Tampereen yliopisto

Inka Ruoste

OMINAISARVOJEN JA -VEKTOREIDEN ILMIÖPOHJAINEN OPETTAMINEN

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Huhtikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Inka Ruoste: Ominaisarvojen ja -vektoreiden ilmiöpohjainen opettaminen
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikan ja luonnontieteiden tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Ilmiöpohjaisella opetuksella tarkoitetaan opetusmuotoa, jossa käsitellään todellisen maailman ilmiöitä ja pyritään siihen, että oppilaat oivaltaisivat uutta tietoa itse tutkimalla ja pohtimalla näitä ilmiöitä. Tässä kandidaatintyössä ilmiöpohjaisuutta lähestytään nimenomaan matriisilaskentaan liittyvien ominaisarvojen ja -vektoreiden kannalta. Tarkoituksena on pohtia ilmiöpohjaisuuden soveltumista yliopistotasoisen matematiikan opetukseen ja esitellä ominaisarvojen ja -vektoreiden sovellus, joka on lähellä oppijoiden arkielämää.

Ensin työssä esitellään, mihin ilmiöpohjainen opettaminen pyrkii ja mihin se perustuu. Lisäksi käydään läpi ilmiöpohjaisen opettamisen menetelmiä ja haasteita. Ensimmäisen osan lopussa kerrotaan myös siitä, miten ilmiöpohjaisuutta on aiemmin käytetty matematiikan opetuksessa eri kouluasteilla.

Työn toinen osio käsittelee matriisilaskentaa keskittyen ominaisarvoihin ja -vektoreihin. Osiossa määritellään ensin matriisin determinantti, itseisarvo, redusoitu riviporrasmuoto ja käänteismatriisi, sillä nämä ovat oleellisia ominaisarvojen ja -vektoreiden laskemisessa. Ominaisarvojen laskemisen yhteydessä esitellään myös Perron lause, joka takaa positiivisen ominaisarvon ja sitä vastaavan ominaisvektorin olemassaolon.

Lopuksi työssä esitellään kehitetty esimerkki-ilmiö laskuineen. Ilmiöksi valikoitui urheilutulosten ennustaminen ja tarkoituksena oli joidenkin joukkueiden/pelaajien aiempia tilastoituja tuloksia hyödyntäen luoda matriisi, jonka ominaisvektorin avulla voitaisiin ennustaa tuloksia jatkossa. Työssä esitellään koko esimerkki kuvitteellisista lähtötiedoista lähtien. Esimerkin laskut esitetään myös vaiheittain. Lopussa myös käydään läpi, miten esimerkkiä kannattaisi luokassa opettajana lähestyä ja miten oppilaat saadaan johdateltua ilmiön taustalla olevan matematiikan pariin.

Avainsanat: ilmiöpohjaisuus, ominaisarvo, ominaisvektori

SISÄLLYSLUETTELO

KUVALUETTELO

TAULUKKOLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

A, B	matriisi $\mathbb{R}^{n\times m}$
a_{ij}	matriisin A i:n rivin j:n sarakkeen alkio
$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$	vektori
$\det(A)$	matriisin A determinantti
E_n	alkeismatriisi
I	identiteettimatriisi
$\|A\|$	matriisin A itseisarvo
λ	ominaisarvo
$\|\|\boldsymbol{x}\|\|$	vektorin $\boldsymbol{x}$ normi
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
$\mathrm{rref}(A)$	matriisin A redusoitu riviporrasmuoto
$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$	yksikkövektori

1 JOHDANTO

Matriisilaskenta on yksi yliopistotasoisen matematiikan perusasioista, jota opiskellaan tavallisesti jo ensimmäisen vuoden aikana. Vaikka matematiikka tieteenä on hyvin teoreettinen, on niille tekniikan alan opiskelijoille, jotka eivät opiskele matematiikkaa pääaineenaan, erityisen tärkeää, että matematiikka voitaisiin aina mahdollisuuksien mukaan liittää käytäntöön. Opiskelumotivaation kannalta on oleellista, että opiskellut asiat koetaan hyödyllisiksi työkaluiksi todellisten ilmiöiden ja tilanteiden ymmärtämisen ja mallintamisen kannalta.

Tässä kandidaatintyössä tutkitaan matriisilaskentaa, erityisesti matriisin ominaisarvoja ja -vektoreita, ja pyritään luomaan helposti lähestyttävä käytännön sovellus tämän aihepiirin opiskelun tueksi. Tarkoituksena on suunnitella sovelluskohde, jonka kautta voidaan lähteä pohtimaan ominaisarvojen ja -vektoreiden muodostamista.

Opetusmuotona kyse on ilmiöpohjaisesta opettamisesta, jossa ajatuksena on lähestyä opetettavaa asiaa jonkin tutun ilmiön kautta. Tarkoituksena on, että oppilaat oivaltaisivat uutta tietoa itse tutkimalla ja pohtimalla ilmiötä.

2 ILMIÖPOHJAINEN OPPIMINEN

Ilmiöpohjaisella oppimisella tarkoitetaan oppimisprosessia, jonka lähtökohtana on oppijan itsensä kohtaamat kokemukset, ongelmat ja havainnot. [5] Oppimista toteutetaan oppijalähtöisesti opetuksen järjestäjän ohjaamana. Kyseessä on siis menetelmä, jossa oppijat tutkivat ryhmissä jotain heidän omaa elämäänsä koskettavaa ilmiötä tai ongelmaa ja tuottavat saaduista tuloksista jonkinlaisen lopputuotoksen. Kyseessä on siis yksi tutkivan oppimisen muodoista.

2.1 Tausta ja tavoitteet

Tuttuihin ilmiöihin perustuvaa opetusta on annettu kouluissa jo vuosikymmenten ajan. Kuitenkin termi ilmiöpohjaisuus on otettu käyttöön vasta 2000-luvulla. Erilaiset oppijalähtöiset oppimismuodot kasvattavat suosiotaan jatkuvasti, joka näkyy myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014), jossa korostetaan monessa kohdassa tulevaisuuden taitojen (*21st century skills*) oppimista opetuksessa.[2] Tällaisina tulevaisuuden taitoina voidaan pitää esimerkiksi sosiaalisia taitoja, yhteistyötaitoja, kriittistä ajattelua sekä aloitteellisuutta. Ilmiöpohjaisen opetuksen on tarkoitus olla oppijalle mielekästä ja motivoivaa ja juuri sen takia käsiteltävien ongelmien täytyy liittyä oppijan kokemaan todellisuuteen.
Ilmiöpohjaisen opettamisen tavoitteena on kannustaa käsiteltävän aiheen syvälliseen ymmärtämiseen pelkän ulkoaopettelun sijaan. Lisäksi ilmiöpohjainen oppiminen tukee ongelmanratkaisukyvyn, vuorovaikutustaitojen ja lähdekriittisyyden kehittymistä. Ongelmanratkaisukyky on yksi tärkeimmistä edellytyksistä elinikäisen oppimisen kannalta. Lisäksi ilmiöpohjaisessa opetuksessa on tarkoitus oppia myös selviämään epäonnistumisien aiheuttamista pettymyksistä.[2]
Erilaisten oppiainesisältöjen ja tulevaisuuden taitojen ohessa yksi tärkeä koulutuksen tehtävä on luoda oppijalle tieteellinen maailmankuva. Tieteellisellä maailmankuvalla tarkoitetaan ajatusta siitä, että tieto on hankittu ja perusteltu tieteellisin menetelmin.

2.2 Ilmiöpohjaisuus tutkivan oppimisen muotona

Kuten aiemmin mainittiin, on ilmiöpohjainen oppiminen yksi tutkivan oppimisen muodoista. Tutkivassa oppimisessa keskeisenä ajatuksena on uuden tiedon hankkiminen oppijan

itsensä aktiivisesti etsimänä, analysoimana ja kriittisesti tarkastelemana.
Toinen paljon esillä oleva tutkivan oppimisen muoto on ongelmalähtöinen oppiminen. Ilmiöpohjaisuus ja ongelmalähtöisyys ovatkin opetusmuotoina hyvin toistensa kaltaiset. Ilmiöpohjaisen oppimisen voitaisiin ajatella olevan sellaista ongelmalähtöistä oppimista, jossa tutkittava ongelma muodostetaan jonkin oppijaa koskettavan tutun ilmiön pohjalta.[2]

2.3 Menetelmät

Ilmiöpohjainen oppiminen on oppimismuotona usein hyvin monitahoista. Monitahoisella oppimisella tarkoitetaan erilaisten oppismuotojen ja -paikkojen hyödyntämistä. Tavallisin työskentelemisen muoto on ryhmässä toteutettu tutkiminen. Tätä tutkimista ja työskentelyä voidaan myös toteuttaa erilaisissa oppimisympäristöissä.
Opettajan rooli ilmiöpohjaisessa opetuksessa on toimia ohjaajana ja tukijana. Opettaja pyrkii ohjaamaan oppijoiden ajatuksia oikeaan suuntaan sekä luo heille oppimiseen kannustavan ilmapiirin.
Ideaalisessa tilanteessa oppijat pääsevät itse ryhmissä rajaamaan mielenkiinnon kohteidensa mukaan käsiteltävän ongelman. Todellisuudessa tilanne on kuitenkin yleensä se, että opetuksen sisältö on jossain määrin rajattu esimerkiksi opetussuunnitelman perusteiden toimesta. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että opettajan täytyy valmistellessaan opetusta luoda jotkin raamit, joiden sisällä oppijat pääsevät rajaamaan ongelmansa itse. Opettaja voi esimerkiksi valita käsiteltävän teeman tai ilmiön, jonka sisältä oppijaryhmät valitsevat heitä kiinnostavan yksittäisen ongelman, jota he lähtevät tutkimaan. [2]

2.4 Haasteet

Ilmiöpohjaisen opetuksen järjestämiseen liittyy kuitenkin monenlaisia haasteita, joista yksi suurimmista on opetettavan sisällön riittävän laaja oppiminen. Erilaisten tulevaisuuden taitojen oppiminen usein toteutuu hyvin, mutta varsinaisen oppiainesisällön oppiminen jää usein vähäiseksi tai rajoittuu liian kapealle alalle. Tämän takia opettajalta vaaditaankin erityisen hyvää suunnittelua ja valmistelua ilmiöpohjaisen opetuksen suunnittelussa.
Lisäksi myös käytössä olevat tilat ja koulun aikataulut rajoittavat opetuksen mahdollisuuksia. Esimerkiksi tutkittavaan ilmiöön tutustumisen kannalta oleellinen vierailu tai retki voi olla haastava toteuttaa olemassa olevien aikataulujen puitteissa. Tästä syystä parhaat aihepiirit ilmiöpohjaisen opetuksen toteuttamiseen löytyvätkin tarpeeksi läheltä oppijoiden arkea. Tällöin joko tutkittava ilmiö on niin tuttu, että siihen ei ole tarvetta erikseen tutustua tai ilmiö on luonteeltaan sellainen, että se voidaan havaita olemassa olevien rajoitteiden puitteissa.
Kolmanneksi suureksi haasteeksi nousee arviointi. Ilmiöpohjaisessa oppimisessa pääpaino on oppimisprosessissa eikä niinkään lopputuloksessa. Tällöin myös arvioinnin tulisi painottua enemmän prosessiin ja vähemmän lopputuotokseen. Tämä tarkoittaa myös

sitä, että opettajan on arvioitava oppimista jatkuvasti. Arvosanojen jakaminen ilmiöoppimisesta on haastavaa opettajalle ja vie huomattavasti enemmän aikaa kuin perinteisemmän opetuksen arviointi, jossa arvosana usein perustuu lähinnä johonkin lopputuotokseen, usein jonkinlaiseen kokeeseen. Ilmiöpohjaisen oppimisen arviointiin voisikin ajatella esimerkiksi erilaisten itsearviointien ja vertaisarviointien olevan toimiva apuväline. [2]

2.5 Ilmiöpohjaisuus matematiikassa

Vaikka ilmiöpohjainen opettaminen näkyy usein muissa aineissa matematiikkaa enemmän, on myös matematiikan puolella toteutettu erilaisia ilmiöpohjaisia projekteja eri koulutusasteilla.
Alakoulun matematiikan tunneilla ilmiöpohjaisuus näkyy opetuksessa paljon. Kyseessä ei välttämättä ole isompi projekti tai vastaava, vaan tuttuja ilmiöitä ja ongelmia käytetään hyväksi, kun tutustutaan uusiin aiheisiin, kuten jakolaskuun tai murtolukuihin. Jakolaskun opettaminen aloitetaan usein esimerkillä, jossa kaveruksilla on jokin määrä esimerkiksi karkkeja, jotka halutaan jakaa kavereiden kesken tasan. Murtolukujen suhteen puolestaan perinteistä pitsan jakamista käytetään usein esimerkkinä.
Etenkin yläkoulun puolella ilmiöpohjaista opetusta voidaan alkaa toteuttaa enemmän projektilähtöisesti ja oppilasjohtoisesti. Esimerkiksi Anne Ranta-Nilkku on tutkinut pro gradu -tutkielmassaan ilmiöpohjaisten projektien toteuttamista yläkoulun matematiikan opetuksessa. Tutkimuksessa toteutettiin projekti, jonka aiheen oppilaat saivat itse valita listalta, joka sisälsi tuttuja arkielämän ilmiöitä, kuten salamaniskun etäisyys, palvelunumeroon soittamisen hinta ja hiusten kasvu. Valitun ilmiön avulla he opettelivat lineaarisen funktion käsitettä, muodostamista ja tulkitsemista. Ranta-Nilkun tutkimuksen mukaan ilmiöpohjaisuudesta oli hyötyä oppimisen kannalta. Oppilaat kokivat oppimisen mielekkääksi ja motivoivaksi, kun he ymmärsivät, miksi he opiskelevat. Osalle oppilaista tuli lisäksi "ahaa-elämyksiä", kun he tajusivat, että he itseasiassa ovat laskeneet jo lapsena samoja asioita tietämättä mitään lineaarisen funktion käsitteestä. Tämä kuitenkin motivoi heitä, sillä opeteltava asia ei vaikuttanutkaan enää ollenkaan yhtä vaikealta. [4]

3 MATRIISIEN OMINAISARVOT JA -VEKTORIT

Tässä luvussa määritellään ominaisarvon ja ominaisvektorin käsitteet ja niiden laskeminen. Lisäksi määritellään matriisin determinantti, sillä se on oleellinen ominaisarvojen laskemisessa. Esitellään myös mitä tarkoittaa singulaarinen ja ei-singulaarinen matriisi ja opetellaan laskemaan ei-singulaariselle matriisille käänteismatriisi. Luvun teoria pohjautuu David Poolen teokseen *Linear Algebra: A Modern Introduction* [3] ja Steven J. Leonin teokseen *Linear Algebra with Applications* [1].

3.1 Matriisin determinantti ja itseisarvo

Jokaiselle neliömatriisille on mahdollista laskea reaaliluku, jota kutsutaan determinantiksi. Determinantti kertoo matriisin ominaisuuksista. Sen avulla voidaan esimerkiksi päätellä, onko matriisille olemassa käänteismatriisia. Geometrisesti determinantin arvo kertoo matriisin määrittämän monikulmion pinta-alan tai tilavuuden.

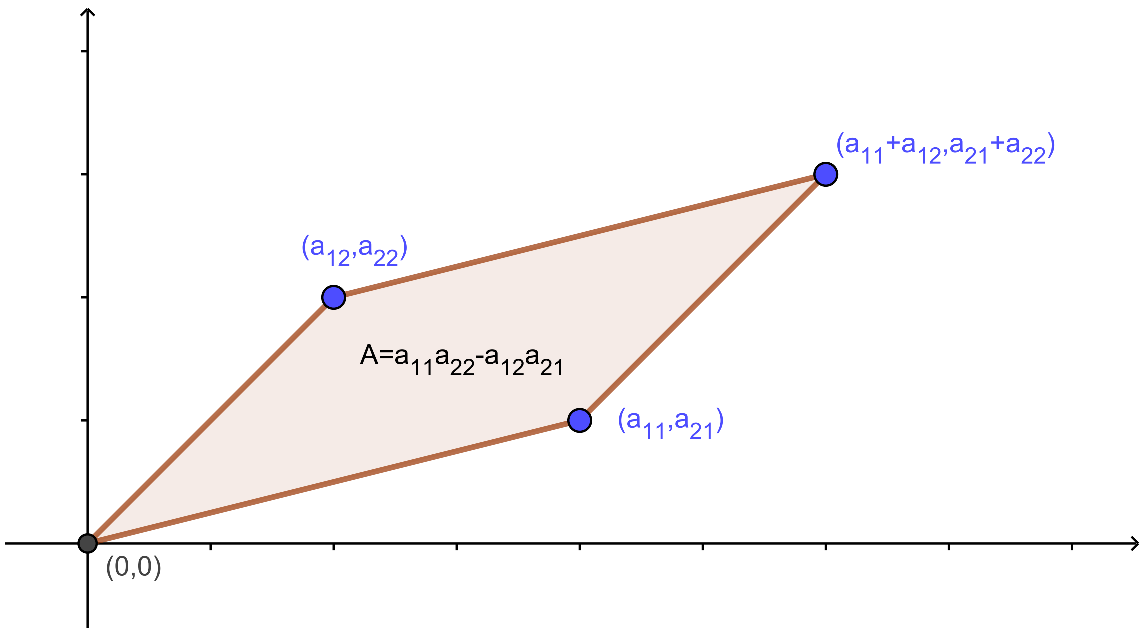
Määritelmä 3.1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Tällöin matriisin A *determinantti* on

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.1}$$

Laskettaessa 3×3-matriisin determinanttia, muodostetaan lauseke, jonka termit sisältävät 2×2-matriisin.

Määritelmä 3.2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Tällöin matriisin A *determinantti* on

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$



Kuva 3.1. *Matriisin A määrittämän monikulmion pinta-ala*

Kun tutkitaan yhtälöä (3.2) huomataan, että jokainen yhtälön 2×2-matriisi on saatu poistamalla matriisista A se rivi ja se sarake, jotka sisältävät kyseisen 2×2-matriisin kertoimen yhtälössä. Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13},$$

jossa A_{ij} on matriisin A osamatriisi, joka on muodostettu poistamalla matriisista A rivi i ja sarake j.
3×3-matriisin määritelmä voidaan nyt laajentaa koskemaan kaikkia $n \times n$-matriiseja.

Määritelmä 3.3. Olkoon A $n \times n$-matriisi, jossa $n \geq 2$. Tällöin matriisin A *determinantti* on

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Matriisin, joka on muodostettu kertomalla kaksi matriisia, determinantti saadaan muodostettua kerrottujen matriisien determinanttien avulla.

Lemma 3.1. *Olkoon A ja B $n \times n$-matriiseja. Matriisin AB determinantti*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Determinantin lisäksi matriisille voidaan määritellä myös itseisarvo.

Määritelmä 3.4. Olkoon A $n \times n$-matriisi ja olkoon a_{ij} matriisin A i:n rivin ja j:n sarakkeen alkio. Tällöin matriisin A *itseisarvo* määritetään matriisin A alkioiden itseisarvona eli

$$|A| = |a_{ij}|,$$

kaikille $i, j \in 1, ..., n$.

3.2 Redusoitu riviporrasmuoto ja käänteismatriisi

Matriisin A käänteismatriisilla tarkoitetaan matriisia B, joka toteuttaa ehdot

$$AB = I \text{ ja } BA = I.$$

Matriisin A käänteismatriisin muodostamista varten tarvitaan alkeisrivioperaatioita.

Määritelmä 3.5. *Kokonaismatriisi* $[A, \boldsymbol{b}]$ on $n \times m$-matriisin A ja n-alkioisen vektorin $\boldsymbol{b}$ muodostama matriisi

$$[A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}.$$

Lause 3.2. *Kokonaismatriisille $[A, \boldsymbol{b}]$ voidaan suorittaa seuraavat alkeisrivioperaatiot, jotka eivät muuta vastaavan matriisiyhtälön $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ratkaisuja:*
1. Kahden rivin paikkaa voidaan vaihtaa keskenään.
2. Riviä voidaan kertoa nollasta poikkeavalla vakiolla.
3. Riviin voidaan lisätä toinen rivi nollasta poikkeavalla vakiolla kerrottuna.

Lauseen 3.2 mukaiset alkeisrivioperaatiot voidaan suorittaa myös matriisikertolaskulla.

Määritelmä 3.6. *Alkeismatriisi* E_n on mikä tahansa matriisi, joka voidaan saada suorittamalla alkeisrivioperaatio identiteettimatriisille.

Alkeismatriisilla kertominen vasemmalta puolelta on ekvivalentti toimenpide alkeismatriisia vastaavan alkeisrivioperaation suorittamisen kanssa. [3, s. 169]

Lemma 3.3. *Alkeismatriisien E_n determinantit ovat nollasta poikkeavia.*

Todistus. Katso [3, s. 270].

Määritelmä 3.7. Matriisi on *redusoidussa riviporrasmuodossa*, kun se täyttää seuraavat ehdot:
1. Rivit, jotka sisältävät vain nolla-alkioita, ovat alimpana.
2. Nollasta poikkeavan rivin johtava alkio on 1 ja se sijaitsee sarakkeessa, joka on sitä alempien rivien johtavien alkioiden sarakkeiden vasemmalla puolella.
3. Sarakkeissa, joissa on johtava 1, sarakkeen muut alkiot ovat nolla-alkioita.

Matriisin A käänteismatriisin B muodostamisessa hyödynnetään alkeismatriiseja.

Lemma 3.4. *Matriisin A redusoitu riviporrasmuoto $\mathrm{rref}(A)$ saadaan muodostettua kertomalla matriisia A alkeismatriiseilla, joita merkitään E_1, E_2,...,E_n. Tällöin*

$$\det \mathrm{rref}(A) = \det E_n \cdot ... \cdot \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det A.$$

Laskemalla determinantin arvo voidaan myös päätellä, onko matriisi singulaarinen, jolloin sille ei ole olemassa käänteismatriisia.

Lause 3.5. *Olkoon A $n \times n$-matriisi. Tällöin A on singulaarinen, jos ja vain jos $\det A = 0$.*

Todistus. Aloitetaan todistamalla, että jos $n \times n$-matriisi A on singulaarinen, niin $\det A = 0$. Jos A on singulaarinen, niin matriisin A redusoitu riviporrasmuoto $\mathrm{rref}(A)$ sisältää rivin, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Tästä seuraa, että $\det \mathrm{rref}(A) = 0$. Lemman 3.3 perusteella alkeismatriisien E_n determinantit ovat nollasta poikkeavia. Joten Lemman 3.4 perustella jos $\det \mathrm{rref}(A) = 0$, niin $\det E_n \cdot ... \cdot \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det A = 0$. Tällöin huomataan, että jos A on singulaarinen, niin $\det A = 0$.
Todistetaan sitten, että jos $\det A = 0$, niin $n \times n$-matriisi A on singulaarinen.
Jos $\det A = 0$, niin Lemmasta 3.4 seuraa, että $\mathrm{rref}(A) = 0$. Tästä seuraa, että matriisin A redusoitu riviporrasmuoto $\mathrm{rref}(A)$ sisältää rivin, jonka kaikki alkiot ovat nollia, jolloin matriisi A on singulaarinen. $\square$

3.3 Ominaisarvot ja vektorit

Ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit ovat matriisille tunnusomaisia ja ne sisältävät paljon tietoa matriisin luonteesta. Ominaisarvoilla ja niitä vastaavilla ominaisvektoreilla voidaan kuvata muun muassa matriisin kuvaaman datajoukon hajaantumista havaintoavaruudessa.

Määritelmä 3.8. Olkoon A $n \times n$-matriisi. Jos on olemassa sellainen skalaari λ, että yhtälöllä

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{3.4}$$

on nollavektorista poikkeava ratkaisu $\boldsymbol{x}$, niin skalaaria λ kutsutaan matriisin *ominaisarvoksi* ja vektoria $\boldsymbol{x}$ kutsutaan matriisin ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisvektoriksi*.

Muokataan yhtälö (3.4) sellaiseen muotoon, että sen avulla löydetään ominaisarvo λ ja ominaisvektori $\boldsymbol{x}$. Tiedetään, että

$$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x},$$

joten yhtälön (3.4) oikealle puolelle voidaan kirjoittaa identiteettimatriisi I, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}.$$

Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä $-\lambda I\boldsymbol{x}$, jolloin päästään muotoon

$$A\boldsymbol{x} - \lambda I\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

josta ottamalla yhteinen tekijä saadaan yhtälö

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Ominaisarvo-ongelma koostuu siis kahdesta osasta. Ensin etsitään skalaarille λ arvot, joilla matriisille $A - \lambda I$ ei ole olemassa käänteismatriisia, eli se on singulaarinen. Jos matriisille $A - \lambda I$ olisi olemassa käänteismatriisi, yhtälölle

$$\boldsymbol{x} = (A - \lambda I)^{-1}\mathbf{0}$$

ei olisi olemassa nollavektorista poikkeavaa ratkaisua $\boldsymbol{x}$. Tämän jälkeen etsitään ne nollasta poikkeavat vektorit $\boldsymbol{x}$, jotka toteuttavat yhtälön (3.5) löydetyillä skalaarin λ arvoilla.

3.4 Ominaisarvojen laskeminen

Ominaisarvojen ratkaisemiseen päästään käsiksi yhtälön (3.5) ja Lauseen 3.5 avulla. Kuten aiemmin todettiin, on yhtälön (3.5) matriisin $A - \lambda I$ oltava singulaarinen, jotta yhtälöllä on nollavektorista poikkeava ratkaisu. Tämä on Lauseen 3.5 nojalla voimassa, kun

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3.6}$$

Esimerkki 3.1. Ratkaise matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ominaisarvot.

Matriisin $A - \lambda I$= $\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$ determinantti

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Matriisi $A - \lambda$ on singulaarinen vain, kun

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Joten matriisin A ominaisarvoiksi siis saadaan $\lambda = 2$ ja $\lambda = 3$ laskemalla yhtälön nollakohdat.

Kuten esimerkistä 3.1 huomataan, voi matriisilla olla useampi ominaisarvo. Yleisesti $n \times n$-matriisilla voi olla korkeintaan n kappaletta toisistaan poikkeavia reaalisia tai kompleksisia ominaisarvoja, koska algebran peruslauseen mukaan n:n asteen polynomilla on korkeintaan n kappaletta toisistaan poikkeavia juuria.[**s.682**, 3]

Positiivisille matriiseille voidaan johtaa seuraava tulos, joka takaa positiivisen ominaisarvon ja sitä vastaavan ominaisvektorin olemassaolon.

Lause 3.6. ***Perron lause*** *Olkoon A positiivinen $n \times n$-matriisi. Tällöin matriisilla A on reaalinen ominaisarvo λ_1, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*
1. $\lambda_1 > 0$.
2. Ominaisarvolle λ_1 löytyy sitä vastaava positiivinen ominaisvektori.
3. Jos λ on mikä tahansa toinen matriisin A ominaisarvo, $|\lambda| \leq \lambda_1$.

Todistus. Jokaiselle positiiviselle matriisille A on olemassa nollasta poikkeava vektori $\boldsymbol{x}$, jolle on voimassa, että

$$A\boldsymbol{x} \geq \lambda \boldsymbol{x} \tag{3.7}$$

jollain skalaarilla λ. Tällöin myös $A(k\boldsymbol{x}) \geq \lambda(k\boldsymbol{x})$, kaikilla $k > 0$. Tästä seuraa, että riittää tarkastella vain yksikkövektoria $\hat{\boldsymbol{x}}$, sillä voidaan valita $k = \frac{1}{||\boldsymbol{x}||}$, jolloin $k\boldsymbol{x}$ on yksikkövektori. Valitaan nyt koordinaatiston ensimmäiseen neljännekseen sijoittuva yksikkövektori $\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$. Yksikkövektoria kerrotaan sellaisella mahdollisimman suurella positiivisella skalaarilla λ, jota merkitään symbolilla λ_1, että $A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} \geq \lambda_1 \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ on voimassa edelleen.
Osoitetaan nyt, että $A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} = \lambda_1 \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ tekemällä vastaväite, että yhtäsuuruus ei ole voimassa. Oletetaan, että $A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} > \lambda_1 \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$. Tällöin kertomalla epäyhtälöä $A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} > \lambda_1 \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ matriisilla A saadaan

$$A(A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}) > \lambda_1 (A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}). \tag{3.8}$$

Nyt epäyhtälön (3.8) perusteella $A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ suuntainen yksikkövektori $\hat{\boldsymbol{y}} = (\frac{1}{||A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}||})A\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ toteuttaa epäyhtälön $A\hat{\boldsymbol{y}} > \lambda_1 \hat{\boldsymbol{y}}$. Tällöin on olemassa skalaari $\lambda_2 > \lambda_1$, jolle pätee $A\hat{\boldsymbol{y}} \geq \lambda_2 \hat{\boldsymbol{y}}$.

Skalaarin λ_1 ollessa suurin mahdollinen skalaari, jolla on voimassa yhtälö (3.7), vastaoletus ei ole paikkansapitävä, ja siis $A\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = \lambda_1 \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}$ eli λ_1 on matriisin A ominaisarvo.
Koska matriisi A ja vektori $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}$ ovat positiivisia, $\lambda_1 \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = A\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} > 0$. Tällöin myös λ_1 on positiivinen. Tämä todistaa ehdot 1. ja 2.
Kohtaa 3. varten oletetaan, että λ on jokin toinen matriisin A ominaisarvo ja $\boldsymbol{z}$ on sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin $A\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{z}$, mistä ottamalla itseisarvo Määritelmän 3.4 saadaan

$$A\,|\boldsymbol{z}| = |A|\,|\boldsymbol{z}| \geq |A\boldsymbol{z}| = |\lambda \boldsymbol{z}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{z}|\,,$$

jossa epäyhtälö seuraa suoraan kolmioepäyhtälöstä. Koska $|\boldsymbol{z}| > 0$, niin $|\boldsymbol{z}|$ suuntainen yksikkövektori $\hat{\boldsymbol{z}} > 0$ ja toteuttaa epäyhtälön $A\hat{\boldsymbol{z}} \geq |\lambda|\,\hat{\boldsymbol{z}}$. Skalaarin λ_1 ollessa suurin mahdollinen skalaari, joka toteuttaa yhtälön (3.7), pätee myös $|\lambda| \leq |\lambda_1|$.

$\square$

3.5 Ominaisvektoreiden laskeminen

Kun ominaisarvot tiedetään, löydetään ominaisvektorit etsimällä ne nollavektorista poikkeavat vektorit $\boldsymbol{x}$, jotka toteuttavat yhtälön (3.5).

Esimerkki 3.2. Ratkaise matriisin A= $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ominaisarvot, kun sen ominaisarvot ovat $\lambda = 2$ ja $\lambda = 3$.
Sijoittamalla matriisi A ja ominaisarvo $\lambda = 2$ yhtälöön (3.5) saadaan

$$(A - 2I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1-2 & -2 \\ 1 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Ominaisvektorin $\boldsymbol{x}$ alkiot x_1 ja x_2 ovat yhtälöparin

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

ratkaisut. Ominaisarvoa $\lambda = 2$ vastaava ominaisvektori on siis $\boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, jossa $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Vastaavasti saadaan ominaisarvolle $\lambda = 3$ sitä vastaava ominaisvektori $\boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, jossa $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

4 URHEILUTULOSTEN ENNUSTAMINEN OMINAISARVOJEN JA -VEKTOREIDEN AVULLA

Eräs arkielämää lähellä oleva ominaisarvojen ja -vektoreiden sovellus löytyy urheilutulosten ja vedonlyönnin parista. Joukkueiden tai yksittäisten pelaajien tuloksia tilastoimalla voidaan määrittää jokaiselle joukkueelle tai pelaajalle luku, joka ennustaa joukkueen tai pelaajan suoriutumista verrattuna muihin tarkastelussa oleviin joukkueisiin tai pelaajiin aiempien tulosten perusteella. Näiden lukujen avulla voidaan muun muassa laittaa joukkueet tai pelaajat eräänlaiseen paremmuusjärjestykseen. Vedonlyönnissä näitä lukuja käytetään avuksi luodessa kertoimia, joilla lyödään vetoa joukkueiden tai pelaajien puolesta.
Todellisuudessa vertailtavia pelaajia tai joukkueita on yleensä paljon ja lisäksi kertoimien määrittämiseen kerätään dataa useista otteluista. Ilmiötä voidaan kuitenkin havainnollistaa valitsemalla rajattu määrä joukkueita tai pelaajia ja tarkastelemalla heidän viimeisimpien kohtaamistensa tuloksia. Seuraava esimerkki kuvaa esimerkiksi neljän jääkiekkojoukkueen vertailua heidän kaudellaan pelaamien pelien tuloksien perusteella.
Esimerkissä 4.1 on kuvattuna tilanne, jossa halutaan selvittää neljän jääkiekkojoukkueen koko turnauksen voittotodennäköisyydet käyttäen ominaisarvoja ja -vektoreita.

Esimerkki 4.1. Neljä jääkiekkojoukkuetta ovat pelanneet kaikki toisiaan vastaan kerran. Taulukossa 4.1 on esitetty näiden kuuden pelin tulokset.

Taulukko 4.1. *Joukkueiden keskinäisten pelien tulokset*

Joukkue 1	Tulos	Joukkue 2
A	5 - 1	B
A	2 - 1	C
A	5 - 1	D
B	2 - 2	C
B	1 - 3	D
C	5 - 1	D

Tuloksista voidaan luoda sellainen matriisi, että matriisin alkio a_{ij} kertoo kyseisellä rivillä i olevan joukkueen saatujen maalien määrän suhteessa kaikkiin pelissä tehtyihin maaleihin sarakkeen j joukkuetta vastaan. Kun $i = j$, kyseessä on alkio, joka kuvaisi joukkueen suoriutumista itseään vastaan, joten merkitään näiden alkioiden arvoksi 0. Taulukon tuloksista voidaan siis muodostaa matriisi A seuraavasti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Pyritään löytämään vektori, jonka alkiot kuvaavat kunkin joukkueen tasoa muiden joukkueiden tasoon nähden. Kyseessä on vektori t, joka toteuttaa yhtälön

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

missä α on verrannollisuuskerroin. Kunkin joukkueen tasoa kuvaava luku saadaan kertomalla tilastoituja otteluiden tuloksia muiden joukkueiden tasoa kuvaavalla luvulla. Tästä huomataan, että saatu yhtälö on samaa muotoa yhtälön (3.4) kanssa, eli vektori t on matriisin A ominaisvektori. Lähdetään etsimään sitä matriisin A ominaisvektoria, joka toteuttaa yllä olevan yhtälön.
Matriisin $A - \lambda I$ determinantti saataisiin laskettua käsin yhtälön (3.3) avulla. 4x4-matriisin determinantin laskeminen on kuitenkin jo melko työlästä, joten determinantti kannattaa laskea tietokoneella käyttäen esimerkiksi Matlabia. Matriisin $A - \lambda I$ determinantti

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \frac{155}{144}\lambda^2 - \frac{29}{36}\lambda - \frac{14}{81}.$$

Koska matriisin halutaan olevan singulaarinen, lasketaan Lauseen (3.5) perusteella determinantin nollakohdat

$$\lambda^4 - \frac{155}{144}\lambda^2 - \frac{29}{36}\lambda - \frac{14}{81} = 0,$$

jonka ratkaisuja ovat $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ ja $\lambda_2 \approx -0,38636$ sekä kompleksiset juuret $\lambda_3 \approx -0.47349 + 0.33366i$ ja $\lambda_4 \approx -0.47349 - 0.33366i$.
Valitaan ominaisarvo λ_1, sillä sille löytyy Lauseen 3.6 perusteella positiivinen ominaisvek-

tori. Sijoitetaan matriisi A ja ominaisarvo $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ yhtälöön (3.5) saadaan

$$(A - \frac{4}{3}I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Ominaisvektorin $\boldsymbol{x}$ alkiot x_1, x_2, x_3 ja x_4 ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{5}{6}x_4 = 0 \\ \frac{1}{6}x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{6}x_4 = 0 \\ \frac{1}{6}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

ratkaisut. Ominaisarvoa $\lambda = \frac{4}{3}$ vastaava ominaisvektori on siis $\boldsymbol{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, jossa $a \neq 0$.

Valitaan nyt sellainen a, että vektorin $\boldsymbol{x}$ alkioiden x_1, x_2, x_3 ja x_4 summa on 1, koska halutaan suoraan prosenttiluvuiksi muutettavat kertoimet alkioille.

$$\begin{aligned} & a + \frac{a}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{a}{2} = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{11}{4}a = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & a = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

Käsiteltävä ominaisvektori on siis

$$\boldsymbol{x} = \frac{4}{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.18 \\ 0.27 \\ 0.18 \end{bmatrix}.$$

Ominaisvektorin alkioiden likiarvoista voidaan lukea suoraan kunkin joukkueen turnauksen voittotodennäköisyydet. Esimerkiksi joukkueen A koko turnauksen voittotodennäköisyys on siis 36%.

Kun joukkueiden turnauksen voittotodennäköisyydet ovat nyt selvillä, saadaan niiden avulla laskettua vedonlyöntikertoimet, joiden perusajatuksena on, että mitä todennäköisempää jonkin joukkueen voitto on, sitä pienempi kerroin sillä on. Kertoimet joukkueille saadaan laskettua yksinkertaisesti kaavalla

$$\text{vedonlyöntikerroin} = \frac{1}{\text{voittotodennäköisyys}}.$$

Näin ollen tämän esimerkin joukkueille saadaan laskettua taulukon 4.1 mukaiset vedonlyöntikertoimet.

Taulukko 4.2. *Joukkueiden vedonlyöntikertoimet*

Joukkue	Vedonlyöntikerroin
A	2,78
B	5,56
C	3,70
D	5,56

Tämä tarkoittaa sitä, että jos esimerkiksi lyödään vetoa joukkueen A voiton puolesta 10 € panoksella ja joukkue A voittaa turnauksen, saadaan yhteensä 27,80 €, josta 10 € on vedonlyöntiin sijoitettuja rahoja ja 17,80 € varsinaisen voiton suuruus.

Esimerkin 4.1 tehtävänannon ollessa helppo ilmiönä ymmärtää, pystyy sitä lähtemään opetuksessa purkamaan yhdessä oppilaiden kanssa. Tehtävää voidaan lähteä rakentamaan esimerkiksi antamalla jokaiselle oppilaalle tehtäväksi valita jonkin lajin, jossa kerrallaan aina kaksi joukkuetta tai pelaajaa pelaavat toisiaan vastaan. Pelistä on saatava jonkinlainen taulukoitava tulos. Esimerkissä 4.1 kunkin joukkueen tulos on ollut joukkueen tekemien maalien osuus kaikista pelissä tehdyistä maaleista. Muita vaihtoehtoja tuloksien tyypiksi ovat muun muassa voitto/tappio -tyyppiset tulokset, jolloin taulukkoon merkitään esimerkiksi 1 sen joukkueen kohdalle, joka pelin voitti ja 0 sen kohdalle, joka hävisi. Myös tasapeli voidaan ottaa mukaan taulukointiin esimerkiksi siten, että voitto merkitään luvulla 2, tasapeli luvulla 1 ja tappio luvulla 0. Myös muunlaisia tuloksia kuten esimerkiksi aikoja voidaan taulukointiin käyttää, mutta oleellista on, että taulukoitavien tuloksien täytyy olla nimenomaan kahden joukkueen tai pelaajan keskinäisen pelin tai ottelun tuloksia. Esimerkin 4.1 kaltaisen tehtävän kannalta siis on oleellista, että jonkin joukkueen tai pelaajan taulukoitu tulos on riippuvainen vastustajasta.
Kun oppilaat ovat valinneet itselleen mieluisan lajin, tehdään ensin tuloksista taulukko, johon listataan 3-5 joukkueen tai pelaajan keskinäiset tulokset. Jos laskut halutaan suorittaa käsin laskemalla, on 3 sopiva määrä. Jos joukkueita tai pelaajia otetaan tarkasteluun 4 tai 5, muodostuu tehtävästä 4×4-matriisi tai 5×5-matriisi, jolloin laskut voidaan suorittaa esimerkiksi Matlabia käyttäen.
Taulukoinnin jälkeen pohditaan yhdessä, mitkä tekijät vaikuttavat pelaajien tai joukkueiden paremmuusjärjestykseen. Ensimmäisenä ajatuksena varmasti nousee itse tulokset, mutta lisäksi oppilaat voidaan johdatella ymmärtämään myös sen, että hyvä tulos hyvää joukkuetta vastaan on arvokkaampi kuin huonompaa joukkuetta vastaan. Näillä tiedoilla pyritään muodostamaan esimerkin 4.1 matriisin (4.1) kaltainen matriisi ja yhtälön (4.2) kaltainen yhtälö.

5 YHTEENVETO

Tarkoituksena oli tutkia matriisien ominaisarvoja ja -vektoreita ja erityisesti sitä, kuinka ne voidaan liittää osaksi todellista maailmaa ja sen ilmiöitä. Tavoitteena oli luoda jokin sovellus, jonka lähtökohdat ovat oppilaille tuttuja ja jonka avulla voidaan lähteä pohtimaan ominaisarvojen ja -vektoreiden matemaattista merkitystä.
Kuten monille matematiikan osa-alueille, on ominaisarvo- ja vektorilaskennallekin löydettävissä useita todellisen maailman ilmiöihin liittyviä sovelluskohteita. Luvussa 4 esitelty urheilutuloksiin ja vedonlyöntiin liittyvä esimerkki on yksi näistä.
Tämä esimerkki on rakennettu sellaiseksi, että sen lähtökohdaksi ja tutkittavaksi aineistoksi voidaan valita lähes minkä vain urheilulajin tuloksia. Näin ollen jokaiselle oppilaalle on löydettävissä jokin ilmiö ja teema, joka on edes jossain määrin tuttu ja parhaimmillaan jopa kiinnostava.
Kyseisen esimerkin kaltaisen tehtävän muodostaminen ilmiölähtöisesti vaatii matriisitulon ymmärtämisen. Matriisituloa hyödyntäen saadaan luotua yhtälön (4.2) kaltainen matriisiyhtälö, jonka avulla ominaisvektorin, ja sitä kautta ominaisarvon, käsitteisiin päästään tutustumaan.
Jotta ominaisarvoja ja -vektoreita voidaan opiskella ilmiölähtöisesti, on ilmiön ja siitä muodostettavan esimerkkitehtävän oltava melko yksinkertainen. Useat ominaisarvojen ja -vektoreiden todellisessa maailmassa käytettävät sovellukset ovat huomattavasti monimutkaisempia ja käsiteltävät aineistot huomattavasti laajempia. Vedonlyöntikertoimien lisäksi ominaisarvoja ja -vektoreita käytetään muun muassa erilaisten hakualgoritmien muodostamiseen. Näitä sovelluksia on kuitenkin mahdollista yksinkertaistaa, jolloin ominaisarvojen ja -vektoreiden merkitys käy ilmi, mutta laskeminen on kuitenkin mahdollista joko kokonaan käsin tai osittain esimerkiksi Matlabia käyttäen. Esimerkkitehtävässä yksinkertaistus on esimerkiksi tehty rajaamalla urheilujoukkueiden määrä pieneen ja tutkimalla vain rajattua määrää pelejä. Samankaltaisia yksinkertaistuksia voidaan tehdä myös esimerkiksi edellä mainittujen hakualgoritmien suhteen, jolloin myös niistä voitaisiin luoda suhteellisen yksinkertainen esimerkkitehtävä.
Oleellista ilmiöpohjaisuuden kannalta on kuitenkin se, että tutkittava aineiston ja ongelman on oltava helposti havaittavissa. Esimerkkitehtävän osalta esimerkiksi tulokset ovat helposti ymmärrettävissä olevaa aineistoa ja tutkimusongelman ollessa vedonlyöntikertoimet, on helppo ymmärtää, että joukkueille on saatava luotua jonkinlaiset voittotodennäköisyydet kertoimien määrittämiseksi.

LÄHTEET

[1] S. J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. 6th edition. Prentice-Hall, 2002.

[2] K. Lonka, L. Hietajärvi, R. Hohti, M. Nuorteva, A. P. Rainio, N. Sandström, L. Vaara ja S. K. Westling. Ilmiölähtöisesti kohti innostavaa oppimista. *Näin rakennat monialaisia oppimiskokonaisuuksia*. PS-kustannus, 2015.

[3] D. Poole. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. 3rd edition. Cengage Learning, 2011.

[4] A. Ranta-Nilkku. Projektioppiminen yläkoulun matematiikan opetuksessa. Tutkielma. Itä-Suomen yliopisto, 2015.

[5] M. Rauste-von Wright, J. von Wright ja T. Soini. *Oppiminen ja koulutus*. WSOY, 2003.