Tampereen yliopisto

Emmi Nuutinen

PYTHAGORAAN LAUSE JA KOLMIKOT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2019

Tiivistelmä

Emmi Nuutinen: Pythagoraan lause ja kolmikot
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Joulukuu 2019

Tässä tutkielmassa todistetaan kaava, jonka avulla on mahdollista löytää kaikki Pythagoraan lauseen yhtälön toteuttavat kokonaislukukolmikot eli Pythagoraan kolmikot. Lisäksi todistetaan Pythagoraan lause helpolla geometrisellä todistuksella ja kerrotaan lyhyesti Pythagoraan historiasta.

Tutkielman alussa käydään läpi myöhemmissä todistuksissa tarvittavia lukuteorian peruskäsitteitä. Tutkielma on kirjoitettu siten, että sen voisi esittää lukiolaiselle.

Avainsanat: Pythagoras, Pythagoraan lause, Pythagoraan kolmikot

Sisältö

1 Johdanto

Yksi kenties tunnetuin matemaattinen lause on Pythagoraan lause. Tässä tutkielmassa tarkastellaan kyseistä lausetta ja samalla perehdytään henkilöön, jonka mukaan lause on nimetty. Lisäksi tutkielmassa tarkastellaan, millaisilla kokonaisluvuilla Pythagoraan lauseen matemaattinen yhtälö toteutuu.

Pythagoras oli aikansa omaleimainen luonnontieteilijä ja filosofi, jonka historiasta ei pystytä sanomaan mitään varmuudella. Hänen oppilaansa nimesivät kaikki löytönsä Pythagoraan nimiin eikä siksi ole löydetty yhtäkään varmuudella Pythagoraan itsensä kirjoittamaa kirjoitusta. Hän ei ollut ainoa, joka käytti Pythagoraan lauseeksi nimettyä yhtälöä, mutta hän tai hänen oppilaansa kirjoittivat ensimmäisinä formaalin ratkaisun kyseiseen lauseeseen, ja siksi lause on nimetty hänen mukaansa. Pythagoraan lauseen avulla voidaan esimerkiksi muodostaa kolmioita tai ratkaista tuntemattomia kolmion sivuja.

Luvussa 2 käydään läpi kaikki tulevissa todistuksissa tarvittavat tärkeät lukuteorian käsitteet. Tutkielma on kuitenkin pyritty kirjoittamaan siten, että aiheen voisi esittää lukiossa matematiikan syventävänä lisämateriaalina, joten esitiedoiksi riittää lukion pitkä matematiikka.

Tämän tutkielman luvussa 3 esitellään lyhyesti Pythagoraan myyttistä historiaa. Luvussa 4 esitetään Pythagoraan lause ja sen yksinkertainen geometrinen todistus.

Pythagoraan kolmikot ovat kokonaislukuratkaisuja Pythagoraan lauseen yhtälölle. On olemassa äärettömän monta positiivisten kokonaislukujen kolmikkoa, jotka toteuttavat tuon yhtälön. Tämän tutkielman luvussa 5 todistetaan kaava, jonka avulla on mahdollista löytää kaikki Pythagoraan lauseen yhtälön toteuttavat kokonaislukukolmikot. Todistuksen jälkeen ohjelmoidaan koodi, jonka avulla voidaan helposti generoida kolmikoita.

2 Lukuteorian alkeita

Luvussa 2 esitetään lyhyesti joitakin pääaiheen käsittelyssä tarvittavia lukuteorian keskeisiä käsitteitä ja merkintöjä. Niitä ovat jaollisuus, kongruenssi, alkuluvut, aritmetiikan peruslause sekä suurin yhteinen tekijä. Päälähteenä tässä luvussa käytetään kirjaa [5, s. 31–32, 66, 80–83, 97–99, 127–132].

Tässä tutkielmassa merkintä $a \in \mathbb{Z}$ tarkoittaa, että *a kuuluu kokonaislukujen joukkoon*, missä $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. *Positiivisilla kokonaisluvuilla* tarkoitetaan, että $a > 0$.

Jaollisuus

Määritelmä 2.1 (Jaollisuus). Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Jos lisäksi on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}$, että $b = ka$, niin sanotaan, että kokonaisluku b on *jaollinen* kokonaisluvulla a. Tällöin a on b:n *jakaja* tai *tekijä* ja b on a:n *monikerta* ja voidaan sanoa, että a *jakaa* b:n. Jos a jakaa b:n, merkitään $a \mid b$. Vastaavasti, jos b ei ole jaollinen a:lla, merkitään $a \nmid b$.

Lause 2.2. *Olkoot $a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$. Jos $c \mid a$ ja $c \mid b$, niin $c \mid (ma + nb)$.*

Todistus. Ks. [5, s. 32]. □

Esimerkki 2.3. Koska $21 = 3 \cdot 7$ ja $77 = 11 \cdot 7$, niin määritelmän 2.1 nojalla $7 \mid 21$ ja $7 \mid 77$. Koska $7 \mid 21$ ja $7 \mid 77$ ja lisäksi 4 ja 2 ovat kokonaislukuja, niin lauseen 2.2 nojalla $7 \mid (4 \cdot 21 + 2 \cdot 77)$ eli $7 \mid 238$.

Kongruenssi

Luvut a ja b ovat *kongruentteja*, kun ne antavat saman jakojäännöksen jaettaessa luvulla m.

Määritelmä 2.4 (Kongruenssi). Olkoot $a, b, m \in \mathbb{Z}$, missä $m > 0$. Jos $m \mid (a - b)$, niin sanotaan, että *a on kongruentti luvun b kanssa modulo m*. Tällöin merkitään $a \equiv b \pmod{m}$. Vastaavasti, jos $m \nmid (a - b)$, niin merkitään $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Lause 2.5. *Olkoot a ja b kokonaislukuja. Silloin $a \equiv b \pmod{m}$, jos ja vain jos on sellainen kokonaisluku k, että $a = b + km$.*

Todistus. Ks. [5, s. 129]. □

Esimerkki 2.6. Koska $9 \mid (40 - 22) = 18$, niin määritelmän 2.4 nojalla voidaan merkitä $40 \equiv 22 \pmod 9$. Täten molemmat luvut 40 ja 22 antavat saman jakojäännöksen 4 jaettaessa luvulla 9. Toisin sanoen lauseen 2.5 nojalla $40 = 4 \cdot 9 + 4$ ja $22 = 2 \cdot 9 + 4$.

Lause 2.7. *Jos $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, missä $m > 0$, $a \equiv b \pmod m$ ja $c \equiv d \pmod m$, niin*

(i) $a + c \equiv b + d \pmod m$,

(ii) $a - c \equiv b - d \pmod m$,

(iii) $ac \equiv bd \pmod m$.

Todistus. Ks. [5, s. 131]. □

Alkuluvut

Määritelmä 2.8 (Alkuluvut). Lukua 1 suurempaa kokonaislukua, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1 ja niiden vastaluvuilla, sanotaan *alkuluvuksi*.

Esimerkki 2.9. Pienimmät kymmenen alkulukua ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ja 29, koska ne ovat kaikki jaollisia vain itsellään ja luvulla 1 sekä niiden vastaluvuilla.

Alkulukujen laskemiseen on lukuisia eri menetelmiä ja suurimpien lukujen löytäminen ei onnistu tavallisella kotitietokoneella. Kirjassa [5, s. 67] todistetaan, että alkulukuja on ääretön määrä.

Aritmetiikan peruslause

Lause 2.10 (Aritmetiikan peruslause). *Jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti alkulukujen tulona. Tätä esitystä sanotaan* alkulukuhajotelmaksi.

Aritmetiikan peruslauseen todistuksessa käytetään kahta apulausetta, joista toista tarvitaan myös tässä tutkielmassa.

Apulause 2.11. Jos a, b ja c ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $\mathrm{syt}(a, b) = 1$ ja $a \mid bc$, niin tällöin $a \mid c$.

Todistus. Ks. [5, s. 97]. □

Apulause 2.12. Olkoon p alkuluku ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia kokonaislukuja. Jos $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, niin tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku i, missä $1 \leqslant i \leqslant n$, että $p \mid a_i$.

Todistus. Ks. [5, s. 97]. □

Aritmetiikan peruslauseen 2.10 todistus. Ks. [5, s. 97–98]. □

Esimerkki 2.13. Lukujen 180, 361 ja 1771 alkulukuhajotelmat ovat

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \\ 361 &= 19 \cdot 19 = 19^2 \quad \text{ja} \\ 1771 &= 7 \cdot 11 \cdot 23. \end{aligned}$$

Suurin yhteinen tekijä

Määritelmä 2.14 (Suurin yhteinen tekijä). Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$, missä $a \neq 0$ tai $b \neq 0$. *Suurin yhteinen tekijä* on suurin mahdollinen luku, joka jakaa molemmat luvut a ja b. Lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää d merkitään notaatiolla $\text{syt}(a, b) = d$, missä $d > 0$.

Huomautus. Lukuteoriassa suurinta yhteistä tekijää saatetaan merkitä myös vain sulkuja käyttämällä $(a, b) = d$. Edempänä tutkielmassa Pythagoraan kolmikot merkitään sulkeisiin, joten sekaannusten välttämiseksi tässä tutkielmassa käytetään suurimmalle yhteiselle tekijälle merkintätapaa $\text{syt}(a, b) = d$.

Määritelmä 2.15. Olkoot a ja b postiiivisia kokonaislukuja. Jos $\text{syt}(a, b) = 1$, niin lukuja a ja b sanotaan *keskenään jaottomiksi* tai *suhteellisiksi alkuluvuiksi*.

Suurin yhteinen tekijä voidaan ottaa myös useammasta kuin kahden luvun joukosta.

Määritelmä 2.16. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ siten, että kaikki luvut eivät ole nollia. Tällöin *suurin yhteinen tekijä* on suurin mahdollinen luku, joka jakaa kaikki joukossa olevat luvut. Suurinta yhteistä tekijää merkitään tällöin $\text{syt}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$, missä $d > 0$. Kun $d = 1$, lukuja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanotaan *keskenään jaottomiksi*.

Esimerkki 2.17. Jokainen luku voidaan lauseen 2.10 nojalla ilmaista alkulukuhajotelmana. Suurin yhteinen tekijä kolmen luvun joukosta löydetään alkulukuhajotelmien avulla. Lukujen 350, 700 ja 2625 alkulukuhajotelmat ovat

$$\begin{aligned} 350 &= 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ 700 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \text{ja} \\ 2625 &= 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 5^3 \cdot 7. \end{aligned}$$

Huomataan, että kaikille luvuille yhteisiä alkulukupotenssitekijöitä ovat 5^2 ja 7, joten

$$\mathrm{syt}(350, 700, 2625) = 5^2 \cdot 7 = 175.$$

Esimerkki 2.18. Lukujen 15, 21 ja 35 alkulukuhajotelmat ovat

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 5, \\ 21 &= 3 \cdot 7 \quad \text{ja} \\ 35 &= 7 \cdot 5. \end{aligned}$$

Huomataan, että kaikille luvuille yhteisiä alkulukupotenssitekijöitä ei ole. Tällöin

$$\mathrm{syt}(15, 21, 35) = 1.$$

Apulause 2.19. Olkoot a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{Z}$ sellaisia, että ainakin yksi luvuista a_1, a_2, ..., a_n ei ole nolla. Tällöin

$$\mathrm{syt}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = \mathrm{syt}(a_1, a_2, \dots, \mathrm{syt}(a_{n-1}, a_n)).$$

Todistus. Ks. [5, s. 83]. □

Apulauseesta 2.19 seuraa siis, jos kokonaisluku d jakaa luvun $\mathrm{syt}(a_{n-1}, a_n)$, niin luvun täytyy jakaa sekä a_{n-1} että a_n. Koska molemmissa luvuissa on sama jakaja, myös suurin yhteinen tekijä on sama. Toisin sanoen, jos $d \mid \mathrm{syt}(a_{n-1}, a_n)$, niin $d \mid a_{n-1}$ ja $d \mid a_n$.

Esimerkki 2.20. Käytetään apulausetta 2.19 ja etsitään lukujen 105, 140 ja 350 suurin yhteinen tekijä. Tällöin

$$\mathrm{syt}(105, 140, 350) = \mathrm{syt}(105, \mathrm{syt}(140, 350)) = \mathrm{syt}(105, 70) = 35.$$

Esimerkki 2.21. Vastaavasti

$$\mathrm{syt}(15, 21, 35) = \mathrm{syt}(15, \mathrm{syt}(21, 35)) = \mathrm{syt}(15, 7) = 1.$$

3 Pythagoraan historia

Tiedot Pythagoraan historiasta vaihtelevat paljon ja tässä luvussa on siksi käytetty neljää eri lähdettä ([2, s. 12–14], [3, s. 300–314], [4, s. 1–6] ja [5, s. 482]), joista tiedot on koottu.

Pythagoras (570–480 eaa.) oli aikansa omaleimainen ja maineikas tieteilijä. Hänen historiasta tiedetään vain vähän, eikä oikein mitään voida sanoa varmuudella. Edes hänen syntymä- tai kuolinvuodestaan ei ole tarkkaa tietoa. Useat häneen liittyvät kirjoitukset vaikuttavat myyttisiltä ja uskomattomilta tarinoilta, mikä on ymmärrettävää, koska Pythagorasta ihailtiin paljon ja jopa jumaloitiin.

Pythagoraalla on kerrottu olleen kaksi veljeä, vaimo ja kaksi lasta. Pythagoras oli kertomansa mukaan elänyt neljässä ruumiissa ennen omaansa. Hän muisti kaiken, mitä hänelle oli tapahtunut, myös kuoleman jälkeen edellisissä elämissä. Pythagorasta on pidetty poliittis-uskonnollisena neuvonantajana, johtajana, noitana, ihmeidentekijänä, parantajana sekä huijarina ja puoskarina. Pythagoraalla oli paljon ohjeita ja oppeja, joita tuli noudattaa hyvässä ja siveellisessä elämässä.

Pythagoras perusti koulun Italian Kronoriin. Oppilaita hänellä oli lähes kolmesataa ja he saavuttivat suurta mainetta vaikuttamalla paikalliseen hallintoon mm. säätämällä lakeja Italian kreikkalaisille. Oppilaat muodostivat veljeskunnan, jota sitoi vala siitä, että perustajan salaisuuksia ei saanut paljastaa. Pythagoraan ja pythagoralaisten sanotaan luoneen ensimmäiset varsinaiset perusteet lukuteorialle. Lukuteorian lisäksi Pythagoras opetti harmoniaa (musiikkia), geometriaa sekä tähtitiedettä.

On epäselvää, julkaisivatko Pythagoras tai pythagoralaiset koskaan mitään. Joidenkin lähteiden mukaan Pythagoraan sanotaan julkaisseen kolme teosta. Pythagoralaiset tosin laittoivat kaikki löytönsä opettajansa nimiin, joten teokset eivät välttämättä ole Pythagoraan kirjoittamia. Uskotaan kuitenkin, että Pythagoras itse löysi kuuluisan Pythagoraan lauseen. Sen keksittyään hänen kerrotaan uhranneen härän.

Pythagoraan sanotaan opettaneen yön pimeydessä, ja oppilaiden tuli pysyä vaiti ensimmäiset viisi vuotta. He pääsivät näkemään mestarinsa vasta, kun läpäisivät tutkinnon. Pythagoraan näkemistä pidettiinkin suurena saavutuksena. Pythagoraan on kerrottu olleen uljas ja hänen reidetkin olivat kultaa. Häntä on sanottu vakavaksi mieheksi, eikä hänen tiedetty koskaan nauraneen tai vitsailleen. Hän pukeutui valkoiseen kaapuun ja käytti housuja, mikä oli epätyypillistä kreikkalaiselle. Lisäksi Pythagoras piti kultaista seppelettä korostaakseen ylivertaisuuttaan.

4 Pythagoraan lause

Pythagoras tai pythagoralaiset saattoivat olla ensimmäisiä, jotka kirjoittivat formaalin ratkaisun yhtälöön

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{4.1}$$

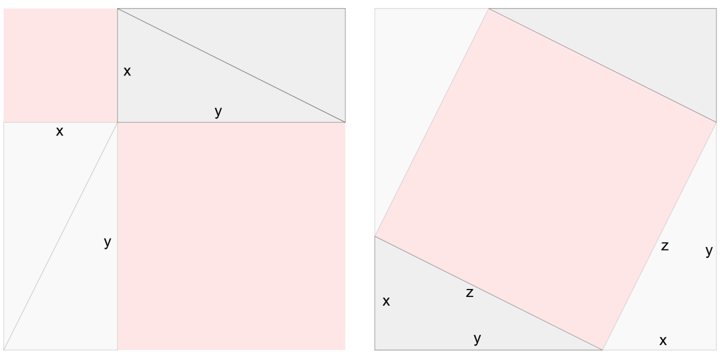
Tiedetään, että myös babylonialaiset ja egyptiläiset käyttivät samaa yhtälöä jo paljon ennen Pythagorasta. Lisäksi on löytynyt todisteita, että Kiinassa ja Intiassa käytettiin kyseistä yhtälöä myös. Pythagoras opiskeli niin Egyptissä kuin Babyloniassakin, jossa hän saattoi tavata kiinalaisia ja intialaisia. Siitä huolimatta, että yhtälö on ollut tunnettu eri puolilla maailmaa, lausetta kutsutaan nykyään *Pythagoraan lauseeksi*, ensimmäisen formaalin ratkaisun myötä. [6, s. 10.], [2, s. 13].

Nykyisin Pythagoraan lauseelle on satoja todistuksia. Joidenkin arvioiden mukaan tähän mennessä on laadittu jopa yli 360 todistusta. Todistuksen ovat laatineet pythagoralaisten lisäksi mm. Euklides, Leonardo da Vinci ja Yhdysvaltojen presidentti James Garfield. Tässä luvussa esitetään mahdollisesti kaikkien aikojen ensimmäinen Pythagoraan lauseen geometrinen todistus, joka on löydetty samanaikaisesti useissa toisistaan erillisissä kulttuureissa. [1]

Lause 4.1 (Pythagoraan lause). *Suorakulmaisen kolmion kateettien, joiden pituudet ovat x ja y, neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan, jonka pituus on z, neliö eli*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Todistus (vrt. [1]). Piirretään neliö A, jonka sivun pituus on $x + y$.



Kuva 4.1. Pythagoraan lauseen todistus geometrisesti.

Neliön sisään piirretään neljä samankokoista suorakulmaista kolmiota, joiden kateettien pituudet ovat x ja y ja hypoteenusa on z. Kolmiot asetellaan, kuten vasemmanpuoleisessa neliössä kuvassa 4.1. Vasemmanpuoleisesta neliöstä nähdään nyt suorakulmaisen kolmion kateettien neliöt x^2 ja y^2, jotka on merkitty kuvaan punaisella.

Järjestellään suorakulmaisia kolmioita uudelleen siten, että jokaisen kolmion suorakulma asetetaan neliön A kulmien kohdalle. Nyt keskelle muodostuvan punaisen neliön sivun pituus on z. Oikeanpuoleiseen neliöön A kuvassa 4.1 on merkitty punaisella pinta-ala, joka on hypotenuusan neliö z^2.

Neliön A pinta-ala pysyy samana. Samoin suorakulmaisten kolmioiden muodostama pinta-ala pysyy vasemmanpuoleisessa ja oikeanpuoleisessa neliössä samana. Punaisen alueen pinta-ala on vasemmanpuoleisessa neliössä $x^2 + y^2$ ja oikeanpuoleisessa neliössä z^2, joten $x^2 + y^2 = z^2$. □

5 Pythagoraan kolmikot

Diofantoksen yhtälöksi kutsutaan yhtälöä, jossa on vähintään kaksi muuttujaa, pelkästään kokonaislukukertoimia ja jonka ratkaisut ovat kokonaislukuja. Jos yhtälö on muotoa $ax + by = c$, missä $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sitä sanotaan *lineaariseksi Diofantoksen yhtälöksi kahden muuttujan suhteen*. [5, s. 119–120.]

Lineaaristen Diofantoksen yhtälöiden kaikki kokonaislukuratkaisut on mahdollista löytää. Sen sijaan ei ole olemassa yleistä metodia kaikkien *epälineaaristen Diofantoksen yhtälöiden* ratkaisemiseen. On kuitenkin olemassa joitakin epälineaarisia Diofantoksen yhtälöitä, joiden kaikki kokonaislukuratkaisut on mahdollista löytää. *Pythagoraan lauseen* mukainen yhtälö $x^2 + y^2 = z^2$ on eräs niistä. [5, s. 481.]

Luvussa 4 esitettiin ja todistettiin Pythagoraan lause. Tässä luvussa esitetään kaava, jonka avulla on mahdollista löytää kaikki kokonaislukukolmikot, jotka toteuttavat yhtälön $x^2 + y^2 = z^2$. Toisin sanoen etsitään kaikki suorakulmaiset kolmiot, joiden sivut ovat kokonaislukuja. Näitä kokonaislukukolmikkoja sanotaan *Pythagoraan kolmikoiksi*. Pythagoraan oma ratkaisu kaikkien kolmikkojen generointiin ei itse asiassa ollut riittävä, vaan vasta myöhemmin Eukleides todisti ongelman täsmällisesti. [2, s. 235.]

Tässä luvussa esitetyt tiedot on yhdistelty kahdesta päälähteestä [2] ja [5].

Määritelmä 5.1. Olkoot x, y ja z sellaisia postiviisia kokonaislukuja, että ne toteuttavat yhtälön $x^2 + y^2 = z^2$. Tällöin kolmikko (x, y, z) on *Pythagoraan kolmikko*.

Esimerkki 5.2. Kolmikot $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$ ja $(7, 24, 25)$ ovat Pythagoraan kolmikkoja, koska

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 6^2 + 8^2 = 10^2 \quad \text{ja} \quad 7^2 + 24^2 = 25^2.$$

Määritelmä 5.3. Olkoon (x, y, z) Pythagoraan kolmikko. Jos $\text{syt}(x, y, z) = 1$, niin kolmikon sanotaan olevan *jaoton Pythagoraan kolmikko*. Jaottomasta Pythagoraan kolmikosta käytetään myös nimitystä *primitiivinen Pythagoraan kolmikko*.

Esimerkki 5.4. Pythagoraan kolmikot $(3, 4, 5)$ ja $(7, 24, 25)$ ovat jaottomia, koska $\text{syt}(3, 4, 5) = 1$ ja $\text{syt}(7, 24, 25) = 1$. Mutta $\text{syt}(6, 8, 10) = 2$, joten Pythagoraan kolmikko $(6, 8, 10)$ ei ole jaoton.

Olkoon (x, y, z) Pythagoraan kolmikko ja $d = \text{syt}(x, y, z)$. Olkoot lisäksi x_1, y_1 ja z_1 sellaisia kokonaislukuja, että $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$ ja $\text{syt}(x_1, y_1, z_1) = 1$. Nyt sijoitetaan Pythagoraan kolmikko (x, y, z) Pythagoraan lauseen yhtälöön. Saadaan

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ja jakamalla yhtälö puolittain luvulla d^2 saadaan

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \left(\frac{z}{d}\right)^2.$$

Siis

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2.$$

Tässä (x_1, y_1, z_1) on jaoton Pythagoraan kolmikko, koska $\operatorname{syt}(x_1, y_1, z_1) = 1$. Mikäli $d > 1$, niin (x, y, z) ei ole jaoton Pythagoraan kolmikko, vaan se on jaottoman Pythagoraan kolmikon (x_1, y_1, z_1) monikerta. Huomataan, että jos $d = 1$, niin myös (x, y, z) on jaoton Pythagoraan kolmikko ja tällöin olisi $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$.

Jaottoman Pythagoraan kolmikon (tai minkä tahansa Pythagoraan kolmikon) monikerrat ovat myös Pythagoraan kolmikkoja. Toisin sanoen, jos (x, y, z) on Pythagoraan kolmikko, niin myös (kx, ky, kz), missä kokonaisluku $k > 1$, on Pythagoraan kolmikko. Tällöin

$$(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2.$$

Esimerkki 5.5. Esimerkissä 5.2 todettiin, että $(6, 8, 10)$ on Pythagoraan kolmikko. Lisäksi esimerkissä 5.4 huomattiin, ettei kolmikko ole jaoton, koska $\operatorname{syt}(6, 8, 10) = 2$. Nyt

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

ja

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2.$$

Tällöin

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Kuten edellä todettiin, tässä esimerkissä saadaan Pythagoraan kolmikosta $(6, 8, 10)$, joka ei ole jaoton, ratkaistua suurimman yhteisen tekijä avulla jaoton Pythagoraan kolmikko $(3, 4, 5)$. Myös esimerkiksi $(2\cdot 6,\ 2\cdot 8,\ 2\cdot 10) = (12, 16, 20)$ on Pythagoraan kolmikko ja tällöin $\operatorname{syt}(12, 16, 20) = 4$.

Nyt tiedetään, että suurimman yhteisen tekijän avulla on mahdollista löytää jaottomia Pythagoraan kolmikkoja. Löytämällä kaikki jaottomat Pythagoraan kolmikot on mahdollista löytää kaikki Pythagoraan kolmikot.

Kaikkien jaottomien Pythagoraan kolmikoiden löytämistä varten tarvitaan ensin kolme apulausetta.

Ensimmäinen apulause kertoo, että jaottomassa Pythagoraan kolmikossa mitkä tahansa sen kaksi kokonaislukua ovat keskenään jaottomia.

Apulause 5.6. Jos (x, y, z) on jaoton Pythagoraan kolmikko, niin $\mathrm{syt}(x, y) = \mathrm{syt}(x, z) = \mathrm{syt}(y, z) = 1$.

Todistus (vrt. [5, s. 483]). Oletetaan, että (x, y, z) on jaoton Pythagoraan kolmikko ja $\mathrm{syt}(x, y) > 1$. Täten on olemassa sellainen alkuluku p, että $p \mid \mathrm{syt}(x, y)$. Tällöin $p \mid x$ ja $p \mid y$. Koska $p \mid x$ ja $p \mid y$, niin lauseen 2.2 nojalla $p \mid (x^2 + y^2)$. Koska (x, y, z) on Pythagoraan kolmikko, niin $x^2 + y^2 = z^2$. Täten $p \mid z^2$ ja edelleen apulauseen 2.12 nojalla $p \mid z$. Tämän perusteella p jakaa kolmikon luvut x, y ja z, mikä on ristiriita, koska määritelmän 5.3 nojalla jaottomassa Pythagoraan kolmikossa $\mathrm{syt}(x, y, z) = 1$. Siis $\mathrm{syt}(x, y) = 1$. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että $\mathrm{syt}(x, z) = \mathrm{syt}(y, z) = 1$. □

Esimerkki 5.7. Jaottomassa Pythagoraan komikossa $(3, 4, 5)$ on voimassa

$$\mathrm{syt}(3, 4) = \mathrm{syt}(3, 5) = \mathrm{syt}(4, 5) = 1.$$

Toisaalta Pythagoraan kolmikossa $(6, 8, 10)$, mikä ei ole jaoton,

$$2 \mid \mathrm{syt}(6, 8), \quad 2 \mid \mathrm{syt}(6, 10) \quad \text{ja} \quad 2 \mid \mathrm{syt}(8, 10).$$

Siis

$$2 \mid 6, \quad 2 \mid 8 \quad \text{ja} \quad 2 \mid 10,$$

joten

$$\mathrm{syt}(6, 8) = \mathrm{syt}(6, 10) = \mathrm{syt}(8, 10) = 2.$$

Toinen apulause liittyy jaottomissa Pythagoraan kolmikoissa esiintyvien lukujen parillisuuteen. Huomioitavaa on, että luku säilyttää parillisuutensa ja parittomuutensa, kun se neliöidään, sillä

$$(2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2) \quad \text{ja} \quad (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Apulause 5.8. Jos (x, y, z) on jaoton Pythagoraan kolmikko, niin x on parillinen ja y on pariton tai x on pariton ja y on parillinen.

Todistus (vrt. [5, s. 483] ja [2, s. 236]). Olkoon (x, y, z) jaoton Pythagoraan kolmikko. Apulauseen 5.6 nojalla tiedetään, että $\mathrm{syt}(x, y) = 1$, joten x ja y eivät voi molemmat olla parillisia, koska tällöin olisi $\mathrm{syt}(x, y) \geq 2$. Lisäksi x ja y eivät voi molemmat olla parittomia. Jos x ja y olisivat molemmat parittomia, niin ne voitaisiin esittää muodossa $x = 2k + 1$ ja $y = 2v + 1$, missä k ja v ovat kokonaislukuja. Tällöin

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Vastaavasti

$$y^2 = (2v+1)^2 = 4v^2 + 4v + 1 = 4(v^2 + v) + 1.$$

Siis

$$x^2 \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{ja} \quad y^2 \equiv 1 \pmod 4.$$

Tällöin lauseen 2.7 kohdan (i) nojalla

$$x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \pmod 4$$

eli

$$z^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

mikä on mahdotonta. Ei ole mahdollista, että minkään luvun neliö olisi kongruentti luvun 2 kanssa modulo 4. Minkä tahansa luvun neliö on aina kongruentti luvun 0 kanssa modulo 4 tai luvun 1 kanssa modulo 4. Siis x on parillinen ja y on pariton luku tai päinvastoin. □

Viimeinen apulause on aritmetiikan peruslauseen (lause 2.10) seuraus. Siinä todistetaan, että kun kahden keskenään jaottoman kokonaisluvun tulo on jonkin kokonaisluvun neliö, niin molempien lukujen on oltava joidenkin lukujen neliöitä.

Apulause 5.9. Olkoot r, s ja t positiivisia kokonaislukuja ja $\mathrm{syt}(r, s) = 1$ sekä $rs = t^2$. Tällöin on olemassa sellaiset $m, n \in \mathbb{Z}$, että $r = m^2$ ja $s = n^2$.

Todistus (vrt. [5, s. 484]). Jos $r = 1$, niin tällöin $\mathrm{syt}(r, s) = 1$ ja $s = t^2$. Kun $m = 1$, niin $r = m^2$. Lisäksi kun $n = t$, niin $s = n^2$. Tällöin apulause on tosi. Vastaavasti osoitetaan, että apulause on tosi, kun $s = 1$. Voidaan siis olettaa, että $r > 1$ ja $s > 1$. Olkoot lukujen r, s ja t alkulukuhajotelmat

$$\begin{aligned} r &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_u^{a_u}, \\ s &= p_{u+1}^{a_{u+1}} p_{u+2}^{a_{u+2}} \cdots p_v^{a_v} \quad \text{ja} \\ t &= q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_k^{b_k}. \end{aligned}$$

Koska $\mathrm{syt}(r, s) = 1$, niin lukujen r ja s alkulukuhajotelmat ovat erisuuria. Koska $rs = t^2$, niin

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_u^{a_u} p_{u+1}^{a_{u+1}} p_{u+2}^{a_{u+2}} \dots p_v^{a_v} = q_1^{2b_1} q_2^{2b_2} \dots q_k^{2b_k}.$$

Aritmetiikan peruslauseen (lause 2.10) nojalla yhtälön molemmilla puolilla esiintyvät alkulukujen eksponentit ovat samat. Jokaisen alkuluvun p_i on oltava jokin q_j, josta seuraa, että $a_i = 2b_j$. Jokainen eksponentti a_i on siis parillinen ja tällöin $a_i/2$ on kokonaisluku. Nähdään, että $r = m^2$ ja $s = n^2$, missä m ja n ovat kokonaislukuja

$$\begin{aligned} m &= p_1^{a_1/2} p_2^{a_2/2} \dots p_u^{a_u/2} \qquad \text{ja} \\ n &= p_{u+1}^{a_{u+1}/2} p_{u+2}^{a_{u+2}/2} \dots p_v^{a_v/2}. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} r &= m^2 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_u^{a_u} \qquad \text{ja} \\ s &= n^2 = p_{u+1}^{a_{u+1}} p_{u+2}^{a_{u+2}} \dots p_v^{a_v}. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi todistetaan lause, jonka avulla löydetään kaikki jaottomat Pythagoraan kolmikot. Samalla osoitetaan, että jaottomassa Pythagoraan kolmikossa on aina täsmälleen yksi parillinen luku. Joko x tai y voi olla parillinen luku, eli seuraavan todistuksen voisi tehdä myös olettamalla, että parillinen luku onkin x.

Lause 5.10. *Positiiviset kokonaisluvut muodostavat jaottoman Pythagoraan kolmikon (x, y, z), jossa y on parillinen, jos ja vain jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, että*

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2, \\ y &= 2mn, \\ z &= m^2 + n^2, \end{aligned}$$

missä $m > n$, $\mathrm{syt}(m, n) = 1$ *ja $m \not\equiv n \pmod 2$.*

Todistus (vrt. [5, s. 485]). Olkoon (x, y, z) jaoton Pythagoraan kolmikko. Näytetään, että on olemassa lauseen mukaiset kokonaisluvut m ja n. Koska oletetaan, että y on parillinen, niin tällöin apulauseen 5.8 nojalla x on pariton. Myös z on pariton, koska jos z olisi parillinen, niin luvun x ollessa pariton myös y olisi pariton, mikä on ristiriita.

Koska $x^2 + y^2 = z^2$, niin

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x).$$

Koska kahden parittoman luvun summa tai erotus tuottaa aina parillisen luvun, niin huomataan, että $z + x$ ja $z - x$ ovat molemmat sellaisia parillisia kokonaislukuja, että on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut r ja s, että $r = (z + x)/2$ ja $s = (z - x)/2$. Täten

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{(z + x)}{2}\right)\left(\frac{(z - x)}{2}\right) = rs.$$

Olkoon $\mathrm{syt}(r, s) = d$. Tällöin pätee myös $d \mid \mathrm{syt}(r, s)$. Edelleen, koska $d \mid r$ ja $d \mid s$, niin lauseen 2.2 nojalla $d \mid (r + s) = z$ ja $d \mid (r - s) = x$. Tämän seurauksena $d \mid \mathrm{syt}(x, z)$. Koska apulauseen 5.6 nojalla $\mathrm{syt}(x, z) = 1$, niin $d = 1$ ja siis $\mathrm{syt}(r, s) = 1$.

Apulauseen 5.9 nojalla on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut m ja n, että $r = m^2$ ja $s = n^2$. Kirjoitetaan nyt luvut x, y ja z lukujen m ja n avulla. Tällöin

$$\begin{aligned} x &= r - s = m^2 - n^2, \\ y &= \sqrt{4rs} = \sqrt{4m^2n^2} = 2mn, \\ z &= r + s = m^2 + n^2. \end{aligned}$$

Todistetaan sitten samaan tapaan kuin edellä, että luvut m ja n ovat keskenään jaottomia. Olkoot $\mathrm{syt}(m, n) = d$, niin tällöin $d \mid \mathrm{syt}(m, n)$. Edelleen $d \mid m$ ja $d \mid n$, joten myös $d \mid 2mn = y$. Lauseen 2.2 nojalla $d \mid m^2 - n^2 = x$ ja $d \mid m^2 + n^2 = z$. Siis $d \mid \mathrm{syt}(x, y, z)$. Koska määritelmän 5.3 nojalla tiedetään, että $\mathrm{syt}(x, y, z) = 1$, niin $d = 1$ ja tällöin myös $\mathrm{syt}(m, n) = 1$. Siis luvut m ja n ovat keskenään jaottomia. Huomataan myös, että luvut m ja n eivät molemmat voi olla parittomia, koska jos ne olisivat, niin luvut x, y ja z olisivat kaikki parillisia, jolloin päädytään ristiriitaan. Koska $\mathrm{syt}(m, n) = 1$ ja luvut m ja n eivät molemmat voi olla parittomia, nähdään, että m on parillinen ja n on pariton tai päinvastoin. Siis $m \not\equiv n \pmod 2$. Nyt on todistettu, että kokonaisluvut m ja n täyttävät lauseen ehdot.

Lopuksi osoitetaan, että jokainen kolmikko

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2, \\ y &= 2mn, \\ z &= m^2 + n^2. \end{aligned}$$

missä m ja n ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $m > n$, $\mathrm{syt}(m, n) = 1$ ja $m \not\equiv n \pmod 2$, muodostaa jaottoman Pythagoraan kolmikon.

Ensimmäiseksi huomataan, että m^2-n^2, $2mn$ ja m^2+n^2 muodostavat Pythagoraan kolmikon, koska

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^4 - 2mn^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2mn^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= z^2. \end{aligned}$$

Jotta tämä kolmikko muodostaisi jaottoman Pythagoraan kolmikon, on näytettävä vielä, että luvut x, y ja z ovat keskenään jaottomia. Oletetaan, että $\mathrm{syt}(x, y, z) = d > 1$. Tällöin on olemassa sellainen alkuluku p, että $p \mid \mathrm{syt}(x, y, z)$. Huomataan, että $p \neq 2$, koska x on pariton (koska $x = m^2 - n^2$, missä m^2 on parillinen ja n^2 on pariton, tai päinvastoin). Lisäksi huomataan, että koska $p \mid x$ ja $p \mid z$, niin $p \mid (z + x) = 2m^2$ ja $p \mid (z - x) = 2n^2$. Täten $p \mid m$ ja $p \mid n$ on ristiriidassa sen kanssa, että $\mathrm{syt}(m, n) = 1$. Siis $\mathrm{syt}(x, y, z) = 1$ ja (x, y, z) on jaoton Pythagoraan kolmikko. □

Esimerkki 5.11. Olkoot $m = 4$ ja $n = 1$. Tällöin ne täyttävät ehdot $\mathrm{syt}(m, n) = 1$, $m \not\equiv n \pmod 2$ ja $m > n$. Lauseen 5.10 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2 = 4^2 - 1^2 = 15, \\ y &= 2mn = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8, \\ z &= m^2 + n^2 = 4^2 + 1^2 = 17, \end{aligned}$$

joka on jaoton Pythagoraan kolmikko $(15, 8, 17)$.

Lähdeteoksessa [5, s. 486] listataan kolmikot, kun $m \leqslant 6$, ja lähdeteoksessa [2, s. 238], kun $m \leqslant 7$. Yksittäisten jaottomien Pythagoraan kolmikoiden löytäminen ainoastaan lukuja arvailemalla käy kuitenkin nopeasti työlääksi. Kolmikoiden löytämistä voidaan helpottaa ohjelmoimalla avuksi pieni koodi esimerkiksi Javalla tai Sagella. Seuraavassa esimerkissä ohjelmoidaan koodi ja listataan Pythagoraan kolmikot, kun $7 < m \leqslant 10$.

Esimerkki 5.12. Ohjelmoidaan Javalla for-silmukka, joka tulostaa jaottoman Pythagoraan kolmikon, jos luvut m ja n toteuttavat niille määritellyt ehdot. Koko Java-koodi on tämän tutkielman liitteenä A.

Listataan taulukkoon 5.1 kaikki jaottomat Pythagoraan kolmikot, kun $7 < m \leqslant 10$.

m	n	$x = m^2 - n^2$	$y = 2mn$	$z = m^2 + n^2$
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
10	7	51	140	149
10	9	19	180	181

Taulukko 5.1. Joitakin jaottomia Pythagoraan kolmikoita.

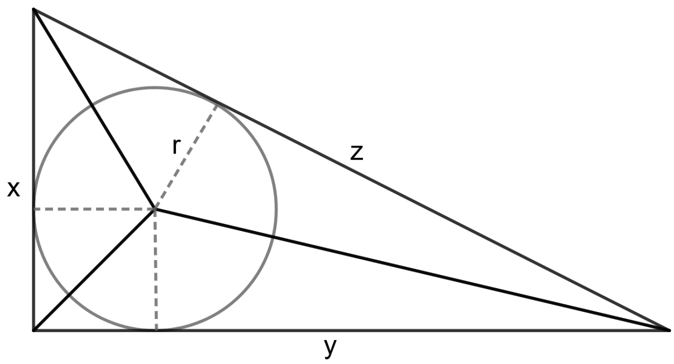
Koodia voisi jatkaa edelleen siten, että se löytäisi kolmikoita, joiden luvut x, y ja z olisivat annetulta väliltä. Esimerkiksi voidaan etsiä kaikki sellaiset kolmikot, joiden x on suurempi kuin 5, mutta enintään 15.

Lopuksi todistetaan vielä, että suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on kokonaisluku, kun kolmion sivun pituudet muodostavat Pythagoraan kolmikon.

Lause 5.13. *Pythagoraan kolmikon muodostaman kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on kokonaisluku.*

Todistus (vrt. [2, s. 239]). Olkoon r suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde. Olkoon z suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja x ja y sen kateetit. Ympyrän keskipiste on suorakulmaisen kolmion sisään piirrettyjen kolmioiden yhteinen kärkipiste. Koko kolmion pinta-ala on yhtäsuuri kuin sen sisään piirrettyjen kolmioiden pinta-ala yhteensä. Siis

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}rx + \frac{1}{2}ry + \frac{1}{2}rz = \frac{1}{2}r(x + y + z)$$



Kuva 5.1. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä.

Olkoot k, m ja n positiivisia kokonaislukuja. Yhtälön $x^2 + y^2 = z^2$ positiiviset kokonaislukuratkaisut voidaan nyt esittää muodossa

$$\begin{aligned} x &= k(m^2 - n^2), \\ y &= 2kmn, \\ z &= k(m^2 + n^2). \end{aligned}$$

Jos $k = 1$, niin (x, y, z) on jaoton Pythagoraan kolmikko. Esitetään nyt yhtälö $xy = r(x + y + z)$ lukujen k, m ja n avulla ja ratkaistaan r. Saadaan

$$\begin{aligned} r &= \frac{k(m^2 - n^2)2kmn}{k(m^2 - n^2) + 2kmn + k(m^2 + n^2)} \\ &= \frac{2k^2mn(m^2 - n^2)}{k(m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2)} \\ &= \frac{2k^2mn(m + n)(m - n)}{2km(m + n)} \\ &= kn(m - n), \end{aligned}$$

joka on kokonaisluku. □

Esimerkki 5.14. Tarkastellaan jaotonta Pythagoraan kolmikkoa $(55, 48, 73)$. Taulukosta 5.1 nähdään, että tällöin $m = 8$ ja $n = 3$. Sijoitetaan nämä edellä todistettuun kaavaan, missä $r = kn(m - n)$. Nyt $k = 1$, koska kolmikko on jaoton, joten saadaan $r = 3(8 - 3)$. Siis $r = 15$.

Esimerkki 5.15. Pythagoraan kolmikoiden muodostamia kolmioita ja niiden sisään piirrettyjä ympyröitä voidaan tarkastella vuorovaikutteisesti GeoGebran avulla. Liitteessä B on linkki tätä tutkielmaa varten luotuun GeoGebra-työkirjaan, jossa havainnollistetaan Pythagoraan kolmikoita, kun $m \leqslant 20$.

Lähteet

[1] Britannica Academic. *Encyclopædia Britannica Inc: Pythagorean theorem*. Luettu 24.11.2019. https://academic-eb-com.libproxy.tuni.fi/levels/collegiate/article/Pythagorean-theorem/343833.

[2] Burton, D. *Elementary Number Theory*. 5. painos. Boston: McMGraw-Hill; 2005.

[3] Diogenes, Laertius ja Ahonen, M. *Merkittävien filosofien elämät ja opit*. Helsinki: Summa; 2002.

[4] Riedweg, C. *Pythagoras – His Life, Teaching, and Influence*. Ithaca: Cornell University Press; 2005.

[5] Rosen, K. *Elementary Number Theory and Its Applications*. 4. painos. Reading: Addison-Wesley; 2000.

[6] Takloo-Bighash, R. *A Pythagorean Introduction to Number Theory – Right Triangles, Sums of Squares, and Arithmetic*. Cham, Switzerland: Springer; 2018.

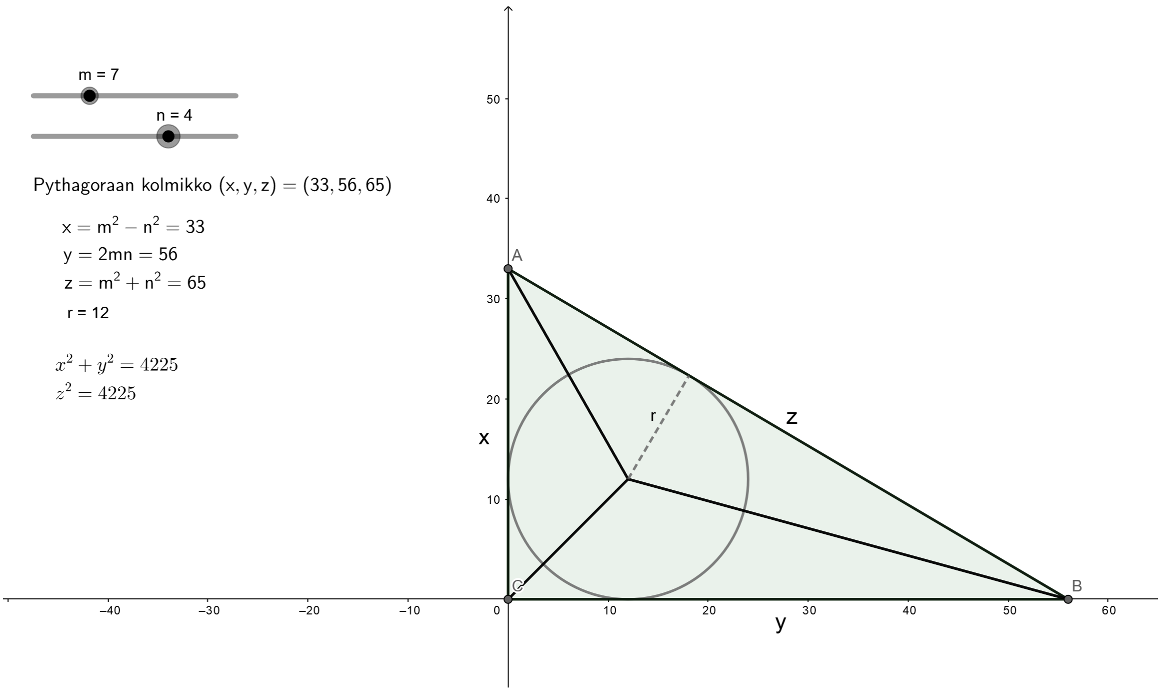
A Jaottomien Pythagoraan kolmikoiden generointi Javalla

```
import java.lang.Math.*;

public class Kolmikot {

    private static int etsiSYT(int luku1, int luku2) {

        if(luku2 == 0){
            return luku1;
        }
        return etsiSYT(luku2, luku1%luku2);
    }

    public static void main(String[] args)  {

        int x;
        int y;
        int z;

        for(int m = 1; m < 11; m++){
            for(int n = 1; n < 11; n++){
                if(((m % 2 == 0 && n % 2 == 1) || (n % 2 == 0 && m % 2 == 1)) &&
                    m > n && etsiSYT(m,n) == 1){
                        x = (int)Math.pow(m,2) - (int)Math.pow(n,2);
                        y = 2*m*n;
                        z = (int)Math.pow(m,2) + (int)Math.pow(n,2);

                        System.out.println("m = " + m + ", n = " + n);
                        System.out.println("(" + x + ", " + y + ", " + z + ")");
                }
            }
        }
    }
}
```

Kuva A.1. Java-koodi jaottomille Pythagoraan kolmikoille.

B Pythagoraan kolmikoiden havainnollistaminen GeoGebralla

Linkki julkiseen GeoGebra-työkirjaan: https://www.geogebra.org/m/yt872bsh



Kuva B.1. Pythagoraan kolmikoiden havainnollistaminen GeoGebralla.