Tampereen yliopisto

Aapo Ylä-Autio

MATRIISINORMIEN PERUSTEET

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Maaliskuu 2020

TIIVISTELMÄ

Aapo Ylä-Autio: Matriisinormien perusteet
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Maaliskuu 2020

Työssä käsitellään matriisinormin määritelmä ja siihen liittyviä lauseita. Ennen matriisinormia kuitenkin käsitellään vektorinormi, joka pohjustaa matriisinormeihin. Samoin esitietoja ovat ominaisarvot, ominaisvektorit, unitaarinen matriisi ja singulaariarvohajotelma. Niitä tarvitaan matriisinormiin liittyvien lauseiden todistamiseen.

Matriisinormin määritelmässä on viisi aksioomaa, jotka toteuttaessaan funktiota kutsutaan matriisinormiksi. Vektorinormin määritelmä on hyvin samankaltainen, mutta poikkeuksena on vain neljä aksioomaa, joiden toteutuessa funktiota kutsutaan vektorinormiksi. Nämä neljä ensimmäistä aksioomaa ovat vektori- ja matriisinormin kanssa samat erona vain, että ensimmäisessä käsitellään vektoreita ja toisessa matriiseja.

Tunnetuimmat funktiot, jotka määrittelevät matriisinormin, ovat l_p-matriisinormi ja vektorinormin indusoima matriisinormi. Vektorinormeihin nämä liittyvät siten, että l_p-matriisinormin funktio sopii myös vektorinormiksi vektorin alkioita käsitellessä ja vektorinormin indusoiman matriisinormin kaavassa esiintyy vektorinormi.

Vektorinormin indusoimalle matriisinormille on kolme erikoistapausta, kun sen kaavassa esiintyvä parametri p saa arvokseen 1,2 tai ∞. Tällöin saadaan johdettua kaavat, jolloin matriisinormi on laskettavissa helpommin kuin määritelmää käyttäen. Parametrin p arvolla 1 matriisinormi on sama kuin matriisin sen sarakkeen alkioiden itseisarvojen summa, jolla tulos on suurin. Parametrin p arvolla ∞ matriisinormin laskeminen on vastaava kuin edellä, mutta nyt käsitelläänkin rivejä. Parametrin p arvolla 2 matriisinormi on sama kuin matriisin suurin singulaariarvo.

Matriisinormeihin liittyy myös eräs lause, joka luo yhteyden matriisinormin ja ominaisarvojen välille. Lauseen mukaan matriisinormi on aina suurempi tai yhtä suuri kuin matriisin minkä tahansa ominaisarvon itseisarvo. Lauseen mukaan myös mahdollisen käänteismatriisin matriisinormin käänteisluku on aina pienempi tai yhtä suuri kuin matriisin minkä tahansa ominaisarvon itseisarvo.

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$M^{m \times n}$	kaikkien sellaisten matriisien joukko, jossa on rivejä m kappaletta ja sarakkeita n kappaletta ja jonka alkiot ovat kompleksilukuja
$\mathbb{R}$	reaaliluvut

1 JOHDANTO

Vektoreihin liittyvässä matematiikassa tärkeä asia on vektorin pituuden laskeminen. Monille matematiikan opiskelijoille tuttu kaava, jossa vektorin alkioiden itseisarvot korotetaan toiseen potenssiin, summataan yhteen ja otetaan neliöjuuri saadusta summasta, antaa vektorille pituuden. Tämä käytännön sovellus on eräs vektorinormi, joita voi määritellä monia muitakin. Nämä muut vektorinormit ovat vain harvemmin esillä.

Samoin kuin vektoreille myös matriiseille on määritelty normeja. Matriisinormit antavat jonkin lukuarvon matriisista, millä ei ole yhtä tunnettua käytännön sovellusta kuin vektoreilla vektorin pituus, minkä vuoksi monille aloittelevalle matematiikan opiskelijalle matriisinormit eivät ole tuttuja. Työn tavoitteena onkin esitellä erilaisia matriisinormeja ja auttaa hahmottamaan voisiko niitä hyödyntää missään.

Työn ensimmäinen luku käsittelee matriisinormeihin liittyvää esitietoa, johon kuuluu vektorinormit, ominaisarvot ja -vektorit, unitaarinen matriisi ja singulaariarvohajotelma. Toisessa luvussa käydään läpi matriisinormin määritelmä ja yleisimmät funktiot, jotka toteuttavat matriisinormin määritelmän. Lisäksi toisessa luvussa lasketaan esimerkit erilaisille matriisinormeille. Kolmannessa luvussa käsitellään ominaisarvojen ja matriisinormien yhteyttä. Neljäs luku on yhteenveto työstä.

2 MATRIISINORMIEN ESITIETOJEN TEORIA

Matriisinormeihin liittyvä matemaattinen teoria tarvitsee perustakseen teoriaa vektorinormeista, matriisin ominaisarvoista ja -vektoreista, unitaarisesta matriisista ja singulaariarvohajotelmasta. Nämä esiintyvät matriisinormeihin liittyvissä lauseissa ja kyseisiin lauseisiin liittyvissä todistuksissa.

2.1 Vektorinormi

Horn ja Johnson [1, s. 314] määrittelevät vektorinormin neljän aksiooman avulla seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 2.1. Funktio $\| \cdot \|: V \to \mathbb{R}$, missä V on vektoriavaruus yli kunnan F, on vektorinormi, jos jokaiselle vektorille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ja skalaarille $c \in F$ on voimassa seuraavat neljä aksioomaa:

$$\| \mathbf{x} \| \geq 0, \tag{2.1}$$

$$\| \mathbf{x} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

$$\| c\mathbf{x} \| = | c | \| \mathbf{x} \| , \tag{2.3}$$

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \| . \tag{2.4}$$

Määritelmän toteuttavia funktioita on monia erilaisia. Eräs funktio määrittelee vektorin $\mathbf{x}$ normin Hornin ja Johnsonin mukaan kaavalla

$$\| \mathbf{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.5}$$

missä $p \geq 1$. Tätä vektorinormia kutsutaan p-normiksi. Kaava saadaan muotoon

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}, \tag{2.6}$$

jos parametri $p \to \infty$. [1, s. 320] Kaavan (2.5) tunnetuinta muotoa kutsutaan euklidiseksi normiksi, joka ilmaisee vektorin pituuden. Euklidinen normi saadaan kaavasta (2.5), kun $p = 2$.

2.2 Ominaisarvot ja vektorit

Määritelmä 2.2. Olkoon matriisi $A \in M^{n \times n}$. Yhtälön

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.7}$$

toteuttavaa skalaaria λ kutsutaan ominaisarvoksi ja sitä vastaavaa ratkaisuvektoria $\mathbf{x} \neq 0$ puolestaan ominaisvektoriksi.

Ominaisarvojen laskeminen onnistuu ratkaisemalla yhtälö

$$\det(\lambda I - A) = 0, \tag{2.8}$$

minkä jälkeen saatuja ominaisarvoja vastaavien ominaisvektoreiden laskeminen onnistuu sijoittamalla ominaisarvot vuorotellen yhtälöön (2.7).

Mahdollisen käänteismatriisin ominaisarvojen laskeminen onnistuu seuraavan lauseen avulla, jos matriisin ominaisarvot ovat tiedossa.

Lause 2.3. *Olkoon matriisi $A \in M^{n \times n}$ ei-singulaarinen eli matriisilla A on käänteismatriisi ja olkoon matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Tällöin matriisin A käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvot ovat $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_r$.*

Todistus. Olkoon matriisi $A \in M^{n \times n}$, sen käänteismatriisi A^{-1} ja $\lambda \neq 0$ matriisin A mikä tahansa ominaisarvo, jota vastaa ominaisvektori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tällöin

$$A^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\frac{1}{\lambda}\lambda\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}A\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x},$$

joten käänteismatriisin ominaisarvot ovat muotoa 1/λ. □

2.3 Unitaarinen matriisi ja singulaariarvohajotelma

Määritelmä 2.4. Neliömatriisi on $A \in M^{n \times n}$ on unitaarinen, jos

$$A^*A = AA^* = I, \tag{2.9}$$

missä A^* on matriisin A konjugaattitranspoosi.

Määritelmä 2.5. Olkoon $A \in M^{m \times n}$. Tällöin on olemassa sellaiset unitaariset matriisit $U \in M^{m \times m}$ ja $V \in M^{n \times n}$, että

$$U^*AV = \Lambda, \tag{2.10}$$

missä Λ on reaalinen $m \times n$-diagonaalimatriisi, joka on muotoa

$$\Lambda = \mathrm{diag}(q_1, q_2, ..., q_{r-1}, q_r, 0, ..., 0) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

missä $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_{r-1} \geq q_r \geq 0$.

Singulaariarvohajotelmassa singulaariarvoiksi kutsutaan arvoja $q_1, q_2, ..., q_{r-1}, q_r$. Niillä on yhteys matriisin A^*A ominaisarvoihin, jotka ovat $q_1^2, q_2^2, ..., q_{r-1}^2, q_r^2, q_{r+1}^2, ..., q_n^2$, missä $q_{r+1}^2 = \cdots = q_n^2 = 0$. Lisäksi ominaisarvoja vastaavista ortonormaaleista ominaisvektoreista $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ saadaan muodostettua kaavan (2.10) unitaarinen matriisi $V \in M^{n \times n}$, jolloin

$$V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n].$$

Kaavan (2.10) matriisi U puolestaan muodostuu vektoreista siten, että

$$U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{r-1}, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m],$$

missä vektorit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{r-1}, \mathbf{u}_r$ ovat muotoa $\mathbf{u}_i = \frac{Av_i}{q_i}$.

3 MATRIISINORMI

3.1 Matriisinormin määrittely

Matriisinormi on funktio, joka toteuttaa seuraavan määritelmän aksioomat, minkä vuoksi erilaisia matriisinormeja voidaan määritellä monia erilaista, kunhan aksioomat vain toteutuvat. Horn ja Johnson [1, s. 340] määrittelee matriisinormin seuraavasti:

Määritelmä 3.1. Funktio $|||\cdot||| : M^{n\times n} \to \mathbb{R}$ on matriisinormi, mikäli kaikille matriiseille A ja $B \in M^{n\times n}$ seuraavat viisi aksioomaa on voimassa:

$$|||A||| \geq 0, \tag{3.1}$$

$$|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = O, \tag{3.2}$$

$$|||cA||| = |\ c\ |\ |||A||| \text{ jokaisella } c \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

$$|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||\,, \tag{3.4}$$

$$|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||\,. \tag{3.5}$$

Määritelmän 3.1 perusteella matriisinormeja voi määritellä suhteellisen vapaasti, kunhan yllä olevat aksioomat toteutuvat. Tämän takia matriisille voi laskea erilaisia matriisinormeja, jotka antavat erilaisia tuloksia, joista osa on hyödyllisempiä kuin toiset. Kaksi tunnettua tapaa laskea matriisinormi ovat l_p-matriisinormi ja vektorinormin indusoima matriisinormi.

3.2 l_p-matriisinormi

Yksinkertainen tapa laskea matriisinormi on määritellä niin sanottu l_p-matriisinormi, jossa matriisia käsitellään kuin vektoria käymällä matriisin alkiot läpi aivan kuin alkiot muodostaisivat yhden pitkän vektorin. Seuraavan lauseen funktio on kuin kaavan (2.5) funktio, mutta erona on vain, että vektorin sijasta käydään läpi matriisin alkiot. Täten Hornin ja Johnsonin mukaan jotkut vektorinormit ovat matriisinormeja ja osa ei [1, s. 341].

Lause 3.2. *Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$. Matriisinormin määritelmän 3.1 toteuttaa funktio*

$|||\cdot|||_p$*, jota kutsutaan* l_p*-matriisinormiksi, kun*

$$|||A|||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.6}$$

missä $p \geq 1$.

Todistus. Matriisin l_p-matriisinormi lasketaan samoin kuin vektorille, joten matriisinormin määritelmän 3.1 neljä ensimmäistä aksioomaa toteutuvat vektorinormin määritelmän 2.1 perusteella. Olkoon matriisi $A \in M^{n \times n}$ ja matriisi $B \in M^{n \times n}$. Tällöin

$$|||AB|||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}},$$

jota voi arvioida ylöspäin, milloin

$$\begin{aligned}
|||AB|||_p &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (\mid a_{ik} \mid^p \mid b_{kj} \mid^p) \right) \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^p \sum_{t=1}^{n} \mid b_{tj} \mid^p \right) \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^p \right) \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} \mid b_{tj} \mid^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} \mid b_{tj} \mid^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |||A|||_p \, |||B|||_p \,.
\end{aligned}$$

Tämän perusteella myös matriisinormin määritelmän 3.1 viides aksiooma toteutuu, joten l_p-matriisinormi todella on matriisinormi. □

Matriisille l_p-matriisinormin laskeminen on hyödyllistä, jos pitää vain laskea joku matriisinormi matriisille, koska l_p-matriisinormin laskeminen on hyvin suoraviivaista. Olkoon esimerkiksi matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin l_p matriisinormi parametrin p arvolla 2 on

$$|||A|||_2 = \sqrt{|\ 1\ |^2 + |\ 1\ |^2 + |\ -4\ |^2 + |\ 7\ |^2 + |\ 2\ |^2 + |\ -1\ |^2} = \sqrt{72}.$$

Tälle matriisinormille on oma nimensäkin. Kun l_p-matriisinormissa $p = 2$, kutsutaan sitä Frobeniuksen normiksi.

3.3 Vektorinormin indusoima matriisinormi

Vektorinormin indusoiman matriisinormin määrittely on hieman monimutkaisempi kuin l_p-matriisinormin.

Lause 3.3. *Matriisin $A \in M^{n\times n}$ vektorinormin indusoima matriisinormi $|||A|||$ voidaan määritellä lausekkeilla*

$$|||A|||_p = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ A\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p \leq 1} \|\ A\mathbf{x}\ \|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|\ A\mathbf{x}\ \|_p\ , \tag{3.7}$$

missä $1 \leq p \leq \infty$ ja $\mathbf{x} \in M^{n\times 1}$.

Todistus. Todistus perustuu Hornin ja Johnsonin todistukseen [1, s. 343-344]. Todistetaan ensin, että edes jokin yhtälön (3.7) matriisinormin kolmesta muodosta määrittelee matriisinormin. Osoitetaan, että matriisinormi saadaan määriteltyä kaavalla

$$|||A|||_p = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ A\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p},$$

koska matriisinormi toteuttaa määritelmän 3.3 viisi aksioomaa. Selvästi

$$|||A|||_p = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ A\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p} \geq 0,$$

koska vektorinormin arvo on aina ei-negatiivinen, joten ensimmäinen aksiooma toteutuu. Edelleen

$$|||A|||_p = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ A\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p} = 0,$$

jos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Jos $A \neq O$, niin on olemassa sellainen vektori $\mathbf{x}$, että $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tällöin maksimointi saa aidosti positiivisen arvon aina, kun $A \neq O$. Tämän takia $|||A|||_p = 0$, jos ja vain jos $A = O$. Lisäksi, jos $A = O$, niin

$$|||A|||_p = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ A\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ O\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p} = \max_{\mathbf{x}\neq 0}(0) = 0,$$

joten toinen aksiooma toteutuu. Olkoon $c \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$|||cA|||_p = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\ cA\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{|\ c\ |\|\ A\mathbf{x}\ \|_p}{\|\ \mathbf{x}\ \|_p},$$

koska vektorinormista voi ottaa vakion itseisarvomerkkien sisällä ulos tekijäksi, minkä jälkeen saadaan vakio siirrettyä maksimifunktion ulkopuolelle. Saadaan

$$|||cA|||_p = | c | \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| A\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = | c | ||| A |||_p ,$$

joten kolmas aksiooma toteutuu. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä vektorinormiin $\| \cdot \|_p$ saadaan

$$\begin{aligned} |||A+B|||_p &= \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| (A+B)\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} \\ &\leq \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| A\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} + \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| B\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = |||A|||_p + |||B|||_p , \end{aligned}$$

joten neljäs aksiooma toteutuu. Lopuksi

$$\begin{aligned} |||AB|||_p &= \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| AB\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \left(\frac{\| AB\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} \cdot \frac{\| B\mathbf{x} \|_p}{\| B\mathbf{x} \|_p} \right) \\ &\leq \max_{\mathbf{x}\neq 0} \left(\frac{\| AB\mathbf{x} \|_p}{\| B\mathbf{x} \|_p} \cdot \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| B\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} \right). \end{aligned}$$

Merkitään $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ja oletetaan, että $\mathbf{y} \notin N(B)$, koska maksimia ei saavuteta kyseisessä tilanteessa. Nyt saadaan

$$|||AB|||_p \leq \max \frac{\| A\mathbf{y} \|_p}{\| \mathbf{y} \|_p} \cdot \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\| B\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = |||A|||_p \, |||B|||_p ,$$

joten viideskin aksiooma toteutuu. Eli osoitettiin, että ensimmäinen kaavoista määrittelee matriisinormin.

Todistetaan vielä, että lauseen 3.3 kolme yhtäsuuruutta pitävät paikkansa. Todetaan ensin, että

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_p \leq 1} \| A\mathbf{x} \|_p \geq \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \| A\mathbf{x} \|_p .$$

Molemmat maksimit ovet ensinnäkin olemassa, koska ehdot $\| \mathbf{x} \|_p \leq 1$ ja $\| \mathbf{x} \|_p = 1$ määräävät suljetun ja rajoitetun joukon sekä $\| A\mathbf{x} \|_p$ on vektorimuuttujan $\mathbf{x}$ jatkuva funktio. Nyt epäyhtälö pätee, koska oikeanpuolen lausekkeen joukko sisältyy vasemmanpuoleiseen joukkoon. Osoitetaan sitten tekemällä vastaoletus, että maksimi saavutetaan, kun $\| \mathbf{x} \|_p = 1$. Vastaoletuksena on, että vasemmanpuoleinen lauseke saavuttaa maksimin pisteessä $\mathbf{x}_0$, missä $0 \neq \| \mathbf{x} \|_p < 1$ ja $\| A\mathbf{x} \|_p \neq 0$. Olkoon $\lambda = 1/ \| \mathbf{x} \|_p > 1$, jolloin pisteessä $\lambda\mathbf{x}_0$ vasemman puolen maksimoitava lauseke saa arvon

$$\| A\lambda\mathbf{x_0} \|_p = | \lambda | \| A\mathbf{x_0} \|_p > \| A\mathbf{x_0} \|_p .$$

Tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, sillä pisteessä $\mathbf{x_0}$ piti olla vasemmanpuolisen lausekkeen suurin arvo. Näin ollen on todistettu yhtälö

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_p \le 1} \| A\mathbf{x} \|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \| A\mathbf{x} \|_p \, .$$

Lauseen kolmas yhtäpitävä lauseke on edellä olevien kanssa sama, koska jos valitaan, että $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$, niin

$$\max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\| A\mathbf{x} \|_p}{\| \mathbf{x} \|_p} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left\| A \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|_p} \right\|_p = \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \| A\mathbf{y} \|_p .$$

Lauseen 3.3 lausekkeet ovat siis kaikki samat. Lisäksi, koska määritelmän lausekkeet toteuttavat matriisinormin aksioomat, niin määritelmän lausekkeet määrittelevät matriisinormin. □

Vektorinormin indusoiman matriisinormin laskeminen suppenee yksinkertaisimmilleen kaavan (3.7) mukaan muotoon

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \| A\mathbf{x} \|_p \, , \tag{3.8}$$

joka saadaan laskettua kaavan (2.5) mukaan. Ongelma vain on se, että käsiteltäviä tapauksien lukumäärä on ääretön, sillä vektoreita $\mathbf{x}$ joiden normi on 1, on ääretön määrä. Kaavalla ei oikeastaan voi muuta kuin laskea alarajoja sille, mitä matriisinormi voisi olla, ellei matriisi satu olemaan jokin yksinkertainen erikoistapaus. Tällainen olisi seuraava esimerkkitapaus.

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Nyt matriisinormi parametrin p arvolla 3 tulee kaavan (3.7) perusteella muotoon

$$|||A|||_3 = \max_{\|\mathbf{x}\|_3=1} \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \right\|_3 .$$

Nyt ilmiselvästi vektorin $\mathbf{x}$ ollessa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

saavuttaa matriisinormin lauseen lauseke suurimman arvonsa, koska kaavan (2.5) mukaan matriisinormi saadaan sievennettyä seuraavasti:

$$|||A|||_3 = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_3 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_3 = \sqrt[3]{\mid 1 \mid^3} = 1.$$

Edellä esitetty suoraviivainen laskeminen onnistuu vain matriisin ollessa juuri sopivan yksinkertainen. Jos matriisi on mielivaltainen, sen normi voidaan laskea tarkasti vain, jos parametrin p arvot ovat 1,2 tai ∞.

3.4 Vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla 1

Kaavan (3.7) tulos parametrin p arvolla 1 on sama kuin seuraavan lauseen kaava, joka määrittelee matriisinormin.

Lause 3.4. *Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$. Tällöin matriisin A vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla 1 voidaan laskea kaavalla*

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ij} \mid . \tag{3.9}$$

Todistus. Todistus perustuu Hornin ja Johnsonin todistukseen [1, s. 344-345]. Matriisi $A \in M^{n\times n}$ voidaan ilmaista sen pystyvektoreiden avulla siten, että

$$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n].$$

Olkoon $\mathbf{x} \in M^{n\times 1}$, jolloin vektorin $A\mathbf{x}$ 1-normi voidaan sieventää ja arvioida ylöspäin seuraavasti:

$$\| A\mathbf{x} \|_1 = \| \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{n-1} x_{n-1} + \mathbf{a}_n x_n \|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j \right\|_1 .$$

Lauseketta voi arvioida ylöspäin kaavan 2.4 perusteella. Saadaan

$$\| A\mathbf{x} \|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} \| \mathbf{a}_j \mathbf{x}_j \|_1 = \sum_{j=1}^{n} \mid \mathbf{x}_j \mid \| \mathbf{a}_j \|_1 .$$

Edelleen lauseketta voi arvioida ylöspäin valitsemalla summan sisälle matriisin A sarakevektoreiden sijasta se sarakevektori, jolla on suurin 1-normi. Tällöin

$$\sum_{j=1}^{n} \mid \mathbf{x}_j \mid\parallel \mathbf{a}_j \parallel_1 \leq \sum_{j=1}^{n} \mid \mathbf{x}_j \mid \max_{1\leq j\leq n} \parallel \mathbf{a}_j \parallel_1 = \max_{1\leq j\leq n} \parallel \mathbf{a}_j \parallel_1 \sum_{j=1}^{n} \mid \mathbf{x}_j \mid$$
$$= \max_{1\leq j\leq n} \parallel \mathbf{a}_j \parallel_1 \parallel \mathbf{x} \parallel_1 = \parallel \mathbf{x} \parallel_1 \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \mid \mathbf{a}_{ij} \mid .$$

Tämän perusteella matriisin A vektorinormin indusoimalle matriisinormille parametrin p arvolle 1 saadaan yläraja. Toisin sanoen

$$|||A|||_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \parallel A\mathbf{x} \parallel_1 \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \left(\parallel \mathbf{x} \parallel_1 \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \mid \mathbf{a}_{ij} \mid \right) = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \mid \mathbf{a}_{ij} \mid .$$

Matriisin A matriisinormille saadaan myös alaraja valitsemalla vektorin $\mathbf{x}$ paikalle sellainen yksikkövektori $\mathbf{e}_k$, jonka k:s alkio on yksi ja joka kerrottuna matriisilla A jättää jäljelle sen matriisin A sarakevektorin, jonka 1-normi on suurin. Näin ollen

$$|||A|||_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \parallel A\mathbf{x} \parallel_1 \geq \parallel A\mathbf{e}_k \parallel_1 = \parallel \mathbf{a}_k \parallel_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \mid \mathbf{a}_{ij} \mid .$$

Matriisinormille saatu yläraja on sama kuin saatu alaraja, joten myös itse matriisinormin on saatava tämä sama arvo. Siispä

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \mid \mathbf{a}_{ij} \mid .$$

□

Lasketaan esimerkiksi matriisinormi p:n arvolla 1 matriisille A, joka olkoon muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Kaavan (3.9) mukaan matriisinormi saadaan laskettua seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&|||A||| = \max(| 1 | + | 4 | + | 5 | + | -1 |, | 0 | + | 0 | + | 5 | + | -2 |,\\
&| 2 | + | -1 | + | 2 | + | 7 |, | 3 | + | 3 | + | -4 | + | 2 |)\\
&= \max(11, 7, 12, 12) = 12.
\end{aligned}
$$

Tällöin matriisin matriisinormin laskeminen onnistuu vain laskemalla matriisin sen sarakkeen alkioiden itseisarvot yhteen, mikä tuottaa suurimman tuloksen.

3.5 Vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla ∞

Parametrin p arvolla ∞ vektorinormin indusoima matriisinormi on samankaltainen kuin parametrin p arvolla 1.

Lause 3.5. *Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$. Tällöin matriisin A vektorinormin indusoima matriisinormi p arvolla ∞ voidaan määritellä kaavalla*

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | . \tag{3.10}$$

Todistus. Todistus perustuu Hornin ja Johnsonin todistukseen [1, s. 345]. Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$ ja vektori $\mathbf{x} \in M^{n\times 1}$. Vektorin ∞-normi on kaavan (2.6) perusteella alkio, jolla on suurin itseisarvo, joten vektorin $A\mathbf{x}$ ∞-normi on muotoa

$$\| A\mathbf{x} \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \right| .$$

Lauseketta voi arvioida ylöspäin sillä perusteella, että summan alkioiden itseisarvojen summa on suurempi tai yhtä suuri kuin summan itseisarvo. Saadaan

$$\| A\mathbf{x} \|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij}x_{ij} | \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} \| x_{ij} | .$$

Edelleen lauseketta voi arvioida ylöspäin, sillä summa on suurempi tai yhtä suuri kuin sellainen summa, jossa vektorin $\mathbf{x}$ alkioiden itseisarvon sijasta lasketaan yhteen aina vektorin $\mathbf{x}$ suurin alkio eli kaavan (2.6) perusteella vektorin ∞-normi. Saadaan

$$\| A\mathbf{x} \|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \| \mathbf{x} \|_\infty = \| \mathbf{x} \|_\infty \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$$

Tämän perusteella saadaan matriisin A vektorinormin indusoimalle matriisinormille parametrin p arvolla ∞ yläraja seuraavasti:

$$|||A|||_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \| A\mathbf{x} \|_\infty \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \left(\| \mathbf{x} \|_\infty \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$$

Matriisin A matriisinormille saadaan myös alaraja valitsemalla vektorin $\mathbf{x}$ paikalle yksikkövektori $\mathbf{z}$, missä

$$z_j = \begin{cases} \frac{a_{kj}^*}{|a_{kj}|}, \text{ kun } a_{kj} \neq 0, \\ 0, \text{ kun } a_{kj} = 0 \end{cases}$$

ja alkiot a_{kj} ovat matriisin A k. rivivektorista, jonka alkioiden summan itseisarvo on suurin. Saadaan

$$\begin{aligned} |||A|||_\infty &= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \| A\mathbf{x} \|_\infty \geq \| A\mathbf{z} \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right| \\ &\geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{a_{kj}^*}{| a_{kj} |} \right| = \sum_{j=1}^{n} | a_{kj} | = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | . \end{aligned}$$

Matriisinormille saatu yläraja on sama kuin saatu alaraja, joten myös itse matriisinormin on saatava tämä sama arvo. Siispä

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$$

□

Lasketaan esimerkiksi vektorinormin indusoiman matriisinormi parametrin p arvolla ∞ matriisille A, joka olkoon muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kaavan (3.10) mukaan matriisinormi saadaan laskettua seuraavasti:

$$\begin{aligned} &|||A||| = \max(|\,1\,| + |\,0\,| + |\,2\,| + |\,3\,|, |\,4\,| + |\,0\,| + |\,-1\,| + |\,3\,|, \\ &|\,5\,| + |\,5\,| + |\,2\,| + |\,-4\,|, |\,-1\,|\,-2\,| + |\,7\,| + |\,2\,|) \\ &= \max(6, 8, 16, 12) = 16. \end{aligned}$$

Tällöin matriisin matriisinormin laskeminen tehdään melkein samaan tapaan kuin tapauksessa $p = 1$, mutta nyt lasketaankin matriisin sen rivin alkioiden itseisarvot yhteen, mikä tuottaa suurimman tuloksen.

3.6 Vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla 2

Lauseella 3.3 on yhteys matriisin suurimpaan singulaariarvoon, kun parametrin p arvo on 2.

Lause 3.6. *Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$. Tällöin matriisin A vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla 2 voidaan laskea kaavalla*

$$|||A|||_2 = q(A), \tag{3.11}$$

missä $q(A)$ on matriisin A suurin singulaariarvo.

Todistus. Todistus perustuu Hornin ja Johnsonin todistukseen [1, s. 346]. Olkoon matriisit $A \in M^{n\times n}$, $U \in M^{n\times n}$ ja $V \in M^{n\times n}$ sekä vektori $\mathbf{x} \in M^{n\times 1}$. Määritelmän 2.5 perusteella on olemassa unitaariset matriisit $U \in M^{n\times n}$ ja $V \in M^{n\times n}$ siten, että voidaan muodostaa matriisin A singulaariarvohajotelma $U^*AV = \Lambda$, jossa $\Lambda \in M^{n\times n}$ on reaalinen diagonaalimatriisi kaavan (2.11) mukaan. Hornin ja Johnsonin [1, s. 320] mukaan vektorin $A\mathbf{x}$ euklidinen normi on sama kuin vektorin $U^*AV\mathbf{x}$, joten matriisin A vektorinormin indusoimaksi matriisinormiksi parametrin p arvolla 2 saadaan

$$
\begin{aligned}
|||A|||_2 &= \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \| A\mathbf{x} \|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \| U^*AV\mathbf{x} \|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \| \Lambda\mathbf{x} \|_2 \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{| q_1x_1 |^2 + \cdots + | q_{r-1}x_{r-1} |^2 + | q_rx_r |^2 + | 0 \cdot x_{r+1} |^2 + \cdots + | 0 \cdot x_n |^2}.
\end{aligned}
$$

Lauseketta voi arvioida ylöspäin vaihtamalla singulaariarvokertoimet suurimmaksi singulaariarvoksi, joka on q_1. Tällöin

$$
\begin{aligned}
|||A|||_2 &\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} q_1 \sqrt{| x_1 |^2 + | x_2 |^2 + \cdots + | x_{n-1} |^2 + | x_n |^2} \\
&= q_1 \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \| \mathbf{x} \|_2 = q_1 = q(A).
\end{aligned}
$$

Matriisin A vektorinormin indusoimaa matriisinormia parametrin p arvolla 2 voidaan myös arvioida alaspäin valitsemalla vektorin $\mathbf{x}$ paikalle yksikkövektori $\mathbf{e}_1$, jonka ensimmäinen alkio on yksi. Tällöin

$$
|||A|||_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \| A\mathbf{x} \|_2 \geq \| A\mathbf{e}_1 \|_2 = \| U^*AV\mathbf{e}_1 \|_2 = \| \Lambda\mathbf{e}_1 \|_2 = \sqrt{| q_1 |^2} = q_1 = q(A).
$$

Matriisinormille saatu yläraja on sama kuin saatu alaraja, joten myös itse matriisinormin on saatava tämä sama arvo. Siispä matriisinormi on matriisin A suurin singulaariarvo eli

$$
|||A|||_2 = q_1 = q(A).
$$

$\square$

Vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla 2 on käytännönläheinen, sillä se ilmaisee, paljonko vektori maksimissaan venyy, kun kyseisellä matriisilla kerrotaan vektori.

Lasketaan esimerkiksi matriisinormi parametrin p arvolla 2 matriisille A, joka olkoon muotoa

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

Singulaariarvojen laskemiseksi muodostetaan matriisi A^*A.

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriisin A^*A ominaisarvot saadaan kaavalla (2.8). Karakteristinen yhtälö on

$$\det(\lambda I - A^*A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0,$$

mistä saadaan

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}.$$

Matriisin A singulaariarvot saadaan matriisin A^*A ominaisarvojen neliöjuurista, joten matriisin A singulaariarvot ovat

$$q_1 = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{20}}{2}} \quad \text{ja} \quad q_2 = \sqrt{\frac{6 - \sqrt{20}}{2}}$$

Matriisin A l_2-matriisinormi on kaavan (3.11) mukaan suurin matriisin A singulaariarvo, joten

$$|||A|||_2 = q_1 = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{20}}{2}} = 2.2882456... \approx 2.288.$$

Tämä tulos ilmaisee, että valitsemalla, minkä tahansa vektorin $x \in M^{2\times 1}$, se venyy kerrottaessa matriisilla A maksimissaan 2.288 kertaiseksi.

4 MATRIISINORMIN SUHDE OMINAISARVOIHIN

Matriisinormiin ja ominaisarvoihin liittyy lause, joka esittää yhteyden näiden välille. Tämän lauseen avulla voi arvioida matriisinormia tai ominaisarvoa.

Lause 4.1. *Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$, jonka eräs ominaisarvo on λ. Matriisin A itseisarvoltaan suurin ominaisarvo on $q(A)$ ja sen matriisinormi on $|||A|||$. Tällöin*

$$\mid \lambda \mid \leq \mid q(A) \mid \leq |||A||| \tag{4.1}$$

ja, jos matriisi A on ei-singulaarinen, niin

$$\mid q(A) \mid \geq \mid \lambda \mid \geq \frac{1}{|||A^{-1}|||}. \tag{4.2}$$

Todistus. Todistus perustuu Hornin ja Johnsonin todistukseen [1, s. 347]. Olkoon matriisi $A \in M^{n\times n}$. Määritelmän (2.2) ominaisarvoyhtälöstä (2.7)

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

saadaan matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Olkoon vektori $\mathbf{e}^T \in M^{1\times n}$, jonka kaikki alkiot ovat arvoltaan 1, ja kerrotaan tällä vektorilla ominaisarvoyhtälö siten, että

$$A\mathbf{x}\mathbf{e}^T = \lambda\mathbf{x}\mathbf{e}^T,$$

jolloin

$$AX = \lambda X,$$

missä matriisi $X \in M^{n\times n}$. Otetaan matriisista λX matriisinormi, jolloin matriisinormin määritelmän 3.1 kolmannen ja viidennen aksiooman perusteella

$$|||\lambda X||| = \mid \lambda \mid |||X||| = |||AX||| \leq |||A|||\,|||X|||\,.$$

Täten

$$\mid \lambda \mid \leq \mid q(A) \mid \leq |||A|||\,.$$

Lauseen 2.3 perusteella, jos matriisi A on ei-singulaarinen, sen käänteismatriisin ominaisarvot ovat muotoa $1/\lambda$, joten aiemman perusteella

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq |||A^{-1}|||\,.$$

Tällöin

$$|\ q(A)\ |\geq|\ \lambda\ |\geq \frac{1}{|||A^{-1}|||}.$$

□

Lauseen 4.1 avulla voi suhteellisen vaivattomasti arvioida matriisin ominaisarvoja, koska lauseen epäyhtälöt toteutuvat laskettaessa minkä tahansa matriisinormin. Esimerkiksi on mahdollista laskea matriisille l_1-matriisinormi, milloin vain lasketaan matriisin alkioiden itseisarvot yhteen. Tällöin saatu matriisinormi ilmaisee, että matriisin ominaisarvot ovat korkeintaan tämän matriisinormin kanssa yhtä suuria tai pienempiä. Samoin voi laskea mahdolliselle käänteismatriisille matriisinormin ja ottaa siitä käänteisluku, jolloin selviää, että matriisin ominaisarvot ovat lasketun matriisinormin kanssa yhtä suuria tai suurempia.

Lause 4.1 toimii myös matriisinormin arvioimiseen, jos tiedetään matriisin ominaisarvo. Tällainen tilanne voisi olla, jos matriisi on niin suuri, ettei sen alkioiden käsittely ole enää vaivatonta esimerkiksi, kun lasketaan jotain l_p-matriisinormia.

5 YHTEENVETO

Matriisinormin määritelmä on samankaltainen kuin vektorinormin määritelmä. Matriisinormin määritelmän toteuttavat useat erilaiset funktiot. Yksinkertainen tapa laskea matriisinormi on l_p-matriisinormi, joka on käytännössä sama kuin vektorinormeihin liittyvä p-normi. Sama tulos saadaan, kun matriisin alkioista järjestellään vektori, jolle lasketaan p-normi. Haastavampi tapa laskea matriisinormi on vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla. Vektorinormin indusoiman matriisinormin laskeminen onnistuu vain erikoistapauksissa, jossa matriisi itsessään on erikoistapaus tai parametrin p arvot ovat yksi, kaksi tai ääretön. Tällöin vektorinormin indusoimalle matriisinormille pystyy johtamaan kaavat, joilla laskeminen onnistuu.

Työssä käsitellään myös yksi lause, joka antaa yhteyden ominaisarvojen ja matriisinormin välille. Sen avulla pääsee arviomaan ominaisarvoa matriisinormin avulla ja samoin myös toisin päin. Matriisinormeihin liittyviä lauseita on matematiikan kirjallisuudessa enemmänkin, minkä vuoksi matriisinormien käytännön hyödyllisyys ei saa vastausta. Työn perusteella on vähintään yksi sovellus: vektorinormin indusoima matriisinormi parametrin p arvolla kaksi ilmaisee, kuinka paljon jokin vektori venyy matriisilla kerrottaessa.

LÄHTEET

[1] R. A. Horn ja C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.