidaan esittää muodossa

$$(m^2 + a_1 m + a_2) m^k = 0. \tag{4.9}$$

Goldbergin mukaan ratkaisuksi ehdotetussa funktiossa (4.8) esiintyvä vakio m ei voi olla 0, sillä silloin päädyttäisiin triviaaliratkaisuun $y_k = 0$, joka ei voi kuulua ratkaisujen perusjoukkoon [6, s. 134]. Lisäksi on kuitenkin syytä tarkastella erikseen funktion saamaa arvoa, kun muuttuja k saa arvon 0. Vakiota m koskeva ehto tarvitaan silloin, kun potenssilausekkeen 0^0 arvoksi määritellään 1, sillä toisen kertaluvun differenssiyhtälössä (4.7) kertoimen a_2 on oltava eri suuri kuin 0.

Yhtälö (4.9) voidaan jakaa puolittain nollasta eroavalla tulontekijällä m^k, jolloin ratkaistavaksi jää toisen asteen polynomiyhtälö

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0, \tag{4.10}$$

jota kutsutaan differenssiyhtälön (4.7) *karakteristiseksi yhtälöksi*. Sijoitus osoittaa, että jos vakio m on karakteristisen yhtälön juuri, niin funktio (4.8) toteuttaa homogeenisen differenssiyhtälön (4.7). ([6, s. 134].)

Karakteristisella yhtälöllä on kaksi nollasta eroavaa karakteristista juurta [6, s. 135]. Olkoot karakteristiset juuret m_1 ja m_2. Lähtemällä karakteristisen yhtälön (4.10) tekijämuodosta

$$(m - m_1)(m - m_2) = 0$$

saadaan karakteristiselle yhtälölle esitysmuoto

$$m^2 - m(m_1 + m_2) + m_1 m_2 = 0. \tag{4.11}$$

Kun termien kertoimia yhtälöissä (4.11) ja (4.10) verrataan keskenään, saadaan karakterististen juurten summalle ja tulolle lausekkeet

$$m_1 + m_2 = -a_1 \ \text{ ja } \ m_1 m_2 = a_2. \tag{4.12}$$

Juurten tulolle esitetyn lausekkeen ja vakion a_2 arvoa differenssiyhtälössä (4.7) koskevan ehdon perusteella juurten on oltava eri suuria kuin 0.

Karakteristisia juuria vastaavat differenssiyhtälön (4.7) yksityisratkaisut ovat

$$y_k^{(1)} = m_1^k \ \text{ ja } \ y_k^{(2)} = m_2^k. \tag{4.13}$$

Tarkastellaan ensiksi erikseen karakteristisen yhtälön juuria ja sen jälkeen homogeenisen differenssiyhtälön ratkaisuja.

Karakteristinen yhtälö (4.10) esiintyy toisen asteen yhtälön suppeassa normaalimuodossa, jolle löytyy ratkaisukaava (vrt. [12, s. 436])

$$m_1, m_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \tag{4.14}$$

Karakteristiset juuret m_1 ja m_2 muodostavat vakioiden a_1 ja a_2 arvojen perusteella kolme erilaista yhdistelmää:

(i) Jos $a_1^2/4 > a_2$, niin yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalijuurta ($m_1 \neq m_2$).

(ii) Jos $a_1^2/4 = a_2$, niin yhtälöllä on reaalinen kaksoisjuuri ($m_1 = m_2$).

(iii) Jos $a_1^2/4 < a_2$, niin yhtälöllä on kaksi kompleksista juurta.

Kahden eri suuren reaalijuuren tapauksessa (i) yksityisratkaisut (4.13) muodostavat yhdessä ratkaisujen perusjoukon [6, s. 136]. Tämä voidaan osoittaa todeksi lauseen 4.3 perusteella laskemalla Casoratin determinantin $w(0)$ arvo. Determinantin $w(0)$ arvo

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1^0 & m_2^0 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1$$

on eri suuri kuin 0, sillä $m_1 \neq m_2$. Näin ollen homogeenisen differenssiyhtälön (4.7) yleinen ratkaisu on

$$Y_k = C_1 m_1^k + C_2 m_2^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Reaalisen kaksoisjuuren tapauksessa (ii) yksityisratkaisut (4.13) eivät muodosta ratkaisujen perusjoukkoa, sillä Casoratin determinantin $w(0)$ arvoksi tulee 0. Yksityisratkaisun $y^{(1)}$ lisäksi on löydettävä jokin toinen differenssiyhtälön toteuttava funktio $y^{(2)}$ siten, että yksityisratkaisut muodostavat yhdessä ratkaisujen perusjoukon. Tutkitaan, voiko funktio

$$y_k^{(2)} = k m_1^k \tag{4.16}$$

olla haettu funktio. ([6, s. 136].)

Osoitetaan ensiksi sijoituksella, että funktio $y_k^{(2)} = k m_1^k$ toteuttaa differenssiyhtälön (4.7) reaalisen kaksoisjuuren tapauksessa:

$$\begin{aligned} y_{k+2}^{(2)} + a_1 y_{k+1}^{(2)} + a_2 y_k^{(2)} &= (k+2) m_1^{k+2} + a_1 (k+1) m_1^{k+1} + a_2 k m_1^k \\ &= k m_1^k (m_1^2 + a_1 m_1 + a_2) + m_1^{k+1} (2m_1 + a_1). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ensimmäisen sulkulausekkeen arvo on 0, sillä m_1 on karakteristisen yhtälön juuri. Jälkimmäisen sulkulausekkeen arvo on sekin 0, sillä karakteristisen yhtälön juurten summan arvo on $-a_1$ (ks. edellä (4.12)). Oikeanpuoleisen lausekkeen (4.17) arvo on siis identtisesti nolla, joten funktio (4.16) on differenssiyhtälön (4.7) ratkaisu. ([6, s. 137].)

Tutkitaan seuraavaksi Casoratin determinantin avulla, muodostavatko yksityisratkaisut

$$y_k^{(1)} = m_1^k \text{ ja } y_k^{(2)} = k m_1^k$$

ratkaisujen perusjoukon. Casoratin determinantin $w(0)$ arvo

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & m_1 \end{vmatrix} = m_1$$

on eri suuri kuin 0, sillä $m_1 \neq 0$. Ratkaisut ovat siten lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat ratkaisujen perusjoukon [6, s. 137].

Homogeenisen differenssiyhtälön (4.7) yleinen ratkaisu, kun differenssiyhtälön karakteristisella yhtälöllä on reaalinen kaksoisjuuri, on siten

$$Y_k = C_1 m_1^k + C_2 k m_1^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

eli

$$Y_k = (C_1 + C_2 k) m_1^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Kompleksisten juurten tapaus (iii) vaatii alustavia tarkasteluja. Määritellään ensiksi kompleksiluku (ks. [7, s. A-15]).

Määritelmä 4.6. *Kompleksiluku* $z = a + bi$ on luku, jossa a ja b ovat reaalilukuja ja i on *imaginaariyksikkö*, jonka neliö toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Kompleksiluvun z reaaliosa on luku a ja imaginaariosa luku b. Kompleksiluvun z reaaliosalle käytetään merkintää $\mathrm{Re}(z)$ ja imaginaariosalle merkintää $\mathrm{Im}(z)$.

Karakteristisen yhtälön kompleksiset juuret m_1 ja m_2 ovat toistensa *liittolukuja*, jolloin niiden imaginaariosat ovat toistensa vastalukuja: kompleksiluvun $m_1 = a+bi$ liittoluku $\overline{m_1}$ on kompleksiluku $m_2 = a - bi$. Edellä esitetyn ratkaisukaavan (4.14) perusteella reaaliluvut a ja b ovat

$$a = -\frac{a_1}{2} \text{ ja } b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}. \tag{4.19}$$

Karakteristisia juuria vastaavat differenssiyhtälön yksityisratkaisut (4.13) ovat siten

$$y_k^{(1)} = (a+bi)^k \text{ ja } y_k^{(2)} = (a-bi)^k. \tag{4.20}$$

Koska kompleksiset juuret ovat eri suuret, niin yksityisratkaisut (4.20) muodostavat ratkaisujen perusjoukon [6, s. 139].

Homogeenisen differenssiyhtälön (4.7) yleinen ratkaisu, kun differenssiyhtälön karakteristisella yhtälöllä on kaksi kompleksista juurta, voidaan alustavasti esittää muodossa

$$Y_k = C_1' m_1^k + C_2' m_2^k, \qquad C_1', C_2' \in \mathbb{C}. \tag{4.21}$$

Jotta differenssiyhtälöllä olisi reaaliarvoinen ratkaisu kaikilla muuttujan k arvoilla, on vakioiden C_1' ja C_2' kuitenkin oltava toistensa liittolukuja [6, s. 140]. Esitetään kompleksiluvut napakoordinaattien avulla ja perustellaan esitetty väite.

Kompleksitasossa piste (a, b) vastaa kompleksilukua $z = a + bi$. Napakoordinaattiesityksessä kompleksiluku z esitetään joko muodossa

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4.22}$$

tai Eulerin kaavan avulla johdetussa muodossa

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \tag{4.23}$$

missä r on kompleksiluvun z itseisarvo eli *moduli*

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{4.24}$$

ja θ on kompleksiluvun z *vaihekulma* eli *argumentti*. Vaihekulma θ on kompleksitason origon ja pisteen (a, b) kautta kulkevan suoran sekä positiivisen reaaliakselin välinen kulma, jota mitataan radiaaneissa. Vaihekulma on jaksollinen, joten sen yksikäsitteinen määrittäminen vaatii tarkennuksen. Koska vaihekulman jakson pituutena on 2π, voidaan tarkasteluväliksi sopia $-\pi < \theta \leq \pi$. Vaihekulma θ toteuttaa samanaikaisesti yhtälöt

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ja } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi. \tag{4.25}$$

Kompleksiluvun z vaihekulma θ lasketaan usein tangenttifunktio avulla. (Vrt. [6, s. 138] ja [7, ss. A-16–17].)

Kompleksiluvun napakoordinaattiesityksessä (4.23) vaihekulman jaksollisuus tulee otetuksi huomioon kompleksisen eksponenttifunktion jaksossa $2\pi i$ [5, s. 124]:

$$\mathrm{e}^{i(\theta+2q\pi)} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{2\pi i q} = \mathrm{e}^{i\theta}(\mathrm{e}^{2\pi i})^q = \mathrm{e}^{i\theta}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^q = \mathrm{e}^{i\theta}, \quad q \in \mathbb{Z}. \tag{4.26}$$

Karakteristisen yhtälön kompleksiset juuret m_1 ja m_2 ovat napakoordinaattien avulla esitettyinä

$$m_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ ja } m_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta). \tag{4.27}$$

Tehdään oletus, että vakiot C_1' ja C_2' ovat liittolukuja:

$$C_1' = c(\cos B + i\sin B) \text{ ja } C_2' = c(\cos B - i\sin B). \tag{4.28}$$

Moivren kaavan (ks. esim. [16, ss. 17–18]) perusteella yksityisratkaisut (4.20) ovat napakoordinaattien avulla esitettyinä

$$m_1^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \text{ ja } m_2^k = r^k(\cos k\theta - i\sin k\theta). \tag{4.29}$$

Edellä alustavana esitettyä homogeenisen differenssiyhtälön yleistä ratkaisua (4.21) voidaan sieventää seuraavasti:

$$\begin{aligned} Y_k = C_1'm_1^k + C_2'm_2^k &= c(\cos B + i\sin B)\cdot r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \\ &\quad + c(\cos B - i\sin B)\cdot r^k(\cos k\theta - i\sin k\theta) \\ &= cr^k[\cos(k\theta+B) + i\sin(k\theta+B)] \\ &\quad + cr^k[\cos(k\theta+B) - i\sin(k\theta+B)] \\ &= 2cr^k\cos(k\theta+B). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sievennetty lauseke (4.30) on reaaliarvoinen, kuten väitettiin (vrt. [6, s. 140]). Merkitään vielä vakion $2c$ paikalle vakioksi A, jolloin homogeenisen differenssiyhtälön (4.7) yleinen ratkaisu, kun differenssiyhtälön karakteristisella yhtälöllä on kaksi kompleksista juurta, voidaan esittää muodossa

$$Y_k = Ar^k\cos(k\theta+B), \qquad A, B \in \mathbb{R}. \tag{4.31}$$

Kootaan eri tapauksia koskevat tulokset yhteen lineaarisen homogeenisen toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön (4.7) yleistä ratkaisua koskevaksi lauseeksi 4.5.

Lause 4.5. *Olkoon homogeenisen differenssiyhtälön*

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.32}$$

jonka kertoimet a_1 ja a_2 ovat vakioita ja kerroin $a_2 \neq 0$, karakteristisella yhtälöllä

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \tag{4.33}$$

juuret m_1 ja m_2. Differenssiyhtälön (4.32) *yleinen ratkaisu on*

$$Y_k = C_1 m_1^k + C_2 m_2^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.34}$$

jos sen karakteristisen yhtälön juuret m_1 ja m_2 ovat reaaliset ja eri suuret; yhtälön yleinen ratkaisu on

$$Y_k = (C_1 + C_2 k) m_1^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.35}$$

jos karakteristiset juuret m_1 ja m_2 ovat reaaliset ja yhtä suuret; ja yhtälön yleinen ratkaisu on

$$Y_k = A r^k \cos(k\theta + B), \qquad A, B \in \mathbb{R}, \tag{4.36}$$

jos karakteristiset juuret m_1 ja m_2 ovat kompleksiset ja toistensa liittoluvut, jolloin ne ovat esitettävissä napakoordinaattien avulla muodossa

$$m_1, m_2 = r(\cos\theta \pm i \sin\theta). \tag{4.37}$$

Todistus [6, ss. 134–142]. Lauseen todistus on esitetty edellä. □

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan menetelmää, jonka avulla täydellisen differenssiyhtälön yksityisratkaisu voidaan usein löytää.

4.3 Differenssiyhtälön yksityisratkaisu

Lauseen 4.4 perusteella täydellisen differenssiyhtälön (4.1) yleisen ratkaisun y osaksi tarvitaan täydellisen differenssiyhtälön jokin yksityisratkaisu y^*. Tässä alaluvussa esitetään yksi keino, niin kutsuttu *määräämättömien kertoimien menetelmä*, täydellisen differenssiyhtälön yksityisratkaisun löytämiseksi.

Toistetaan alaluvussa 4.1 esitetty täydellinen toisen kertaluvun vakiokertoiminen differenssiyhtälö (4.1) yhtälönä

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.38}$$

Jätetään esityksessä edelleen differenssiyhtälön muuttujan k määrittelyjoukko $\mathbb{N}_0$ merkitsemättä näkyviin.

Määräämättömien kertoimien menetelmä toimii silloin, kun täydellisen differenssiyhtälön (4.38) oikean puolen funktiona r_k on jokin termien

$$a^k, \;\; k^n, \;\; e^{ck}, \;\; \sin bk \;\; \text{tai} \;\; \cos bk,$$

missä a, b ja c ovat vakioita ja $n \in \mathbb{N}_0$, ja niiden tulojen muodostama lineaarikombinaatio (ks. [4, s. 77], [6, s. 146] ja [15, ss. 141–142]). Menetelmässä termien ja niistä otettujen peräkkäisten differenssien muodostamien lausekkeiden määrän on oltava äärellinen, kun vakioita ei oteta huomioon [3, s. 597]. Muista differenssiyhtälöiden ratkaisumenetelmistä mainittakoon *vakioiden variointi* -menetelmä (ks. esim. [4, ss. 81–83] ja [11, s. 67]).

Määritelmä 4.7. [4, s. 77], [15, ss. 142–143]. Olkoon $N(E)$ operaattoripolynomi, missä E on siirto-operaattori. Operaattoripolynomia $N(E)$ kutsutaan funktion r_k *annihilaattoriksi* tai "*nollaavaksi operaattoriksi*" (engl. *annihilator* or *nullifying operator*), jos

$$N(E)r_k = 0. \tag{4.39}$$

Toisin sanoin operaattoripolynomi $N(E)$ on funktion r_k annihilaattori silloin, kun funktio r_k on yhtälön (4.39) ratkaisu. Esimerkiksi funktion $r_k = 2^k$ annihilaattori on operaattoripolynomi $N(E) = E - 2$, sillä lineaarisella differenssiyhtälöllä $(E - 2)y_k = 0$ on ratkaisu $y_k = 2^k$ (vrt. [4, s. 77]).

Kirjoitetaan seuraavaksi toisen kertaluvun differenssiyhtälö (4.38) siirto-operaattorin E avulla muotoon

$$p(E)y_k = r_k, \tag{4.38$'$}$$

missä $p(E)$ on operaattoripolynomi

$$p(E) = E^2 + a_1E + a_2I.$$

Oletetaan, että operaattoripolynomi $N(E)$ on funktion r_k annihilaattori yhtälössä (4.38′). Kun operaattoripolynomia $N(E)$ sovelletaan yhtälön (4.38′) molempiin puoliin, saadaan homogeeninen differenssiyhtälö

$$N(E)p(E)y_k = 0, \tag{4.40}$$

jonka kertaluku on korkeampi kuin kaksi. Tämän korkeampaa kertalukua olevan homogeenisen differenssiyhtälön (4.40) yleinen ratkaisu sisältää kaikki täydellisen differenssiyhtälön (4.38′) ratkaisut [15, s. 143].

Olkoot m_1 ja m_2 edellä tarkastellun homogeenisen differenssiyhtälön

$$p(E)y_k = 0 \tag{4.41}$$

karakteristisen yhtälön juuret. Homogeenisen differenssiyhtälön (4.41) yleinen ratkaisu on esitetty lauseessa 4.5. Olkoot $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j$ homogeenisen differenssiyhtälön

$$N(E)y_k = 0 \tag{4.42}$$

karakteristisen yhtälön juuret. Differenssiyhtälön (4.40) yleiseen ratkaisuun tulee toisen kertaluvun differenssiyhtälön yleiseen ratkaisuun sisältyvien termien lisäksi kuulumaan j:n uuden termin summa

$$D_1v_k^{(1)} + D_2v_k^{(2)} + \cdots + D_jv_k^{(j)}, \tag{4.43}$$

missä $D_1, D_2, \ldots, D_j$ ovat tuntemattomia vakioita. Valitsemalla lausekkeen (4.43) tuntemattomien vakioiden D_j arvot sopivasti saadaan haettu täydellisen differenssiyhtälön (4.38′) yksityisratkaisu y^*. Vakioiden arvojen määrittäminen tapahtuu siten, että yksityisratkaisun yrite

$$y_k^* = D_1 v_k^{(1)} + D_2 v_k^{(2)} + \cdots + D_j v_k^{(j)} \tag{4.44}$$

sijoitetaan yhtälön (4.38) vasemman puolen lausekkeeseen ja merkitään yhtälön eri puolilla olevien samanmuotoisten funktiotermien kertoimet yhtä suuriksi. (Vrt. [4, s. 77] ja [15, ss. 143–144].)

Menetelmä selviää parhaiten esimerkin avulla. Tarkastellaan vain yksinkertaista tapausta, jossa homogeenisten yhtälöiden (4.41) ja (4.42) karakteristiset juuret ovat eri suuret ($m_i \neq \mu_j$). Moninkertaisia juuria tarkastellaan esimerkiksi teoksessa [15, s. 144]. Yksityisratkaisun yrite y^* valitaan differenssiyhtälössä (4.38) esiintyvän funktion r_k perusteella. Mahdollisia yritteitä esitetään taulukossa 4.1.

Taulukko 4.1. Yksityisratkaisun yrite eräissä tapauksissa.

Funktio r_k yhtälössä (4.38)	Yksityisratkaisun yrite y_k^*
a^k	Aa^k
$\sin bk$ tai $\cos bk$	$A \sin bk + B \cos bk$
k^n	$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \cdots + A_n k^n$
$k^n a^k$	$a^k (A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \cdots + A_n k^n)$
$a^k \sin bk$ tai $a^k \cos bk$	$a^k (A \sin bk + B \cos bk)$

Lähde: [6, Taulukko 3.1, s. 146].

Esimerkki 4.1. (Vrt. [6, ss. 146–147]). On löydettävä lineaarisen toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 15y_k = 4k + 2^k \tag{4.45}$$

yleinen ratkaisu. Täydellistä yhtälöä (4.45) vastaavan homogeeniyhtälön karakteristisella yhtälöllä $m^2 - 8m + 15 = 0$ on kaksi eri suurta reaalijuurta. Karakteristiset juuret ovat $m_1 = 3$ ja $m_2 = 5$. Homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on siten lauseen 4.5 perusteella

$$Y_k = C_1 3^k + C_2 5^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.46}$$

Tämän lisäksi tarvitaan vielä jokin täydellisen differenssiyhtälön yksityisratkaisu.

Tarkastellaan yhtälön (4.45) oikean puolen funktion termejä erikseen. Ensimmäisen termin $4k$ perusteella yksityisratkaisun yritteeseen otetaan mukaan termit A_0 ja $A_1 k$ ja toisen termin 2^k perusteella lisäksi termi $A2^k$. Kun yksityisratkaisun yrite

$$y_k^* = A_0 + A_1 k + A2^k$$

sijoitetaan yhtälön (4.45) vasemman puolen lausekkeeseen, saadaan lauseke

$$\begin{aligned} y^*_{k+2} - 8y^*_{k+1} + 15y^*_k &= A_0 + A_1(k+2) + A2^{k+2} \\ &\quad - 8(A_0 + A_1(k+1) + A2^{k+1}) \\ &\quad + 15(A_0 + A_1 k + A2^k) \\ &= (8A_0 - 6A_1) + 8A_1 k + 3A2^k. \end{aligned}$$

Jotta yrite y^*_k toteuttaisi differenssiyhtälön on tuntemattomien kertoimien arvot määritettävä yhtälön (4.45) oikean puolen lausekkeen perusteella siten, että yhtälöt

$$8A_0 - 6A_1 = 0, \quad 8A_1 = 4 \text{ ja } 3A = 1,$$

toteutuvat. Kertoimien arvoiksi saadaan: $A_0 = \frac{3}{8}$, $A_1 = \frac{1}{2}$ ja $A = \frac{1}{3}$.

Esimerkissä 4.1 differenssiyhtälön (4.45) yksityisratkaisu löydettiin määräämättömien kertoimien menetelmän avulla. Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön yksityisratkaisun summana, ja se on

$$y_k = C_1 3^k + C_2 5^k + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}2^k, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tutkielmassa tarkastellaan vielä Samuelsonin kerroin-kiihdytinmallia ja kansantulon tasapainoarvoa sekä varastomuutosmallia. Sovellukset tuovat esiin toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön käyttökelpoisuuden erilaisten ilmiöiden mallintamisessa.

4.4 Samuelsonin kerroin-kiihdytinmalli ja kansantulon tasapainoarvo

Paul Samuelsonin [17, ss. 75–78] kansantalouden dynamiikkaa kuvaava kerroin-kiihdytinmalli (1939) pohjautuu taloustieteilijä Alvin Hansenin ajatuksiin. Kyseinen Samuelsonin malli tunnetaankin englanniksi myös nimellä *Hansen-Samuelson model* [6, s. 173]. Mallissa kansantalouden tasapainoa kullakin periodilla t kuvaa yhtälö, jossa kansantulo Y_t on yksityisen kulutuksen C_t, investointien I_t ja julkisen kulutuksen G_t summa:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \tag{4.47}$$

Mallissa kansantaloutta tarkastellaan tietyillä ajanhetkillä, vaikka yksityinen kulutus, investoinnit ja julkinen kulutus jakautuvatkin periodin sisälle [18, s. 268].

Malli perustuu seuraaville oletuksille [6, s. 5]:

(i) Kunkin periodin yksityinen kulutus määräytyy edellisen periodin kansantulon perusteella.

(ii) Kunkin periodin yksityiset investoinnit määräytyvät suhteessa yksityisessä kulutuksessa tapahtuneeseen muutokseen.

(iii) Kunkin periodin julkinen kulutus on vakio.

Muotoillaan mallin oletukset matemaattiseen asuun. Yksityistä kulutusta C_t koskeva oletus (i) voidaan esittää yhtälönä

$$C_t = \alpha Y_{t-1}, \qquad \alpha > 0, \tag{4.48}$$

missä kerroin α on *rajakulutusalttius*. Rajakulutusalttius kertoo, mikä osuus edeltävän periodin $t-1$ kansantulosta Y_{t-1} käytetään yksityiseen kulutukseen C_t periodilla t. Kulutukseen ei mallissa sisälly kansantulosta riippumatonta kiinteää osaa (vrt. [18, s. 268]). Rajakulutusalttius oletetaan positiiviseksi vakioksi. ([6, s. 5].)

Yksityiset investoinnit I_t riippuvat kulutuksessa tapahtuneesta muutoksesta. Jos kulutus kasvaa edelliseen periodiin verrattuna, on tuotannon lisäämiseksi tehtävä uusia investointeja [18, s. 268]. Kulutuksen väheneminen taas merkitsee luopumista jo suunnitelluista investoinneista [6, s. 5]. Oletus (ii) voidaan esittää yhtälönä

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}), \qquad \beta > 0, \tag{4.49}$$

missä *suhdevakio* β (engl. *relation*) oletetaan positiiviseksi vakioksi. Suhdevakiota voidaan nimittää myös *kiihdytinparametriksi* (engl. *acceleration coefficient*) [3, s. 585].

Julkisen kulutuksen G_t oletetaan Samuelsonin mallissa olevan kaikilla periodeilla samansuuruinen. Julkinen kulutus on eksogeeninen muuttuja, jonka arvo otetaan mallissa annettuna. Lisäksi se on vakio, joten siitä käytetään usein merkintää G_0 (ks. esimerkiksi [3, s. 585]). Laskentayksikkö voidaan valita niin, että julkisen kulutuksen arvoksi tulee 1 yksikkö (vrt. [6, s. 5] ja [18, s. 269]). Oletus (iii) voidaan tällöin esittää yhtälönä

$$G_t = 1. \tag{4.50}$$

Ottamalla mallin oletukset huomioon tasapainoyhtälössä (4.47) saadaan kansantulolle johdetuksi yhtälö

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha Y_{t-1} + \beta(C_t - C_{t-1}) + 1 \\ &= \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + 1 \\ &= \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + 1, \qquad t = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Muokkaamalla periodin t indeksointia yhtälö voidaan esittää totutussa muodossa

$$Y_{t+2} - \alpha(1+\beta)Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = 1, \qquad t = 0, 1, 2, \dots \tag{4.51}$$

Samuelsonin mallissa kansantulo Y määräytyy täydellisen toisen kertaluvun vakiokertoimisen differenssiyhtälön (4.51) ratkaisuna [6, s. 153]. Alkuarvot Y_0 ja Y_1 riittävät kansantulon seuraavilla periodeilla saamien arvojen määrittämiseen. Esimerkiksi kansantulon arvo Y_2 saadaan kansantulon arvojen Y_0 ja Y_1 painotettuna summana, missä painot määräytyvät rajakulutusalttiuden α ja suhdevakion β arvojen perusteella [17, ss. 76–77]. Kansantulon käyttäytyminen riippuukin mallissa parametrien α ja β arvoista.

Tarkastellaan differenssiyhtälön (4.51) yksityisratkaisua lähtien yleisemmässä muodossa (kertoimet yksinkertaisempia) esitetystä differenssiyhtälöstä

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.52}$$

Koska yhtälön (4.52) oikean puolen funktio on vakiofunktio r, niin yksityisratkaisun yritteeksi voidaan kokeilla vakiofunktiota $y_k = y^*$. Jos yhtälöllä (4.52) on vakiofunktioratkaisu, niin vakiofunktion arvoa kutsutaan funktion y *tasapainoarvoksi*. Yritteen sijoitus differenssiyhtälöön (4.52) antaa yhtälön

$$y^* + a_1 y^* + a_2 y^* = r, \tag{4.53}$$

josta vakiofunktion y^* arvo voidaan ratkaista. Differenssiyhtälön (4.52) yksityisratkaisuksi saadaan

$$y^* = \frac{r}{1 + a_1 + a_2}, \quad 1 + a_1 + a_2 \neq 0, \tag{4.54}$$

ja se on funktion y tasapainoarvo. ([6, ss. 169–170].)

Tasapainoarvon sanotaan olevan *stabiili* [6, s. 170] silloin, kun yhtälön ratkaisut suppenevat eli konvergoivat kohti tasapainoarvoa y^* riippumatta annetuista alkuarvoista y_0 ja y_1 eli kun

$$\lim_{k \to \infty} y_k = y^*, \qquad \text{(millä hyvänsä alkuarvoilla } y_0 \text{ ja } y_1\text{)}. \tag{4.55}$$

Edetään nyt differenssiyhtälön (4.51) yksityisratkaisun etsimisessä samalla tavalla kuin edellä differenssiyhtälön (4.52) kohdalla. Valitaan yksityisratkaisun yritteeksi vakio Y^*. Yritteen tulee toteuttaa yhtälö

$$Y^* - \alpha(1 + \beta)Y^* + \alpha\beta Y^* = 1. \tag{4.56}$$

Differenssiyhtälön (4.51) yksityisratkaisuksi Y^* saadaan tällöin

$$Y^* = \frac{1}{1 - \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta} = \frac{1}{1 - \alpha}, \qquad \alpha \neq 1, \tag{4.57}$$

ja sen arvo on kansantulon tasapainoarvo [6, s. 173]. Yksityisratkaisun lausekkeessa esiintyvä kerroin $1/(1 - \alpha)$ ilmaisee, kuinka muutos julkisessa kulutuksessa G_t vaikuttaa kansantulon tasapainoarvoon. Kyseessä on niin kutsuttu *kerroinvaikutus*. (Ks. [3, s. 586].)

Määritetään seuraavaksi yhtälön (4.51) parametreille α ja β sellaiset ehdot, joiden vallitessa kansantulo Y_t suppenee kohti tasapainoarvoa Y^*. Tulosten yleistettävyyden vuoksi edetään differenssiyhtälön (4.52) ja sitä vastaavan homogeenisen yhtälön tarkastelun kautta. Tarkastelun lähtökohdaksi esitetään homogeenisen toisen kertaluvun differenssiyhtälön suppenemista sekä tasapainoarvon stabiilisuutta koskevat lauseet (ks. myös [6, ss. 69–76]).

Lause 4.6. *Olkoon*

$$\rho = \max(|m_1|, |m_2|),$$

missä m_1 *ja* m_2 *ovat toisen kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön*

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$$

karakteristisen yhtälön juuret. Yhtälön ratkaisun muodostava lukujono (y_k) *suppenee kohti raja-arvoa* 0 *kaikilla annetuilla alkuarvoilla* y_0 *ja* y_1*, kun* $k \longrightarrow \infty$*, silloin ja vain silloin kun* ρ *on pienempi kuin* 1.

Todistus [4, ss. 83–87], [6, ss. 150–152] ja [18, ss. 256–260]. Lauseen todistus esitetään pääpiirteittäin mainituissa teoksissa. □

Karakteristisen yhtälön eri suurista juurista itseisarvoltaan suurempaa kutsutaan *dominoivaksi juureksi* [3, s. 583]. Kansantulon Y_t aikauran konvergoituminen edellyttää, että dominoiva juuri on itseisarvoltaan pienempi kuin 1. On selvää, että kansantulo Y_t konvergoi kohti tasapainoarvoaan Y^*, jos ja vain jos homogeenisen yhtälön ratkaisun muodostava lukujono (Y_t^c) suppenee kohti raja-arvoa 0, kun $t \longrightarrow \infty$ (ks. [4, s. 87]).

Lause 4.7. *Olkoon*

$$\rho = \max(|m_1|, |m_2|),$$

missä m_1 *ja* m_2 *ovat toisen kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön*

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$$

karakteristisen yhtälön juuret. Välttämätön ja riittävä ehto differenssiyhtälön (4.52) *vakiofunktioratkaisun tasapainoarvon*

$$y^* = \frac{r}{1 + a_1 + a_2}, \quad 1 + a_1 + a_2 \neq 0,$$

stabiilisuudelle on, että ρ *on pienempi kuin* 1.

Todistus [4, ss. 83–87], [6, ss. 169–171] ja [18, ss. 256–260]. Lauseen todistus esitetään pääpiirteittäin mainituissa teoksissa. □

Johdetaan nyt välttämättömät ehdot sille, että ρ on pienempi kuin 1. Oletetaan, että $\rho < 1$, ja tarkastellaan tämän oletuksen perusteella lauseissa 4.6 ja 4.7 esitetyn homogeenisen differenssiyhtälön karakteristisen yhtälön $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ kertoimille a_1 ja a_2 asetettavia ehtoja [6, s. 171]. Karakteristiselle toisen asteen yhtälölle on jo edellä esitetty ratkaisukaava (4.14), mutta esitetään ratkaisukaava nyt yleisessä muodossa

$$m_1, m_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \tag{4.58}$$

Tarkastellaan ensiksi tapausta, jossa diskriminantti $D = a_1^2 - 4a_2 \geq 0$, jolloin karakteristiset juuret m_1 ja m_2 ovat reaaliset. Koska oletuksen mukaan ρ on pienempi kuin 1, ovat molemmat karakteristiset juuret lukujen -1 ja 1 rajaamalla avoimella välillä. Tällöin ratkaisukaavan (4.58) perusteella saadaan seuraavat epäyhtälöt:

$$-2 < -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 \quad \text{ja} \quad -2 < -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2. \tag{4.59}$$

Lisäämällä epäyhtälöiden (4.59) lausekkeisiin termi a_1 päästään edelleen epäyhtälöihin

$$-2 + a_1 < \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 + a_1 \tag{4.60}$$

ja

$$-2 + a_1 < -\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 + a_1. \tag{4.61}$$

Edellä yhtälössä (4.12) on esitetty, että karakterististen juurten summa on yhtä suuri kuin $-a_1$. Koska lisäksi alussa tehdystä oletuksesta seuraa, että kumpikin karakteristinen juuri on suurempi kuin -1 ja pienempi kuin 1, on voimassa epäyhtälö $-2 < -a_1 < 2$. Lisäämällä lausekkeisiin termi a_1 saadaan epäyhtälöt $-2 + a_1 < 0$ ja $2 + a_1 > 0$. Epäyhtälöistä (4.60) vasemmanpuoleinen sekä epäyhtälöistä (4.61) oikeanpuoleinen ovat siten aina tosia. ([6, s. 171].)

Kun epäyhtälöistä (4.60) oikeanpuolimmainen korotetaan puolittain toiseen potenssiin, saadaan epäyhtälö

$$a_1^2 - 4a_2 < (2 + a_1)^2,$$

joka voidaan sieventää välivaiheiden

$$\begin{aligned} a_1^2 - 4a_2 &< 4 + 4a_1 + a_1^2 \\ a_1^2 - a_1^2 &< 4 + 4a_1 + 4a_2 \end{aligned}$$

kautta muotoon

$$1 + a_1 + a_2 > 0. \tag{4.62}$$

Kun vastaavasti epäyhtälöistä (4.61) vasemmanpuolimmainen korotetaan puolittain toiseen potenssiin, saadaan epäyhtälö

$$(-2 + a_1)^2 > a_1^2 - 4a_2,$$

joka sievenee edelleen muotoon

$$1 - a_1 + a_2 > 0. \tag{4.63}$$

Ehdot (4.62) ja (4.63) ovat välttämättömät ehdot sille, että kumpikin karakteristisen yhtälön reaalinen juuri on itseisarvoltaan pienempi kuin 1. ([6, ss. 171–172].)

Tarkastellaan tämän jälkeen tapausta, jossa diskriminantti $D = a_1^2 - 4a_2 < 0$, jolloin karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksiset ja toistensa liittoluvut. Karakterististen juurten $m_1 = a + bi$ ja $m_2 = a - bi$ tulo on

$$m_1 m_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2. \tag{4.64}$$

Toisaalta yhtälön (4.24) perusteella kummankin karakteristisen juuren itseisarvo on

$$|m_1| = |m_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = r,$$

missä r on kompleksisen juuren moduli (ks. [6, s. 152]). Karakterististen juurten tulo (4.64) on siten modulin neliö r^2. Oletuksen $\rho < 1$ perusteella kumpikin karakteristinen juuri on itseisarvoltaan pienempi kuin 1, joten juurten tulo $m_1 m_2$ on pienempi kuin 1. Edellä yhtälössä (4.12) on kuitenkin esitetty, että karakterististen juurten tulo on yhtä suuri kuin a_2. Tämän vuoksi on asetettava ehto $a_2 < 1$ eli ehto

$$1 - a_2 > 0, \tag{4.65}$$

mikä on välttämätön ehto sille, että karakteristisen yhtälön kompleksiset juuret ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1. ([6, s. 172].)

Edellä esitetyt kolme ehtoa – (4.62), (4.63) ja (4.65) – ovat välttämättömät ehdot sille, että ρ on pienempi kuin 1. Seuraavan tulokset yhteen kokoavan lauseen todistaminen edellyttäisi vielä sen osoittamista, että ehto $\rho < 1$ on myös riittävä ehto. Tällöin oletettaisiin edellä asetetut kolme ehtoa tosiksi ja niiden perusteella johdettaisiin ehto $\rho < 1$. ([6, s. 172].)

Lause 4.8. *Ehdot*

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0 \quad \textit{ja} \quad 1 - a_2 > 0 \tag{4.66}$$

ovat välttämättömät ja riittävät ehdot sille, että karakteristisen yhtälön

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

molemmat juuret ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1.

Todistus [4, ss. 87–88] ja [6, ss. 171–172]. Lauseen todistus on esitetty pääpiirteissään edellä. □

Kun otetaan huomioon lauseen 4.7 sisältö, niin lauseessa 4.8 esitetyt ehdot (4.66) muodostavat välttämättömät ja riittävät ehdot tasapainoarvon y^* stabiilisuudelle [6, s. 172]. Lauseen 4.8 perusteella voidaan siten määrittää Samuelsonin kerroin-kiihdytinmallin differenssiyhtälön (4.51) parametreille – rajakulutusalttiudelle α ja kiihdytinparametrille β – sellaiset ehdot, joiden toteutuessa kansantulolla Y_t on stabiili tasapainoarvo Y^*.

Differenssiyhtälössä (4.51) kertoimen a_1 korvaa kerroin $-\alpha(1+\beta)$ ja kertoimen a_2 korvaa kerroin $\alpha\beta$, joten lauseen 4.8 antamat ehdot tasapainoarvon Y^* stabiilisuudelle ovat seuraavat:

$$1 - \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta > 0, \quad 1 + \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta > 0 \quad \text{ja} \quad 1 - \alpha\beta > 0.$$

Koska Samuelsonin mallissa oletetaan, että sekä rajakulutusalttius α että kiihdytinparametri β ovat positiiviset, toteutuu keskimmäinen ehto. Ensimmäinen ja kolmas ehto voidaan esittää muodossa

$$\alpha < 1 \quad \text{ja} \quad \alpha\beta < 1. \tag{4.67}$$

Kun ehdot (4.67) toteutuvat, on kansantulolla Y_t stabiili tasapainoarvo

$$Y^* = \frac{1}{1-\alpha}, \tag{4.68}$$

ja kansantulon saamien arvojen muodostama lukujono (Y_t) konvergoi kohti tasapainoarvoa Y^*, olivatpa annetut alkuarvot mitkä tahansa. ([6, s. 173].)

Kansantulon käyttäytymistä Samuelsonin kerroin-kiihdytinmallissa voidaan analysoida edellä esitettyä tarkemmin ja havainnollistaa tuloksia graafisesti, kuten tehdään esimerkiksi teoksessa [3, ss. 585–590]. Tässä tutkielmassa laadulliset tarkastelut sivuutetaan ja tyydytään edellä esitettyihin matemaattisiin tuloksiin.

4.5 Varastomuutosmalli

Alaluvussa 3.4 tarkasteltiin Metzlerin [14, ss. 115–117] lähtökohdakseen ottamaa passiivisten varastomuutosten systeemiä. Nyt tarkastellaan Metzlerin esittämää varastomuutosmallia, jossa varastomuutosten syklisyys toteutuu "puhtaan varastomuutossyklin" -tilanteessa (engl. "*pure inventory cycle*") [14, ss. 115–119]. Tässä toisessa varastomuutosmallissa (jatkossa: varastomuutosmallissa) varastojen tilanne otetaan huomioon tuotantoa suunniteltaessa toisin kuin passiivisten varastomuutosten systeemissä.

Varastomuutosmallissa lähdetään liikkeelle kokonaistulon (eli kokonaistuotannon [10, s. 170]) y_t yhtälöstä

$$y_t = u_t + s_t + v_0, \tag{4.69}$$

missä u_t on periodin t tuotanto myyntiä varten, s_t periodin t tuotanto varastoja varten ja v_0 kiinteät autonomiset investoinnit. Oletetaan, että varastot pyritään pitämään jollakin tavoitellulla vakiotasolla i_s. ([14, s. 117].)

Oletetaan, että varastot ovat tavoitteen mukaisella vakiotasolla i_s. Jos myynti on ennakoitua suurempaa, pienenevät varastot alle tavoitetason, jolloin varastojen vaje pyritään täyttämään tuottamalla varastoon seuraavalla periodilla. Jos myynti sen sijaan on ennakoitua pienempää, kasvavat varastot yli tavoitetason, jolloin myyntiin tuotettavaa määrää vähennetään vastaavasti seuraavalla periodilla. Periodin t tuotanto varastoja varten s_t on yhtä suuri kuin varastojen tavoitellun vakiotason i_s ja periodin $t-1$ lopussa jäljellä olevan varaston erotus. Tuotanto on kuitenkin edellisellä periodilla $t-1$ suunniteltu niin, että se kattaa myynnin ja että varastot saadaan palautetuksi tavoitetasolle i_s. Periodin t tuotanto varastoja varten s_t voidaan siten olettaa edeltävän periodin $t-1$ toteutuneen ja ennakoidun myynnin erotuksen suuruiseksi ([14, s. 117]).

Periodin $t-1$ ennakoitu myynti u_{t-1} oletetaan yhtä suureksi kuin edellisen periodin $t-2$ toteutunut myynti (vrt. yhtälö (3.40)). Periodin $t-2$ toteutunut myynti on aiemman oletuksen mukaisesti rajakulutusalttiuden β suuruinen osuus saman periodin kokonaistulosta y_{t-2}. Tällöin periodin $t-1$ ennakoitu myynti u_{t-1} on

$$u_{t-1} = \beta y_{t-2}, \qquad t = 2, 3, 4, \ldots \tag{4.70}$$

Periodin $t-1$ toteutunut myynti saadaan vuorostaan rajakulutusalttiuden β ja saman periodin kokonaistulon y_{t-1} tulona. Tuotanto varastoja varten s_t voidaan siten esittää yhtälönä

$$s_t = \beta y_{t-1} - \beta y_{t-2}, \qquad t = 2, 3, 4, \ldots \tag{4.71}$$

Yhtälöiden (4.69), (4.70) ja (4.71) perusteella voidaan johtaa kokonaistulolle differenssiyhtälö

$$y_t = \beta y_{t-1} + \beta y_{t-1} - \beta y_{t-2} + v_0$$

eli yhtälö

$$y_t - 2\beta y_{t-1} + \beta y_{t-2} = v_0, \qquad t = 2, 3, 4, \ldots \tag{4.72}$$

Muokkaamalla indeksointia yhtälö (4.72) voidaan esittää muodossa

$$y_{t+2} - 2\beta y_{t+1} + \beta y_t = v_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.73}$$

Kokonaistulon yhtälö (4.73) on lineaarinen toisen kertaluvun vakiokertoiminen differenssiyhtälö. ([6, ss. 99–100].)

Ratkaistaan seuraavaksi differenssiyhtälö (4.73). Yhtälöä (4.73) vastaavan homogeenisen differenssiyhtälön karakteristinen yhtälö on

$$m^2 - 2\beta m + \beta = 0. \tag{4.74}$$

Ratkaisukaavan (4.58) avulla saadaan yhtälön (4.74) karakteristisiksi juuriksi

$$m_1, m_2 = \frac{2\beta \pm \sqrt{(-2\beta)^2 - 4\beta}}{2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \beta}. \tag{4.75}$$

Karakterististen juurten arvot riippuvat rajakulutusalttiuden β saamasta arvosta. Mallissa oletetaan, että rajakulutusalttiuden arvo on välillä

$$0 < \beta < 1. \tag{4.76}$$

Näin ollen karakterististen juurten ratkaisussa (4.75) neliöjuurilausekkeen arvo on negatiivinen [6, s. 158]. Karakteristiset juuret ovat siten kompleksiluvut

$$m_1, m_2 = \beta \pm i\sqrt{\beta - \beta^2} = \beta \pm i\sqrt{\beta(1-\beta)}. \tag{4.77}$$

Karakteristiset juuret voidaan kirjoittaa napakoordinaattimuodossa yhtälöiden (4.24) ja (4.25) avulla. Karakteristiset juuret (4.77) ovat liittolukuja, joten niillä on sama moduli r. Moduliksi r saadaan

$$r = \sqrt{\beta^2 + \beta(1-\beta)} = \sqrt{\beta}. \tag{4.78}$$

Vaihekulmaksi θ saadaan kulma, joka toteuttaa samanaikaisesti yhtälöt

$$\cos\theta = \frac{\beta}{r} = \sqrt{\beta} \quad \text{ja} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{r} = \sqrt{1-\beta} \tag{4.79}$$

ja joka kuuluu välille $-\pi < \theta \leq \pi$. Täydellistä yhtälöä (4.73) vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu voidaan esittää nyt lauseen 4.5 perusteella muodossa

$$Y_t = A(\sqrt{\beta})^t \cos(t\theta + B), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.80}$$

missä A ja B ovat mielivaltaisia reaalivakioita. ([6, ss. 158–159].)

Täydellisen yhtälön yleistä ratkaisua varten tarvitaan jokin yhtälön (4.73) yksityisratkaisu. Valitaan yksityisratkaisun yritteeksi vakiofunktio $y_t = y^*$. Yritteen sijoitus differenssiyhtälöön (4.73) antaa yhtälön

$$y^* - 2\beta y^* + \beta y^* = v_0,$$

josta yksityisratkaisuksi saadaan

$$y^* = \frac{v_0}{1-\beta}. \tag{4.81}$$

Täydellisen yhtälön (4.73) yleinen ratkaisu on siten muotoa

$$y_t = A(\sqrt{\beta})^t \cos(t\theta + B) + \frac{v_0}{1-\beta}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.82}$$

Ratkaisussa (4.82) kosinifunktio saa aikaan kokonaistulon y_t syklistä vaihtelua tasapainoarvon $v_0/(1-\beta)$ ympärillä, sillä kosinifunktio saa sekä negatiivisia että positiivisia arvoja suljetulla välillä $[-1, 1]$. Luonteeltaan kokonaistulon syklinen vaihtelu on kuitenkin vaimenevaa. Vaimentuminen johtuu siitä, että tulontekijänä oleva potenssi $(\sqrt{\beta})^t$ saa yhä pienempiä arvoja, kun edetään periodilta toiselle. Potenssin arvot pienenevät, sillä rajakulutusalttiuden β arvo on oletuksen mukaan välillä $0 < \beta < 1$. ([6, s. 159].)

Esimerkki 4.2. (Vrt. [6, ss. 154–155 ja 161]). Etsitään kokonaistulon y_t ratkaisu (4.82), joka toteuttaa alkuehdot $y_0 = 1100$ yksikköä ja $y_1 = 1200$ yksikköä. Rajakulutusalttiuden β arvoksi oletetaan 0,5. Lisäksi oletetaan, että kiinteät autonomiset investoinnit v_0 saavat periodilla $t = 0$ aiempaa arvoa 100 yksikköä suuremman arvon 600 yksikköä. Kokonaistulon uudeksi tasapainoarvoksi tulee tällöin $v_0/(1-\beta) = 600/(1-0{,}5) = 1200$ yksikköä. Yksikkö jätetään täsmentämättä.

Esimerkissä tulee ratkaistavaksi karakteristinen yhtälö (vrt. yhtälö (4.74))

$$m^2 - m + \frac{1}{2} = 0,$$

jonka juuret ovat kompleksisia. Karakterististen juurten moduliksi r saadaan yhtälön (4.78) perusteella

$$r = \sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lasketaan seuraavaksi vaihekulman θ suuruus yhtälöiden (4.79) avulla. Vaihekulman θ on oltava välillä $-\pi < \theta \leq \pi$, ja sen on toteutettava samanaikaisesti yhtälöt

$$\cos\theta = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} \quad \text{ja} \quad \sin\theta = \sqrt{1 - 1/2} = 1/\sqrt{2}.$$

Vaihekulman θ arvoksi saadaan näin ollen $\pi/4$.

Määritetään seuraavaksi vakioiden A ja B arvot yhtälön (4.82), alkuarvoehtojen ja edellä esitettyjen tietojen perusteella muodostetusta yhtälöparista

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 \cos\left(0 \cdot \dfrac{\pi}{4} + B\right) + 1200 = 1100 \\ A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 \cos\left(1 \cdot \dfrac{\pi}{4} + B\right) + 1200 = 1200. \end{cases} \tag{4.83}$$

Yhtälöt (4.83) sievenevät aluksi muotoon

$$A \cos B = -100 \quad \text{ja} \quad A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = 0. \tag{4.84}$$

Vakio A ei selvästikään voi saada arvoa 0 ensimmäisessä yhtälöistä (4.84). Jotta jälkimmäinen yhtälöistä toteutuisi, tulee siten kosinifunktion arvon $\cos(\pi/4 + B)$ olla 0. Koska tiedetään, että kosinifunktion arvo $\cos(\pi/2) = 0$, saadaan vakion B arvoksi $\pi/4$. Koska lisäksi tiedetään, että $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, saadaan vakion A arvoksi ensimmäisestä yhtälöstä $-100\sqrt{2}$. Näin ollen kokonaistulon y_t annetut alkuarvoehdot toteuttavaksi ratkaisuksi saadaan

$$y_t = -100\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \cos\left(t\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 1200, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.85}$$

Esimerkki 4.3. (Vrt. [6, s. 161] ja [14, ss. 117–119]). Valaistaan varastomuutosten syklisyyttä esimerkin avulla. Oletetaan, että rajakulutusalttiuden β arvo on 0,5 ja että kiinteät autonomiset investoinnit v_0 ovat 500 yksikköä. Oletetaan myös, että kokonaistulon y_t arvo on vakiintunut yhtä suureksi kuin tasapainoarvo $v_0/(1-\beta) = 500/(1-0{,}5) = 1000$ yksikköä ja että varastot ovat tavoitellulla vakiotasolla 500 yksikköä. Tilanne muuttuu, kun kiinteät autonomiset investoinnit v_0 nousevat 100 yksikköä. Kokonaistulon uudeksi tasapainoarvoksi tulee tällöin $600/(1-0{,}5) = 1200$ yksikköä. Edellä esimerkissä 4.2 muodostettiin kokonaistulolle ratkaisu (4.85), joka kuvaa tämän esimerkin tilannetta. Sivulla 47 esitettävässä taulukossa 4.2 periodia $t = 0$ edeltävä tilanne on merkitty asteriskilla. Arvot on laskettu Excel-taulukkolaskentaohjelmistolla ja pyöristetty kokonaisluvuiksi.

Periodilla $t = 0$ kiinteät autonomiset investoinnit v_0 saavat arvon 600 yksikköä. Kokonaistulon y_0 arvoksi tulee tällöin 1100 yksikköä. Koska periodin myynti ylittää tuotannon myyntiä varten (ennakoidun myynnin), vähenevät varastot vastaavasti. Periodin lopussa varastot ovat 450 yksikköä. Varastot pyritään kuitenkin säilyttämään vakiotasolla 500 yksikköä.

Periodilla $t = 1$ kokonaistulo saa arvon 1200 yksikköä. Periodin myynti ylittää tuotannon 50 yksiköllä. Koska periodin tuotanto varastoja varten on 50 yksikköä, varastot eivät pienene. Seuraavalla periodilla $t = 2$ kokonaistulo saa arvon 1250 yksikköä. Periodin myynti ylittää tuotannon 25 yksiköllä. Koska periodin tuotanto varastoja varten on 50 yksikköä, varastot kasvavat 25 yksikköä. Periodilla $t = 3$ kokonaistulo saa edelleen arvon 1250 yksikköä. Periodin myynti ja tuotanto ovat yhtä

Taulukko 4.2. Puhdas varastomuutossykli.

Periodi t	Tuotanto $u_t = \beta y_{t-1}$	Tuotanto varastoon $s_t = \beta y_{t-1} - \beta y_{t-2}$	Kokonaistulo $y_t = u_t + s_t + v_0$	Myynti βy_t	Varastot i_t
*	500	0	1000	500	500
0	500	0	1100	550	450
1	550	50	1200	600	450
2	600	50	1250	625	475
3	625	25	1250	625	500
4	625	0	1225	613	513
5	613	-13	1200	600	513
6	600	-13	1188	594	506
7	594	-6	1188	594	500
8	594	0	1194	597	497
9	597	3	1200	600	497
10	600	3	1203	602	498
11	602	2	1203	602	500
12	602	0	1202	601	501
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
	600	0	1200	600	500

suuret. Tuotanto varastoja varten riittää palauttamaan varastot ohimenevästi tavoitetasolle 500 yksikköä. Kun varastojen arvo periodilla $t = 4$ nousee yli tavoitetason, kokonaistulon arvo laskee. Sitä vastoin periodilla $t = 8$, kun varastojen arvo laskee alle tavoitetason, kokonaistulon arvo nousee. Tilanne tulee kuitenkin hahmottaa niin, että muutos tiettyyn suuntaan tapahtuu ensiksi kokonaistulossa eikä varastojen tasossa.

Taulukon 4.2 perusteella nähdään, kuinka muutokset varastojen tasossa seuraavat viiveellä kokonaistulossa tapahtuvia muutoksia. Kokonaistulon ja varastojen vaihtelu on syklistä, ja vaihtelu vaimenee periodilta toiselle edettäessä. Kokonaistulo hakeutuu uuteen tasapainoarvoonsa, joka on 1200 yksikköä, ja varastot palaavat tavoitetasolle. (Vrt. [14, ss. 117–119].)

Varastojen i_t ja kokonaistulon y_t keskinäinen riippuvuus voidaan esittää yhtälönä. Varastojen taso periodin t lopussa saadaan, kun edellisen periodin varastoihin i_{t-1} lisätään periodin t tuotanto varastoja varten s_t ja lisäksi se määrä, jolla ennakoitu tuotanto (tuotanto myyntiä varten) u_t ylittää myynnin määrän βy_t periodilla t. Varastojen taso i_t on siten

$$i_t = i_{t-1} + s_t + u_t - \beta y_t.$$

Koska kokonaistulon yhtälön (4.69) perusteella

$$s_t + u_t = y_t - v_0,$$

periodin t varastot i_t ovat

$$i_t = i_{t-1} + (1-\beta)y_t - v_0. \tag{4.86}$$

Yhtälö (4.86) voidaan esittää muodossa

$$\Delta i_{t-1} = i_t - i_{t-1} = (1-\beta)\left(y_t - \frac{v_0}{1-\beta}\right). \tag{4.87}$$

Yhtälön (4.87) vasemman puolen lauseke kertoo varastojen tason muutoksen periodilla t. Erotus $1-\beta$ on positiivinen vakio rajakulutusalttiuden arvoa koskevan oletuksen (4.76) perusteella. Yhtälön oikean puolen toinen tulontekijä on periodin t kokonaistulon y_t ja tasapainoarvon $v_0/(1-\beta)$ erotus. Kun kokonaistulon arvo ylittää tasapainoarvon, kasvavat varastot. Näin tapahtuu esimerkissä 4.3 periodeilla 2–4 ja 10–12 (ks. taulukko 4.2). Varastot kasvavat vielä silloinkin, kun kokonaistulo jo laskee, jos kokonaistulon arvo ylittää tasapainoarvon. Niin tapahtuu periodeilla 4 ja 12 (ks. taulukko 4.2). Kun kokonaistulon arvo alittaa tasapainoarvon, varastot vuorostaan laskevat. Niin tapahtuu periodeilla 0 ja 6–8 (ks. taulukko 4.2). Varastojen tason muutokset seuraavat silloinkin viiveellä kokonaistulon arvossa tapahtuvia muutoksia. Jos kokonaistulon arvo on yhtä suuri kuin tasapainoarvo, ei varastojen tasossa tapahdu muutosta. Mitä pienempi rajakulutusalttiuden arvo on, sitä voimakkaammin varastojen taso muuttuu, kun kokonaistulon arvo eroaa tasapainoarvosta. ([6, ss. 159–160].)

Metzlerin kritiikki kohdistuu edellä tarkastellun varastomuutosmallin oletukseen, jonka mukaan kunkin periodin ennakoidut myynnit riippuvat pelkästään edellisen periodin myynnistä [14, s. 119]. Metzlerin mukaan myös suunta, johon myynti on kehittynyt edellisellä periodilla, tulee ottaa huomioon [14, s. 119]. Hämäläinen yhtyy Metzlerin esittämään kritiikkiin [10, s. 171]. Metzler esittääkin kolmannen varastomuutosmallin, johon hän sisällyttää myyntiodotuksia koskevan kertoimen eli *odotuskertoimen* η (engl. *coefficient of expectation*) [14, s. 119]. Tutkielman rajattu laajuus ei kuitenkaan mahdollista varastomuutosmallien laajempaa esittelyä. Niiden osalta viitataan Metzlerin artikkeliin [14, ss. 113–129].

Lähteet

[1] Blume, Lawrence E. and Thomas J. Sargent: HARROD 1939. *The Economic Journal*, 125, 2015, ss. 350–377.

[2] Boulding, K. E.: In Defence of Statics. *Quarterly Journal of Economics*, 69, 1955, ss. 485–502.

[3] Chiang, Alpha C.: *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Third Edition. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1984.

[4] Elaydi, Saber N.: *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer, 1996.

[5] Flanigan, Francis J.: *Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions*. New York: Dover Publications, Inc., 1983 [1972].

[6] Goldberg, Samuel: *Introduction to Difference Equations*. New York: Dover Publications, Inc., 1986 [1958].

[7] Grossman, Stanley I.: *Multivariate Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations*. Third Edition. San Diego: Academic Press, Inc., 1995.

[8] Harrod, Roy F.: An Essay in Dynamic Theory. *The Economic Journal*, Vol. 49(193), 1939, ss. 14–33.

[9] Haukkanen, Pentti: *Differenssiyhtälöt*. Luentomoniste. Tampereen yliopisto. URL: https://coursepages.uta.fi/mttma7/wp-content/uploads/sites/82/2020/02/Diffs_pohja.pdf. [Viitattu 20.2.2020].

[10] Hämäläinen, Sirkka: Varastoinvestointien ja suhdannevaihteluiden välistä riippuvuutta koskevista teoreettisista hypoteesista. *Kansantaloudellinen aikakauskirja*, 3, 1963, ss. 165–179.

[11] Kelley, Walter G. and Allan C. Peterson: *Difference Equations. An Introduction with Applications*. Second Edition. Boston: Addison Wesley, 2002.

[12] Klein, Michael W.: *Mathematical Methods for Economics*. Second Edition. Boston: Addison Wesley, 2002.

[13] Levy, H. and F. Lessman: *Finite Difference Equations*. New York: Dover Publications, Inc., 1992 [1961].

[14] Metzler, Lloyd A.: The Nature and Stability of Inventory Cycles. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 23(3), 1941, ss. 113–129.

[15] Mickens, Ronald E.: *Difference Equations*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1987.

[16] Osborne, Anthony D.: *Complex Variables and their Applications*. Harlow, England: Addison-Wesley, 1999.

[17] Samuelson, Paul A.: Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 21(2), 1939, ss. 75–78.

[18] Sandefur, James T.: *Discrete Dynamical Systems*. Oxford: Clarendon Press, 1990.

[19] Woivalin, Pentti: *Luentomoniste. Matemaattinen analyysi I ja peruskurssi.* 2. painos. Kangasala: Kangasalan kirjapaino, 1985.