Tampereen yliopisto

Ykä Lähteenmäki

KEHITTÄMISTUTKIMUS: MATEMATIIKAN HIIHTOLOMAKURSSI YHDEKSÄSLUOKKALAISILLE

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2019

Tiivistelmä

Ykä Lähteenmäki: Kehittämistutkimus: matematiikan hiihtolomakurssi yhdeksäsluokkalaisille
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2019

Tässä pro gradu -tutkielmassa matematiikan aineenopettajaopiskelijat Ykä Lähteenmäki (LuK) ja Robin Hamdi (TkK) kehittivät toiminnallisiin työmenetelmiin keskittyvän hiihtolomakurssin yhdeksäsluokkalaisille, jonka tuotti Tampereen LUMATE-keskus. Hiihtolomakurssin tavoitteena oli vahvistaa oppilaiden matematiikan osaamista sekä kehittää heidän matemaattista minäkuvaansa positiivisesti, jotta he saisivat mahdollisimman hyvät lähtökohdat jatko-opintoihinsa.

Hiihtolomakurssin kehittäminen toteutettiin kehittämistutkimuksena. Kehittämistutkimus on syklimuotoinen tutkimusmenetelmä. Kehittämistutkimus koostuu yleensä ongelma-analyysistä, kehittämisprosessista, testauksesta sekä aineiston hankinnasta ja analysoinnista. Ongelma-analyysissä LUMATE-keskus ja tutkijat selvittivät, mitä tutkimuksessa halutaan kehittää. Kehittämisprosessi piti sisällään kehittämistuotoksen suunnittelun, luomisen ja sen arvioinnin. Kehittämisprosessi toteutettiin syklimäisesti toistaen vaiheita, kunnes tuotos oli valmis testattavaksi. Kehittämistuotosta testattiin järjestämällä kurssi keväällä 2019. Tutkimusaineistoa kerättiin sekä kurssin aikana että kurssin järjestämisen jälkeen. Tutkimuksen kohteina olivat kurssille luotu oppimateriaali, kurssille osallistuneiden oppilaiden matematiikan osaamisen kehittyminen ja matemaattisen minäkuvan muovautuminen.

Tutkimuksen mukaan kehitetty hiihtolomakurssi onnistui kokonaisuutena. Tutkimustulosten perusteella kurssin aikana kurssille osallistuneiden oppilaiden matematiikan osaaminen kehittyi ja oppilaat viihtyivät kurssilla. Oppilaat pitivät kurssin työskentelymenetelmistä ja suhtautuivat matematiikkaan oppiaineena kurssin jälkeen positiivisemmin. Tutkimukseen osallistuneiden määrä (N=14) jäi suhteellisen pieneksi, joten tuloksia on syytä tarkastella kriittisesti. Tutkijoiden mukaan pienestä otannasta huolimatta tuloksia voidaan pitää ainakin suuntaa antavina ja kurssia toimivana tuotoksena. Tutkimuksen mukaan kurssille kehitetty oppimateriaali onnistui kelvollisesti. Se on toimiva paketti kaikkien käytettäväksi, mutta vaatii jatkokehittämistä, etenkin visuaalisuuden suhteen.

Avainsanat: yläkoulu, matematiikka, matematiikkakuva, kehittämistutkimus, oppimateriaali, jaollisuussäännöt

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Yhdeksännen vuosiluokan ja sitä seuraavan koulutusvaiheen nivelkohta on nuoren elämässä merkittävä. Siinä tehdään suuria päätöksiä koulutus- ja uravalinnoista. Perusopetuksen opetussuunnitelman [12] mukaan perusopetuksen tavoitteena onkin antaa oppilaille mahdollisimman hyvät valmiudet selvitä tästä nivelvaiheesta taaten oppilaalle opiskelun edellytykset. Opetushallituksen raportin [11] mukaan matematiikan osaaminen ja matemaattisen minäkuvan kehittyminen ovat keskenään vahvasti yhteydessä erityisesti peruskoulun viimeisellä vuosiluokalla. Matematiikka koetaan oppiaineena hyödyllisenä läpi koulupolun. Tämä ei ole kuitenkaan välttämättä pelkästään hyvä asia, sillä se voi aiheuttaa stressiä oppilaalle, jos matematiikan hyödyllisyyden tärkeyttä korostetaan liikaa.

Tampereen LUMATE-keskus [17] ilmoitti syksyllä 2018 halustaan järjestää matematiikan kertauskurssi yhdeksäsluokkalaisille kevään 2019 hiihtolomalla. Tampereen LUMATE-keskus on Tampereen yliopiston alaisuudessa toimiva verkosto, joka on osana valtakunnallista LUMA-keskus Suomi -verkostoa. Sen tarkoituksena on innostaa lapsia ja nuoria muun muassa matematiikan harrastamiseen sekä sen oppimiseen, tutkimiseen ja soveltamiseen. LUMATE-keskus pyrkii toiminnassaan panostamaan vaihtoehtoisiin ja monipuolisiin työmenetelmiin, jossa nuori pääsee itse tekemään ja toimimaan. Kurssin tärkeimmiksi tavoitteiksi asetettiin matematiikan osaamisen kehittyminen sekä matemaattisen minäkuvan positiivinen kehittyminen ja kurssilla käytettävien työmenetelmien toivottiin olevan toiminnallislähtöisiä.

Kurssi sai ajankohtansa vuoksi nimekseen hiihtolomakurssi, ja sen kehittäjiksi toivottiin kahta matematiikan aineenopettajaksi opiskelevaa opiskelijaa. Projektiin lähtivät mukaan Ykä Lähteenmäki (LuK) ja Robin Hamdi (TkK). Kurssin kehittäminen päätettiin toteuttaa kehittämistutkimuksena, jonka raporteista Lähteenmäki ja Hamdi saisivat samalla kirjoittaa lopputyönsä. Kehittämistutkimus on opetusalalla syklimuotoinen tutkimusmenetelmä, jonka tavoitteena on tuottaa käytännön tuotoksia opetustyöhön [14]. Tampereen LUMATE-keskus toimi hiihtolomakurssin tuottajana, jonka rooliin kuului käytännön asioiden, kuten markkinoinnin ja kurssi-ilmoittautumisten hoitamisen. Tutkijoiden Lähteenmäen ja Hamdin tehtävänä oli kurssin rakenteen ja oppimateriaalin kehittäminen, sekä itse kurssilla opettajina toimiminen.

Matematiikan opetuksessa käytetty oppimateriaali vaikuttaa sekä matematiikan osaamisen että matemaattisen minäkuvan kehittymiseen [13, s. 344]. Oppimateriaalitutkimus onkin tärkeää, sillä opetuksessa käytetyt oppimateriaalit ovat tärkeä osa matematiikan opetusta [5, s. 344]. Näistä syistä hiihtolomakurssille haluttiin luoda oppimateriaalikokonaisuus, jonka keskeisimpänä teoksena toimisi oppikirja. Oppimateriaalitutkimus oli yksi tämän kehittämistutkimuksen tutkimuskohteista. Muut tutkimuskysymykset liittyivät matematiikan osaamisen ja matemaattisen minäkuvan kehittämisen teemoihin. Tämän kehittämistutkimuksen tavoitteena onkin luoda vuosittain järjestettävä toiminnallisiin työmenetelmiin perustuva hiihtolomakurssi yhdeksäsluokkalaisille.

Tässä tutkimuksessa kuvataan ensin teoreettinen viitekehys, jonka raameissa hiihtolomakurssi on kehitetty. Tämän jälkeen esitellään kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä, sekä kuvataan, kuinka sen soveltaminen toteutui tämän tutkimuksen kontekstissa. Luvussa 4 esitellään kurssilla käytetty oppimateriaali ja luvussa 5 syvennytään sen yhteen aihealueeseen tarkemmin. Tutkimuskysymykset esitellään luvussa 6, jonka jälkeen luvussa 7 esitellään aineiston hankinta ja sen analysointi, sekä tutkimustuloksiin vaikuttavat taustamuuttujat. Luvussa 8 tarkastellaan tutkimustuloksia ja asetettuihin tutkimuskysymyksiin pyritään vastaamaan mahdollisimman perustellusti. Saatuja tutkimustuloksia tarkastellaan luvussa 9, ja lopuksi luvussa 10 pohditaan tutkimuksen luotettavuutta, eettisiä näkökulmia sekä kurssin jatkokehittämistä.

2 Teoria

2.1 Matemaattinen osaaminen

Tutkimuksen kurssin kehittämiseen on hyödynnetty Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin [7] luomia matemaattisen osaamisen (*mathematical proficiency*) alueita, jotka esitellään seuraavaksi. Kilpatrickin ym. [7] mukaan matematiikan osa-alueita on yhteensä viisi: käsitteellinen ymmärtäminen (*conceptual understanding*), proseduraalinen sujuvuus (*procedural fluency*), strateginen kompetenssi (*strategic competence*), mukautuva päättely (*adaptive reasoning*) sekä yritteliäisyys (*productive disposition*). [3, s. 96–97][7, s. 116]

Käsitteellinen ymmärtäminen tarkoittaa matematiikan käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden hallintaa. Käsitteellinen ymmärtäminen ei tarkoita ainoastaan faktoja ja menetelmiä, vaan kykyä osata liittää niitä oikeisiin asiayhteyksiin. Lisäksi käsitteellinen ymmärtäminen tarkoittaa käsitteiden yhdistelemistä sekä toisiinsa että uusiin käsitteisiin. Monessa tapauksessa oppilas saattaa hyvin hallita jonkin käsitteen jo ennen kuin osaa ilmaista sen ymmärrystä. [7, s. 116, 118–119]

Proseduraalinen sujuvuus tarkoittaa niin kutsuttua laskurutiinia. Hyvän laskurutiinin omaava oppilas tuntee erilaiset proseduurit, ja tietää missä tilanteissa niitä käytetään ja millä tavalla. Proseduraalinen sujuvuus on vahvasti yhteydessä edellä esiteltyyn käsitteelliseen ymmärtämiseen. Kaikissa tilanteissa, esimerkiksi rationaalilukujen oppimisessa, ei käsitteellistä ymmärrystä voida saavuttaa ilman aiheen proseduurien hallintaa. Laskurutiini koostuu proseduurien sujuvuudesta, tehokkuudesta sekä niiden joustavasta käytöstä. [7, s. 116, 121–122]

Strateginen kompetenssi on käytännössä ongelmanratkaisukykyä. Se tarkoittaa matemaattisten ongelmien muodostamista, esittämistä sekä ratkaisemista. Ongelmanratkaisukyky tarkoittaa useiden erilaisten strategioiden hallitsemista, sillä se ei toimi kuin edellä esitetyt proseduurit. Matemaattisten proseduurien hallinta kylläkin helpottaa ongelmanratkaisutilanteessa ja toisinpäin. Hyvän ongelmanratkaisukyvyn omaava oppilas osaa tunnistaa ratkaisun kannalta olennaisimmat piirteet jättäen samalla epäolennaiset huomiotta. Ongelma tulee osata saattaa muotoon, jossa se on ratkaistavissa. Edellä mainittua käsitteellistä ymmärtämistä ei välttämättä vaadita hyvään ongelmanratkaisukykyyn, sillä sitä voi harjoittaa esimerkiksi matemaattisten symbolien avulla. [7, s. 116, 124–129]

Mukautuva päättely tarkoittaa oppilaan kykyä ajatella loogisesti tilanteiden ja käsitteiden välisistä suhteista. Jotta mukautuva päättely toteutuisi, tulee kolmen seuraavan ehdon toteutua: 1) oppilaan tietopohjan tulee olla riittävä, 2) tehtävän tulee olla motivoiva ja ymmärrettävä ja 3) tehtävän kontekstin tulee olla oppilaalle miellyttävä ja tuttu. Mukautuva päättely tarkoittaa oppilaan kykyä osoittaa riittävät perustelut tekemilleen valinnoille ja tekemisille. Tämä taito tulee hyvin esiin oppilaan käyttäessään edellä mainittua strategista kompetenssiaan. Oppilaan tulee olla valmis perustelemaan oman valintansa oikeellisuus. [7, s. 116, 130–131, 139]

Viimeinen osa-alue yritteliäisyys on ikään kuin oppilaan kuva itsestään suhteessa matematiikkaan. Kuinka oppilas kokee matematiikan miellyttävänä, hyödyllisenä ja tärkeänä. Matematiikkakuvaan vaikuttaa moni tekijä, mutta eniten uskomukset ja asenteet. Yritteliäs oppilas omaa vahvan itseluottamuken matematiikan suhteen. [7, s. 116, 131–133]

Joutsenlahden [4] mukaan matemaattisten ongelmien ratkaisujen eri tapojen tarjoaminen auttaa tukemaan oppilaan uskoa omiin kykyihinsä [4, s. 4]. Yritteliäs oppilas näkee ahkerointinsa kannattavan sekä pitää itseään tehokkaana matematiikan oppijana ja käyttäjänä. Kokemukset edellä mainituilla neljällä osa-alueella vaikuttavat aina joko positiivisesti tai negatiivisesti oppilaan matematiikkakuvaan eli yritteliäisyyteen. [7, s. 116, 131–133]

Matemaattinen osaaminen ei siis koostu vain jostain yhdestä taidosta, vaan viidestä, jotka vaikuttavat jatkuvasti toisiinsa. Onnistumiset ja epäonnistumiset millä tahansa osa-alueella vaikuttavat kokonaisuuteen. Matematiikan opettamisessa tuleekin ottaa huomioon kaikki osa-alueet, jos oppiminen halutaan pitää kokonaisvaltaisena. Oppilaat tarvitsevat siis monipuolista opetusta, joka sisältää paljon harjoittelua ja haasteita. [7, s. 133–135]

Tämän kehittämistutkimuksen kurssin tavoitteena on vahvistaa kurssille osallistuvien oppilaiden proseduraalista sujuvuutta, strategista kompetenssia, mukautuvaa päättelykykyä sekä yritteliäisyyttä. Kurssin hyvin tuetulla laskuharjoitteluajalla pyritään vahvistamaan oppilaiden laskurutiinia ja tätä kautta hieman myös käsitteellistä ymmärtämistä. Oppilaan strategista kompetenssia sekä mukautuvaa päättelykykyä pyritään vahvistamaan ennen kaikkea toiminnallisilla peleillä ja leikeillä, mutta myös monipuolisilla harjoitustehtävillä. Kurssin viihtyvyysaspekti ja ilmapiiri pyrkivät yhdessä kaiken muun kanssa kokonaisvaltaisesti vaikuttamaan positiivisesti kurssille osallistuvan oppilaan yritteliäisyyteen. Toisin sanoen kurssille osallistuvan oppilaan matematiikkakuvaan pyritään vaikuttamaan positiivisesti.

2.2 Oppikirja

Opettajalla on tärkeä rooli oppilaan matematiikkakuvan muodostumisessa, mutta niin on myös oppimateriaalilla. Molempien merkitys voi olla oppilaalle jopa yhtä suuri kuin opetussuunnitelman. Oppimateriaalin luominen on samalla haaste ja mahdollisuus. [13, s. 344]

Oppimateriaalilla tarkoitetaan yleisesti ottaen yhteen oppiaineeseen sidottua materiaalia. Materiaalin tavoitteena on toteuttaa opetussuunnitelmaa ja sen asettamia oppimistavoitteita. Oppimateriaalin muoto voi vaihdella. Yleisin muoto on kirjallinen, mutta se voi olla myös auditiivisessa, visuaalisessa tai muussa muodossa. [13, s. 344] Tässä tutkimuksessa tutkimuskohteena on kurssille luotu kirjallisessa muodossa toteutettu oppikirja. Kurssille luotiin myös muun muotoista oppimateriaalia, mutta tässä tutkimuksessa niitä tarkastellaan vähemmän.

Uno Jansson [2] määritteli noin 90 vuotta sitten hyvän laskennon oppikirjan muodostaen kuusi kohtaa:

a. Oppikirjan tulee sisältää kaikki kurssiin kuuluva oppiaines metoodollisesti järjestettynä.

b. Siinä tulee olla tarpeellinen lukumäärä esimerkkejä sekä kirjallista että päässälaskua vasten. Näihin on liitettävä valmiiksi ratkaistuja malliesimerkkejä sekä välttämättömimmät säännöt.

c. Esimerkkien tulee olla osaksi harjoitus-, osaksi sovellettuja tehtäviä, joitten viimemainittujen joukossa runsaasti kertausesimerkkejä eli sekalaskuja.

d. Ainoastaan sellaisia esimerkkejä, jotka vastaavat käytäntöä, on otettava oppikirjaan.

e. Esimerkkien tulee joka suhteessa vastata oppilaitten kehitysastetta, ja ne ovat niin valittavat, että ne tutustuttaen oppilaita erilaisiin aloihin jokapäiväisessä elämässä ovat omiaan heissä herättämään mielenkiintoa ja monipuolista harrastusta.

f. Oppikirjan tulee myös sisältää esimerkkejä, joitten tarkoitus on, mikäli se nykyoloissa on mahdollista, aikaan saada tarpeellinen konsentraatio laskuopin ja muitten opetusaineiden – etenkin luonnonopin ja maantiedon kanssa.

Vaikka aikaa määritelmien luomisesta on kulunut lähes sata vuotta, useimmat kohdat ovat sen kestäneet. Huomattavaa on, että termi ”oppikirja” korvataan nykyään useimmiten termillä ”oppimateriaali”. Kahdessa viimeisessä Janssonin [2] määrittelemässä kohdassa puhutaan esimerkkien laatimisesta. Esimerkkien tarkoitus on toimia matemaattisen ajattelun herättäjänä, eikä malleina, joita mekaanisesti toistetaan. Kohta b puhuu ”malliratkaisujen välttämättömistä säännöistä”. Tämä voidaan yhdistää luvussa 2.1 esiteltyihin proseduraaliseen sujuvuuteen sekä käsitteelliseen ymmärrykseen. Näiden taitojen merkitys on vain kasvanut, kun ylioppilaskirjoitukset ovat nykyään sähköisessä muodossa. [13, s. 361–362]

Perkkilä ym. [13] pitävät Janssonin [2] kohdan c didaktista oivallusta tärkeänä. Kohdassa puhutaan sekalaskuista, jotka tässä tapauksessa tarkoittavat kertaustehtäviä. Liika samanlaisten tehtävien tekeminen estää oppilaan metakognitiivisten taitojen optimaalisen kehittymisen. Ymmärtävälle matematiikanopiskelulle on tärkeää samaan aikaan tunnistaa uusia käsitteitä ja proseduureja, mutta myös kerrata vanhaa jo opittua uudessa kontekstissa. Tällaisia sekalaskuja käytetään nykyään liian harvoin, sillä yläkoulussa ja lukiossa on käytössä kurssimuotoinen opetustapa. [13, s. 362]

Tämän tutkimuksen kurssille luotu kirja on kehitetty pitkälti edellä mainitun teoreettisen viitekehyksen raameissa. Janssonin [2] kohtia a, b ja c on seurattu Lähteenmäen ja Hamdin oppikirjassa lähes täydellisesti. Oppikirjan tehtävien lisäksi kohdan c peräänkuuluttamia sekalaskuja pyrittiin toteuttamaan kurssin aikana Kahoot!-visojen avulla, tästä lisää luvussa 4. Tämän tutkimuksen tutkijat päättivät tulkita Janssonin [2] kohtaa d niin, että sitä ei seurattu kirjaimellisesti. Kenties 90 vuotta sitten ohje on ollut pätevämpi, mutta tämän tutkimuksen tutkijat näkevät tietyissä tilanteissa myös sellaiset esimerkkitehtävät hyvinä, jotka eivät suoraan vastaa käytäntöä. Lisäksi Janssonin [2] ohjeita e ja f pyrittiin noudattamaan mahdollisimman hyvin, ja tutkijat kokivatkin onnistuneen näissä kelvollisesti.

2.3 Matematiikka perusopetuksen opetussuunitelmassa

Perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan [12] vuosiluokilla 7-9 matematiikan opetuksen tulee tukea oppilaan myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja vahvistaa positiivista minäkuvaa matematiikan oppijana. Matematiikan opetuksen tulee kehittää oppilaan kykyä nähdä matematiikka hyödyllisenä oppiaineena sekä itselleen että yhteiskunnalle. Opetussuunnitelman mukaan [12] matematiikan opetuksen tulee kehittää oppilaan kykyä harjoittaa matematiikkaa monipuolisesti. [12]

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteella [12] matematiikan opetuksessa vuosiluokilla 7-9 tulee vahvistaa oppilaan matemaattista yleissivistystä. Lisäksi opetuksen tulee syventyä matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämiseen. Matematiikan opetuksen tulee olla innostavaa ja oppilaan tulee löytää aiheista yhteyksiä omaan elämäänsä. Opetussuunnitelman mukaan [12] vuosiluokilla 7-9 tulee vahvistaa oppilaan ongelmanratkaisukykyä ja työskentelytaitoja. Oppilaan tulee osata esittää ratkaisunsa ja olla valmis keskustelemaan niistä. Lisäksi oppilaan yhteistyötaitoja tulee kehittää. [12]

Perusopteuksen opetussuunnitelma [12] määrittää matematiikan aihealueiden hallitsemistavoitteeksi kolme suurempaa kokonaisuutta. Opetussuunnitelman [12] tavoitteet T11, T12 ja T13 mainitsevat aihealueina peruslaskutoimitukset, lukualueet sekä prosenttilaskennan ja puolestaan T14 ja T15 asettavat tavoitteeksi algebran hallitsemisen. Tavoitteet T16 ja T17 käsittelevät geometriaa. Opetussuunnitelma kannustaa matematiikan työmenetelmien olevan vaihtelevia ja mainitsee esimerkiksi oppimispelien olevan motivoiva työtapa. Lisäksi opetussuunnitelma kannustaa eriyttämiseen, jotta kaikkien oppilaiden osaamistaso otettaisiin huomioon ja annettaisiin mahdollisuus onnistumisen elämyksiin. [12]

3 Kehittämistutkimus

Tämän tutkimuksen tutkimusmenetelmänä on kehittämistutkimus. Tässä luvussa tarkastellaan menetelmää kuvaamalla sen teoreettinen viitekehys. Samalla kuvataan, miten kyseisen tutkimusmenetelmän soveltaminen toteutui tässä tutkimuksessa.

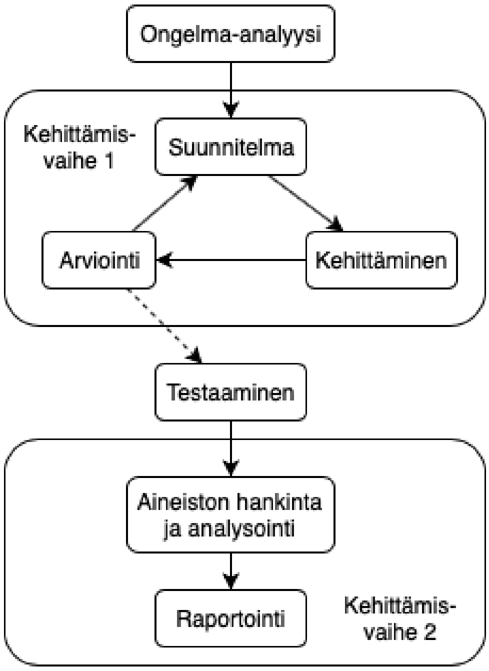
3.1 Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä

Kehittämistutkimus on suhteellisen nuori tutkimusmenetelmä opetusalalla. Ensimmäiset alan julkaisut ovat peräisin 1990-luvulta. Tuolloin kehittämistutkimuksesta käytettiin englannin kielessä nimitystä *design experiment*, mutta nykyisin menetelmä tunnetaan yleisemmin nimellä *design research* tai *design-based research*. [14, s. 10]

Kehittämistutkimus menetelmänä on luotu kehittämään käytännön opetustyötä ja tarjoamaan konkreettisia tuotoksia opettajille, kuitenkin tieteellisesti ja tutkimuspohjaisesti. Kehittämistutkimus on yhdistelmä teoreettisia ja kokeellisia vaiheita iteratiivisessa prosessissa ja sille on tyypillistä, että sen syklien aikana hyödynnetään erinäisiä asiantuntijuuksia. Kehittämistutkimus on monimenetelmällinen lähestymistapa, joka sisältää usein piirteitä sekä kvantitatiivisesta että kvalitatiivisesta tutkimusmenetelmästä. Kehittämistutkimus tapahtuu aina todellisessa ympäristössä ja siihen osallistuvia ei tarkkailla ainoastaan koehenkilöinä, vaan he ovat osana tutkimusprosessia ja ilmiön kehittämistä. Lisäksi tyypillisiä kehittämistutkimukseen vaikuttavia tekijöitä ovat ympäristön huomioon ottaminen, opetuksen luonne sekä opetuskonteksti. [14, s. 11–12, 17]

Kehittämistutkimuksen ensimmäinen vaihe on aina ongelma-analyysi. Sen pyrkimys on saada selville kehittämisen tarpeet, mahdollisuudet ja haasteet. Ongelma-analyysi voi olla empiiriseen tai teoreettiseen tietoon perustuva. Vaihe on kuitenkin välttämätön, sillä kehittämistutkimuksen tulee aina lähteä jostain aidosta kehittämistarpeesta. [14, s. 17]

Ongelma-analyysin jälkeen kehittämistavoitteet tulee olla selvillä, sillä niiden perusteella laaditaan tutkimussuunnitelma. Kehittämistutkimuksessa suunnitelma on tyypillisesti joustava ja sitä voidaan muokata useaan kertaan tutkimuksen edetessä. Itse käytännön toteutus on tunnusomaisesti iteratiivista eli syklimuotoista. Syklit muodostetaan aina sekä kooltaan että rakenteeltaan tutkimuksen luonteelle sopiviksi. Kehittämistutkimuksessa syklejä voi olla vain yksi, mutta tyypillisempää on toteuttaa useampi. Yksi kehittämissykli koostuu aina suunnittelu-, arviointi- ja raportointivaiheista, joiden perusteella tuotoksia kehitetään, arvioidaan, jatkokehitetään ja arvioidaan uudelleen. Tätä iteratiivista kehitystyötä kuvataan kuvassa 3.1. [14, s. 17]



Kuva 3.1. Kehittämistutkimuksen syklimuotoinen prosessi

Suomesssa opetusalalla kehittämistutkimusta ovat tehneet muun muassa yliopistonlehtorit Johannes Pernaa ja Mika Koponen. He ovat tehneet useita kehitämistutkimuksia mukaan lukien heidän väitöskirjansa Kehittämistutkimus: Tieto- ja viestintätekniikkaa kemian opetukseen (Pernaa) [15] ja Investigating Teacher Knowledge and Mathematics Teacher Education (Koponen) [8]. Pernaan kehittämistutkimuksen tavoitteena oli kehittää kemian opetusta tukevaa tieto- ja viestintätekniikkakoulutusta. Tutkimuksen tärkeimmät tulokset koskevat kemian opetusta, mutta Penaa löytää tutkimuksessaan myös uusia menetelmiä kehittämistutkimuksen kontekstissa. Koponen puolestaan tutkii kehittämistutkimuksessaan sekä opiskelevia että valmistuneita matematiikan aineenopettajia. Hänen kehittämistutkimuksen tavoitteena oli selvittää, kuinka yliopistokoulutus valmentaa matematiikan aineenopettajuuteen.

Myös pro gradu -tutkielmia on Suomessa toteutettu opetusalalla käyttäen kehittämistutkimusta tutkimusmenetelmänä, muun muassa Meri Rosenberg työllään Kirjalliseen kielentämiseen johtavat murtolukutehtävät alakoulussa [16]. Tutkimuksen tarkoituksena oli kehittää murtolukutehtäviä alakoulun 5. ja 6. vuosiluokille. Rosenbergin kehittämistutkimuksen prosessi vastasi hyvin tämän tutkimuksen etenemistä. Rosenberg keräsi tehtävistään aineistoa sekä oppilailta että opettajilta. Hänen merkittävin tutkimustulos oli työmenetelmien monipuolisuuden tarpeellisuus matematiikan opetuksessa.

3.2 Kehittämistutkimuksen prosessi tässä tutkimuksessa

Tässä tutkimuksessa kehittämiskohteena on matematiikan hiihtolomakurssi yhdeksäsluokkalaisille. Tampereen LUMATE-keskus ilmoitti kehittämistarpeesta, sillä heidän mukaan tällaiselle olisi Pirkanmaan alueella kysyntää. Tampereen LUMATE-keskus on Tampereen yliopiston alaisuudessa toimiva verkosto ja sen kattoverkosto on valtakunnallinen LUMA-keskus Suomi. Tampereen LUMATE-keskuksen tarkoituksena on innostaa lapsia ja nuoria luonnontieteiden, matematiikan ja tekniikan harrastamiseen sekä niiden oppimiseen, tutkimiseen ja soveltamiseen tekemällä oppien. Alojen alkukirjaimista seuraa nimi LUMATE. [17]

LUMATE-keskus toivoi kehitettäväksi keväällä järjestettävää matematiikan kurssia, joka olisi suunnattu ensisijaisesti yhdeksäsluokkalaisille. Opetushallituksen raportin [11] mukaan oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan heikkenevät kohti yhdeksättä luokkaa, ja ovat silloin huonoimmillaan. Merkittävin heikkeneminen yläkoulussa tapahtuu oppilaan matematiikkakuvan suhteen. Kurssin ensisijaisiksi tavoitteiksi asetettiinkin matemaattisen osaamisen vahvistuminen sekä matematiikkakuvan positiivinen tukeminen. Kurssin ajankohdaksi valittiin vuoden 2019 viikko 9, sillä se oli Pirkanmaan kouluissa hiihtolomaviikko. Kurssin ajankohdasta seuraa tässä tutkimuksessa käytetty nimitys hiihtolomakurssi.

Tampereen LUMATE-keskus toimi tämän tutkimuksen hiihtolomakurssin tuottajana. Sen vastuulla oli kurssin markkinointi, ilmoittautumiset, tilavaraus sekä muut käytännön asiat kurssiin liittyen. Tämän tutkimuksen tutkijoiden vastuulla sen sijaan oli kurssin suunnitteleminen ja kehittäminen sekä kurssin opettajina toimiminen.

Kurssin rakenteen suunnittelu aloitettiin, kun tarpeet ja tavoitteet kurssille oltiin saatu määriteltyä. Rakenne tarkoittaa tässä yhteydessä kurssin käytännön järjestelyjä sekä aihesisältöjen ja työmenetelmien määrittelyä. Kurssin laajuudeksi valittiin 30 tuntia lähiopetusta. Kurssin aihesisällöt rajattiin, jotta oppimateriaalin luomiselle saatiin edellytykset. Lisäksi kurssin työmenetelmät kiinnitettiin. Hiihtolomakurssin aihesisällöt ja työmenetelmät valittiin perusopetuksen opetussuunnitelman [12] perusteella. Näistä lisää luvussa 4.

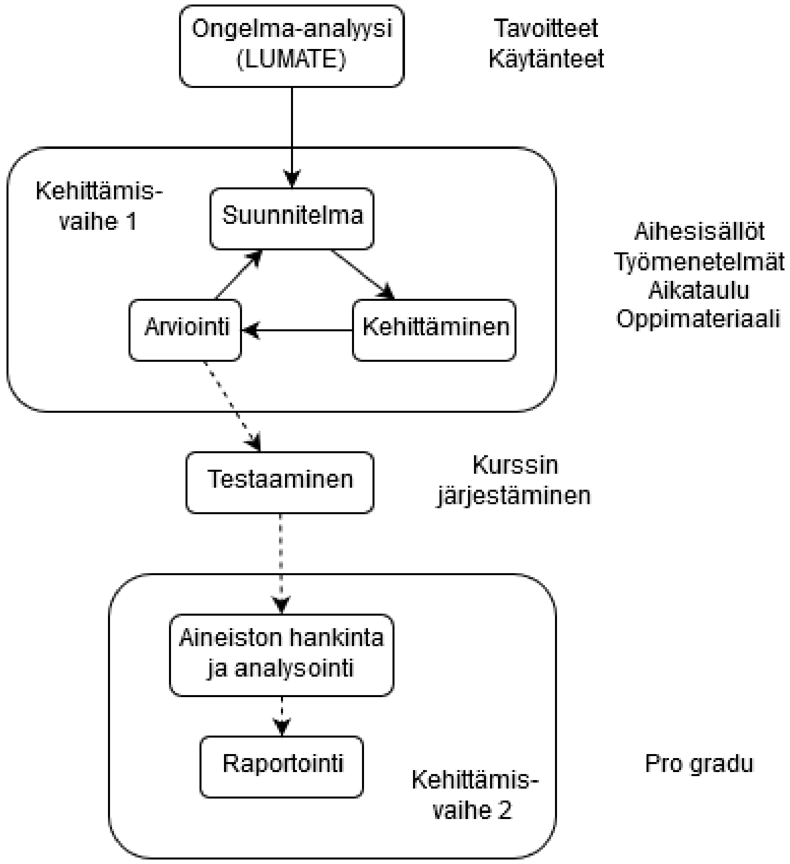
Kurssin suunnittelun ja kehittämisen toteutti yhteistyössä tämän kehittämistutkimuksen tutkijat Ykä Lähteenmäki (LuK) ja Robin Hamdi (TkK). Yhteistyö oli tiivistä koko kurssin suunnittelun ajan ja tutkijat olivat ratkaisuista aina yksimielisiä. Kurssin suunnittelu alkoi syksyllä 2018 ja sitä arvioitiin kuukausittain yhdessä tuottajan sekä graduohjaajien kanssa. Kurssin suunnittelu ja kehittäminen piti sisällään kurssin päivä- ja viikko-ohjelmien kehittämisen, oppimateriaalin luomisen, sekä toiminnallisten aktiviteettien kehittämisen. Lisäksi aineiston hankintaan tuli varautua, tästä lisää luvussa 7.

Molemmat tutkijat toimivat kurssilla opettajina, pääpainon ollen kuitenkin aina toisella. Kurssin kahtena ensimmäisenä päivänä päävastuu oli Lähteenmäellä ja kolmena viimeisenä Hamdilla. Kurssi pidettiin Tampereen yliopiston tiloissa Atalpalla maanantaista perjantaihin 25.2.2019 – 1.3.2019 joka päivä kello 9-15. Kurssin ajan molemat tutkijoista pitivät päiväkirjaa kurssin etenemisestä ja tunnelmista kurssilla.

Kurssin aikana sekä kurssin jälkeen kerättiin tutkimusaineistoa. Aineistoa kerättiin sekä oppilailta, että Pirkanmaan koulujen opettajilta. Tutkimusaineiston hankinta ja analysointi on esitelty tarkemmin luvussa 7.

Molemmat kehittämistutkimuksen tutkijoista sekä Lähteenmäki että Hamdi laativat tämän kehittämistukimuksen raporteista samalla omat lopputyönsä.

Tämän tutkimuksen prosessi seurasi hyvin tarkkaan kuvan 3.1 mallia. Tutkijat tekivät ongelma-analyysin yhdessä tuottajan kanssa, jonka jälkeen siirryttiin ensimmäiseen kehittämisvaiheeseen eli sykliin. Ensimmäistä sykliä kierrettiin useita kertoja aina hiihtolomakurssin alkuun saakka. Kehittämistutkimukselle tyypillisesti tutkimussuunnitelma oli tässäkin tutkimuksessa hyvin joustava ja sitä muutettiin aina tarpeen mukaan. Testaaminen tapahtui todellisessa ympäristössä hiihtolomakurssilla. Aineiston hankinta tapahtui sekä testaamisen aikana että sen jälkeen. Aineisto analysoitiin kurssin jälkeen ja siitä kirjoitettiin raportti.



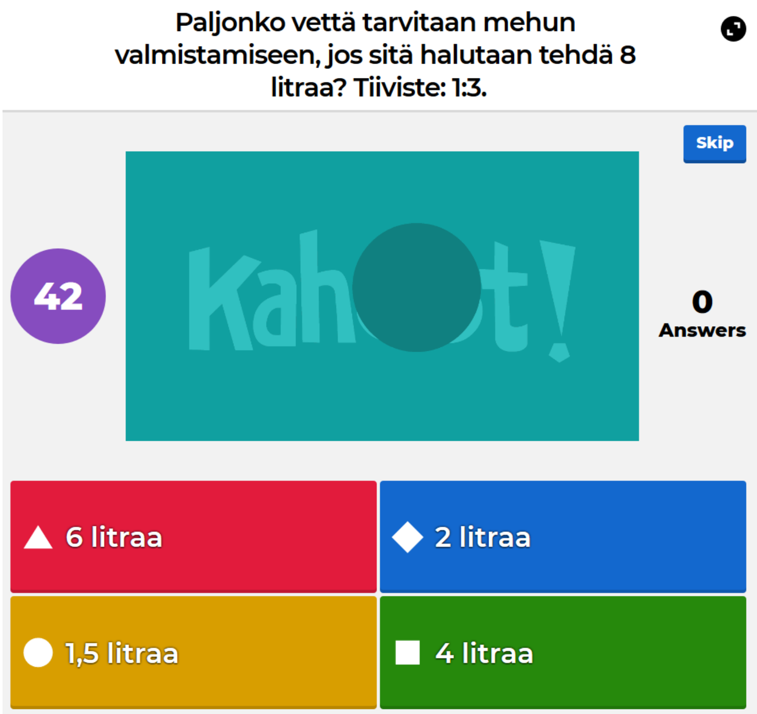
Kuva 3.2. Kehittämistutkimuksen syklimuotoinen prosessi tämän tutkimuksen kontekstissa

4 Hiihtolomakurssin oppimateriaali

Tässä luvussa esitellään hiihtolomakurssille luotu oppimateriaali. Hiihtolomakurssin oppimateriaali sisältää keskeisimpänä teoksena Lähteenmäen ja Hamdin kirjoittaman oppikirjan (liite 4). Oppikirja luotiin perusopetuksen opetussuunnitelman [12] perusteiden mukaan. Lisäksi kurssin oppikirjaa kehittäessä hyödynnettiin luvussa 2.2 esiteltyä teoreettista viitekehystä matematiikan oppimateriaalista. Kurssin oppimateriaali sisältää oppikirjan lisäksi Kahoot!-visoja sekä erilaisia pelejä. Perusopetuksen opetussuunnitelma [12] kannustaa matematiikan opetuksessa käytettävän vaihtelevia työmenetelmiä, sekä mainitsee oppimispelien olevan motivoiva työtapa. Kahoot! on pelipohjainen tietovisoihin perustuva oppimisympäristö, jota oppilaat voivat pelata käyttäen omia mobiililaitteitaan [6]. Kahoot!-visojen avulla toteutettiin luvussa 7 esitellyt lähtö- ja lopputasotestit, mutta visat olivat käytössä myös päivittäin toteutetuissa opiskelua rytmittävissä ja opittuja asioita kertaavissa harjoituksissa (kts. kuva 4.2). Hiihtolomakurssilla toteutettujen pelien rooli oli hyvin samankaltainen kuin Kahoot!:ien. Pelit olivat luonteeltaan keskenään hyvin erilaisia aina yksin ratkaistavista ongelmatehtävistä koko luokan välisiin toiminnallisiin peleihin (kts. kuva 4.3).

Kuva 4.1. Oppikirjan kansilehti kuvastaa kurssin ajankohtaa ja sen rentoa otetta oppimiseen

Kurssin aihesisällöt rajattiin sisältämään lukuteoriaa ja algebraa. Tutkijat pohtivat yhdessä tuottajan ja ohjaajien kanssa rajausta tarkoin, sillä kurssista haluttiin tarjota samaan aikaan sekä eheä että kattava paketti oppilaille. Geometria jäi viimeisenä aihepiirirajauksena pois, mutta tutkijat pyrkivät sisällyttämään sitä tukevia tehtäviä oppimateriaaliin. Perusopetuksen opetussuunnitelman [12] mukaan vuosiluokilla 7-9 matematiikan opetuksen keskeisimmät sisällöt ovat lukuteoria, algebra ja geometria. Opetushallituksen raportin [11] mukaan lukuteorian ja algebran osa-alueiden puutteet ovat suurin ongelma matematiikan jatko-opinnoissa menestyksessä 2. asteen opinnoissa.



Kuva 4.2. Suhteen käsitteen kertaamista Kahoot!-visan avulla

Tutkijat Lähteenmäki ja Hamdi kehittivät kaikki oppimateriaalit yhteistyössä, kuitenkin usein päävastuun olevan aina toisella. Merkittävin vastuualuejako oli Lähteenmäen oppikirjan lukuteoriaosuus ja Hamdin algebra. Lukuteoriaosuus sisälsi aihealueita lukujoukoista, lukujen monikerroista, jaollisuudesta, murtoluvuista, suhteesta ja prosenttilaskennasta. Algebraosuus puolestaan piti sisällään aiheita potensseista, polynomeista, polynomiyhtälöistä, yhtälöpareista ja rationaalilausekkeista. Kaikista aihepiireistä koottiin kirjaan teoriaa ja esimerkkejä (kts. kuva 4.4) sekä harjoitustehtäviä ja niille ratkaisut.

MURTOTÄHTI

Peliohjeet

- Pelissä on kaksi vaihetta: *punainen* ja *sininen*. Sinisessä vaiheessa kerätään rahaa niin paljon, että pelaaja voi ostaa itselleen pelioikeuden punaiseen pelivaiheeseen.

- Peli päättyy, kun joku pelaajista löytää punaisten pelilaattojen joukosta tähtien tähden: murtotähden.

Pelin kulku

Nosta sininen tehtävä keitinlasista. Suorita lasku. Etsi käytävän seinältä pelilaatta, jossa on sama tulos kuin saamasi vastaus. Käännä laatta ja katso oletko ansainnut rahaa. Ilmoita pankkiirina toimivalle opettajalle rahasumma ja näytä suorittamasi laskutehtävä. Tarvitset 1000 puntaa, jotta voit ostaa pankkiirilta pelioikeuden punaisiin tehtäviin.

Päästyäsi pelin toiseen vaiheeseen jatkat kuten edellä, laskien punaisia tehtäviä keitinlasista 2. Rahaa ei enää kerätä, mutta myös nyt vastaukset pitää etsiä käytävältä. Peli jatkuu niin kauan, että joku pelaajista löytää murtotähden. Tähden löytänyt pelaaja ilmoittaa: *"Peli seis. Murtotähti on löytynyt. Kaikki pelaajat paikoilleen!"* **Murtotähden löytäjä on voittanut pelin.**

Voittaja saa **palkinnoksi hyvän mielen** ja lisäksi **nimensä ikuisiksi ajoiksi PSYL –tähtien listalle.** ☺ (Katso sivu 2)

Arvot: topaasi (kelt.) 100 £, smaragdi (vihr.) 300 £ ja rubiini (pun.) 500 £

Kuva 4.3. Yksi kurssin peleistä: Murtotähti

Kaikki kurssille kehitetty oppimateriaalit luotiin syksyn 2018 ja kevään 2019 välisenä aikana. Kaikkea oppimateriaalia arvioitiin vähintään kuukausittain yhdessä kurssin tuottajan ja ohjaajien kanssa. Lisäksi kurssin jälkeen oppikirjasta pyydettiin palaute muutamalta Pirkanmaan alueen opettajalta. Tästä lisää luvussa 7.

1.2. Monikerrat ja jaollisuus

Luvun monikerta saadaan, kun luku kerrotaan luonnollisella luvulla. Monikerroista muodostuu kyseisen luvun kertotaulu.

Esimerkki 1.

a) Luvun 2 monikertoja ovat 2, 4, 6, 8, 10, 12, … kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 2.
b) Luvun 5 monikertoja ovat 5, 10, 15, 20, 25, … kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 5.

Luku on *jaollinen* toisella luvulla, jos lukujen *jakojäännös* on nolla, eli tulos on kokonaisluku. Jos luku ei ole *jaollinen* toisella luvulla, jakolaskusta jää *jakojäännös*.

Luvulla jaollisia ovat vain kyseisen luvun monikerrat. Joka toinen kokonaisluku on jaollinen kahdella. Joka kolmas kokonaisluku on jaollinen kolmella jne.

Lukujen jaollisuussääntöjä:
Jokainen luku on jaollinen luvulla *yksi* ja *itsellään*. Lisäksi luku on jaollinen

- *kahdella*, jos sen viimeinen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8.
- *kolmella*, jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella 3, 6, 9, …
- *viidellä*, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
- *kuudella*, jos luku on jaollinen sekä kahdella että kolmella.
- *yhdeksällä*, jos luvun numeroiden summa on yhdeksän monikerta 9, 18, 27, …
- *kymmenellä*, jos sen viimeinen numero on 0.

Kuva 4.4. Kuva oppikirjasta: teoriaa ja esimerkkejä lukujen monikerroista ja jaollisuudesta

5 Jaollisuussäännöt

Seuraavaksi tarkastellaan yhtä hiihtolomakurssin oppikirjan aihealuetta tarkemmin. Tässä luvussa käsiteltäviä asioita ei käyty tämän tutkimuksen hiihtolomakurssilla oppilaiden kanssa, eikä näitä löydy kurssin oppimateriaalista, vaan aihetta syvennetään opinnäytetyön vaatimusten vuoksi. Luvussa 5 on käytetty lähteenä Thomas Koshyn kirjaa Elementary Number Theory with Applications (2002).

5.1 Esitietoja: jaollisuus ja kongruenssi

Luvussa 5.1 esitetään jaollisuuden ja kongruenssin määritelmät, sekä jakoyhtälö. Lisäksi tässä luvussa esitetään muutamia jaollisuussääntöjen käsittelyssä tarvittavia apuneuvoja.

Määritelmä 5.1. Olkoot luvut $m, n \in \mathbb{Z}$. Silloin luku n on jaollinen luvulla m, jos $n = mk$, jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin merkitään $m \mid n$.

Huomautus. Olkoot $n \in \mathbb{Z}$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$, silloin $n = mq + r$, $0 \leq r < m$, jossa r on jakojäännös ja q on osamäärä. Tätä kutsutaan nimellä jakoyhtälö.

Määritelmä 5.2. Olkoon luku $m \in \mathbb{N}$. Nyt luku $a \in \mathbb{Z}$ on kongruentti luvun $b \in \mathbb{Z}$ kanssa modulo m, jos

$$m \mid (a - b).$$

Silloin merkitään $a \equiv b \pmod{m}$. Merkintä $a \not\equiv b \pmod{m}$ puolestaan tarkoittaa, että $m \nmid (a - b)$. Tällöin sanotaan, että luku a ei ole kongruentti luvun b kanssa modulo m.

Esimerkki 5.3. Koska $5 \mid (23-3)$, voidaan kirjoittaa $23 \equiv 3 \pmod{5}$. Toisin sanoen siis luku 23 on kongruentti luvun 3 kanssa modulo 5. Yhtä lailla koska $6 \mid (48 - 12)$, niin voidaan kirjoittaa $48 \equiv 12 \pmod{6}$. Myöskin $28 \equiv -4 \pmod{16}$, mutta $20 \not\equiv 3 \pmod{4}$, sillä $4 \nmid (20 - 3)$. Yhtä lailla $18 \not\equiv -6 \pmod{7}$.

Lause 5.4. *Olkoot luvut a, $b \in \mathbb{Z}$. Silloin $a \equiv b \pmod{m}$, jos ja vain jos $a = b + km$, jollakin $k \in \mathbb{Z}$.*

Todistus. Olkoon $a \equiv b \pmod{m}$. Nyt $m \mid (a - b)$, joten $a - b = km$, jollain $k \in \mathbb{Z}$. Näin ollen $a = b + km$.

Toisaalta $a = b + km$ jollain $k \in \mathbb{Z}$ voidaan kirjoittaa $a - b = km$, jolloin $m \mid (a - b)$. Siis $a \equiv b \pmod{m}$. □

Esimerkki 5.5. Koska $23 \equiv 3 \pmod{5}$, löydetään $k = 4$, siten että $23 = 3 + 4 \cdot 5$. Myöskin koska $49 = -5 + 9 \cdot 6$. niin voidaan kirjoittaa $49 \equiv -5 \pmod{6}$.

Lause 5.6. *Olkoot luvut a, $b \in \mathbb{Z}$. Silloin $a \equiv b \pmod{m}$, jos ja vain jos lukujen a ja b jakojäännökset ovat samat jaettaessa luvulla m.*

Todistus. Olkoon $a \equiv b \pmod{m}$. Lauseen 5.4 nojalla $a = b + km$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Jakoyhtälöä soveltaen saadaan $b = mq + r$, missä $0 \leq r < m$. Nyt $a = b + km$ saadaan sijoittamalla b muotoon

$$a = (mq + r) + km = m(q + k) + r.$$

Siis jakoyhtälön nojalla luvun a jakojäännös r on sama kuin luvun b jakojäännös r jaettaessa luvulla m.

Toisaalta, jos oletetaan, että luvut a ja b jättävät samat jakojäännökset r jaettaessa luvulla m, niin jälleen jakoyhtälöstä saadaan $a = mq + r$ ja $b = mq' + r$, missä $0 \leq r < m$. Nyt

$$a - b = (mq + r) - (mq' + r) = m(q - q').$$

Siis $a \equiv b \pmod{m}$. □

Esimerkki 5.7. $48 \equiv 28 \pmod{5}$. Sekä luku 48 että luku 28 jättävät saman jakojäännöksen 3 jaettaessa luvulla 5. Myöskin, kun jakaa luvut 29 ja -3 luvulla 8, niin jakojäännökset ovat samat, 5, joten $29 \equiv -3 \pmod{8}$.

Lause 5.8. *Olkoot* $a \equiv b \pmod{m}$ *ja* $c \equiv d \pmod{m}$. *Nyt*

(1)

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

ja

(2)

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Todistus. Koska $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, niin $a = b + lm$ ja $c = d + km$ joillakin $l, k \in \mathbb{Z}$. Nyt

(1)

$$\begin{aligned} a + c &= (b + lm) + (d + km) \\ &= (b + d) + (l + k)m \\ &\equiv b + d \pmod{m} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} ac - bd &= (ac - bd) + (bc - bd) \\ &= c(a - b) + b(c - d) \\ &= clm + bkm \\ &= (cl + bk)m. \end{aligned}$$

Siis

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

□

Esimerkki 5.9. Koska $17 \equiv -4 \pmod{3}$ ja $28 \equiv 7 \pmod{3}$, niin lauseen 5.8 nojalla $17 + 28 \equiv -4 + 7 \pmod{3}$, eli $45 \equiv 3 \pmod{3}$. Yhtä lailla $17 \cdot 28 \equiv (-4) \cdot 7 \pmod{3}$, eli $476 \equiv -28 \pmod{3}$.

5.2 Jaollisuussäännöt

Tässä luvussa esitellään joitakin keskeisimpiä jaollisuussääntöjä. Ne perustuvat luvun numeroihin. Matematiikan kirjallisuudessa on esitetty paljon muitakin jaollisuussääntöjä, mutta niihin ei tässä puututa. Olkoon

$$n = \pm(n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0)_{10}, n \in \mathbb{Z},$$

luvun n desimaaliesitys. Siis

$$n = \pm(n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \dots + n_1 10 + n_0),$$

jossa

$$1 \leq n_k \leq 9$$

ja

$$0 \leq n_{k-1}, \dots, n_1, n_0 \leq 9$$

Tässä luvun n numerot ovat $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$.

Esimerkki 5.10. Olkoon $n = 675$. Silloin $n = 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. Siis $k = 2$, $n_2 = 6$, $n_1 = 7$ ja $n_0 = 5$. Eli luvun n numerot ovat 6, 7 ja 5.

Lause 5.11. *Luku $n \in \mathbb{Z}_+$ on jaollinen luvulla 10, jos ja vain jos sen viimeinen numero n_0 on 0.*

Todistus. Koska $10 \equiv 0 \pmod{10}$, lauseiden 5.6 ja 5.8 nojalla, $n \equiv n_0 \pmod{10}$. Nyt $10 \mid n$, jos ja vain jos $10 \mid n_0$. Nyt $10 \mid n_0$, jos ja vain jos $n_0 = 0$. Siis luku n on jaollinen luvulla 10 jos ja vain jos sen viimeinen numero on 0. □

Esimerkki 5.12. Olkoon $n = 6723450$. Koska $n_0 = 0$, niin $10 \mid n$.

Esimerkki 5.13. Olkoon $n = 2587523$. Koska $n_0 = 3$, niin $10 \nmid n$.

Lause 5.14. *Luku $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvulla 5, jos ja vain jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.*

Todistus. Koska $n \equiv n_0 \pmod{10}$, niin $5 \mid n$, jos ja vain jos $5 \mid n_0$. Nyt n_0 tulee olla joko 0 tai 5, sillä ne ovat ainoat kokonaisluvut välillä $[0, 9]$, jotka luku 5 jakaa. Täten luku $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvulla 5, jos ja vain jos n_0 on 0 tai 5. □

Esimerkki 5.15. Olkoon $n = 3567375$. Koska $n_0 = 5$, niin $5 \mid n$.

Esimerkki 5.16. Olkoon $n = 367840$. Koska $n_0 = 0$, niin $5 \mid n$.

Esimerkki 5.17. Olkoon $n = 289636764$. Koska $n_0 = 4$, niin $5 \nmid n$.

Lause 5.18. *Luku $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvulla 2^i, jos ja vain jos sen viimeisten i numeron muodostama luku $n_{i-1} n_{i-2} \dots n_1 n_0$ on jaollinen luvulla 2^i.*

Todistus. Koska $10 \equiv 0 \pmod 2$, niin lauseen 5.8 perusteella $10 \equiv 0 \pmod{2^i} \forall i \in \mathbb{N}$. Nyt lauseiden 5.6 ja 5.8 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} n &\equiv n_0 \pmod 2 \\ &\equiv n_1 n_0 \pmod{2^2} \\ &\equiv n_2 n_1 n_0 \pmod{2^3} \\ &\dots \\ &\equiv n_{i-1} n_{i-2} \dots n_1 n_0 \pmod{2^i}. \end{aligned}$$

Siis lauseen 5.6 perusteella saadaan lause 5.18. □

Huomautus. Lauseen 5.18 mukaan n on jaollinen luvulla 2, jos ja vain jos viimeinen numero n_0 on jaollinen luvulla 2. Edelleen n on jaollinen luvulla 4, jos va vain jos luku $n_1 n_0$ on jaollinen luvulla 4 jne.

Esimerkki 5.19. Olkoon $n = 343506076$. Nyt siis koska $2 \mid 6$, niin $2 \mid n$. Edelleen koska $4 \mid 76$, niin $4 \mid n$. Mutta koska $8 \nmid 076$, eli $8 \nmid 76$, niin $8 \nmid n$.

Lause 5.20. *Luku $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvulla 3, jos ja vain jos sen numeroiden $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0)$ summa $n_k + n_{k-1} + \dots n_1 + n_0$ on jaollinen luvulla 3.*

Todistus. Koska $10 \equiv 1 \pmod 3$ ja $10^i \equiv 1 \pmod 3$, niin lauseiden 5.6 ja 5.8 nojalla $n \equiv n_k + n_{k-1} + \dots + n_1 + n_0 \pmod 3$. Lause 5.20 seuraa nyt lauseesta 5.6. □

Lause 5.21. *Luku $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvulla 9, jos ja vain jos sen numeroiden $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0)$ summa $n_k + n_{k-1} + \dots n_1 + n_0$ on jaollinen luvulla 9.*

Todistus. Koska $10 \equiv 1 \pmod 9$ ja $10^i \equiv 1 \pmod 9$, niin lauseiden 5.6 ja 5.8 nojalla $n \equiv n_k + n_{k-1} + \dots + n_1 + n_0 \pmod 9$. Lause 5.21 seuraa nyt lauseesta 5.6. □

Esimerkki 5.22. Olkoon $n = 243506076$. Luvun n numeroiden summa on $2 + 4 + 3 + 5 + 0 + 6 + 0 + 7 + 6 = 33$. Koska $3 \mid 33$, niin $3 \mid n$. Mutta koska $9 \nmid 33$, niin $9 \nmid n$.

Olkoon $m = 4378257$. Luvun m numeroiden summa on $4+3+7+8+2+5+7 = 36$. Koska $3 \mid 36$, niin $3 \mid m$ ja koska $9 \mid 36$ niin myös $9 \mid m$.

Esimerkki 5.23. Voidaan todistaa, että $6 \mid n$, jos ja vain jos $2 \mid n$ ja $3 \mid n$. Näin ollen luvulla 6 jaollisuuteen voidaan s oveltaa lauseista 5.18 ja 5.20

Lause 5.24. *Luku $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvulla 11, jos ja vain jos*

$$11 \mid (n_0 + n_2 + \dots) - (n_1 + n_3 + \dots).$$

Todistus. Koska $10 \equiv -1 \pmod{11}$ ja $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$, niin lauseiden 5.6 ja 5.8 nojalla

$$n \equiv (-1)^k n_k + \dots - n_3 + n_2 - n_1 + n_0 \pmod{11}.$$

Lause seuraa nyt lauseesta 5.6 □

Esimerkki 5.25. Olkoon $n = 243506076$. Nyt

$$\begin{aligned}&(n_0 + n_2 + \ldots) - (n_1 + n_3 + \ldots)\\ =&(6 + 0 + 0 + 3 + 2) - (7 + 6 + 5 + 4)\\ =&11 - 22\\ =&-11\end{aligned}$$

Koska $11 \mid -11$, niin $11 \mid n$.

Esimerkki 5.26. Olkoon $n = 1234567$. Nyt

$$\begin{aligned}&(n_0 + n_2 + \ldots) - (n_1 + n_3 + \ldots)\\ =&(7 + 5 + 3 + 1) - (6 + 4 + 2)\\ =&16 - 12\\ =&4\end{aligned}$$

Koska $11 \nmid 4$, niin $11 \nmid n$.

6 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tehtävänä on kehittää vuosittain järjestettävä matematiikan hiihtolomakurssi yhdeksäsluokkalaisille. Kehittämistyö perustui oppilailla testattuihin lähtö- ja lopputasotesteihin, sekä avoimiin ja Likert-muotoisiin kyselyihin, jotka toteutettiin oppilailla kurssin päätteeksi. Lisäksi kurssille luodusta oppimateriaalista pyydettiin palautetta työkokemusta omaavilta matematiikan aineenopettajilta. Aineiston hankinta on esitelty luvussa 7.

Tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita tarkastelemaan oppilaiden oppimista ja viihtymistä kurssilla. Oppimista on tarkoitus tutkia oppimateriaalin ja toiminnallisuuden näkökulmista. Oppilaiden osalta on kiinnostavaa, mitä ja millä tavoin he ovat kurssilla oppineet. Tutkimuksessa tarkastellaan myös muita tekijöitä, mitkä vaikuttivat oppimiseen ja viihtymiseen kurssilla. Lisäksi tutkimuksessa tarkastellaan, vaikuttiko kurssi oppilaiden matematiikkakuvaan.

Tutkimuksen tutkimuskysymykset ovat:

1. Mitä oppilaat kokevat oppineensa kurssilla?
2. Millä tavoin oppilaat kokevat oppineensa kurssilla?
3. Miten kurssi kehittää oppilaiden matemaattista osaamista?
4. Miten oppilaat kokevat viihtyvänsä kurssilla?
5. Mitkä tekijät vaikuttivat oppimiseen ja viihtymiseen?
6. Miten oppimateriaalin luominen onnistui?

Tutkimuksen keskiössä on luotu oppimateriaalipaketti lukuteoriasta ja algebrasta, sekä sen vaikutukset kurssikokemukseen. Tutkimusmenetelmänä on kehittämistutkimus. Menetelmää esitellään luvussa 3.1 kuvaamalla sen teoreettinen viitekehys. Samalla luvussa 3.2 esitetään, miten kyseisen tutkimusmenetelmän soveltaminen toteutui tässä tutkimuksessa.

7 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa kuvataan aineiston hankinta- ja analysointimenetelmät. Lisäksi tarkastellaan tutkimustuloksiin vaikuttavia taustamuuttujia.

7.1 Aineiston hankinta

Aineisto hankittiin helmi-maaliskuun taitteessa 2019. Hiihtolomakurssia markkinoitiin edeltävän talven ajan Pirkanmaan alueen lähinnä yhdeksäsluokkalaisille, mutta myös muut olivat tervetulleita, jos kokivat kurssin hyödylliseksi. Kurssille ilmoittautui osallistujia 14 henkilöä. Heistä 13 kävi keväällä 2019 peruskoulun yhdeksättä luokkaa jossain Pirkanmaan yläkouluista, ja yksi lukion ensimmäistä vuotta. Ennen kurssin alkamista oppilaiden huoltajilta pyydettiin tutkimuslupaa (liite 3) sähköpostitse, johon kaikki vastasivat myöntävästi. Kieltävän tutkimusluvan kohdalla kurssille osallistuminen ei kuitenkaan olisi ollut minkäänlainen este.

Kaikki oppilailla teetetyt kyselylomakkeet täytettiin anonyymisti, sillä tutkimuksen kannalta ei ole mielenkiintoista yhdistää vastauksia ja vastausten antajia. Tässä tutkimuksessa ollaan erityisesti kiinnostuneita luomaan kokonaisuutena mahdollisimman toimiva, monipuolinen ja kaikille sopiva kokonaisuus. Kuitenkin lähtö- ja lopputasotestit toteutettiin niin, että oppilaan tulokset saatiin yhdistettyä toisiinsa, sillä mielenkiintoista tämän tutkimuksen kannalta on oppilaan matemaattisen osaamisen kehittyminen kurssin aikana yksilönä. Vastausten yhdistäminen toteutettiin kuitenkin niin, että oppilaiden anonymiteetti säilyi.

Oppilailta kerättiin aineistoa alkukyselylomakkeella, lähtö- ja lopputaso testeillä, sekä kyselylomakkeella (liite 1). Lähtötasotesti suoritettiin kurssin ensimmäisenä päivänä, ja lopputasotesti sekä kyselylomake viimeisenä. Lisäksi kurssille luodusta oppikirjasta pyydettiin palaute kurssin jälkeen muutamalta Pirkanmaan koulun opettajalta.

Alkukyselylomake koostui neljästä avoimesta kysymyksestä ja se toteutettiin kurssin ensimmäisenä päivänä oppilailla:

1. Mitä odotat kurssilta?
2. Miksi olet kurssilla?
3. Mikä on mielipiteesi matematiikasta?
4. Mitkä ovat tavoitteesi kurssilla?

Näihin kysymyksiin vastasi kaikki 14 oppilasta.

Lähtö- ja lopputasotestit luotiin Kahoot!-oppimisympäristössä, joka on pelipohjainen ja toimii verkossa. Molemmissa testit koostuivat 16 kysymyksestä, ja kaikkiin näihin oli neljä vastausvaihtoehtoa. Testit olivat hyvin samanlaiset, mutta muunnellut kuitenkin niin, että edellisen suorittamisesta ei hyötynyt seuraavassa. Tämä mahdollisti aiheiden oppimisen tutkimisen kurssin aikana. Alku- ja lopputasotesteihin osallistui 10 oppilasta niin, että heidän vastaukset saatiin yhdistettyä toisiinsa.

Oppilaille luotu kyselylomake (liite 1) kurssin viimeisenä päivänä koostui Likert-muotoisista väittämistä, sekä avoimista kysymyksistä. Likert-väittämiä oli 18 ja avoimia kysymyksiä neljä. Opettajille suunnattu kyselylomake (liite 2) koskien oppikirjaa oli samanmuotoinen, se sisälsi Likert-väittämiä sekä avoimia kysymyksiä. Likert-väittämiä oli kymmenen ja avoimia kysymyksiä kolme. Opettajilta pyydettiin palaute sähköpostitse.

Likert-asteikko koostuu viidestä portaasta (täysin eri mieltä, jokseenkin eri mieltä, ei samaa eikä eri mieltä, jokseenkin samaa mieltä, täysin samaa mieltä). Tässä tutkimuksessa tutkijoiden pohdittavaksi jää, miten tulkita Likert-asteikon keskimmäinen porras ”ei samaa eikä eri mieltä”. Tutkijat halusivat kuitenkin sisällyttää sen, sillä sen poisjäämien olisi pakottanut oppilaan vastaamaan joko myöntävästi tai kieltävästi.

Kurssille luodusta oppimateriaalista pyydettiin palautetta sekä kurssille osallistuneilta oppilailta, että kurssin jälkeen Pirkanmaan alueen opettajilta. Sekä oppilailla että opettajilla oli mahdollisuus ilmaista mielipiteensä oppimateriaalista sekä avoimissa kysymyksissä että Likert-väittämien avulla.

7.2 Aineiston analysointi

Tutkimuksen aineistoa analysoitiin lähtö- ja lopputasotestien osalta tilastollisesti, luoden taulukoita, keskiarvoja ja muita keskilukuja. Avointen kysymysten kohdalla pyrittiin tekemään mahdollisimman hyvä sisältöanalyysi, eli poimimaan vastauksista keskeisimmät kohdat, etenkin ne, mitä toistuvat vastauksissa.

7.3 Taustamuuttujat

Oppilaiden osalta taustamuuttujina ovat viimeisin arvosana matematiikassa, sekä aiempi tausta matematiikan opiskelusta. Oppilaat omaavat henkilökohtaisen matematiikkakuvan, joka on muodostunut matematiikan parissa koettujen kokemusten myötä. Oppilaan matematiikkakuva toimii kurssilla taustamuuttujana, sillä se vaikuttaa matematiikan opiskeluun ja oppimiseen. [1, s. 132] Myös oppilaan tavoitteet kurssille toimii taustamuuttujana. Oppilaiden matematiikkakuvia ja tavoitteita pyrittiin saamaan selville alkukyselyn avulla.

Kurssille osallistujilta kysyttiin ilmoittautumislomakkeen yhteydessä viimeisin arvosana matematiikasta. Kuvassa 7.1 on esitetty jakauma kaikkien 14 osallistujan kesken.

Kuva 7.1. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden viimeisin arvosana matematiikasta N=14

Kurssille osallistui oppilaita arvosanaväliltä 5-10. Kuusi neljästätoista, eli melkein puolet, olivat saaneet viimeiseksi arvosanakseen matematiikasta seitsemän. Vain kaksi oppilasta neljästätoista olivat saaneet viimeiseksi arvosanaksi huonomman kuin seitsemän. Kiitettäviä (9 tai 10) oli kolme neljästätoista. Vastaavanlainen jakauma esiintyy usein yläkoulujen luokilla, sillä suurin osa peruskoulun luokista on rakenteeltaan heterogeenisiä. Heidän mielestään oli odotettavissa, että jakauma olisi jotain tämän näköistä, ja se pyrittiin ottamaan huomioon eriyttämisessä. Toisin sanoen oppimateriaali pyrittiin luomaan niin, että tehtäviä löytyi runsaasti, monipuolisesti ja monessa eri vaikeusasteessa.

Alkukyselyn perusteella oppilaiden odotukset kurssia kohtaan olivat hyvin vaatimattomat. Osa ei odottanut mitään, osa odotti rentoja ja kivoja päiviä, ja osa nimesi oppimistavoitteita. Tavoitteiksi nimettiin oman matematiikan arvosanan kohottaminen kurssin avulla, sekä koulussa opittujen asioiden muistiin palauttaminen.

Viisi oppilasta kertoi suoraan tulleensa kurssille vanhempiensa painostuksesta. Todennäköisesti sama tilanne oli useammalla kuin viidellä, mutta kaikki eivät sitä halunneet paperille kirjoittaa. Kuitenkin suurimman osan vastauksista löytyi kurssille saapumissyynä matematiikan oppimisen, tai ainakin arvosanan korottamisen toive. Kahdessa vastauksessa sanottiin suoraan olevansa aidosti kiinnostuneita matematiikasta, ja että he olivat juuri tästä syystä paikalla.

Oppilaiden mielipide matematiikasta oppiaineena alkukyselyn perusteella oli neljän mielestä negatiivinen, ja seitsemän mielestä neutraali. Matematiikka oli harvan suosikkiaine, ja sen opiskelemisen ja oppimisen koettiin vievän paljon aikaa. Vain kolme kertoi matematiikan lempiaineekseen.

Yleisesti ottaen kurssin lähtökohdat olivat heterogeenisen oppilasjoukon takia haastavat. Niin viimeisimmät arvosanat matematiikasta, kuin odotukset kurssia kohtaan vaihtelivat toisesta ääripäästä toiseen.

Opettajien, joilta pyydettiin palautetta kurssin oppimateriaalista, suhteen taustamuuttujana toimii kontekstin puutos, sillä opettajille ei juuri kerrottu, mihin käyttötarkoitukseen oppimateriaali oli luotu. Kun heiltä pyydettiin palautetta oppimateriaalista, heille kuvailtiin kurssi hyvin lyhyesti. Lisäksi heidän oli mahdotonta nähdä kurssimateriaalia käytössä. Opettajat varmasti pohtivat, kuinka itse käyttäisivät materiaalia, ja se ei kenties kohdannut omien toiveiden kanssa, joita yleensä opettajilla on erilaisten materiaalien suhteen. Kurssille luotu materiaali pyrittiin luomaan kaikkien käyttöön, mutta siinä näkyy selvästi tutkijoiden kädenjälki.

8 Tutkimustulokset

Tässä luvussa käydään läpi tutkimustulokset. Asetettuihin tutkimuskysymyksiin pyritään vastaamaan mahdollisimman perustellusti.

8.1 Mitä oppilaat kokevat oppineensa kurssilla?

Oppilaat vastasivat kurssin viimeisenä päivänä kyselylomakkeen neljään avoimeen kysymykseen. Yksi niistä kysyi suoraan: ”Mitä opit kurssilla?”. Viidessä vastauksessa kolmestatoista tunnistettiin aihepiirit koulussa opitun asian kertaamiseksi. Samat viisi henkilöä koki vahvistaneensa näiden asioiden osaamista kurssin aikana.

Kahdeksan vastausta kolmestatoista voidaan kategorisoida luokkaan ”opin matematiikkaa”. Näissä vastauksissa oli mainittu matematiikan ymmärtäminen tai laskutekninen kehittyminen. Eräs oppilas (OP5) kirjoitti seuraavasti: ”Kehitin matemaattista ajatteluani ja ymmärsin jonkun tyyppisiä matemaattisia laskuja paremmin”.

Kolme oppilasta kolmestatoista nimesi suhteen käsitteen opituksi. Näillä oppilailla suhde käsitteenä on todennäköisesti joko mennyt omassa koulussa ohi, tai sitä ei ole siellä opetettu. Myös lukualueet, murtoluvut sekä polynomit saivat maininnan, kun oppilailta kysyttiin, mitä he olivat oppineet kurssilla.

8.2 Millä tavoin oppilaat kokevat oppineensa kurssilla?

Likert-muotoisissa väittämissä oli väite ” Opin matematiikkaa laskutehtävien avulla”. Kolmentoista vastauksen keskiarvo (välillä 1-5) oli 4,31. Joukossa oli yksi kolmonen, eli ”ei samaa eikä eri mieltä”, mutta muut 12 vastausta olivat myöntäviä. Vastaava väite muodostettiin sekä Kahoot!-tietovisoista, sekä toiminnallisista aktiviteeteista. Kahoot!-visoissa opittiin matematiikkaa keskiarvolla 3,31 ja toiminnallisten aktiviteettien parissa keskiarvolla 3,38.

Kuva 8.1. Oppilaiden matematiikan osaamisen kehittyminen eri tavoin kurssin aikana N=13

Likert-väittämistä löytyi myös väite ”Koen ymmärtäväni matematiikkaa kurssin jälkeen paremmin kurssin jälkeen, kuin ennen kurssia”. Tähän kolmentoista vastauksen keskiarvoksi muodostui 4,08. Näistä kolmestatoista vastauksesta yksitoista oli myöntäviä (4 tai 5).

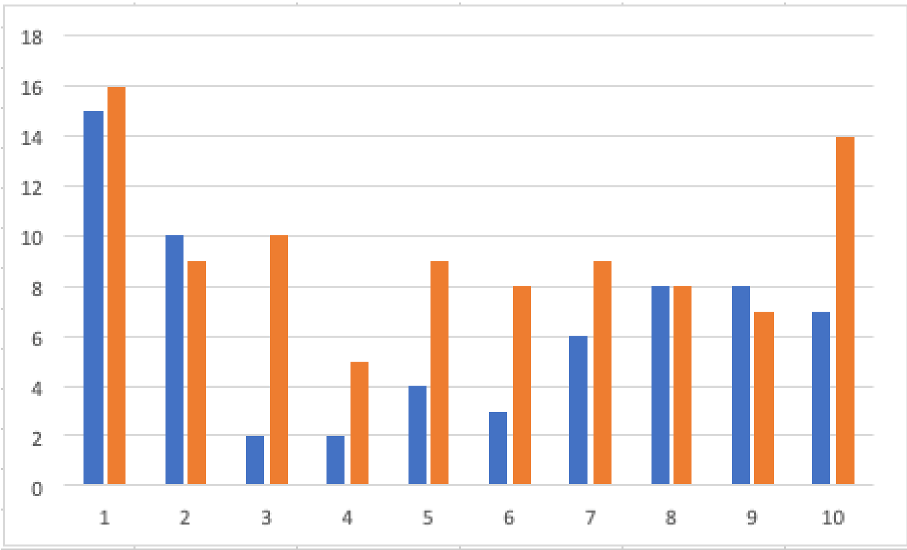
8.3 Miten kurssi kehittää oppilaiden matemaattista osaamista?

Oppimisen tutkimiseksi oli luotu luvussa 7 esitellyt lähtö- ja lopputasotestit. Näihin osallistui kymmenen neljästätoista kurssin oppilaasta niin, että vastaukset voitiin yhdistää toisiinsa. Molemmat testit sisälsivät 16 kysymystä. Kysymykset olivat vastaavanlaisia molemmissa testeissä, käyttäen kuitenkin eri lukuarvoja, jotta oppimista voitaisiin tarkastella.

	Lähtötaso oikeat vastaukset (max. 16)	Lopputaso oikeat vastaukset (max. 16)
Oppilas 1	15	16
OP2	10	9
OP3	2	10
OP4	2	5
OP5	4	9
OP6	3	8
OP7	6	9
OP8	8	8
OP9	8	7
OP10	7	14

Taulukko 8.1. Lähtö- ja lopputasotestien tulokset oppilaittain esitettynä taulukkomuodossa N=10

Taulukossa 8.1 on esitetty, kuinka oppilaat suoriutuivat lähtö- ja lopputasotesteistä. Kuvassa 8.2 on esitetty samat tulokset pylväsdiagrammin muodossa.



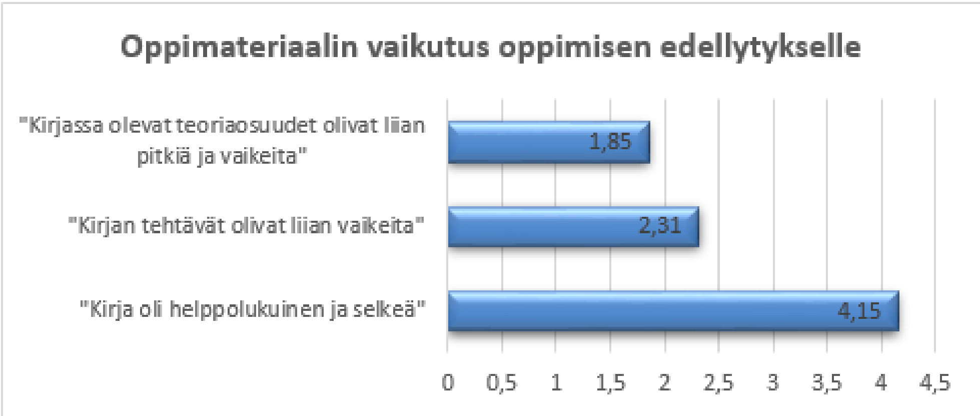
Kuva 8.2. Lähtö- ja lopputasotestien tulokset oppilaittain esitettynä pylväsdiagrammina N=10

8.4 Miten oppilaat kokevat viihtyvänsä kurssilla?

Likert-väittämä ”Viihdyin kurssilla” oli hyvin suora tapa selvittää, kuinka kurssilla viihdyttiin. Kolmentoista vastauksen keskiarvoksi saatiin 4,54. Kaikki vastaukset olivat välillä 4-5, eli toisin sanoen myöntäviä väittämän kanssa. Tutkijoiden eli kurssin opettajien kokemus kurssin viihtyvyydestä oli linjassa vastausten kanssa. Tutkijoiden päiväkirjoissa toistui useaan otteeseen viittaukset hyvään työrauhaan ja yleiseen ilmapiiriin. Tunnelmia Lähteenmäen päiväkirjasta kurssin ensimmäisestä päivästä: "Ilmapiiri oli koko päivän positiivinen ja työrauha säilyi poikkeuksetta. Meno oli jopa yllättävän rauhallista". Tutkijoiden päiväkirjojen mukaan tunnelma kurssilla loppua kohden kiihtyi, kun ryhmädynamiikka kehittyi, mutta se ei vaikuttanut kuitenkaan negatiivisesti työilmapiiriin. Lainaus Hamdin päiväkirjasta viimeisiltä päiviltä: "Päivästä jäi kaikkiaan hyvä fiilis".

8.4.1 Mitkä tekijät vaikuttivat oppimiseen?

Likert-väittämä 1. ”Kirja oli helppolukuinen ja selkeä” sai keskiarvokseen kolmestatoista vastauksesta 4,15, eli vastaukset olivat pääosin myönteisiä väittämän kanssa. Tämän perusteella kirja ei ainakaan vaikeuttanut negatiivisesti oppimiseen. Likert-väittämän ”Kirjan tehtävät olivat liian vaikeita” keskiarvo 2,31 kertoo tutkijoiden tulkinnan mukaan siitä, että suurin osa ei kokenut tehtäviä liian vaikeiksi. Vielä paremman keskiarvon saavutti väittämä ”Kirjassa olevat teoriaosuudet olivat liian pitkiä ja vaikeita”: 1,85.



Kuva 8.3. Oppimateriaalin vaikutus oppimisen edellytykselle N=13

8.4.2 Mitkä tekijät vaikuttivat viihtymiseen?

Avoimissa kysymyksissä oppilaat mainitsivat kurssin yhdeksi parhaista asioista rennon työympäristön. Tämä oli myös tutkijoiden mielestä havaittavissa koko kurssin ajan. Lainaus Hamdin päiväkirjasta: "Tunnelma (luokassa) oli mielestäni hyvä". Myös mukavat opettajat saivat osansa maininnoissa. Hyvin odotetusti Kahoot!-tietovisat, sekä toiminnalliset aktiviteetit vaikuttivat positiivisesti viihtymiseen kurssilla. Molemmat mainittiinkin avoimissa vastauksissa, kun kysyttiin mikä oli parasta kurssilla. Myös haastavat tehtävät saivat maininnan tässä kysymyksessä.

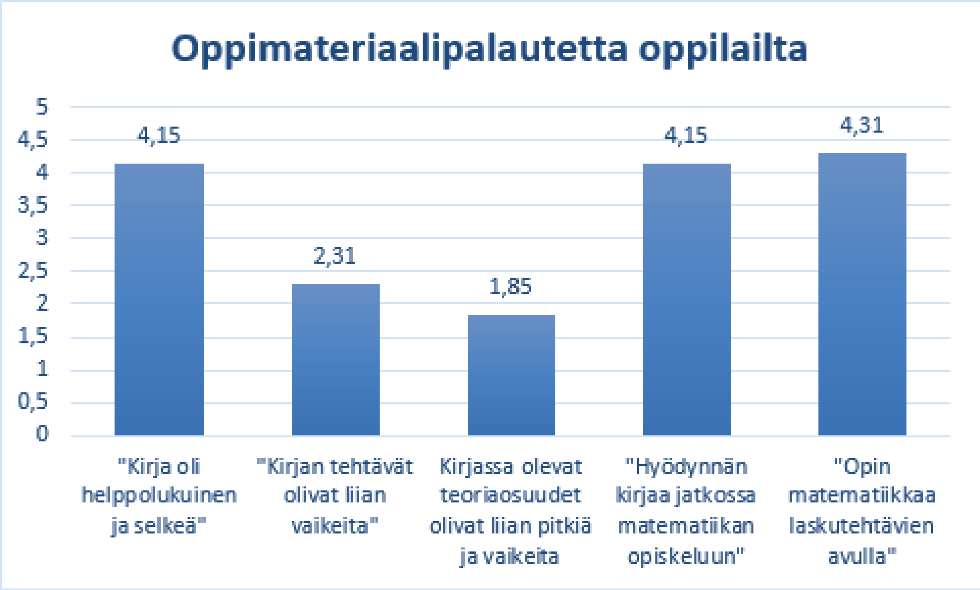
Tutkijat selvittivät myös Likert-väittämien avulla, kuinka Kahoot!:it ja toiminnalliset aktiviteetit vaikuttivat viihtymiseen kurssilla. Kahoot!-visat koettiin vaikeustasoltaan sopiviksi (4,23) ja niiden koettiin motivoivan matematiikan opiskeluun keskiarvolla 3,15. Toiminnalliset aktiviteetit saivat vastaavasta väittämästä keskiarvon 3,54. Sen sijaan, kun väitettiin toiminnallisten aktiviteettien olleen hauskoja, tutkijat saivat keskiarvoksi 4,31.

Kuva 8.4. Toiminnallisten aktiviteettien ja Kahoot!:tien vaikutus viihtyvyyteen N=13

Kaiken kaikkiaan tutkijat kokivat kurssin rytmityksen toimineen erinomaisesti. Rytmityksellä tarkoitetaan tässä yhteydessä suhdetta teorian, laskuharjoittelun, Kahoot!:tien, leikkien, pelien ja muiden välillä. Myös tauot ja ruokailu vaikuttivat omalta osaltaan varmasti myös viihtyvyyteen.

8.5 Miten oppimateriaalien luominen onnistui?

Oppimateriaali sai hyvin vähän kommentteja oppilailta avoimissa kysymyksissä. Yksi oppilas (OP1) mainitsi haastavat tehtävät kurssin parhaaksi anniksi. Sen sijaan Likert-väittämät toivat enemmän informaatiota oppilaiden mielipiteistä. Keskimäärin oppilaiden mielipide kirjan helppolukuisuudesta ja selkeydestä oli Likert-asteikolla 4,15, eli hyvin myönteinen väittämän suhteen. Kirjan tehtäviä ei pidetty liian vaikeina (2,31), eikä teoriaosuuksia liian pitkinä ja vaikeina (1,85). Kurssille osallistuneet oppilaat aikovat hyödyntää oppimateriaalia jatkossa matematiikan opiskeluun keskiarvolla 4,15, eli he olivat samaa mieltä väittämän kanssa. Pelkästään kirjan perusteella oppilaat kokivat oppineensa kurssilla keskiarvolla 4,31, eli melko hyvin tai hyvin.



Kuva 8.5. Palautetta oppimateriaalista oppialilta N=13

Pirkanmaan alueen opettajilta saatu palaute oli kriittisempää kuin oppilailta saatu. Kirjan visuaalista ilmettä ei koettu mieleiseksi ja lähestymistapaa pidettiin liikaa lukiolaisille suunnattuna. Myös aihealueiden valinta sai osakseen kritiikkiä. Sen sijaan oppimateriaalin sisältämät tehtävät ja niiden ratkaisut saivat opettajilta positiivista palautetta.

9 Tulosten tarkastelu

Tämän tutkimuksen tarkoitus on kehittää vuosittainen hiihtolomakurssi yhdeksäsluokkalaisille. Tutkimukseen osallistujien määrä (N=14) jäi odotettua pienemmäksi, mutta kehittämistutkimus toteutettiin silti suunnitelmien mukaan. Nummenmaa [10, s. 60] mainitsee, että saadakseen luotettavia tunnuslukuja määrällisestä tutkimuksesta, havaintojen määrä tulisi olla yli 25. Tässä tutkimuksessa ei päästy tähän, mutta tutkimuksen ainoa tarkoitus ei ollutkaan kerätä vain lukuja. Tutkimus sisältää paljon tunnuslukuja, mutta niitä tarkastellaan kriittisesti ja huomioiden pieni otanta.

Osa tätä tutkimusta on myös sen merkitys kurssin jatkokehitystä varten. Seuraava hiihtolomakurssin järjestämiskerta on luultavasti edellistä helpompi toteuttaa, ja onkin mielenkiintoista selvittää, kuinka sen tulokset ovat linjassa tämän tutkimuksen tulosten kanssa. Tässä tutkimuksessa kurssi ja kaikki siihen liittyvä luotiin tyhjästä, ilman minkäänlaista pohjaa. Ennen tarkempaa tulosten tarkastelua on mainittava yleinen tulos, joka pohjautuu vain ja ainoastaan tutkijoiden omiin tunnelmiin kurssista: kokonaisuus onnistui.

Vaikka hiihtolomakurssin lähtökohdat olivat haastavat ja kurssin opettajat eli itse tutkijat olivat hyvin kokemattomia, kurssilla opittiin matematiikkaa. Voidaan huomata, että lähtö- ja lopputasotestien tulosten perusteella yli puolet paransivat osaamistaan kurssilla käsitellyissä aihepiireissä. Vaikka aihepiirit olivat kertausta koulussa käydyistä asioista, niin niiden osaamisessa oli selvästi puutteita. Kymmenestä lähtötasotestin tekijästä oikeiden vastausten keskiarvo oli 6,50, kun mahdollinen täysi pistepotti oli 16 pistettä. Lopputasotestissä saman ryhmän keskiarvo oli 9,50. Se millä alueilla oppimista on tapahtunut, jää tulkinnanvaraiseksi. Oppilaiden käsitteellinen ymmärtäminen sekä strateginen kompetenssi vahvistuivat tutkijoiden tulkinnan mukaan, mutta tälle ei ole perusteeksi kuin empiiristä tietoa. Sen sijaan proseduraalinen sujuvuus parani varmasti, mikä oli huomattavissa oppilaiden tuntityöskentelystä. Hiihtolomakurssin pelit ja leikit vahvistivat sen sijaan oppilaiden mukautuvaa päättelykykyä eli loogista ajattelua. Näissä vahvistui myös osaltaan oppilaiden strateginen kompetenssi.

Tutkijoiden mielestä kurssin yllättävin tulos oli laskuharjoittelun mielekkyys oppilaiden näkökulmasta ja sen aikaansaamat oppimistulokset. Loppukyselyn Likert-väittämän ”Opin matematiikkaa laskutehtävien avulla”. keskiarvo 4,31 osoittaa laskuharjoittelun kasvattaneen matemaattista osaamista oppilaiden näkökulmasta. Tutkijoiden kokemus kurssin laskuharjoitteluajasta jäi myös hyvin positiiviseksi. Lainaus Lähteenmäen päiväkirjasta: "...ryhmän sai laskemaan erittäin hyvin ja työrauhan kanssa...". Hiihtolomakurssilla laskettiin odotettua enemmän, työrauha ja ilmapiiri olivat lähes poikkeuksetta hyviä, ja tehtävät olivat onnistuneesti laadittuja.

Kurssilla paljon käytetty Kahoot!-tietovisasovellus osoittautui hyväksi päiviä rytmittäväksi aktiviteetiksi. Oppimistulokset Kahoot!:in suhteen olivat odotettua vähäisempiä, mutta tutkijat kokivat sen kuitenkin tuovan vaihtelua tuntien kulkuun. Kahoot!:in tulkittiin myös sekä piristävän oppilaiden mieltä että kertaavan opittuja asioita hauskassa muodossa. Sama analyysi pätee toiminnallisiin aktiviteetteihin eli peleihin ja leikkeihin. Niissäkään oppilaat eivät kokeneet oppineensa erityisesti, mutta rooli oli kuitenkin samalla tapaa merkittävä kuin tietovisasovelluksella.

Kurssin kokonaisviihtyvyys onnistui tutkijoiden mukaan yli odotusten. Suurin osa oppilaista oli kurssilla vanhempien painostamana, kun samaan aikaan muut ikätoverit viettivät hiihtolomaa todennäköisesti vähemmän koulumaisissa merkeissä. Viihtyminen juuri tästä syystä asetettiin tärkeäksi tavoitteeksi ja tutkimuskysymyksen kohteeksi. Viihtymiselle oli monta tärkeää perustetta. Sen vaikuttaminen ilmapiiriin, oppimiseen ja isommassa kuvassa jopa omaan matematiikkakuvaan oli hyvin tiedossa ja tästä syystä kurssi pyrittiin luomaan tästä näkökulmasta.

Tutkijoiden mielestä kurssin toteutus onnistui kokonaisuutena. Lainaus Hamdin päiväkirjasta: "Lopuksi jaoin stipendit ja toivotin rohkaisevat tsempit oppilaille loppukevättä ja muutenkin elämää varten. Lisäksi kiitin läsnäolosta, sillä ryhmä oli kaiken kaikkiaan mielestäni aivan mahtava...". Tutkijoiden mukaan jokin kurssin osa-alueista olisi voinut jopa epäonnistua, kunhan kokonaisuus olisi toiminut. Lyhyellä ja intensiivisellä kurssilla kokonaisuus ja ilmapiiri ovat todella tärkeitä. On kuitenkin perusteltua tarkastella mikrotasolla, miten yksittäiset tekijät vaikuttivat kurssin kokonaisuuteen.

Oppimateriaalin luominen onnistui tutkijoiden mielestä kohtuullisesti. Tutkimuksessa tulee ottaa huomioon, että hiihtolomakurssi olisi ollut huomattavasti helpompi kokonaisuus luoda, jos oppimateriaali olisi ollut kurssille valmiina. Lisäksi on huomioitava, että tutkijoilla ei ollut minkäänlaista kokemusta oppimateriaalin luomisesta, ainoastaan hieman kokemusta oppimateriaalin arvioimisesta. Oppikirjaa lähestyttiinkin tehtävien ja ratkaisujen kautta. Kyseinen lähestymistapa osoittautui hyväksi tavaksi juuri tämän tutkimuksen kurssille, sillä teorian sijaan kurssilla painotettiin laskuharjoittelua ja toiminnallisuutta. Teoriapaketit olivat kuitenkin riittäviä ja myös esimerkkejä esitettiin.

10 Lopuksi

Tässä luvussa tarkastelun kohteena ovat tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys. Jälkimmäinen on otettava erityistarkkailuun, sillä tutkimukseen osallistuvat oppilaat olivat alaikäisiä. Lopuksi esitetään kurssin jatkosuunnitelmia sekä tutkimuksesta kummunneita jatkokehitysideoita.

10.1 Tutkimuksen luotettavuus ja eettiset näkökulmat

Tutkimuskirjallisuudesta löytyy paljon kritiikkiä kehittämistutkimusta kohtaan tutkimusmenetelmänä. Kehittämistutkimukselle on tyypillistä, että dataa kertyy suuri määrä, ja täten sen objektiivinen ja puolueeton tarkastelu voi olla haastavaa. Kehittämistutkimuksen tuloksiin saattaa vaikuttaa myös tapahtuman sosiaalinen ainutlaatuisuus, sisältäen sosiaaliset hierarkiat ja ainutkertaisen kehittämiskontekstin. [14, s. 18–22]

Koska kehittämistutkimus sisältää piirteitä sekä kvantitatiivisesta että kvalitatiivisesta tutkimusmenetelmästä, on sitä vaikea tarkastella pelkästään kummankaan menetelmän näkökulmasta. Useat lähteet yhdistelevätkin eri määritelmiä ja pyrkivät luomaan kehittämistutkimukselle laadun kriteereitä. Laadullisesta tutkimuksesta kehittämistutkimukseen yhdistettäviä kriteereitä ovat uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus ja vahvistettavuus. Määrällisestä tutkimuksen näkökulmasta kehittämistutkimus on usein haastava tarkasteltava, sillä otanta on usein suhteellisen pieni. Määrällistä tutkimusta perustellaankin usein kehittämistutkimusta tehdessä tulosten yleistettävyydellä sekä selitysvoimalla. [14, s. 18–22]

Tässä tutkimuksessa tutkittavaa dataa kertyi kehittämistutkimukselle tyypillisesti liiaksi asti. Tutkijat joutuivat tekemään valitsemiaan rajauksia, pyrkien kuitenkin tarkastelemaan tutkimustaan objektiivisesti ja puolueettomasti. Hiihtolomakurssin sosiaalinen ainutlaatuisuus vaikutti varmasti tutkimuksen tuloksiin ja tätä on tutkijoiden mielestä tarkasteltava tarkoin seuraavaa toteutuskertaa toteuttaessa. Uskottavuus, luotettavuus ja vahvistettavuus ovat tutkijoiden mukaan perusteltu kehittämistutkimuksen syklimuotoisuudella ja jatkuvalla kehittämis- ja arviointimuodolla. Tämän tutkimuksen toteutus seurasi tarkasti kehittämistutkimuksen teoreettisen viitekehyksen asettamia raameja.

Luotettavuuden lisäksi toteutettua kehittämistutkimusta tulee tarkastella myös eettisestä näkökulmasta. Kun kyseessä oleva aines koostuu alaikäisistä oppilaista, niin tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys tulee arvioida erityisellä tarkkuudella. Jo ennen kurssin alkamista oppilaiden huoltajilta pyydettiin oppilaita koskeva tutkimukseen osallistumislupa. Lisäksi tutkimuksen kaikissa vaiheissa ainesta tarkasteltiin ainoastaan anonyymisti. Oppilaiden yksilöllisyys oli tarkastelun kohteena ainoastaan lähtö- ja lopputasotesteissä, jossa niissäkin käytössä oli nimimerkit nimien sijasta. Täten oppilaiden anonymiteetti säilyi koko tutkimuksen ajan ja tutkimus saatiin toteutettua hyvän etiikan ohjeiden mukaisesti.

10.2 Jatkokehittäminen

Hiihtolomakurssi oli kokonaisuutena hyvin onnistunut, joten siitä on tutkijoiden mielestä ehdottomasti kannattavaa tehdä vuosittainen. Vuosittaisen kurssin järjestäminen on helppoa tämän tutkimuksen perusteella. Tässä luvussa esitellään jatkokehittämisideoita, mutta ilman niitäkin tutkijoiden mielestä kurssi on järjestettävissä heti jo seuraavana vuonna.

Hiihtolomakurssille luotu oppimateriaalipaketti jätti merkittävää jatkokehitettävää ainoastaan oppikirjan suhteen. Oppilaiden palautteen perusteella oppikirja tulee tutkijoiden mielestä ehdottomasti nivoa yhteen. Kurssilla käytetty oppikirja tulostettiin oppilaiden käyttöön monistepinona, joka osoittautui epäkäytännölliseksi. Sivut oli numeroitu, mutta oppikirja saattoi tästä huolimatta päästä oppilaan käsissä epäjärjestykseen, joka vaikeutti opiskelua. Tutkijoiden mielestä helppoja ratkaisuja jatkokehittämistä varten ovat nitojan käyttö ja kansiot. Sivujen nitominen yhteen säilyttäisi monistepinon järjestyksen, mutta rei'ittäminen ja kansion käyttö voisi olla vielä käytännöllisempi ratkaisu. Kalliimpi, mutta tutkijoiden mielestä paras ratkaisu olisi käyttää jonkin kirjapainopalvelun tarjoamaa painatusta ja painattaa oppilaille ja kurssin opettajille kirjat kurssille.

Pirkanmaan alueen opettajilta saadun palautteen perusteella oppikirjan visuaalinen ilme kaipasi jatkokehittämistä. Oppikirjan visuaalisuuteen panostaminen jäi tutkijoiden mukaan vähäiseksi, koska kurssin suunnitteleminen ja kehittäminen veivät odotettuakin enemmän aikaa. Oppikirjan sisällöt sen sijaan eivät tutkijoiden mukaan eivätkä palautteen perusteella vaadi muutoksia. Kirjan visuaalinen ilme voisikin olla hyvä tapa kehittää hiihtolomakurssin viihtyvyyttä ja tätä kautta oppimista. Opettajilta pyydetyn palautteen perusteella myös kurssin aihesisällöt vaativat tarkastelua, tästä lisää luvussa 10.3.

Hiihtolomakurssilla oli tutkijoiden mielestä ja oppilaiden palautteen perusteella sopivasti Kahoot!-visoja ja muita toiminnallisuuksia, kuten pelejä. Niiden laatu koettiin myös hyväksi, ja ne toteuttivat niille asetetut tavoitteet ja tarkoitusperät.

Hiihtolomakurssin tuottajan Tampereen LUMATE-keskuksen mukaan kurssin markkinointistrategiaa ja kohderyhmää on syytä tarkastella uudestaan. Kurssille osallistui odotettua vähemmän oppilaita, joten tarkastelu on perusteltua. Tutkijoiden mielestä kohderyhmää voisi laajentaa yhdeksäsluokkalaisista myös kahdeksasluokkalaisiin ja lukiolaisiin. Muutos ei vaatisi kurssin muuttamista. Hiihtolomakurssin markkinointi on sen sijaan tuottajan vastuulla, joten tähän eivät tutkijat ota kantaa.

10.3 Jatkotutkimusehdotuksia

Tutkijoiden mukaan hiihtolomakurssin tutkimusta voi helposti jatkaa kehittämistutkimusta jatkaen. Kehittämistutkimuksen syklimuotoista prosessia voi jatkaa sellaisenaan, tai siihen voi tehdä muutoksia. Aineiston hankintaan voi tutkijoiden mielestä panostaa jatkossa enemmän. Tämän tutkimuksen aineiston hankinta suunniteltiin perusteellisesti, mutta siihen olisi voitu panostaa vieläkin enemmän. Lähdekirjallisuutta voisi käyttää enemmän, ja tätä kautta saada uusia näkökulmia tutkittavaa kurssia varten. Lisäksi tutkimuksen uskottavuutta ja luotettavuutta saadaan kehitettyä, kun aineistonhankinta on suoritettu perusteellisemmin.

Hiihtolomakurssin aihesisällöt eivät vaadi tutkijoiden eikä kurssin tuottajan mielestä muutoksia, mutta vastaavanlaisen kurssin voisi järjestää kokonaan eri aihesisällöillä. Kurssin konseptia hyödyntäen luomalla uusi oppimateriaalipaketti, saisi suhteellisen helposti aiheen kokonaan omalle kehittämistutkimusprojektille. Tätä tutkimusta hyödyntämällä voisi tutkijoiden mielestä helposti kehittää uuden vastaavan kurssin, kun toimiva konsepti on saatu tämän tutkimuksen myötä luotua.

Lähteet

[1] Hannula, M. S. & Holm, M. E. *Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen*. Porvoo: Niilo Mäki Instituutti, 132–154, 2018.

[2] Jansson, U. *Kansakoulun laskuopin opetusoppi*. Jyväskylä: Gummerus, 1927.

[3] Joutsenlahti, J. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piiirteitä - 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Tampere: Tampere University Press, 2005.

[4] Joutsenlahti, J. *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa M. Asikainen, P. Hirvonen & K. Sormunen (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa*. Matematiikka ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Joensuu: Itä-Suomen yliopisto, 3–15, 2010.

[5] Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. *Oppikirja vai harjoituskirja? Perusopetuksen luokkien 1–6 matematiikan oppimateriaalin tarkastelua MOT-projektissa. Teoksessa A. Kallioniemi (toim.) Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktinen symposiumi 8.2.2008 Helsingissä (osa 2). Tutkimuksia no. 299*. Helsinki: Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitos, 547– 558, 2008.

[6] Kahoot! https://kahoot.com/what-is-kahoot/

[7] Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press, 2001.

[8] Koponen, M. *Investigating Teacher Knowledge and Mathematics Teacher Education* Itä-Suomen yliopisto, 2017.

[9] Koshy, T. *Elementary Number Theory with Applications*. A Harcourt Science and Technology Company, 2002.

[10] Nummenmaa, L. *Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät*. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2009.

[11] Opetushallitus *Petusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012*. https://karvi.fi/app/uploads/2014/09/OPH-0113.pdf, 2013.

[12] Opetushallitus *Petusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/perusopetuksen-opetussuunnitelmien-perusteet, 2014.

[13] Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V–M. *Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen*. Porvoo: Niilo Mäki Instituutti, 344–364, 2018.

[14] Pernaa, J. *Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla*. Jyväskylä: PS-kustannus, 9–26, 2013.

[15] Pernaa, J. *Kehittämistutkimus: Tieto- ja viestintätekniikkaa kemian opetukseen* Helsingin yliopisto, 2011.

[16] Rosenberg, M. *Kirjalliseen kielentämiseen johtavat murtolukutehtävät alakoulussa* Tampereen yliopisto, 2019.

[17] Tampereen LUMATE-keskus https://www.lumate.fi/

Valitse asteikon 1-5 numero, joka kuvaa parhaiten mielipiteesi väittämästä. Kyseisellä asteikolla 1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=ei samaa eikä eri mieltä, 4=jokseenkin samaa mieltä ja 5=täysin samaa mieltä.

1. Kirja oli helppolukuinen ja selkeä.

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä						**Samaa mieltä**

2. Kirjan vaikeustaso oli sopiva.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

3. Kirjassa olevat teoriaosuudet olivat liian pitkiä.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

4. Kirja motivoi opiskelemaan matematiikkaa jatkossakin.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

5. Opin matematiikkaa kirjan avulla.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

6. Opin matematiikkaa Kahootin avulla.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

7. Kahoot -visat olivat mukavaa vaihtelua teorialle ja laskutehtäville.

1 2 3 4 5

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

8. Kahootit olivat vaikeustasoltaan sopivia.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

9. Kahoot -visoissa olisi pitänyt olla enemmän miettimisaikaa.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

10. Kahoot motivoi opiskelemaan matematiikkaa jatkossakin.

Eri mieltä ○ ○ ○ ○ ○ **Samaa mieltä**

11. Toiminnalliset aktiviteetit liittyivät kurssilla käytyihin aiheisiin.

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä						**Samaa mieltä**

12. Opin matematiikkaa toiminnallisista aktiviteeteista.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

13. Toiminnalliset aktiviteetit olivat vaikeita.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

14. Toiminnalliset aktiviteetit olivat mukavaa vaihtelua teorialle ja laskutehtäville.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

15. Toiminnalliset aktiviteetit motivoivat opiskelemaan matematiikkaa jatkossakin.

Eri mieltä **Samaa mieltä**

16. Kurssi kokonaisuudessaan motivoi matematiikan opiskeluun jatkossakin.

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä	●	●	●	●	●	**Samaa mieltä**

17. Koen ymmärtäväni matematiikkaa kurssin jälkeen paremmin kuin ennen kurssia.

Eri mieltä	●	●	●	●	●	**Samaa mieltä**

18. Viihdyin kurssilla

Eri mieltä	●	●	●	●	●	**Samaa mieltä**

Vapaamuotoinen palaute (Rohkeasti ja rehellisesti niitä ruusuja kuin myös risujakin, sillä niiden avulla ymmärrämme mitä voisimme tehdä tulevaisuudessa paremmin!):

Valitse asteikon 1-5 numero, joka kuvaa parhaiten mielipiteesi väittämästä. Kyseisellä asteikolla 1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=ei samaa eikä eri mieltä, 4=jokseenkin samaa mieltä ja 5=täysin samaa mieltä. Jos vastaat suoraan Word-tiedostoon, niin kirjaa vastauksesi selkeästi kysymyksen.

Kysymykset	Täysin eri mieltä	Eri mieltä	Ei samaa eikä eri mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Asteikko	1	2	3	4	5
1. Kirja oli helppolukuinen ja selkeä.					
2. Kirjan vaikeustaso oli liian vaikea.					
3. Kirjassa olevat teoriaosuudet olivat liian pitkiä.					
4. Kirja innostaa opiskelemaan matematiikkaa jatkossakin.					
5. Kirjan tehtävät olivat monipuolisia.					
6. Teoriaosuudet tukivat laskutehtävien tekemistä hyvin.					
7. Laskutehtävät olivat liian vaikeita.					
8. Teoriaosuudet olivat kohdennettu hyvin yhdeksäsluokkalaisille.					
9. Teoriaosuudet olivat liian suppeita.					
10. Kirja oli visuaalisesti miellyttävä					

Vastaa vielä lopuksi perustellen seuraaviin avoimiin kysymyksiin:

10. Missä kirja onnistui?
11.Missä kirja ei onnistunut?
12. Mitä kirjaan voisi mielestäsi lisätä / muokata?

Vapaa sana, kerro rohkeasti mitä mieleesi juolahtaa luettuasi kirjan.

Tutkimuslupahakemus

Hei huoltajat! Olemme Robin Hamdi ja Ykä Lähteenmäki ja opiskelemme matemaattisten aineiden opettajiksi Tampereen yliopistossa. Teemme hiihtolomakurssista tutkintojemme päätteeksi tehtävää opinnäytetyötä, jonka tarkoituksena on kehittää järjestettävää kurssia ensi vuotta ajatellen. Kehittämistutkimuksen kohteena eivät ole oppilaat, vaan pikemminkin tarjoamamme materiaali ja opetus. Tutkimusaineistomme koostuu Kahootilla järjestettävistä alku- ja lopputasotesteistä sekä palautekyselystä kurssin päätteeksi. Lapsesi nimeä emme käytä tutkimusjulkaisuissamme, mutta haluaisimme löytää kouluarvosanojen sekä aineistomme välille yhteyksiä, jotta voimme kurssin jälkeen analysoida materiaaliamme ja opetustamme paremmin.

Olemme erityisen kiinnostuneita siitä, miten opetuksemme on motivoinut lastasi matematiikan opintoihin jatkoa ajatellen, sekä ennen kaikkea myös siitä, miten lapsesi kokee oppineensa kurssimme aikana matematiikkaa!

Sopiiko sinulle, että lapsesi osallistuu puolianonyymisti kyselyihimme? Tämä tarkoittaa tässä tapauksessa sitä, että me opettajina voimme seurata lapsesi edistymistä kurssimme aikana. Myöhemmin tekemissämme julkaisuissamme emme käytä lapsesi nimeä, jolloin tutkimuksemme ulkopuolinen lukija ei pysty yhdistämään lapsesi vastausta lapseesi.

Vastaathan tähän sähköpostiin joko antamalla tai kieltämällä luvan tietojen keräämiseen.

- Ystävällisin terveisin Robin Hamdi ja Ykä lähteenmäki

Liite 4(4)

Matematiikkaa ysiluokkalaisille hiihtolomalla

Johdanto

Peruskoulun matematiikka tarjoaa periaatteellisesti hyvän pohjan toisen asteen opintoihin, mutta se opetetaan yleensä usealle vuodelle pilkottuina pieninä paloina. Tällöin voi olla hankala luoda itselleen selkeitä eri aihealueiden välisiä yhteyksiä sekä soveltaa oppimaansa, jotka ovat äärimmäisen tärkeitä taitoja jatkon kannalta. Tutkimusten perusteella yksi keskeisin tekijä oppisisällön oppimisen kannalta on motivaatio kyseistä oppisisältöä kohtaa, jonka vuoksi meille on kunniatehtävä saada sinut innostumaan vielä enemmän tästä aiemmin sirpaleisesta matematiikasta.

Olemme pyrkineet rajaamaan oppikirjan sisällön hieman juhlallisestikin nimettynä ’lukuteoriaan’ ja ’algebraan’, jotta oppikirjan kokonaisuus säilyisi selkeänä. Syy sille, miksi oppikirja painottuu juuri näihin aihepiireihin on se, että juuri näiden aihepiirien sisältä on kokemuksen perusteella löytynyt kaikkein eniten vaikeuksia. Lisäksi, kyseiset matematiikan päähaarat esiintyvät jatkuvasti myös muillakin matematiikan osa-alueilla kuten geometriassa ja funktio-opissa, joten onkin perusteltua väittää, että hyvä lukuteorian ja algebran osaaminen takaa myös hyvän muiden alueiden osaamisen.

Kertauskurssin tarkoitus on vahvistaa sinun matemaattista osaamista. Konkreettisemmin lausuttuna tavoitteena on se, että kurssin suoritettuasi keväällä järjestettävä matematiikan valtakunnallinen koe sujuu vähintään tavoitteiden mukaisesti. Lisäksi, koska matematiikkaa esiintyy jatko-opinnoissa valinnoista riippumatta, niin on kurssin myös tarkoitus madaltaa jatko-opintoihin liittyvää kynnystä. Kirja ei siis kokonaisuudessaan kata koko peruskoulun matematiikan sisältöä, mutta se toimii hyvänä tukena itse kertauskurssilla, jolla on tarkoitus perehtyä myös muihin matematiikan osa-alueisiin kuin lukuteoriaan ja algebraan.

Kirjan luvut ovat rakenteeltaan hyvin samanlaiset: Ensin käydään aihepiirikohtainen teoria ja esimerkit läpi. Tämän jälkeen tehdään harjoitustehtävät, joihin löytyy kirjan loppuosasta vastaukset. Vastauksia suositellaan katsottavaksi vasta sen jälkeen, kun tehtävä on ratkaistu tai jos tehtävää on mietitty riittävän pitkä aika! Haluamme korostaa sitä, että matematiikassa tärkeintä ei ole se, että saa oikean vastauksen mahdollisimman nopeasti, vaan se, että ymmärretään ne välivaiheet mitä kautta kyseiseen vastaukseen on päädytty. Ei kannata ahdistua, vaikkei jokin tehtävä ratkeaisikaan heti, sillä kokemuksen perusteella juuri sellaiset tehtävät ovat olleet meille matematiikan opiskelijoille oppimisen kannalta kaikkein opettavaisimpia! Siksi suosittelemmekin tehtäviä tehdessä kirjaamaan välivaiheet ylös, sillä näitä tullaan myös jatkossakin tarvitsemaan kuten matematiikan valtakunnallisissa koetehtävissä ja jatko-opinnoissa.

Näiden mietteiden pohjalta toivotamme sinulle opettavaisia ja innostavaisia hetkiä matematiikan parissa!

- Terveisin Robin Hamdi ja Ykä Lähteenmäki

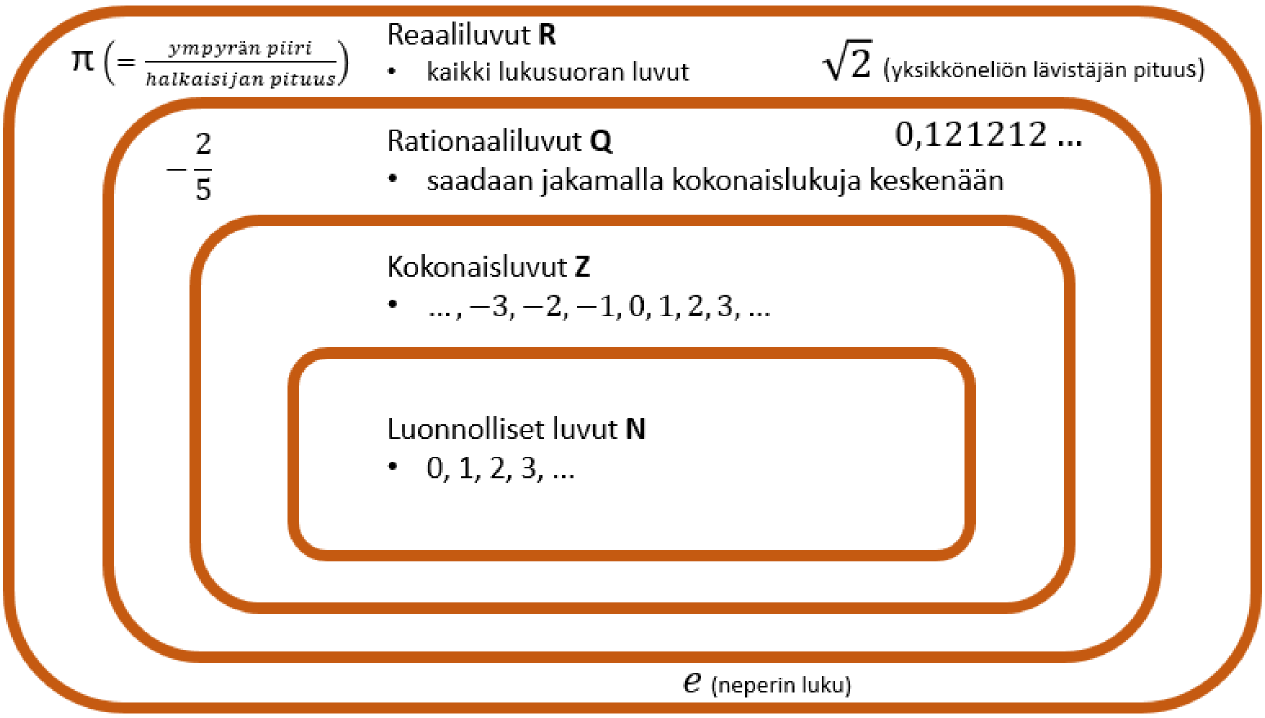
Sisällys

1. Lukuteoria

Lukuteoria on yksi vanhimmista matematiikan aloista, sillä sen juuret ulottuvat kauas menneisyyteen aina 4 000 vuoden päähän. Lukuteoriaa on pitkään pidetty matemaatikkojen harrastamana teoreettisena huvitteluna, mutta nykyään sen tuottamia tietoja käytetään hyväksi muun muassa salauksessa. (Lähde: Wikipedia)

1.1. Lukujoukot

Matematiikassa erilaiset luvut voidaan luokitella eri lukujoukkoihin seuraavasti:



(Lähde: opinnot.net)

Rationaalilukujen joukossa (ℚ) sen jäsenet voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Osamäärän esittäminen ei aina ole helppoa, jos luku on desimaalimuodossa (esim. 0,125 = $\frac{1}{8}$ tai jopa päättymätön 0,3333… = $\frac{1}{3}$). Lisäksi, jos desimaaleissa toistuu jokin numero tai numerosarja äärettömän monta kertaa peräkkäin, on kyseessä rationaaliluku.

Reaalilukujen joukossa (ℝ) on rationaalilukujen lisäksi irrationaaliluvut. Irrationaalilukuja ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

Huom! Suomen kielessä sanat ”luku” ja ”numero” tarkoittavat eri asiaa. Numero tarkoittaa numeromerkkejä 0-9. Numeroita voi verrata aakkosiin: aakkosista muodostetaan sanoja ja numeroista lukuja. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Mihin lukujoukkoihin luku kuuluu?

a) -2

b) $\frac{3}{7}$

c) 0,4

d) 6,3573067205…

Ratkaisu:

a) Ainakin reaalilukuihin, sillä niihin kuuluu kaikki luvut. Lisäksi rationaalilukuihin, sillä -2 voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä ($\frac{-2}{1}$). -2 kuuluu myös kokonaislukuihin, muttei luonnollisiin lukuihin.

b) Reaalilukuihin ja rationaalilukuihin.

c) Reaalilukuihin ja rationaalilukuihin (Luku 0,4 voidaan esittää osamääränä $\frac{2}{5}$).

d) Ainoastaan reaalilukuihin, koska kyseessä on päättymätön ja jaksoton desimaaliluku, eikä sitä voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

Harjoitustehtäviä

1. Mitkä keltaisen laatikon luvuista ovat
   a) luonnollisia lukuja?
   b) rationaalilukuja?
   c) kokonaislukuja?

$\frac{1}{3},\ -3,\ 12,\ -5,\ \frac{8}{4},\ 8,\ -\frac{5}{6}$

2. Merkitse

a) luku, joka kuuluu reaalilukuihin, muttei rationaalilukuihin.
b) luku, joka kuuluu rationaalilukuihin, muttei kokonaislukuihin.
c) luku, jonka desimaaliesitys on vähintään 4 merkkiä pitkä, ja joka voidaan esittää myös kahden kokonaisluvun osamääränä.

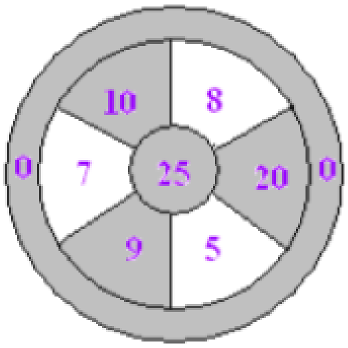
3. Mistä lukujoukoista luvut on otettu? Valitse suppein.

a) -3, -2, 0, 2, 6, 10, 15

b) 2, 4, 6, 8, 10, 12

c) -6, 0, *pii*, $\frac{3}{7}$

4. Muodosta sellainen laskulauseke kahdeksan kahdeksikon avulla, jonka tulos on 1000.



5. Oheiseen tikkatauluun heitetään kolme tikkaa. Kaikki tikat jäävät tauluun. Ilmoita kaikki mahdollisuudet, joilla saadaan tulokseksi 25. (Peruskoulun matematiikkakilpailu 11.11.1999)

1.2. Monikerrat ja jaollisuus

Luvun monikerta saadaan, kun luku kerrotaan luonnollisella luvulla. Monikerroista muodostuu kyseisen luvun kertotaulu. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

a) Luvun 2 monikertoja ovat 2, 4, 6, 8, 10, 12, … kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 2.
b) Luvun 5 monikertoja ovat 5, 10, 15, 20, 25, … kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 5.

Luku on *jaollinen* toisella luvulla, jos lukujen *jakojäännös* on nolla, eli tulos on kokonaisluku. Jos luku ei ole *jaollinen* toisella luvulla, jakolaskusta jää *jakojäännös*.

Luvulla jaollisia ovat vain kyseisen luvun monikerrat. Joka toinen kokonaisluku on jaollinen kahdella. Joka kolmas kokonaisluku on jaollinen kolmella jne.

Lukujen jaollisuussääntöjä:
Jokainen luku on jaollinen luvulla *yksi* ja *itsellään*. Lisäksi luku on jaollinen

- *kahdella*, jos sen viimeinen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8.
- *kolmella*, jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella 3, 6, 9, …
- *viidellä*, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
- *kuudella*, jos luku on jaollinen sekä kahdella että kolmella.
- *yhdeksällä*, jos luvun numeroiden summa on yhdeksän monikerta 9, 18, 27, …
- *kymmenellä*, jos sen viimeinen numero on 0. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 2.

a) 1 024 on jaollinen kahdella, koska sen viimeinen numero on 4.
b) 12 345 on jaollinen kolmella, koska $\frac{1+2+3+4+5}{3} = \frac{15}{3} = 5$.
c) 6 725 on jaollinen viidellä, koska sen viimeinen numero on 5.
d) 246 on jaollinen kuudella, koska sen viimeinen numero on 6 ja $\frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$.
e) 3 456 on jaollinen yhdeksällä, koska $\frac{3+4+5+6}{9} = \frac{18}{9} = 2$.
f) 6 732 543 247 610 on jaollinen kymmenellä, koska sen viimeinen numero on 0.

Harjoitustehtäviä

6. Luettele lukujen kolme seuraavaa monikertaa
a) 0
b) 1
c) 8
d) 12

7. Ympyröi luvut, jotka ovat jaollisia yhdeksällä.

$$46, 108, 54, 127, 162$$

8. Ympyröi luvut, jotka ovat jaollisia luvulla 11.

$$66, 132, 100, 121, 145$$

9. Erään luvun numeroiden summa on 12.
a) Muodosta kaksi tällaista lukua.
b) Mitä voit sanoa tällaisten lukujen jaollisuudesta?

10. Erään luvun numeroiden summa on 18.
a) Muodosta kaksi tällaista lukua.
b) Mitä voit sanoa tällaisten lukujen jaollisuudesta?

11. Muodosta kuusinumeroinen luku, joka on jaollinen
a) neljällä
b) kuudella
c) yhdeksällä

12. Ympyröi oikea vaihtoehto

a) Kahden parillisen luvun summa on parillinen / pariton luku.

b) Kahden parittoman luvun summa on parillinen / pariton luku.

c) Parillisen ja parittoman luvun summa on parillinen / pariton luku.

d) Parillisen ja parittoman luvun tulo on parillinen / pariton luku.

13. Mikä luonnollinen luku on kysymyksessä?
1. vihje: Se on pienempi kuin 100.
2. vihje: Se on jaollinen viidellä.
3. vihje: Se on parillinen.
4. vihje: Kun se jaetaan seitsemällä, on jakojäännös 4.

14. Henkilötunnus muodostuu syntymäajasta, yksilönumerosta ja tarkistusmerkistä. Syntymäajan jäljessä oleva merkki kertoo syntymävuosisadan. Henkilöllä, joka on syntynyt 1800-luvulla, se on plusmerkki (+), 1900-luvulla syntyneillä se on yhdysmerkki (-) ja 2000-luvulla syntyneillä A-kirjain. Yksilönumerossa on kolme numeroa, sillä erotetaan toisistaan henkilöt, joilla on sama syntymäaika. Yksilönumero on miehillä pariton ja naisilla parillinen.

Henkilötunnuksen viimeinen merkki on tarkistusmerkki. Se muodostuu siten, että muodostetaan syntymäajasta ja yksilönumerosta yhdeksännumeroinen luku. Jaetaan tämä luku 31:llä ja katsotaan jakojäännöksen perusteella viimeinen henkilötunnuksen merkki oheisesta taulukosta. (Lähde: luntti.net)

Jakojäännös	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Tarkastusmerkki	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Jakojäännös	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Tarkastusmerkki	H	J	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y

Onko kyseessä mies vai nainen, mikä on syntymävuosi ja tarkistusmerkki, jos henkilön henkilötunnuksen alkuosa on

a) 220390-025
b) 171279-122
c) 101202A541
d) 121199+452
e) Tarkista oma tarkistusmerkkisi muodostamalla syntymäajastasi ja yksilönumerosta yhdeksännumeroinen luku ja jaa se 31:llä.

1.3. Murtoluvut

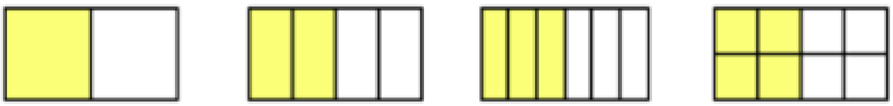
Kumman valitset: Kaksi palaa ensimmäisestä kakusta vai kolme palaa toisesta?

Nimityksiä:

Murtoluku $\frac{3}{5}$ — osoittaja, nimittäjä

Sekaluku $3\frac{1}{4}$ — murto-osa, kokonaisosa

Murtoluvut voivat olla keskenään yhtä suuret, vaikka niillä olisikin eri nimittäjät. Esimerkiksi seuraavat murtoluvut ovat keskenään yhtä suuria:



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

Kun murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla, sen arvo pysyy samana. Tällöin puhutaan laventamisesta. Laventaminen merkitään murtoluvun vasempaan yläkulmaan.

$$\frac{{}^{2)}1}{3} \underset{(\cdot\,2)}{\overset{(\cdot\,2)}{=}} \frac{{}^{3)}2}{6} \underset{(\cdot\,3)}{\overset{(\cdot\,3)}{=}} \frac{6}{18}$$

Voitaisiin laventaa edelleen.

Murtoluvun arvo pysyy samana, jos sen osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla. Tällöin puhutaan supistamisesta. Supistaminen merkitään murtoluvun oikeaan yläkulmaan.

$$\frac{16^{(4}}{24} \underset{(:4)}{\overset{(:4)}{=}} \frac{4^{(2}}{6} \underset{(:2)}{\overset{(:2)}{=}} \frac{2}{3}$$

Ei voida supistaa enempää.

Huom! Nollalla ei voi laventaa eikä supistaa! (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Järjestetään murtoluvut $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ ja $\frac{1}{2}$ suuruusjärjestykseen.

Lavennetaan murtoluvut ensin samannimisiksi. Koska murtolukujen pienin yhteinen nimittäjä on 8, murtoluvut lavennetaan siten, että kunkin nimittäjäksi tulee 8.

$\frac{{}^{2)}3}{4} = \frac{6}{8}$ Lavennetaan luvulla 2.

$\frac{7}{8}$ Ei tarvitse laventaa, nimittäjässä on luku 8.

$\frac{{}^{4)}1}{2} = \frac{4}{8}$ Lavennetaan luvulla 4.

Nyt murtoluvut voidaan helposti laittaa suuruusjärjestykseen: $\frac{4}{8}, \frac{6}{8}$ ja $\frac{7}{8}$

Vastaus supistetussa muodossa: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ja $\frac{7}{8}$.

Harjoitustehtäviä

15. Muunna sekaluvuksi
a) $\frac{10}{3}$
b) $\frac{13}{5}$
c) $\frac{50}{7}$
d) $\frac{132}{18}$

16. Lavenna samannimisiksi.

a) $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{15}$
c) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{4}{9}$
d) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{9}{11}$

1.4. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Esimerkki 3.

Lasketaan $-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$.

$$-\frac{^{4)}2}{5}-\frac{^{5)}3}{4}=-\frac{8}{20}-\frac{15}{20}=\frac{-8-15}{20}=\frac{-23}{20}=-1\frac{3}{20}$$

Huom! Muista siirtää edessä oleva miinusmerkki osoittajaan, kun suoritat osoittajien laskutoimitukset.

Harjoitustehtäviä

17. Muodosta ja laske lukujen $\frac{5}{6}$ ja $\frac{2}{3}$
a) summa
b) erotus.

18. Laske
a) lukujen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{6}$ summa
b) lukujen $\frac{9}{10}$ ja $\frac{7}{8}$ erotus.

19. Vähennä lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ erotus lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ summasta.

20. Laske
a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$
b) $\frac{8}{b}-\frac{3}{b}$
c) $\frac{12}{2y}-\frac{10}{2y}$

21. Laske
a) $\frac{3}{a}+\frac{4}{2a}$
b) $\frac{1}{5x}+\frac{1}{10x}$
c) $\frac{4}{3y}-\frac{1}{2y}$

1.5. Murtolukujen kertolasku

Esimerkki 1.

Kerrotaan luku $\frac{3}{4}$ luvulla $\frac{5}{7}$.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{15}{28}$ Kerrotaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

Esimerkki 2.

$4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{48^{(2}}{10} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

Muutetaan ensin kokonaisluvut ja sekaluvut epämurtoluvuiksi.

Harjoitustehtäviä

22. Laske
a) $\frac{1}{2} \cdot 2$
b) $5 \cdot \frac{1}{5}$
c) $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9}$
d) $\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{5}{7}$

23. Laske
a) $\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{6}$
b) $1\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{7}$

24. Keksi kertolasku, jonka tulos on
a) $\frac{4}{5}$
b) $1\frac{1}{2}$
c) $-\frac{7}{8}$

25. Laske, paljonko on
a) neljäsosa 48 eurosta.
b) viidesosa 950 grammasta
c) kolme seitsemäsosaa 54 kilogrammasta?

26. Paavolla on pussillinen kolikoita. Hän antaa niistä $\frac{1}{8}$ äidilleen ja jäljelle jääneistä kolikoista hän antaa puolet veljelleen. Isä saa jääneistä $\frac{2}{7}$, jolloin Paavolle jää 25 kolikkoa. Paljonko kolikoita oli alun perin?

27. Järveen on pystytetty pylväs. Pylväästä puolet on maan alla pohjassa, kaksi viidesosaa vedessä ja 70 senttimetriä veden pinnan yläpuolella. Kuinka pitkä pylväs on kokonaisuudessaan?

1.6. Murtolukujen jakolasku

Luku (myös murtoluku) jaetaan siten, että se kerrotaan jakajan käänteisluvulla. Esim. $4 : 2 = 4 \cdot \frac{1}{2}$

Murtoluvun käänteisluku saadaan vaihtamalla osoittaja ja nimittäjä keskenään. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina 1.

Huom! Nollalla ei ole käänteislukua. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Muodostetaan lukujen 2 ja $\frac{4}{5}$ käänteisluvut.

$2 \xrightarrow{käänteisluku} \frac{1}{2}$ tulo: $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{4}{5} \xrightarrow{käänteisluku} \frac{5}{4}$ tulo: $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$

Esimerkki 2.

Jaetaan luku $\frac{1}{4}$ luvulla $\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ Kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

Harjoitustehtäviä

28. Laske
a) $2 : \frac{1}{2}$
b) $3 : \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2} : 5$

29. Laske
a) $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$
b) $\frac{5}{8} : \frac{8}{5}$

30. Laske murtolukujen $\frac{4}{9}$ ja $\frac{5}{6}$
a) summa
b) erotus
c) tulo
d) osamäärä

31. Keksi jakolasku, jonka tulos on
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $-\frac{2}{3}$

32. Jos $\frac{3}{4}$ kakkua jaetaan tasan neljälle hengelle, kuinka suuren osan kakkua kukin saa?

33. Keksi jakolasku, jonka tulos on
a) $-\frac{5}{6}$
b) $-2\frac{1}{3}$

1.7. Suhde

Suhdetta käytetään samoissa yksiköissä olevien suureiden vertaamiseen. Esimerkiksi erääseen urheiluseuraan kuuluvien tyttöjen ja poikien suhde on 4:5. Jos tytöt ja pojat jaettaisiin pienempiin mahdollisiin ryhmiin siten, että ryhmissä olisi ainoastaan joko tyttöjä tai poikia ja ryhmiä olisi oltava yhtä monta, muodostaisivat tytöt neljän ja pojat viiden hengen ryhmiä. Suhde ei kerro montako tyttöä, poikaa tai jäsentä seurassa on kaikkiaan. Suhteen perusteella voidaan kuitenkin tehdä seuraavat päätelmät:

- Tyttöjen määrä on jaollinen neljällä
- Poikien määrä on jaollinen viidellä
- Kaikkien jäsenten lukumäärä on jaollinen yhdeksällä

Kahden suureen tai luvun *suhde* on luku, joka ilmoittaa, kuinka monta kertaa jälkimmäinen sisältyy edelliseen. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Kerrostalon korkeus on 35 m ja omakotitalon 5 m. Lasketaan talojen korkeuksien välinen suhde.

$\frac{35\,m}{5\,m} = 7$ Kerrostalon korkeus on seitsemänkertainen omakotitalon korkeuteen verrattuna.

$\frac{5\,m}{35\,m} = \frac{1}{7}$ Omakotitalon korkeus on yksi seitsemäsosa kerrostalon korkeudesta.

Usein suhdelaskuissa käytetään jakomerkkinä kaksoispistettä.

$$35\,m : 5\,m = 7$$

Keskenään jaettavien suureiden yksikkö on sama, joten ne supistuvat pois. Suhteen arvolla ei ole siis yksikköä. Jos suhteen jäsenet eivät ole samassa yksikössä, on ne ennen arvon laskemista muutettava toisiaan vastaaviksi

Huom! Suhde ilmoitetaan yleensä sellaisessa muodossa, että sen molemmat jäsenet ovat kokonaislukuja. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

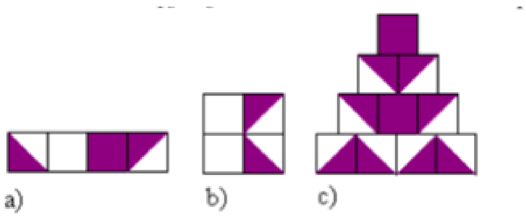
Harjoitustehtäviä

34. Mikon pituus on 192 cm ja hänen poikansa Villen pituus on 120 cm. Laske pituuksien välinen suhde.

35. Kirsikoista $\frac{2}{9}$ on pilaantuneita. Mikä on pilaantuneiden ja pilaantumattomien kirsikoiden suhde?

36. Jos tarjottimella olevien mansikka- ja vadelmaleivosten suhde on 7:6, voiko leivoksia olla yhteensä 80 kappaletta?

37. Ilmoita väritettyjen ja värittämättömien alueiden pinta-alojen suhde.



38. Laske suhteiden arvot.
a) 12 cm : 5 m
b) 3 kg : 210 g

39. 39-vuotiaalla äidillä on 13-vuotias poika. Mikä on äidin ja pojan ikävuosien suhde
a) tällä hetkellä
b) kymmenen vuotta sitten
c) kymmenen vuoden kuluttua?

40. Karkkipussissa on salmiakkeja ja hedelmäkarkkeja suhteessa 4:5. Kuinka suuri prosentuaalinen osuus on hedelmäkarkkeja?

41. Televisiokuvan korkeuden suhde leveyteen on nykyisin 3 : 4. Uudessa suunnittelussa teräväpiirtotelevisiossa (HDTV) se olisi 9 : 16. Ajatellaan, että nykysysteemillä kuvattu ohjelma näytettäisiin uudella kuvaruudulla. Kuinka suuri osa kuvaruudusta on jätettävä reunoiltaan mustaksi, jotta pystysuunta tulisi kokonaan näkyviin? Kuinka suuri osa kuva-alasta joutuisi puolestaan kuvaruudun ulkopuolelle, jos kuva levitettäisiin koko ruudun levyiseksi? (yo syksy 1996)

42. Kahdelle henkilölle jaetaan 400 euroa suhteessa 2:3. Laske osuudet.

43. Naudan ja possun jauhelihaa sekoitetaan suhteessa 2:1. Mikä tulee seosjauhelihan kilohinnaksi, jos naudan jauheliha maksaa 7,60e ja possun 5,20e?

44. Kolmion kulmien astelukujen suhteet ovat 2:3:5. Kuinka suuria kulmat ovat?

45. Leevi ja Eevi jakavat 480 euroa siten, että Leevin osuus on 30 % suurempi kuin Eevin. Paljonko rahaa kumpikin saa?

46. Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun niitä on sekoitettava suhteessa 1:3 ja halutaan 6,0 litraa mehua? (yo syksy 1993)

47. Jouko, Tapio ja Matti tekevät urakan, josta he saavat yhteensä 9000 euroa. Jouko on tehnyt urakan eteen töitä 140 tuntia, Tapio 160 tuntia ja Matti 200 tuntia. Tapion tuntipalkka on 10 % korkeampi kuin Joukon ja Matin puolestaan 10 % korkeampi kuin Tapion. Laske miesten palkkiot.

48. Desinfiointiliuosta sisältävän astian kyljessä on ohje: Väkevyys 40 % - laimenna ennen käyttöä 5-prosenttiseksi liuokseksi. Missä suhteessa liuosta ja vettä on sekoitettava ja kuinka paljon niitä on kaadettava 10 litran sankoon, että sanko tulisi täyteen 5-prosenttista liuosta? (yo syksy 1997)

1.8. Prosenttikertoimia ja prosenttiosuuksia

Prosentteja on käytetty 1600-luvun lopulta lähtien muun muassa verojen, korkojen ja tappioiden laskemisessa. Prosentin idea on kuitenkin peräisin jo Rooman keisari Augustuksen (63 eaa. – 14 jaa.) ajoilta. Hän määräsi kaikista huutokaupattavista tarvikkeista veroa, joka oli 1/100 tuotteen hinnasta. Prosentti nimitys tulee latinan sanasta *per centum*, sataa kohden tai *pro centum*, sadasta.

Prosentti on sadasosa.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Desimaalilukuna tai murtolukuna merkittyä prosenttia sanotaan *prosenttikertoimeksi*. *Prosenttiluku* saadaan prosenttikertoimesta siirtämällä pilkkua kaksi askelta oikealle. Yleensä vastauksissa ja tehtävänannoissa käytetään prosenttilukuja, mutta itse laskut suoritetaan prosenttikertoimien avulla. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Pentillä on 24 Facebook-ystävää listallaan, joista 6 on ulkomaalaista. Laske ulkomaalaisten ystävien prosenttiosuus kaikista ystävistä.

prosenttikerroin

$$\frac{6}{24} = 0{,}25 = 25\ \%$$

perusarvo prosenttiluku

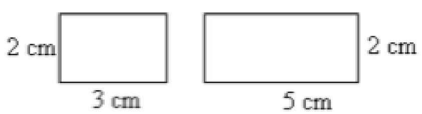
Vastaus: Pentin Facebook-ystävistä 25 % on ulkomaalaisia.

Harjoitustehtäviä

49. Ylämäkeä varoittavassa liikennemerkissä prosenttiluku 7 % kuvaa mäen jyrkkyyttä (eli jokaisella 100 metrillä on nousua 7 metriä). Mikä on mäen jyrkkyys prosentteina, jos
a) 200 metrillä on nousua 30 m?
b) 150 metrillä on nousua 18 m?
c) 500 metrillä on nousua 500 metriä?

50. Autokauppias myi auton 41 600 eurolla. Palkkiona hän sai itse 624 euroa. Montako prosenttia palkkio on myyntihinnasta?

51. Montako prosenttia pienemmän suorakulmion pinta-ala on suuremman pinta-alasta?



52. Artun palkasta kolmasosa menee veroihin, viidesosa ruokaan ja kuudesosa vuokraan. Montako prosenttia jää jäljelle?

1.9. Prosenttiarvon laskeminen

Yleensä prosenteilla laskettaessa on prosenttiluvut ensiksi muutettava murtoluku- tai desimaalimuotoon. Prosentti eli *prosenttiarvo* lasketaan tietystä luvusta siten, että kerrotaan perusarvo prosenttikertoimella. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Prosenttiarvo

p prosenttia luvusa a on $\frac{p}{100} \cdot a$

Esimerkki 1.

Lasketaan, paljonko on 20 % luvusta 150.

$\frac{20}{100} \cdot 150 = 0{,}2 \cdot 150 = 30$ Prosenttiluku 20 % muunnetaan desimaalilukumuotoon.

Harjoitustehtäviä

53. Ihmisen kehossa on keskimäärin 64 % vettä. Montako kilogrammaa on vettä henkilössä, joka painaa
    a) 49 kg
    b) 82 kg

54. Vesimelonin vesipitoisuus on 99 %. Montako litraa vettä on vesimelonissa, joka painaa 8,5 kg?

55. Autoilija havaitsi tienvarressa olevasta näyttötaulusta todellisen nopeutensa olevan 92 km/h, kun auton nopeusmittari näytti 100 km/h. Mikä on auton todellinen nopeus, kun nopeusmittari näyttää 85 km/h? Nopeusmittarin näytön virheprosentin oletetaan olevan sama kaikilla nopeuksilla. (yo syksy 1999)

1.10. Lisäyksiä ja vähennyksiä prosentteina

Prosentuaalisen lisäyksen ja vähennyksen laskeminen

Kun perusarvo *a* kasvaa *p* %, on lopputulos $\left(\frac{100+p}{100}\right) * a$.

Kun perusarvo *a* pienenee *p* %, on lopputulos $\left(\frac{100-p}{100}\right) * a$.

Esimerkki 1.

Jäätelöbaarissa jäätelöannoksen veroton hinta on 4 e. Jäätelöannokseen on lisättävä arvolisävero (22 %). Paljonko on jäätelöannoksen verollinen myyntihinta?

Ratkaisu:

Jäätelöannoksen verollinen hinta on 100 % + 22 % = 122 % verottomaan hintaan verrattuna. Jäätelöannoksen hinta kasvaa siis 1,22-kertaiseksi. Jäätelöannoksen verollinen hinta saadaan kertomalla prosenttikerroin ja alkuperäinen hinta keskenään:

$$\left(\frac{100+22}{100}\right) \cdot 4e = 1{,}22 \cdot 4e = 4{,}88e$$

Esimerkki 2.

Lumilaudan alkuperäinen hinta on 400 e. Urheiluvälinekaupassa on alennusmyynti ja kaikista tuotteista ostaja saa 20 % alennuksen. Paljonko on lumilaudan alennettu hinta?

Ratkaisu:

$$\left(\frac{100-20}{100}\right) \cdot 400e = 0{,}8 \cdot 400e = 320e$$

Harjoitustehtäviä

56. Kirjakaupan kirjan alkuperäinen myyntihinta oli 39,80 e. Teppo sai kirjan hinnasta henkilökunta-alennusta 20 %. Paljonko Teppo maksoi kirjasta?

57. Aurinkolasien alkuperäinen hinta oli 93 e ja alennettu hinta 69,75 e. Montako prosenttia aurinkolasien hintaa oli alennettu?

58. Asunto-osakeyhtiö nosti asuntojen yhtiövastikkeita 8,5 %. Kuinka suureksi muodostui 64,5 neliömetrin suuruisen asunnon yhtiövastike, kun neliömetriltä oli aiemmin maksettu 2 euroa kuukaudessa? (yo kevät 2000)

1.11. Koronkorko

Esimerkki 1.

Pankkitilin vuotuinen korko on 2 %. Lasketaan, kuinka suureksi 1000 euron talletus kasvaa kahdeksassa vuodessa?

Kyseessä on lisäys prosenttina, joten laskutoimitus suoritetaan, kuten edellisessä kappaleessa opittiin.

Talletus 1. vuoden jälkeen $1{,}02 \cdot 1000e = 1020e$

Talletus 2. vuoden jälkeen $1{,}02 \cdot 1020e = 1020e = 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1000e = 1{,}02^2 \cdot 1000e = 1040{,}4e$

Talletus 3. vuoden jälkeen $1{,}02 \cdot 1040{,}4e = 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1000e = 1{,}02^3 \cdot 1000e \approx 1061{,}21e$

Edellisen perusteella nähdään, että talletus 8. vuoden jälkeen on

$$1{,}02^8 \cdot 1000e \approx 1174{,}66e$$

Pääoma *n* vuoden jälkeen, kun vuotuinen korko on *p* prosenttia ja alkupääoma on *a*:

$$p = (1 + \frac{p}{100})^n \cdot a$$

Esimerkki 2.

Freda jätti Tealle perinnöksi 118 022, 23 euron talletuksen, jotka oli sijoitettu kymmeneksi vuodeksi 12 % vuosikorolla. Paljonko talletuksen arvo oli alun perin?

$$118\,022,23 = (1 + \frac{12}{100})^{10} \cdot a$$

$$118\,022,23 = 1{,}12^{10} \cdot a$$

$$1{,}12^{10} \cdot a = 118\,022,23 \quad | \quad : 1{,}12^{10}$$

$$a = \frac{118\,022,23}{1{,}12^{10}}$$

$$a \approx 38\,000\ e$$

Harjoitustehtäviä

59. Pankkitilin vuotuinen korko on 2 %. Kuinka suureksi 1000 e talletus kasvaa
a) vuodessa
b) kolmessa vuodessa?

60. Monenko vuoden kuluttua 450 euron arvoinen postimerkki on arvoltaan ainakin 900 euroa, jos postimerkin arvo nousee vuosittain 7,5 %?

1.12. Muutos- ja vertailuprosentti sekä prosenttiyksikkö

Muutosprosentti

Kun lasketaan, montako prosenttia jokin on muuttunut (eli kasvanut tai vähentynyt),
- Lasketaan ensin muutoksen suuruus.
- Sitten lasketaan, montako prosenttia muutos on alkuperäisestä arvosta. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Elokuvalipun hintaa korotettiin 5 eurosta 6,5 euroon. Montako prosenttia elokuvalipun hinta nousi?

Hinnan nousu euroina:

$$6{,}5e - 5e = 1{,}5e$$

Hinnan nousu prosentteina:

$$\frac{1{,}5e}{5e} = 0{,}3 = 30\ \%$$

Vastaus: Elokuvalipun hinta nousi 30 %.

Vertailuprosentti

Kun lasketaan, montako prosenttia jokin luku on suurempi tai pienempi kuin jokin toinen luku, niin
- Lasketaan ensin lukujen erotus
- Verrataan erotusta kuin-sanan jälkeiseen lukuun. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 2.

Eveliinan pituus on 156 cm ja Tonin 182 cm. Kuinka monta prosenttia

a) Toni on pidempi kuin Eveliina?

Pituusero senttemetreinä: $182\ cm - 156\ cm = 26\ cm$.

Pituusero prosentteina: $\frac{26\ cm}{156\ cm} \approx 0{,}17 = 17\ \%$.

b) Eveliina on lyhyempi kuin Toni?

Pituusero prosentteina: $\frac{26\ cm}{182\ cm} \approx 0{,}14 = 14\ \%$.

Huom! Vertailuprosentti lasketaan samalla tavalla kuin muutosprosentti, mutta muutosprosentissa verrataan aina siihen arvoon, joka oli ajallisesti ensiksi. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Prosenttiyksikkö

Esimerkki 3.

Ydinvoiman kannatus laski 47 prosentista 34 prosenttiin. Montako

a) prosenttiyksikköä kannatus laski?

$$47 - 34 = 13$$

b) prosenttia kannatus laski?

$$\frac{13}{47} \approx 28\ \%$$

Vastaus: Kannatus laski a) 13 prosenttiyksikköä. b) 28 %.

Harjoitustehtäviä

61. Lentolipun hinta nousi 922 eurosta 1250 euroon, montako
a) euroa lentolipun hinta nousi?
b) prosenttia lentolipun hinta nousi?

62. Montako prosenttia
a) 6 on suurempi kuin 5?
b) 5 on pienempi kuin 6?

63. Taidekauppias osti taulun 420 eurolla. Myydessään sen hän sai siitä 30 euroa vähemmän. Montako prosenttia oli tappio?

64. Puolueen kannatus nousi 9 prosentista 10,5 prosenttiin. Montako
a) prosenttia kannatus nousi?
b) prosenttiyksikköä kannatus nousi?

65. Palkka nousi peräkkäisinä vuosina 5 %, 3,8 % ja 6,1 %.
a) Kuinka suureksi 1250 euron palkka oli kasvanut kaikkien korotusten jälkeen?
b) Montako prosenttiyksikköä korotus oli yhteensä?

66. Maailman pisin ihminen oli Agnus McCaskill, joka oli 236 cm mittainen kuollessaan Kanadassa v. 1863. Puolestaan lyhyin ihminen oli intialainen Gul Mohammed. Vuonna 1990 Gul oli 57 cm pituinen ja painoi 17 kg. Kuinka monta prosenttia
a) Gulin pituus oli Agnuksen pituudesta?
b) Agnus oli Gulia pidempi?
c) Gul oli Agnusta lyhyempi?

67. Tanssiryhmässä oli aluksi 12 tanssijaa. Montako prosenttia tanssijoiden määrä kasvoi tai väheni, kun se kasvoi ensin

a) 100 % ja väheni sitten 25 %?
b) 50 % ja väheni sitten 50 %?
c) 200 % ja väheni sitten 75 %?

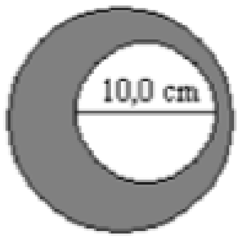
68. Henkilön bruttopalkka nousi 1170 eurosta 1300 euroon ja samalla veroprosentti nousi 25 %:sta 28 %:iin. (Bruttopalkalla tarkoitetaan palkkaa, josta ei ole vähennetty veroja. Nettopalkasta verot on vähennetty.) Montako
a) euroa nettopalkka nousi?
b) prosenttia nettopalkka nousi?

69. Henkilö osti viikon alussa 4,20 markalla litran maitotölkin, josta hän ehti käyttää 8 dl ennen maidon happanemista. Seuraavalla viikolla hän osti kaksi puolen litran maitotölkkiä 2,50 markalla kappale käyttäen kaiken maidon. Kummalla viikolla käytetty maito tuli hänelle edullisemmaksi ja kuinka monta prosenttia? (yo kevät 1995)

70. Parturi- ja kampaamoveromaksut muodostuvat verottomasta hinnasta ja arvonlisäverosta, joka on 22 % palvelun verottomasta hinnasta. Hiusten leikkaus maksoi 23 euroa. Kuinka suuri tämä maksu olisi ollut, jos arvonlisävero olisi ollut 10 prosenttiyksikköä pienempi? (yo syksy 2000)

71. Erääseen oppilaitokseen valittiin oppilaita seuraavasti. Osastolle A valittiin tyttöjä 300 hakijasta 48 ja poikia 20 hakijasta 3 ja osastolle B tyttöjä 20 hakijasta 4 ja poikia 600 hakijasta 114. Osoita, että kummallakin osastolla tyttöjen hyväksymisprosentti oli 1 prosenttiyksikön verran suurempi, mutta että siitä huolimatta koko oppilaitoksessa poikien hyväksymisprosentti oli suurempi kuin tyttöjen. (yo kevät 1995)

72. Laske värjätyn alueen ala, kun pienemmän ympyrän ala on 40,0 % suuremman ympirän alasta.
(pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen 1994)



1.13. Tuntematon perusarvo

Prosenttilaskennassa on oltava tarkkana siitä, mikä on perusarvo, johon prosentuaalinen muutos kohdistuu. Luvun muuttuessa useita kertoja peräkkäin on perusarvona kulloinkin muutoksen kohteena ollut arvo. Joissakin tehtävissä perusarvo ei ole tiedossa, tällöin sitä merkitän jollakin kirjainvakiolla ja laskut suoritetaan muuten tavalliseen tapaan. (Lähde: avoinoppikirja)

Esimerkki 1.

Mistä luvusta 20 % on 37?

Ratkaisu:

Merkitään perusarvoa kirjaimella a ja muodostetaan yhtälö:

$$0{,}2 \cdot a = 37 \quad | \quad : 0{,}2$$

$$a = \frac{37}{0{,}2}$$

$$a = 185$$

Esimerkki 2.

Tietokoneen hintaa alennettiin ensin 10 % ja myöhemmin vielä 15 %. Alennuksen jälkeen tietokone maksoi 1071 euroa. Paljonko tietokone maksoi alun perin?

Ratkaisu:

Merkitään tietokoneen alkuperäistä hintaa x:llä ja muodostetaan yhtälö:

10 % halvempi tuotteen hinta saadaan kertomalla alkuperäinen hinta luvulla 0,9 ja vastaavasti 15 % lisäalennus huomioidaan kertomalla edellinen hinta luvulla 0,85.

$$0{,}85 \cdot 0{,}9 \cdot x = 1071\ e$$

$$0{,}765x = 1071\ e$$

$$x = 1400\ e$$

Vastaus: Tietokoneen hinta oli ennen alennuksia 1400 euroa.

Esimerkki 3.

Lukuun lisätään ensin 25 % ja sitten siitä vähennetään 50 %. Montako prosenttia saatu luku on alkuperäisestä luvusta?

Ratkaisu:

Perusarvoa eli alkuperäistä lukua ei nyt tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella a.

25 % korotus saadaan voimaan kertomalla perusarvo luvulla 1,25 ja 50 % lisävähennys huomioidaan kertomalla muuttunut perusarvo luvulla 0,50.

$$0{,}50 \cdot 1{,}25 \cdot a = 0{,}625a$$

Lasketaan lopuksi, montako prosenttia tämä on alkuperäisestä luvusta.

$$\frac{0{,}625a}{a} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$$

Vastaus: Luku on 62,5 % alkuperäisestä luvusta.

Harjoitustehtäviä

73. Mistä luvusta
a) 28 on 100 %?
b) 8 on 2 %?

74. Kuinka suuri on tontin kokonaispinta-ala, kun 32 % siitä on niittyä ja loput 4,5 hehtaaria on metsää?

75. Tuotteen hinta laski 8 %, minkä jälkeen hinta oli 1150 e. Mikä oli tuotteen hinta ennen alennusta?

76. Puhelimen hinta nousi ensin 5 % ja sitten vielä 10 %. Montako prosenttia hinta nousi kaikkiaan?

77. Suomen EU-äänestyksessä annettiin KYLLÄ-ääniä 57 % ja EI-ääniä 43 % äänestysprosentin ollessa 71 %. Kuinka monta prosenttia KYLLÄ-äänien määrästä oli äänioikeutettujen määrästä? (yo kevät 1996)

78. Kirjan myyntihinta saadaan lisäämällä kirjan perushintaan 12 % arvonlisävero. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 22,30 euroa, perushintaa alennettiin 4,20 eurolla. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta? (yo syksy 1995)

79. Autoilija ajoi ajassa 2 h 40 min matkamittarinsa mukaan 205 km. Matkamittari näytti 5 % todellista matkaa suurempaa lukemaa. Mikä oli autoilijan keskinopeus? (yo syksy 1995)

80. Eräällä laivalinjalla matkustajamäärä väheni 23 % edellisvuodesta. Kuinka monta prosenttia matkustajamäärän pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin entiseen määrään? (yo kevät 1995)

81. Tuotteen myyntihinta laski 8 %. Myyntipalkkio, joka oli 25 % myyntihinnasta, nostettiin samalla 31 %:iin uudesta myyntihinnasta. Nousiko vai laskiko myyntipalkkio? (yo syksy 1997)

82. Vuonna 1995 erään pesujauheen markkinaosuus oli 15 %. Vuonna 1996 tämän pesuaineen myynti kasvoi 20 % ja pesujauheiden kokonaismyynti kasvoi 10 %. Mikä oli kyseessä olevan pesujauheen markkinaosuus vuonna 1996? (yo syksy 1998)

2. Algebra

Sana algebra juontaa juurensa arabiankielisestä sanasta ’al-jabr’. Persialainen matemaatikko Al-Khowarizm, jonka nimestä johtuu sana algoritmi, käytti kirjassansa 800-luvulla kyseistä sanaa al-jabr. Kyseinen kirja käsitteli erityisesti polynomiyhtälöitä ja niiden ratkaisemista, jonka vuoksi tällainen yhtälöihin liittyvä algoritmimaisuus liitetään helposti algebraan. Algebraa, kuten myös lukuteoriaa sekä geometriaa, on kuitenkin esiintynyt läpi matematiikan historian jo huomattavasti aiemminkin, jo muinaisen Babylonian (n. 2 000 eaa.) aikoihin.

Nykypäivänä algebra voidaan historiansa mukaan jakaa kolmeen eri kategoriaan: klassinen, moderni sekä abstrakti algebra. Klassinen algebra kulkee käsi kädessä koulumatematiikan kanssa, sillä sen voidaan katsoa käsittelevän reaali- ja kompleksilukujen (Kompleksiluvut ovat reaaliluvuista seuraava lukualue, joita esimerkiksi sähköinsinöörit käyttävät työssään päivittäin.) yhtälöitä, joihin liitetään perinteiset laskutoimitukset kuten summa ja tulo. Kuten nimitys reaalilukukin kertoo, reaalisten yhtälöiden (eli siis yhtälö, missä ratkaistava muuttuja on reaaliluku) hyödyntäminen reaalimaailman ongelmissa on merkittävä ja jokainen yksilö törmää näihin varmasti päivittäin, vaikkei sitä tiedostaisikaan. Esimerkiksi päivittäisestä bussilla matkustamisesta ja mukana olevasta bussikortin saldosta voinee muodostaa ensimmäisen asteen polynomiyhtälön, josta voidaan ratkaista, kuinka monta reissua kortissa on vielä jäljellä, jos tiedetään kortin saldo sekä yksittäisen reissun hinta. Ilmiöihin, joiden välistä yhteyttä matematiikkaan on hankalampi löytää, liittyy mahdollisesti hieman peruskoulun ylittävää matematiikkaa, mutta mitä enemmän oppii sen paremmin rakentuu ymmärrys miksi juuri kyseinen matematiikan rakenne/työkalu on olemassa.

2.1. Potenssimerkintä

Potenssi on kertolaskun lyhennetty merkitsemistapa silloin, kun samaa lukua kerrotaan itsellään useamman kerran. Merkinnässä x^n

- x on kantaluku eli tulon tekijä
- n on eksponentti eli tekijöiden lukumäärä. (Lähde: luntti.net)

Eksponentti vaikuttaa ainoastaan siihen lukuun, jonka oikeaan yläkulmaan se on kirjoitettu. Jos vaikutusaluetta halutaan laajentaa, on käytettävä sulkeita. Potenssissa $(-2)^4$ on kantalukuna -2, jolloin $(-2)^4 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{4\,kpl} = 16$. Jos potenssimerkinnästä jätetään sulkeet pois ja merkitään -2^4, on potenssin kantalukuna 2, jolloin $-2^4 = -(2^4) - \left(\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{4\,kpl}\right) = -(16) = -16.$

Kantaluku on merkittävä sulkeisiin, jos

- tulon tekijä on negatiivinen
- tulon tekijänä on summa, erotus, tulo, osamäärä tai potenssi.

Potenssin merkkisääntö:

Jos potenssin x^n kantaluku x on negatiivinen ja eksponentti n on

- parillinen, potenssin arvo on positiivinen
- pariton, potenssin arvo on negatiivinen. (Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1. Laske

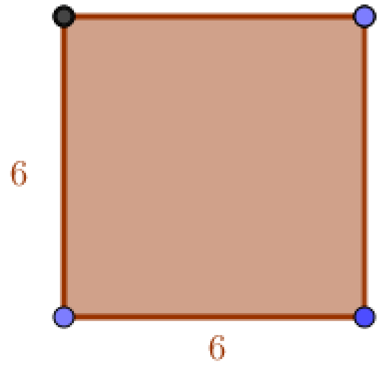
a) $(-3)^2 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{2\ kpl} = 9$ parillinen määrä kerrottavia

b) $(-2)^3 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{3\ kpl} = -8$ pariton määrä kerrottavia

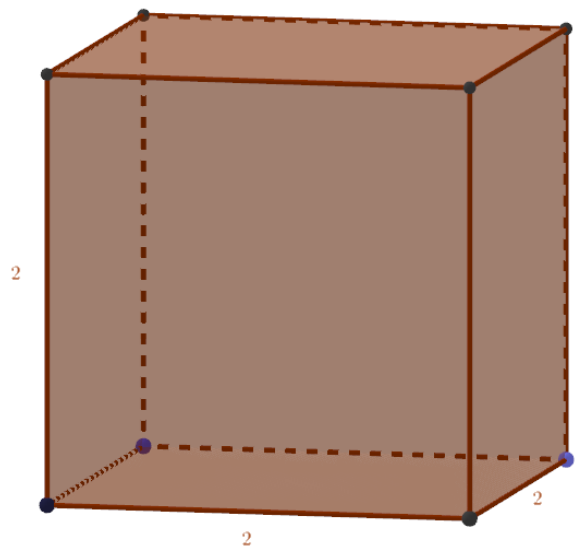
c) $-5^2 = -(5^2) = -(\underbrace{5 \cdot 5}_{2\ kpl}) = -25$ kyseessä ei ole negatiivisen luvun potenssi

Esimerkki 2. Laske

a) neliön, jonka sivun pituus on 6 pinta-ala.



b) kuution, jonka särmän pituus on 2 tilavuus.



Ratkaisu:

a) Neliön pinta-ala saadaan kannan ja korkeuden tulona, joka voidaan ilmaista potenssin avulla:

$$A = 6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

b) Kuution tilavuus saadaan pohjan (neliö) pinta-alan ja korkeuden tulona, joka voidaan ilmaista potenssin avulla:

$$V = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Huom! Luvun toista potenssia sanotaan luvun neliöksi. Luvun kolmatta potenssia taas luvun kuutioksi.

Harjoitustehtäviä

83. Merkitse tulot potenssimerkintää käyttäen
a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $-10 \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$
c) a · a · a

84. Merkitse potenssit tuloiksi
a) 100^1
b) b^3
c) 4^a, missä $a = 5$

85. Tosi vai epätosi? Perustele.
a) $-6^2 = 36$
b) $5^1 = 1$
c) $(-3)^2 = 9$

86. Ympyröi potenssimerkintöjen kantaluvut
a) $(-3)^2$
b) -2^4
c) a^9

87. Laske
a) $(-2)^5$
b) -3^2
c) $(-1)^{2018}$
d) $(-1)^{2019}$

88. Kirjoita potenssimuodossa, ei tarvitse sieventää.
a) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
c) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
d) $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{7}$
e) $(1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x)$

89. Merkitse potenssiksi ja laske luvun -5
a) neliö
b) kuutio.

90. Laske
a) $8^2 - 7^2$
b) $4^2 - 3^2$

c) $6^2 - 5^2$

d) Mitä havaitset? Miten voit laskea ilman laskinta $1000^2 - 999^2$

91. Mitkä kaksi luonnollista lukua on kyseessä?
1. vihje: Luvut ovat pienempiä kuin 10.
2. vihje: Lukujen erotus on 1.
3. vihje: Suurempi luku voidaan kirjoittaa muodossa joku luku potenssiin 2.
4. vihje: Pienempi luku voidaan kirjoittaa muodossa joku luku potenssiin 3.

92. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle.

a) $7^x = 49$

b) $10^x = 10\,000$

c) $x^2 = 64$

d) $2^x = 8$

2.2. Samankantaisten potenssien tulo

Tulossa $4^2 \cdot 4^3$ on molempien potenssien kantaluku sama. Merkintää kutsutaankin *samankantaisten potenssien tuloksi*.

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2\ kpl} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4)}_{3\ kpl} = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$$

Samankantaiset potenssit kerrotaan keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen. Kantaluku pysyy samana.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a) $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$
b) $x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6$
c) $a^3 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^6 = a^{3+2} \cdot b^{1+6} = a^5 b^7$

Ainoastaan samankantaiset potenssit voidaan merkitä yhdellä potenssilla.

d) $3a^4 \cdot (-2a^3) = 3 \cdot (-2) \cdot a^4 \cdot a^3 = -6a^{4+3} = -6a^7$

Harjoitustehtäviä

93. Merkitse ja sievennä potenssien tulo.
a) $6x^3$ ja x^2
b) $3x^2$ ja $4x$
c) x^4 ja $5x^4$

94. Sievennä.
a) $6 \cdot x \cdot 4 \cdot x$
b) $2 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot (-4)$

95. Sievennä.
a) $2a^6b^4 \cdot 5a^2b^6$
b) $x^7y^9 \cdot xy$

2.3. Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponenttina

Osamäärää $\frac{4^5}{4^2}$ kutsutaan *samankantaisten potenssien osamääräksi.*

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{\overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}^{5\ kpl}}{\underbrace{4 \cdot 4}_{2\ kpl}} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^{5-2} = 4^3 = 64$$

Samankantaiset potenssit jaetaan keskenään siten että osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti. Kantaluku pysyy samana.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssi.

a) $\frac{(-4)^7}{(-4)^5} = (-4)^{7-5} = (-4)^2 = 16$

b) $\frac{y^7}{y^3} = y^4$

c) $\frac{a^3 \cdot a^4 \cdot a^6}{a^2 \cdot a^5} = \frac{a^{3+4+6}}{a^{2+5}} = \frac{a^{13}}{a^7} = a^{13-7} = a^6$

Esimerkki 2.

Sievennetään potenssit.

a) $\frac{3x^4}{x} = 3x^{4-1} = 3x^3$

b) $\frac{-3^8}{3^5} = -3^{8-5} = -3^3 = -27$

c) $\frac{6a^4b^2}{3ab} = \frac{6}{3}a^{4-1}b^{2-1} = 2a^3b^1 = 2a^3b$

Tarkastellaan seuraavaksi jakolaskua $\frac{4^3}{4^3}$ kahdella eri tavalla. Sievennetään lauseke samankantaisten potenssien osamäärän avulla.

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 \text{ ja } \frac{4^3}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 1$$

Koska molemmat toimenpiteet ovat sallittuja, on lopputuloksien oltava yhtä suuret eli $4^0 = 1$.

Jos eksponenttina on nolla, on potenssin arvo aina 1. Kantalukuna ei kuitenkaan saa olla nolla, sillä nollalla ei saa jakaa.

$$a^0 = 1, \text{ kun } a \neq 0.$$

Esimerkki 3.

Sievennetään potenssit.

a) $99^0 = 1$
b) $-45^0 = -1$
c) $(-9274)^0 = 1$
d) 0^0 ei ole määritelty

Harjoitustehtäviä

96.Laske.
a) $5 \cdot 3^0$
b) $(\frac{10}{5})^0$
c) $0^4 \cdot 4^0$

97.Laske.
a) $\frac{2^9}{2^7}$
b) $\frac{9^8}{9^9}$
c) $-\frac{7^3}{7^5}$
d) $\frac{(-5)^4}{5^5}$

98.Laske.
a) 5^0
b) $(-17)^0$
c) -6^0
d) $x^0 + y^0 + z^0$, missä $x, y, z \neq 0$
e) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^0$, missä $a \neq 0$

99.Merkitse ja sievennä potenssien $6x^3$ ja x^2
a) tulo
b) osamäärä.

100. Laske $\frac{(-3)^{2019}}{(-3)^{2017}}$

101. Sievennä.

a) $\frac{b^2 \cdot b^4}{b^3}$

b) $\frac{c \cdot c^3 \cdot c^5}{c \cdot c^2}$

102.Sievennä.

a) $\frac{3x^2}{7x \cdot x}$

b) $\frac{x^4 \cdot y}{2x^2 \cdot 3x^2}$

103.Sievennä.

a) $\frac{15a^8b^7}{5a^3b}$

b) $\frac{4a^5b^{11}c^9}{32a^4b^6c^2}$

2.4. Potenssin potenssi

Merkinnällä $(3^2)^4$ tarkoitetaan *potenssin potenssia*. Eksponenttina on luku 4 ja kantalukuna on sulkeiden sisältö eli 3^2. Käsitellään kantalukuna olevaa potenssia samoin kuin yksittäistä lukuakin. Potenssimerkintä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(3^2)^4 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{4\,kpl} = 3^{2+2+2+2} = 3^{4\cdot 2} = 3^8$$

Kyseessä on ennestään tuttu samankantaisten potenssien tulo.

Potenssi korotetaan potenssiin siten, että eksponentit kerrotaan keskenään. Kantaluku pysyy samana.

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

(Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a) $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$
b) $16(a^2)^2 = 16 \cdot a^{2\cdot 2} = 16a^4$

c) $2^{3^2} = 2^9 = 512$ Kyseessä ei ole potenssin potenssi, vaan eksponentin potenssiin korotus!

Esimerkki 2.

Mihin potenssiin luku 3 on korotettava, jotta vastaus olisi yhtä suuri kuin luku 9^5? Eli ratkaise yhtälö $3^x = 9^5$.

Ratkaisu:

Potenssin 9^5 kantalukuna on 9, joka saadaan luvun kolme potenssina seuraavasti: $3^2 = 9$. Sijoittamalla tämä yhdeksikön paikalle ja sieventämällä saadaan: $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$.

Vastaus: Luku 3 on korotettava potenssiin 10.

Harjoitustehtäviä

104.Sievennä.
a) $(10^2)^3$
b) $(y^4)^2$
c) $(100^{99})^0$
d) $(1^4)^2$
e) $(5^2)^{\frac{1}{2}}$

105.Sievennä.
a) $(k^4)^{10}$
b) $x^3(x^4)^6$
c) $(\frac{t^{14}}{t^5})^{11}$

106.Ilmoita luvut kahden potensseina (esim. $4^3 = 2^{jotain}$).
a) 4^3
b) 8^7
c) 16^{16}

107.Luvut 27 ja 81 ovat luvun kolme potensseja eli $3^3 = 27$ ja $3^4 = 81$. Anna tehtävien vastaukset luvun 3 potensseina.
a) $27 \cdot 81$
b) 27^2
c) $27 \cdot 81^3$
d) $\dfrac{81^5}{27^3}$

108.Sievennä.

$$\frac{6a(b^4)^2}{4(b^2)^3} \cdot \frac{2(a^2)^3}{3b^2(a^2)^2}$$

2.5. Negatiivinen eksponentti

Esimerkki 1.

1) Supistamalla saadaan

$$\frac{4^3}{4^5}=\frac{4\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}=\frac{1\cdot 1\cdot 1}{4\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=\frac{1}{4^2}$$

2) Toisaalta osamäärän potenssin laskusäännöllä saadaan

$$\frac{4^3}{4^5}=4^{3-5}=4^{-2}$$

Merkitsemällä nämä yhtäsuuriksi saadaan

$$\frac{4^3}{4^5}=\frac{4^3}{4^5}$$

$$4^{-2}=\frac{1}{4^2}$$

Potenssin *negatiivinen eksponentti* tarkoittaa kantaluvun käänteisluvun vastaavaa positiivista potenssia.

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, kun\ a\neq 0$$

Esimerkki 2.

a) $4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$

b) $\frac{3^2}{3^4}=3^{2-4}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

Esimerkki 3.

Kirjoitetaan negatiivisen eksponentin avulla.

a) $\frac{1}{7}=7^{-1}$

b) $\frac{5x}{y^2}=5x\cdot\frac{1}{y^2}=5xy^{-2}$

c) $\frac{1}{2a^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^4}=\frac{1}{2}a^{-4}$

Harjoitustehtäviä

109. Mitkä laatikon lausekkeista on lausekkeen x^{-2} kanssa yhtä suuret, kun $x \neq 0$.

$$\boxed{-\frac{x}{2}, -x^2, -2x, -\frac{2}{x}, \frac{1}{x^2}, -\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{x^2}}$$

110. Sievennä yhdeksi murtoluvuksi.
a) $3^{-1} + 4^{-1}$
b) $5^{-1} \cdot 3^{-2}$

111. Tosi vai epätosi? Jos epätosi, niin miksi?
a) $(3^2)^3 < (3^3)^2$
b) $(9^5)^0 > (9^4)^{-1}$
c) $(2^3)^4 = (4^4)^2$

112.Laske $3^0 - 3^{-2}$. (yo kevät 1975)

2.6. Tulon potenssi

Jos potenssin kantalukuna on tulo $(4 \cdot 3)^2$, on kyseessä *tulon potenssi*, joka voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä noudattaen $(4 \cdot 3)^2 = (12)^2 = 144$. Tulon potenssilla on olemassa myös laskusääntönsä, jolla päädytään samaan lopputulokseen.

$$(4 \cdot 3)^2 = \underbrace{(4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3)}_{2\ kpl} = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

Tulon potenssi on tekijöiden tulo $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

(Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

Sievennetään potenssit.

a) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
b) $(5a^3b)^2 = 5^2 \cdot a^6 \cdot b^2 = 25a^6b^2$

Esimerkki 2.

Merkitään yhtenä potenssina.

a) $2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$
b) $16x^2y^2 = 4^2x^2y^2 = (4xy)^2$

Harjoitustehtäviä

113. Sievennä
a) $(-4a)^2$
b) $(3a)^5$
c) $(-10)^3$
d) $(10x^3y^4)^2$.

114. Merkitse yhtenä potenssina
a) $3^2 \cdot 5^2$
b) $4^5 \cdot 25^5$.

115. Sievennä

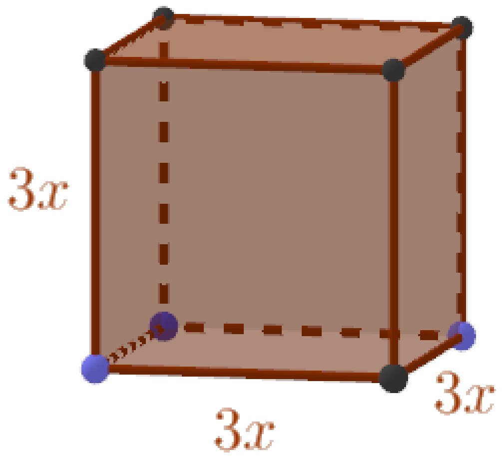
$$(x^4y)^2 \cdot (x^2y^3)^4.$$

116. Sievennä

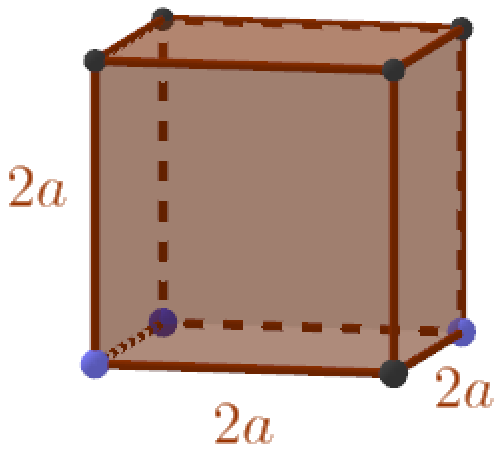
$$\frac{(a^7b^5)^2}{(a^4b^2)^3}.$$

117.Muodosta ja sievennä kuutioiden tilavuuksien lausekkeet

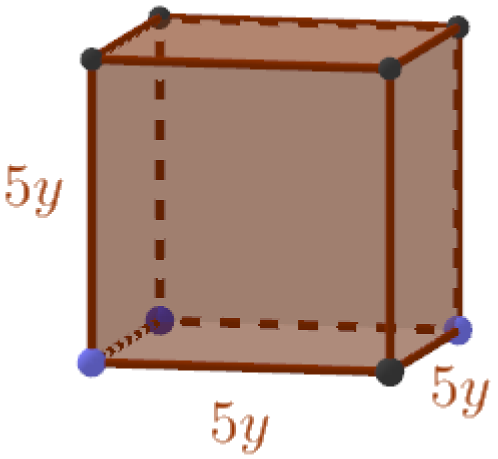
a)



b)



c)



118.Sievennä

$$\frac{(3a^4b^3)^2}{(a^2b^3)^3} \cdot \frac{(a^2b^2)^3}{9(a^2\mathrm{b})^2}.$$

2.7. Osamäärän potenssi

Jos potenssin kantalukuna on osamäärä $(\frac{12}{3})^2$, kutsutaan merkintää *osamäärän potenssiksi*. Potenssin arvo voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä käyttäen $(\frac{12}{3})^2 = (4)^2 = 16$ tai korottamalla ensin sekä osoittaja että nimittäjä toiseen potenssiin.

$$(\frac{12}{3})^2 = \underbrace{\frac{12}{3} \cdot \frac{12}{3}}_{2\ kpl} = \frac{12 \cdot 12}{3 \cdot 3} = \frac{12^2}{3^2} = \frac{144}{9} = 16$$

Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

(Lähde: avoinoppikirja.fi)

Esimerkki 1.

a) $\left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{6^2} = \frac{x^2}{36}$

b) $\left(\frac{2a^3a^2}{bb^5}\right)^4 = \left(\frac{2a^{3+2}}{b^{1+5}}\right)^4 = \left(\frac{2a^5}{b^6}\right)^4 = \frac{(2a^5)^4}{(b^6)^4} = \frac{2^4a^{5\cdot4}}{b^{6\cdot4}} = \frac{16a^{20}}{b^{24}}$

Esimerkki 2.

Lasketaan lausekkeet sieventämällä ensin yhdeksi potenssiksi

$$\frac{16^3}{8^3} = \left(\frac{16}{8}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Harjoitustehtäviä

119.Sievennä

a) $\left(\frac{2x}{5}\right)^2$

b) $\left(\frac{-3x}{4}\right)^2$

120.Muodosta ja sievennä lukujen $5m^3n^4$ ja $5m^2n$ osamäärän neliö.

121.Sievennä

a) $\frac{(-1)^4}{(-1)^{21}}$

b) $\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^6}$

122.Sievennä

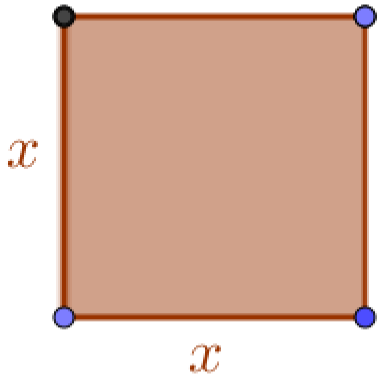
a) $\frac{8^3}{2^6}$

b) $\frac{7^{15}}{49^8 * 7}$

123.Sievennä, ilmoita vastaus ilman negatiivista potenssia.

$$(\frac{2a^4}{3b})^{-2}$$

2.8. Neliöjuuri



Esimerkki 1.

a) Olkoon neliön pinta-ala $A = 9$. Mikä on neliön sivun pituus?
b) Olkoon neliönmuotoisen lattian pinta-ala $A = 16m^2$. Mikä on lattian sivun pituus?

Ratkaisu:

a)

Neliön pinta-ala saadaan sivun neliönä, eli nyt tulee pohtia sitä, että mikä luku x toteuttaa yhtälön $x^2 = 9$.

Tiedämme, että $3^2 = 9$ ja toisaalta $(-3)^2 = 9$. Siispä $\boldsymbol{x = 3}$ tai $x = -3$. Kuitenkin, sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku, joten vain $x = 3$ kelpaa nyt yhtälön ratkaisuksi.

Vastaus: Sivun pituus on 3.

b)

Vastaavasti kuin edellä, mutta nyt otamme myös yksiköt huomioon vastauksessa. Mikä luku toteuttaa yhtälön $x^2 = 16m^2$. Tiedämme, että $(4m)^2 = 16m^2$ ja toisaalta $(-4m)^2 = 16$, joten $x = 4m$ tai $x = -4\ m$. Negatiivinen sivun pituus ei kelpaa, joten

Vastaus: Sivun pituus on 4 $\boldsymbol{m}$.

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö

a) $x^2 = 9$
b) $x^2 = 16$
c) $x^2 = -4$

Ratkaisu:

a) $\boldsymbol{x = 3}$ **tai** $\boldsymbol{x = -3}$, sillä $3^2 = 9$ tai $(-3)^2 = 9$.
b) $\boldsymbol{x = 4}$ **tai** $\boldsymbol{x = -4}$, sillä $4^2 = (-4)^2 = 16$.
c) **Ei ratkaisua,** sillä luvun x eksponentti on nyt parillinen luku 2. Tiedämme, että reaaliluku korotettuna parilliseen potenssiin on positiivinen reaaliluku.

Neliöjuuri vastaa kysymykseen, mikä luku x täytyy korottaa neliöön (toiseen potenssiin), jotta se olisi luku positiivinen luku a. Eli yhtälön $a = x^2$ ratkaisu, missä emme huomioi negatiivista ratkaisua.

$$\sqrt{a} = x, missä$$
$$1)\ a \geq 0$$
$$2)\ x \geq 0$$

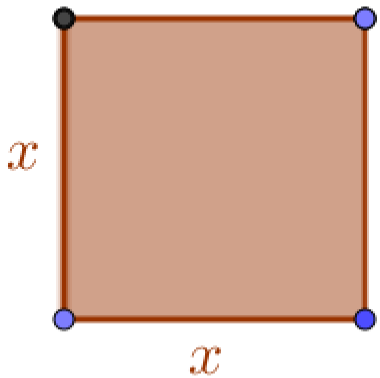
1) Miksi $a \geq 0$?

   Tiedämme, ettei minkään luvun x parillinen potenssi voi olla negatiivinen luku, kuten esimerkin 2. c)-kohdassa huomasimme.

2) Miksi $x \geq 0$? Eli miksi emme hyväksy myös negatiivista ratkaisua?

   Voisimme siis määritellä, että esimerkiksi $\sqrt{9} = 3$ tai $\sqrt{9} = -3$, sillä $3^2 = (-3)^2 = 9$. Kuitenkin, neliöjuuren (reaaliluvuilla) määritelmässä on tehty **valinta**, että **neliöjuuri on vain ja ainoastaan positiivinen** ratkaisu. Tämä **valinta** on tehty siksi, että neliöjuuri olisi yksikäsitteinen, eli voidaan sanoa yksikäsitteisesti, että $\sqrt{9} = 3$.

!Huom! Vaikka neliöjuuri onkin yksikäsitteinen, niin esimerkiksi yhtälön $x^2 = 9$ ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, vaan $x = \sqrt{9} = 3$ tai $x = -\sqrt{9} = 3$.



Esimerkki 3. Neliön pinta-ala on $15m^2$. Mikä on neliön sivun pituus?

Ratkaisu:

$$x = \sqrt{15} = 3{,}872983 \approx 3{,}9 \text{ (m)}$$

Vastaus: Neliön sivun pituus on noin $3{,}9\ m$.

1) Tulon neliöjuurelle pätee $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2) Osamäärän neliöjuurelle pätee $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, missä $b \neq 0$. Sillä

1) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$
2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$

!Huom! $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, sillä esimerkiksi $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mutta $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Esimerkki 4. Sievennä

a) $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
c) $\sqrt{8}\sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

Harjoitustehtäviä

124. Onko väite tosi? Jos ei niin miksi?
 a) $\sqrt{10} = 5$
 b) $\sqrt{49} = -7$
 c) $\sqrt{36} = 6$
 d) $\sqrt{18} = 9$

125. Laske
 a) $\sqrt{1}$
 b) $\sqrt{0}$
 c) $\sqrt{121}$

126. Omakotitalon tontti on neliön muotoinen ja sen pinta-ala on $1600\ m^2$. Paljonko aitaa tarvitaan tontin aitaamiseen, kun tuloaukoksi jätetään $3\ m$?

127. Arvioi ilman laskinta, mitä kokonaislukua lähinnä on
 a) $\sqrt{26}$
 b) $\sqrt{48}$
 c) $\sqrt{80}$

128. Mikä luku on juurrettava, kun neliöjuuren arvo on
 a) Yhtä suuri kuin juurrettava,
 b) Puolet juurrettavasta
 c) Kolminkertainen juurrettavaan verrattuna?

129. Laske ja ilmoita vastaus murtolukuna
 a) $\sqrt{\frac{9}{25}}$
 b) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

130. Laske
 a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
 b) $\sqrt{9 + 16}$

131. Laske
 a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16}$
 b) $\sqrt{4 \cdot 16}$

132. Laske
 a) $\sqrt{2 + \sqrt{4}}$
 b) $\sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{81} - 5}$

133. Laske lausekkeen $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ arvo ilman laskinta, kun a = 1, b = 2 ja c = 8.

134.Laske lausekkeen $\sqrt{a^2 + b^2}$ tarkka arvo, kun a $=$ 2 ja b $= \frac{8}{3}$. (yo kevät 1984)

135.Laske lausekkeen $\sqrt{1 - a^2}$ tarkka arvo, kun

a) $a = \frac{1}{2}$

b) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(yo syksy 1987)

136. Minkä positiivisen luvun neliöjuuri on luku $\sqrt{5} - 2$? Anna vastaus sekä tarkkana arvona, että likiarvona kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. (yo syksy 1994)

2.9. Polynomi

Ennen kuin siirrymme polynomeihin, on hyvä tiedostaa reaalilukujen laskulait (ns. reaalilukujen kunta-aksioomat), jotka mahdollistavat oikeaoppisen sieventämisen.

Yhteenlaskun vaihdantalaki:

$$\boldsymbol{a+b=b+a}$$

Yhteenlaskun liitäntälaki:

$$\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c}$$

Toisin sanoen **yhteenlaskun laskujärjestyksellä ei ole väliä** eli voimme laskea reaalilukuja yhteen haluamassamme järjestyksessä. Esimerkiksi $1+2+3=3+2+1=6$.

Vastaavat laskulait pätevät myös kertolaskulle.

Kertolaskun vaihdantalaki:

$$\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$$

Kertolaskun liitäntälaki:

$$\boldsymbol{a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot b\cdot c},$$

Voimme siis suorittaa reaalilukujen välillä **kertolaskut haluamassamme järjestyksessä**. Esimerkiksi $2\cdot4\cdot7=8\cdot7=7\cdot8=56$ ja toisaalta $2\cdot4\cdot7=2\cdot28=28\cdot2=56$.

Usein laskulausekkeessa on kuitenkin sekä yhteen- että kertolaskuja samanaikaisesti.

Yhteen- ja kertolaskun osittelulait:

$$\boldsymbol{a\cdot(b+c)=ab+ac}$$
$$\boldsymbol{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c}$$

Kertoimen ja muuttujaosan tuloa sanotaan termiksi, esimerkiksi termissä $-10x^2$ kerroin on -10 ja muuttujaosa on x^2.

Polynomi on **lauseke**, mikä muodostuu **termien** yhteenlaskusta. Polynomin muuttujien eksponenttien täytyy olla **positiivisia kokonaislukuja.** Jos muuttujia on vain yksi, niin polynomin **asteluku** määräytyy sen muuttujan mukaan, jolla on suurin eksponentti. Jos termejä on kolme tai vähemmän, niin tällöin polynomia voidaan kutsua **monomiksi** (1)**, binomiksi** (2) tai **trinomiksi** (3).

Esimerkki 1.

a) Polynomin $2x^{13} - 4x^{11} + 5x + 11$ **asteluku** on **13**.
b) $-7x^2$ on **toisen asteen** monomi.
c) $7y + 3x = 7y^1 + 3x^1$ on **ensimmäisen asteen** binomi.
d) $4x^6 + 17y^2 + 5 = 4x^6 + 17y^2 + 5$ on **kuudennen asteen** trinomi.
e) $7 = x^0$ on **nollannen asteen** polynomi. $(x \neq 0)$

Polynomien yhteenlasku

Polynomin termejä kutsutaan **samanmuotoisiksi**, jos niiden muuttujaosat ovat samat. Samanmuotoisten termien välillä voidaan suorittaa yhteenlasku (sekä vähennyslasku), joka edesauttaa polynomin sieventämisessä. Yleensä polynomin termit järjestetään asteluvultaan suurimmasta pienimpään.

Esimerkki 2. Laske polynomien $2x^2 - 3x + 3$ ja $-5x + 1$ välinen

a) summa.
b) erotus.

Ratkaisu:

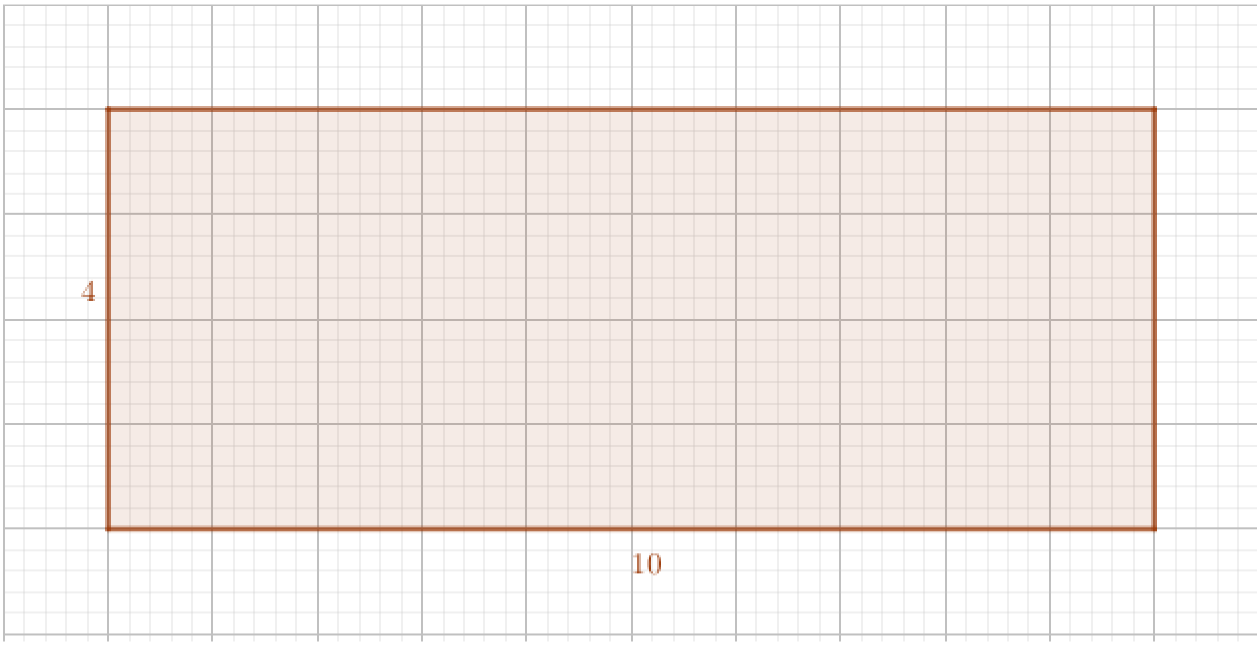
a) $2x^2 - 3x + 3 + (-5x + 1) = 2x^2 - 3x + 3 - 5x + 1$ | Poistetaan sulut
$= 2x^2 - 3x - 5x + 3 + 1$ | Samanmuotoiset termit peräkkäin
$= 2x^2 + (-3 - 5)x + 4$ | *) Lasketaan kerroinosat yhteen
$= 2x^2 - 8x + 4$

*) Kyseessä on tosiaankin yhteenlasku, sillä voimme ajatella kahden luvun välisen vähennyslaskun vastaavan yhteenlaskua, jossa ensimmäiseen lukuun lisätään toisen luvun vastaluku:
$-3 \cdot x - 5 \cdot x = -3 \cdot x + (-5) \cdot x = \big(-3 + (-5)\big) \cdot x = -8x.$

b) $2x^2 - 3x + 3 \boldsymbol{- (-5x + 1)} = 2x^2 - 3x + 3 + 5x - 1$
$= 2x^2 - 3x + 5x + 3 - 1$
$= 2x^2 + (-3 + 5)x + 3 - 1$
$= 2x^2 + 2x + 2$

Huom! Nyt sulkeita poistettaessa sulkujen edessä oli miinusmerkki, jolloin sulkujen sisällä olevien termien etumerkit vaihtuvat vastakkaismerkkisiksi.

Esimerkki 3. Laske suorakulmion



a) pinta-ala
b) piiri

Ratkaisu:

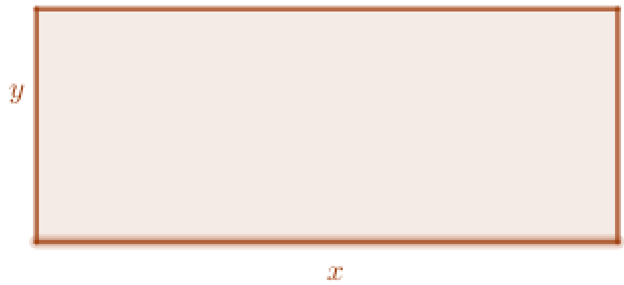
a) Merkitään pinta-alan lauseketta kirjaimella $\boldsymbol{A}$ (englanniksi ***A***rea). Koska suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, niin

$$A = 4 \cdot 10 = 40.$$

b) Suorakulmion piiri on sen sivujen pituuksien summa. Koska kyseessä on suorakulmio, niin sen vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret. Merkitään piirin lauseketta kirjaimella $\boldsymbol{p}$, jolloin

$$p = 4 + 10 + 4 + 10 = 28.$$

Esimerkki 4. Laske suorakulmion



a) pinta-ala
b) piiri

Ratkaisu:

a) Merkitään pinta-alan lauseketta kirjaimella A. Koska suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, niin

$$\boldsymbol{A = xy.}$$

b) Suorakulmion piiri on sen sivujen pituuksien summa. Koska kyseessä on suorakulmio, niin sen vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret. Merkitään piirin lauseketta kirjaimella p, jolloin

$$\boldsymbol{p} = x + y + x + y = x + x + y + y = \boldsymbol{2x + 2y.}$$

Muodostimme siis kaavat suorakulmion pinta-alalle ja piirille, joiden avulla voimme laskea vaivattomasti eri kokoisten suorakulmioiden pinta-aloja ja piirejä! Esimerkiksi, jos suorakulmion leveys $x = 20$ ja korkeus $y = 300$, niin pinta-ala $A(x, y) = A(20{,}300) = 20 \cdot 300 = 6000$ ja piiri $p(x, y) = p(20{,}300) = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 300 = 640$.

Polynomien kertolasku (eli tulo)

- Monomien välisessä kertolaskussa (**monomi** · **monomi**) kertoimet kerrotaan keskenään ja muuttujaosat keskenään. Esimerkiksi
  $2a \cdot 3a^2 = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 = 6 \cdot a^{1+2} = 6a^3$.
- **Monomi** · **binomi** voidaan sieventää yhteen- ja kertolaskun osittelulain avulla. Esimerkiksi.
  $4(2a + 3) = 4 \cdot 2a + 4 \cdot 3 = 8a + 12$.
- **Binomi** · **binomi** voidaan sieventää vastaavasti yhteen- ja kertolaskun osittelulain avulla, mutta lakia joudutaan käyttämään nyt useamman kerran. Esimerkiksi
  $$\begin{aligned}(a + 3)(a - 2) &= a \cdot (a - 2) + 3 \cdot (a - 2)\\ &= a \cdot a + a \cdot (-2) + 3 \cdot a + 3 \cdot (-2)\\ &= a^2 - 2a + 3a - 6\\ &= a^2 + a - 6\end{aligned}$$

Esimerkki 5. Sievennä $(3a-5)(2a^2-a+4)$.

Ratkaisu:

$(3a-5)(2a^2-a+4)$
$= 3a \cdot (2a^2-a+4) - 5 \cdot (2a^2-a+4)$ *
$= 3a \cdot 2a^2 + 3a \cdot (-a) + 3a \cdot 4 - 5 \cdot 2a^2 - 5 \cdot (-a) - 5 \cdot 4$
$= 6a^3 - 3a^2 + 12a - 10a^2 + 5a - 20$ **
$= 6a^3 - 3a^2 - 10a^2 + 12a + 5a - 20$
$= 6a^3 - 13a^2 + 17a - 20$

*) Tämä välivaihe ei ole välttämätön. Se on tässä sen vuoksi, että sieventämisessä käytettävän yhteen- ja kertolaskun osittelulaki ilmenee selvemmin.
**) Yhteenlaskun vaihdantalaki eli voidaan vaihtaa laskujärjestystä kokoamalla samanmuotoiset termit peräkkäin.

Esimerkki 6. Sievennä $(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+4)$.

Ratkaisu:

$(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+4)$
$= \big(x \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-2)\big) \cdot (x+4)$ *
$= (x^2 - 2x + x - 2) \cdot (x+4)$
$= (x^2 - x - 2) \cdot (x+4)$
$= x^2 \cdot (x+4) - x \cdot (x+4) - 2 \cdot (x+4)$
$= x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 2x - 8$
$= x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ **

*) Muista kirjoittaa kertolaskun $(x+1) \cdot (x-2)$ tulos sulkeiden sisälle!
**) Vastaavaan lopputulokseen olisimme päätyneet myös sillä, että olisimme laskeneet ensin oikean puoleisen tulon sulkeiden sisällä eli $(x+1) \cdot \big(x \cdot (x+4) - 2 \cdot (x+4)\big)$ ja sieventäneet tämän loppuun.

Harjoitustehtäviä

137.Sievennä polynomit asteluvun mukaisesti (suurimmasta pienimpään).

a) $2x + x^2 + 1$
b) $5y + 2 + 3y^2 + 4y^6$
c) $-3 + 3y^2 + x^2$
d) $-5x^3 + 4y^5 + 7 + 2x^9 + 133$

138. Laske funktion $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ arvo, kun

a) $x = 1$
b) $x = -1$
c) $x = 2$
d) $x = -3$.

139. Sievennä.

a) $x \cdot 5 \cdot x \cdot 4$
b) $y \cdot 2 \cdot x \cdot (-2)$
c) $-4 \cdot (-b) \cdot (-2) \cdot (-a) \cdot (-a)$
d) $\frac{4}{5}x\frac{5}{4}y \cdot 2z$

140. Avaa sulkeet.

a) 8(a +b)
b) –2(a –b)
c) 5(–3a – 4b)
d) – 2(–6a +5b)

141.Laske binomien $7a - 1$ ja $-2a + 3$

a) summa.
b) erotus.

142.Sievennä.

a) $a(a + 3)$
b) $3a(5 + 4a)$
c) $6a(a - 6)$
d) $(a^2 - a)a$

143.Sievennä.

a) $(x + 1)(x + 3)$
b) $(n - 1)(n + 2)$
c) $(2 - 2y)(3y - 4)$
d) $(a + b)(x - a)$

144.Sievennä.

a) $(x + 5)(2x^2 - 3x + 4)$
b) $(3a^2 - a + 6)(a - 2)$
c) $(a + 4)2a(3a - 1)$

145.Sievennä.

a) $(a + b)^2$
b) $(a - b)^2$
c) $(a + b)(a - b)$

Eli johda ns. **binomikaavat**.

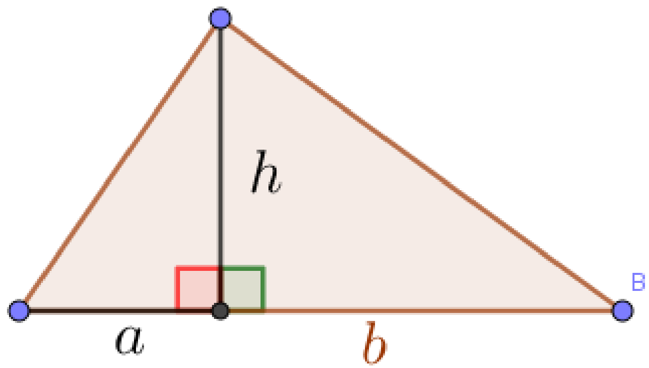
146.Tehtävässä 90. tutkimme luvun neliön ja lukua yhden verran pienemmän luvun neliön välistä erotusta. Johda yleinen lauseke erotukselle-

Vihje: Merkitään ensimmäinen luku $x + 1$, jolloin yhden verran pienempi luku on x. Tämän jälkeen voidaan sieventää lauseke

$$(x + 1)^2 - x^2,$$

jonka lopputuloksena saadaan tehtävässä 90. havaittu tulos siten, että se pätee kaikilla luvuilla $x + 1$ ja x.

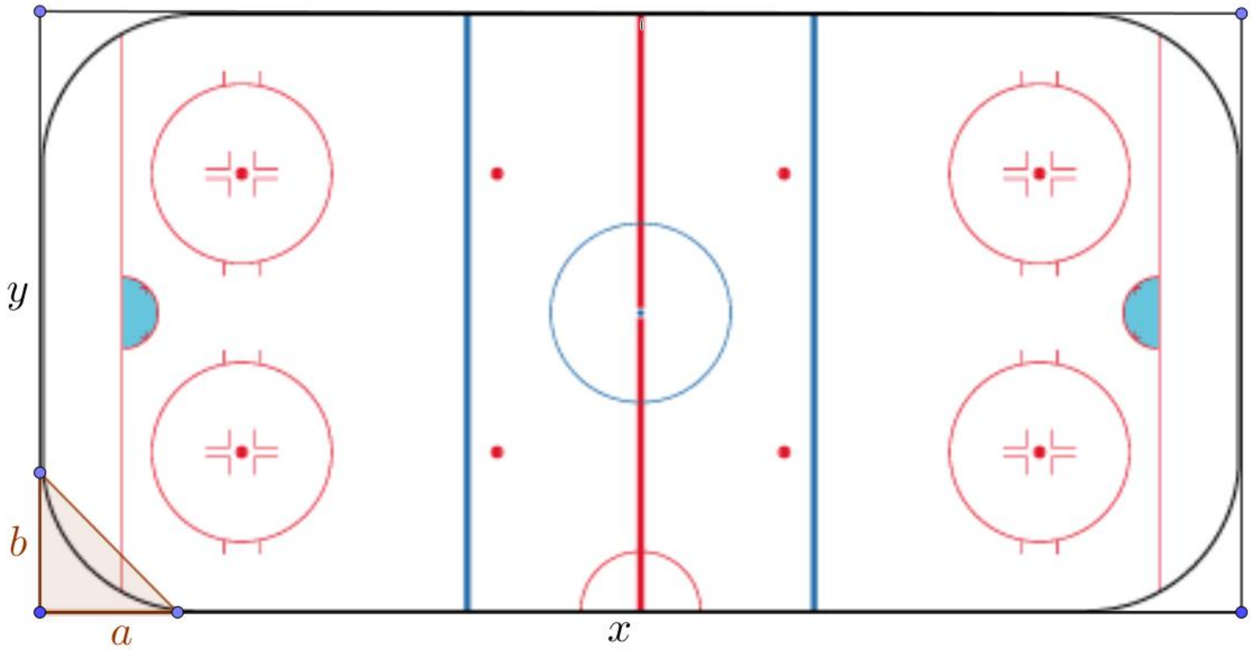
147. Olkoon teräväkulmainen kolmio kuvan merkinnöin.



Osoita, että kyseisen teräväkulmaisen kolmion pinta-ala $A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

Vihje: Tiedämme, että suorakulmaisen kolmion pinta-alalle pätee $A_{sk} = \frac{kanta\cdot korkeus}{2}$. Muodosta kuvassa olevan kahden pienemmän suorakulmaisen kolmion pinta-alan lausekkeet A_1 ja A_2. Laske nämä lausekkeet yhteen ja sievennä.

148.Jääkiekkokaukalon pinta-alasta saa melko hyvän arvion, kun arvioi sen olevan suorakulmio. Vielä paremman arvion saa siten, että arvioi kaukalon ulkopuolelle jäävän pinta-ala osuuksien muodostuvan kolmioista ja vähentää suorakulmion pinta-alasta.



a) Muodosta jääkiekkokaukalon pinta-alan funktio $A_S(x, y)$, kun oletetaan jääkiekkokaukalon olevan suorakulmio.
b) Muodosta ylimenevän osuuden (kaikki kolmiot!) pinta-ala funktio $A_K(a, b)$.
c) Muodosta kaukalon pinta-alan funktio $A(x, y, a, b)$, kun otamme huomioon nämä ylimenevät osuudet.
d) Laske Hakametsän kaukalon pinta-ala A. Hakametsän kentän sivujen pituudet ovat $60\ m$ ja $28m$. Lisäksi, kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden sivujen pituudet ovat $6\ m$.

Pascalin kolmion avulla voidaan määrittää binomikaavat myös korkeampiasteisille polynomeille.

KERTOIMET	KORKEIMMAN ASTEEN TERMIN ASTELUKU
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5

Esimerkiksi:

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$\begin{aligned}(2a-3b)^5 &= \big(2a+(-3b)\big)^5 \\ &= 1(2a)^5 + 5(2a)^4(-3b) + 10(2a)^3(-3b)^2 + 10(2a)^2(-3b)^3 \\ &\quad + 5(2a)^1(-3b)^4 + 1(-3b)^5 \\ &= 32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5\end{aligned}$$

- Pascalin kolmiosta luetaan ensin mihin eksponenttiin binomilauseke korotetaan, ylin taso vastaa eksponenttia 0 ja kasvaa aina yhdellä mentäessä kolmiota alaspäin.

- Tämän jälkeen termien kertoimet voidaan lukea suoraan kolmiosta ja muuttujaosien eksponentit pienenevät tai kasvavat yhdellä riippuen kummasta termistä on kyse.

149.Hyödynnä Pascalin kolmiota ja sievennä seuraavat binomien eksponentit

a) $(x+2)^5$

b) $(2x-7)^3$

2.10. Ensimmäisen asteen polynomiyhtälöt ja yhtälöparit

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $3x + 1 = x - 2$.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
3x + 1 &= x - 2 && | - x \\
3x + 1 - x &= x - 2 - x && \\
3x - x + 1 &= x - x - 2 && \\
2x + 1 &= -2 && | - 1 \\
2x + 1 - 1 &= -2 - 1 && \\
2x &= -3 && |: 2 \\
\boldsymbol{x} &= -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} &&
\end{aligned}
$$

Yhtälöä ratkaistaessa haluamme päätyä lopputulokseen, missä yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on ratkaistava muuttuja, jonka kerroin on 1 ja toisella puolella loput termit.

1) Halusimme yhtälön muuttujat yhtälön vasemmalle puolelle. Vähensimme yhtälöstä puolittain x, sillä $x - x = 0$, eli toisin sanoen $-x$ on yhtälön oikealla puolella olevan termin x vastaluku.
2) Halusimme yhtälön vakiot yhtälön oikealle puolelle. Vähensimme yhtälöstä puolittain luvun 1 vastaluvun -1, sillä $1 - 1 = 0$.
3) Yhtälöä ratkaistaessa halusimme tietää, mitä ratkaistavissa oleva muuttuja $x = 1 \cdot x$ on. Jaoimme yhtälön puolittain luvulla 2, sillä $2 : 2 = 1$. Tässä olisi voinut myös vaihtoehtoisesti kertoa puolittain luvun 2 käänteisluvulla $\frac{1}{2}$, sillä $\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Yhtälöparit

Esimerkki 2. Määritä suorien $y_1 = 3x + 1$ ja $y_2 = x - 2$ leikkauspisteen koordinaatit.

Ratkaisu:

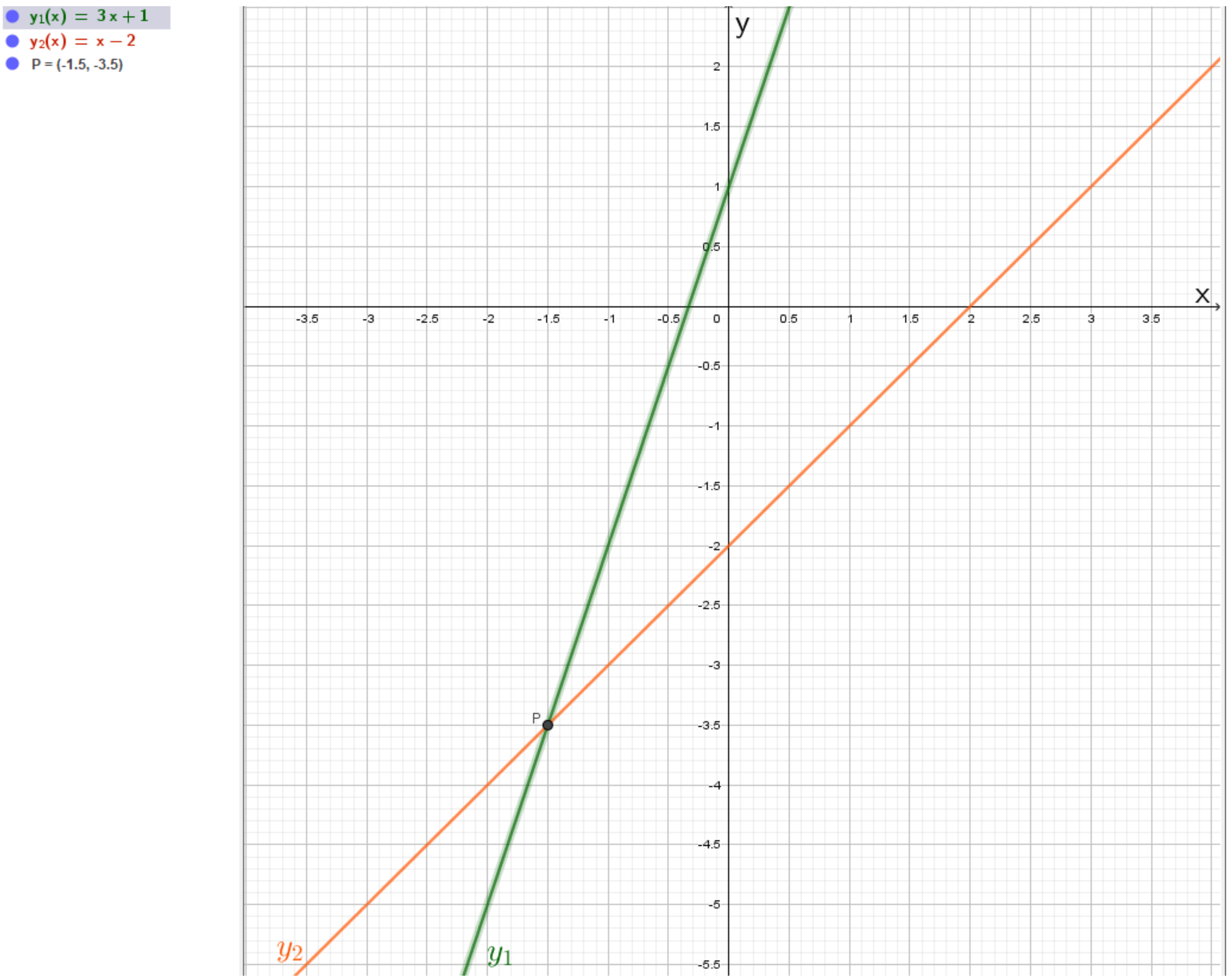
Edellisessä esimerkissä ratkaisimme yhtälön $3x + 1 = x - 2$ eli yhtälön $y_1 = y_2$, minkä ratkaisuna saimme leikkauspisteen x-koordinaatin $\boldsymbol{x = -\frac{3}{2}}$. Koska suorat y_1 ja y_2 leikkaavat toisensa, saamme leikkauspisteen y-koordinaatin sijoittamalla tämän kumpaan tahansa suoran funktioista.

$$\boldsymbol{y_1}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -\frac{3 \cdot 3}{2} +^{2)} 1 = -\frac{9}{2} + \frac{2}{2} = \frac{-9+2}{2} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$

tai

$$\boldsymbol{y_2}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) = -\frac{3}{2} -^{2)} 2 = -\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \frac{-3-4}{2} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$

Vastaus: Suorien $\boldsymbol{y_1}$ ja $\boldsymbol{y_2}$ leikkauspisteen koordinaatit ovat $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.
Tuloksen voi vielä tarkistaa graafisesti piirtämällä ko. suorat koordinaatistoon.



Esimerkki 3. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden summa on 27 ja erotus 3?

Ratkaisu:

Nimetään ensiksi muuttujat $x =$'Ensimmäinen', $y =$'Toinen luku'. Tämän jälkeen voidaan muodostaa kaksi yhtälöä tehtävänannon tietoihin nojautuen: $x + y = 27$ ja $x - y = 3$.

Tapa 1: Sijoitusmenetelmä

Ratkaistaan molemmat yhtälöt ensin muuttujan y suhteen:

$$\begin{aligned} x + y &= 27 && |-x \\ y &= 27 - x \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x - y &= 3 && |-x \\ -y &= 3 - x && |\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(-y) &= (-1)\cdot(3 - x) \\ y &= -3 + x \end{aligned}$$

Ratkaisujen täytyy olla yhtä suuret, jotta olisi olemassa tosiaankin kaksi lukua, jotka toteuttavat molemmat tehtävänannon yhtälöt:

$$\begin{aligned} y &= y \\ 27 - x &= -3 + x && |-x \\ 27 - 2x &= -3 && |-27 \\ -2x &= -30 && |:(-2) \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

Ratkaistaan y sijoittamalla $x = 15$ toiseen yhtälöön $y = -3 + x$

$$\begin{aligned} y &= -3 + 15 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{12} \end{aligned}$$

Voidaan vielä tarkistaa, ettei ole sattunut laskuvirheitä sijoittamalla $x = 15$ ensimmäiseen yhtälöön $27 - x$:

$$\begin{aligned} y &= 27 - 15 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{12} \end{aligned}$$

Vastaus: Luvut 15 ja 12.

Tapa 2: Eliminointimenetelmä

Muodostetaan yhtälöpari tehtävänannon yhtälöistä, joiden molempien täytyy toteutua samoilla muuttujien x ja y arvoilla:

$$+\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$x + x + y - y = 27 + 3$$

$$2x = 30 \qquad |:2$$

$$\boldsymbol{x = 15}$$

Ratkaistaan y, sijoittamalla $x = 15$ yhtälöryhmän yhtälöön $x - y = 3$:

$$15 - y = 3 \qquad | - 15$$

$$-y = 3 - 15$$

$$-y = -12 \qquad | \cdot (-1)$$

$$(-1)(-y) = (-1)(-12)$$

$$\boldsymbol{y = 12}$$

Tarkistetaan vielä sijoittamalla $x = 15$ toiseen yhtälöön $x + y = 27$:

$$15 + y = 27 \qquad |{-15}$$

$$y = 27 - 15$$

$$\boldsymbol{y = 12}$$

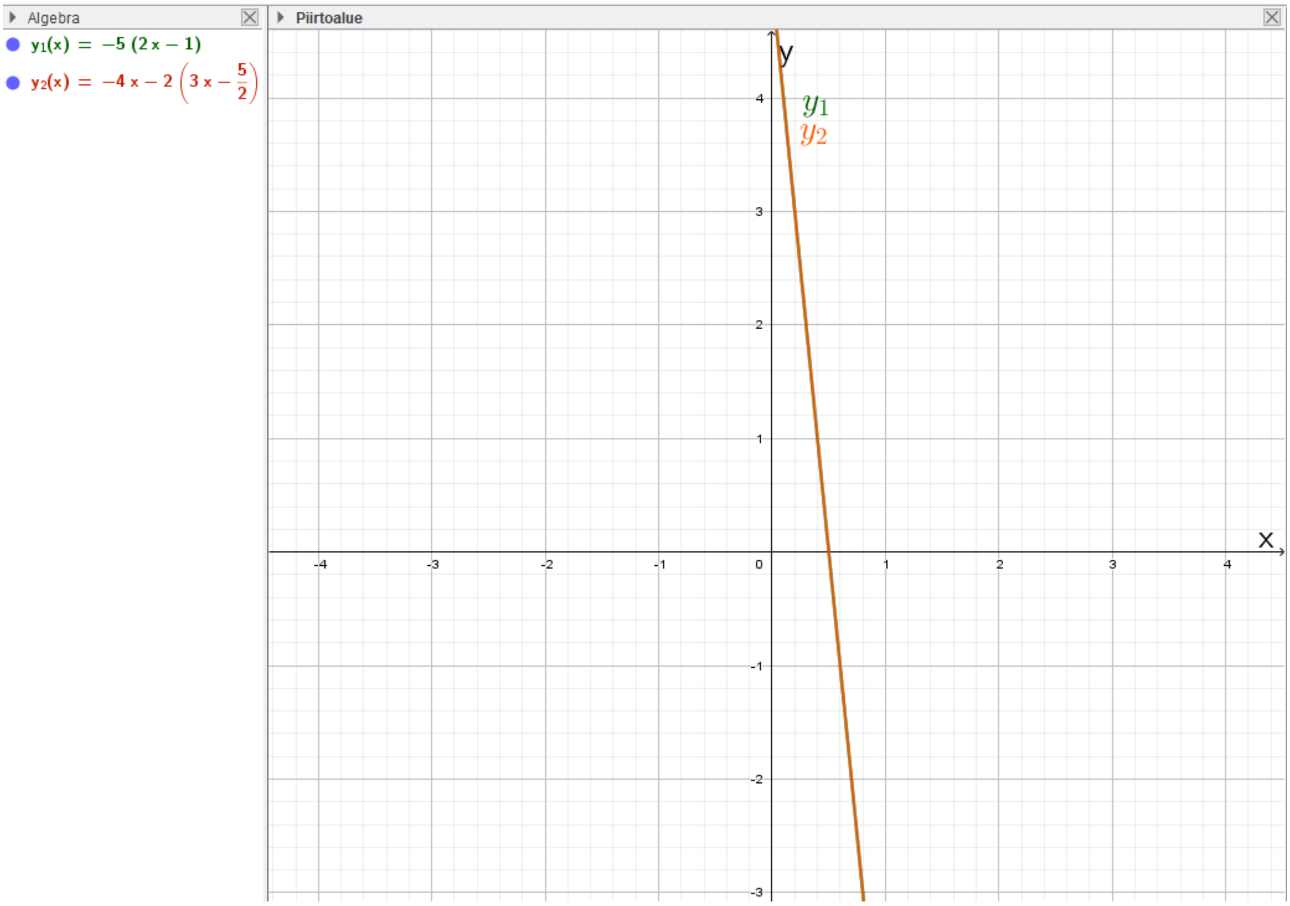
Vastaus: Luvut 15 ja 12.

Esimerkki 4. Ratkaise yhtälö $-5(2x-1) = -4x - 2\left(3x - \frac{5}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
-5(2x-1) &= -4x - 2\left(3x - \frac{5}{2}\right) \\
-5 \cdot 2x - 5 \cdot (-1) &= -4x - 2 \cdot 3x - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \\
-10x + 5 &= -4x - 6x + 5 \\
-10x + 5 &= -10x + 5 && |+10x \\
5 &= 5 && |-5 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Huomaamme yhtälön olevan identtisesti tosi eli toisin sanoen $0 = 0$ riippumatta muuttujan x arvosta.
Vastaus: Yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.

Graafisesti tulkittuna tämä tarkoittaa sitä, että **yhdensuuntaiset** (eli sama kulmakerroin -10) suorat $y_1 = -5(2x-1) = -10x + 5$ ja $y_2 = -4x - 2\left(3x - \frac{5}{2}\right) = -10x + 5$ ovat samat ja täten sivuavat toisensa äärettömän monessa pisteessä.



Esimerkki 5. Ratkaise yhtälö $4x - \frac{2-3x}{3} = 5x$.

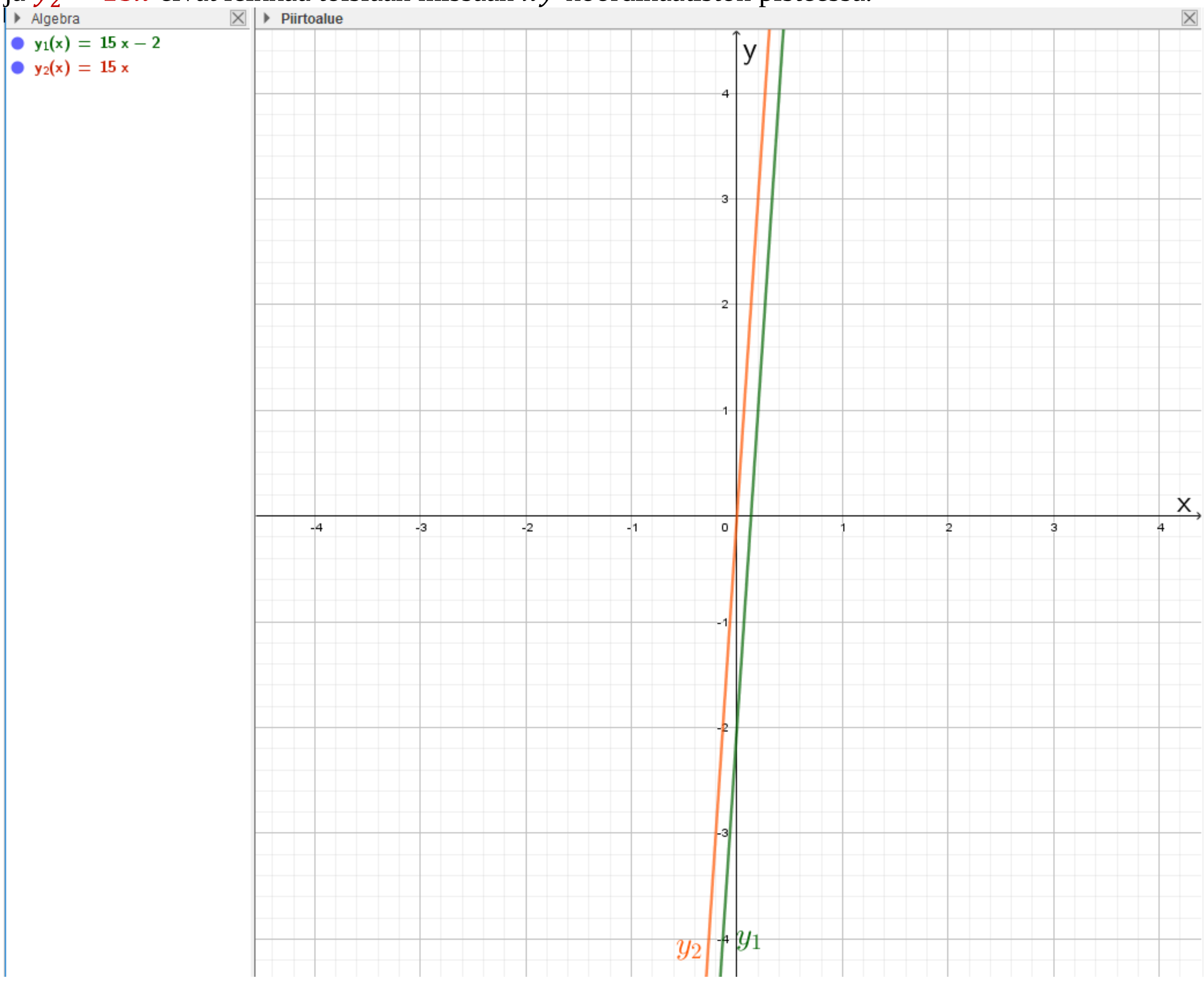
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 4x - \frac{2-3x}{3} &= 5x && | \cdot 3 \\ 3 \cdot 4x + 3 \cdot \left(-\frac{2-3x}{3}\right) &= 3 \cdot 5x \\ 12x - (2-3x) &= 15x \\ 12x - 2 + 3x &= 15x \\ 15x - 2 &= 15x && | -15x \\ \mathbf{-2} &\mathbf{= 0} \end{aligned}$$

Yhtälö $-2 = 0$ on identtisesti epätosi, eli yhtälöllä ei ole ratkaisua, valittiinpa muuttujan x arvo miten tahansa.

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Graafisesti tulkittuna tämä tarkoittaa sitä, että **yhdensuuntaiset** suorat $y_1 = 4x - \frac{2-3x}{3} = 15x - 2$ ja $y_2 = 15x$ eivät leikkaa toisiaan missään xy-koordinaatiston pisteessä.



Harjoitustehtäviä

150.Ratkaise yhtälö

a) $2x + 1 = 3$

b) $5x + 2 = 12$

151.Ratkaise yhtälö

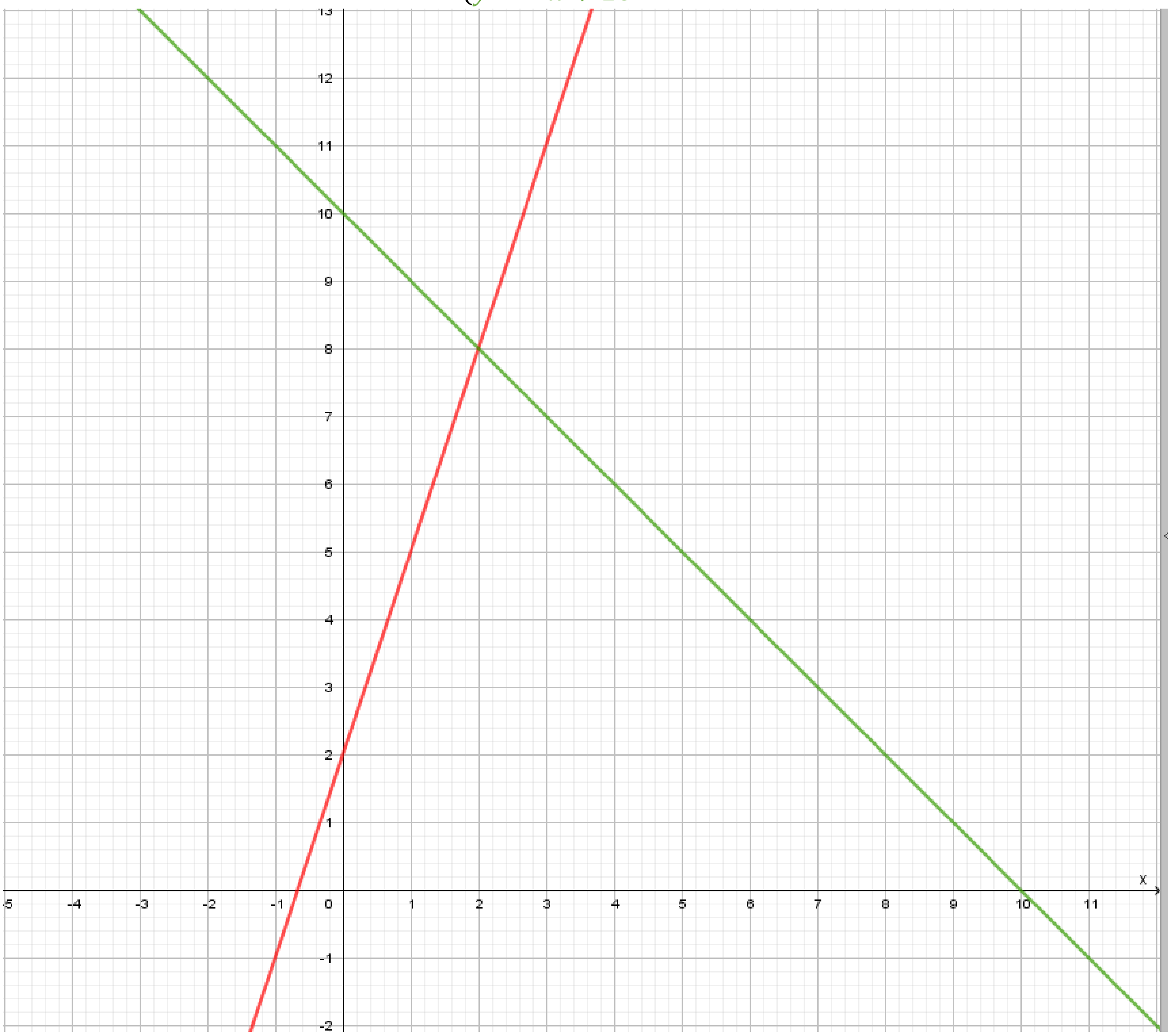
a) $2x + 1 = 3$

b) $5x + 2 = 12$

152.Tutki, toteuttavatko lukuparit yhtälöparin $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

a) $x = 0$ ja $y = 1$ b) $x = 1$ ja $y = -2$ c) $(x, y) = (-2{,}4)$

153. Ratkaise kuvan perusteella yhtälöpari $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x + 10 \end{cases}$.



154.Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$.

155.Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = x - 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$.

156.Määritä suorien $y = x + 1$ ja $-x - 1$ leikkauspisteen koordinaatit

157.Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$.

158.Onko suorilla $y = 2x + 1$ ja $4x - 2y - 6 = 0$ yhteisiä koordinaatteja?

159.Kioskissa myydään irtokarkkeja 20 karkin ja 50 karkin pusseissa. Pieni pussi maksaa 1,50 € ja isompi pussi 3,50 €. Päivän päätteeksi laskettiin, että pusseja oli myyty 39 kpl ja rahaa oli saatu 92,50 €. Kuinka monta karkkia myytiin?

160.Jänis haastaa kilpikonnan juoksukilpailuun ja antaa reiluna kaverina kilpikonnalle 10,2 km etumatkaa. Lähtölaukaus kajahtaa, ja kilpikonna viipottaa koko ajan tasaisella vauhdilla 15 m/min. Jänis ajaa takaa vauhdilla 85 m/min. Milloin jänis saa kilpikonnan kiinni?

161.**Yhtälöryhmäksi** kutsutaan ryhmää, jossa tarkasteltavia yhtälöitä on enemmän kuin kaksi. Vastaavasti kuin yhtälöparinkin tapauksessa, tulee yhtälöryhmän kohdalla varmistaa, että yksittäisen yhtälön toteuttava ratkaisu toteuttaa kaikki ryhmän yhtälöt.

a) Ratkaise yhtälöryhmä algebrallisesti $\begin{cases} y + x = 5 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y + 4 = 2x \end{cases}$

b) Ratkaise yhtälöryhmä graafisesti

162. Ratkaise kolmen muuttujan yhtälöryhmä $\begin{cases} -x + y + 2z = -5 \\ 2x - y - z = 3 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$.

Vihje: $\begin{cases} -x + y + 2z = -5 & 1.\, yhtälö \\ 2x - y - z = 3 & 2.\, yhtälö \\ 3x + 2y + z = 4 & 3.\, yhtälö \end{cases}$

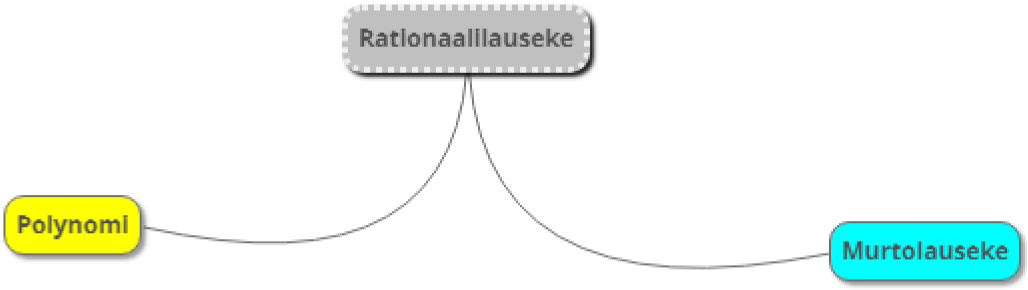
- Ratkaistaan $3.\, yhtälöstä$ z, eli sievennetään z vasemmalle ja muut termit yhtälön oikealle puolelle.

- Tämän jälkeen sijoitetaan ratkaistu z $1.\, yhtäl$öön, jolloin saamme kahden muuttujan yhtälöparin, josta voimme ratkaista x:n ja y:n.

- Kyseisten x:n ja y:n arvojen tulee nyt toteuttaa myös $3.\, yhtälö$, joten sijoittamalla nämä arvot $3.\, yhtäl$öön saamme lopulta myös $z{:}\,n$ ratkaistua.

- Tuloksen voi vielä tarkistaa sijoittamalla ratkaistut x, y ja z jokaiseen yhtälöryhmän yhtälöön ja toteamalla, että yhtälöistä tulee identtisesti todet!

2.11. Rationaalilausekkeet



Olkoon polynomit P ja Q. Tällöin lauseke

$$\frac{P}{Q}$$

on **rationaalilauseke**. Lisäksi $\boldsymbol{Q \neq 0}$, sillä nollalla jakoa ei ole määritetty reaaliluvuilla $\mathbb{R}$.

Jos rationaalilauseketta ei voida sieventää **polynomiksi**, niin tällöin kyseessä on **murtolauseke**.

Esimerkki 1. Onko kyseessä oleva rationaalilauseke murtolauseke vai polynomi?

a) $\frac{x+1}{x+1}$ b) $\frac{x+1}{x-1}$ c) $\frac{2x+2}{x+1}$ d) x e) $\frac{x^2-1}{x+1}$

Ratkaisu:

a) $\frac{x+1}{x+1} = 1$, sillä $\frac{\text{Luku}}{\text{Luku}} = 1.$ Koska $\frac{x+1}{x+1}$ sievenee (nollannen asteen) polynomiksi, niin kyseessä on **polynomi.**

b) Lauseke $\frac{x+1}{x-1}$ ei sievene polynomiksi, joten **se on murtolauseke**. *

c) $\frac{2x+2}{x+1} = \frac{2 \cdot x + 2 \cdot 1}{x+1} = \frac{2 \cdot (x+1)}{x+1} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2,$ joka on **polynomi**.

d) x on **polynomi**.

e) $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{1 \cdot (x-1)}{1} = x - 1,$ joka on **polynomi.**

***)** Tämän perusteleminen, ettei lauseke $\frac{x+1}{x-1}$ sievene polynomiksi on jo itsessään yliopistasoinen tehtävä. Tämän vuoksi meille riittää tässä yhteydessä vain todeta se, että koska kyseinen lauseke ei sievene polynomiksi, niin se on murtolauseke.

Esimerkki 2. Milloin rationaalilauseke $\frac{x+1}{x+1}$ on määritelty?

Ratkaisu:

Rationaalilauseke on määritelty silloin, kun sen nimittäjä **ei** saa arvoa 0. Ratkaistaan nimittäjän $x+1$ nollakohta, eli toisin sanoen selvitetään, millä muuttujan x arvolla nimittäjä saa arvon 0:

$$x+1=0 \mid -1$$
$$x+1-1=0-1$$
$$x=-1$$

Siispä rationaalilausekkeen nimittäjä saa arvon 0, kun $x=-1$.

Vastaus: $x \neq -1$. (Lue:” x on eri suuri kuin -1”)

Huom! Kuten esimerkin 1 kohdassa a) huomasimme, rationaalilauseke $\frac{x+1}{x+1} = 1$. Eli käytännössä katsoen luku 1 vastaa edellä mainittua lauseketta. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa silloin, kun $x=-1$. Matemaattisemmin tämän voisi merkitä seuraavasti: $\boldsymbol{\frac{x+1}{x+1} = 1}$**, kun** $\boldsymbol{x \neq -1}$**.**

Murtolausekkeiden laskusäännöt (A, B, C ja D ovat polynomeja)

Yhteen- ja vähennyslasku) Vastaavasti kuin murtoluvuilla, murtolausekkeet tulee sieventää samannimisiksi ennen kuin voidaan suorittaa yhteen- tai vähennyslasku. Helpoiten tämä onnistuu, kun lavennetaan summattavat luvut toistensa nimittäjällä.

$$\frac{^{D)}A}{B}+\frac{^{B)}C}{D}=\frac{DA}{DB}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD}{BD}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD+BC}{BD}$$

$$\frac{^{D)}A}{B}-\frac{^{B)}C}{D}=\frac{DA}{DB}-\frac{BC}{BD}=\frac{AD}{BD}+\frac{-BC}{BD}=\frac{AD-BC}{BD}$$

Kertolasku) Kahden murtolausekkeen välinen kertolasku voidaan suorittaa kertomalla osoittajat ja nimittäjät keskenänsä.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

Jakolasku) Luvun jakaminen toisella luvulla vastaa luvun kertomista tämän toisen luvun käänteisluvulla. Vastaavasti murtolausekkeen jakaminen toisella murtolausekkeella vastaa murtolausekkeen kertomista tämän toisen murtolausekkeen käänteismurtolausekkeella.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

Esimerkki 3. Sievennä

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ b) $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}$ c) $\frac{x}{4}\cdot\frac{5}{y}$ d) $\frac{5x}{3}:\frac{3x}{4}$

Ratkaisu:

a) $^{5)}\frac{2}{3}+{}^{3)}\frac{1}{5}=\frac{5\cdot 2}{5\cdot 3}+\frac{3\cdot 1}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$

b) $^{5)}\frac{x}{2}-{}^{2)}\frac{y}{5}=\frac{5\cdot x}{5\cdot 2}-\frac{2\cdot y}{2\cdot 5}=\frac{5x}{10}-\frac{2y}{10}=\frac{5x-2y}{10}$

c) $\frac{x}{4}\cdot\frac{8}{y}=\frac{x\cdot 8}{4\cdot y}=\frac{8x}{4y}=\frac{8}{4}\cdot\frac{x}{y}=2\cdot\frac{x}{y}=\frac{2x}{y}$ *

d) $\frac{5x}{3}:\frac{3x}{4}=\frac{5x}{3}\cdot\frac{4}{3x}=\frac{5x\cdot 4}{3\cdot 3x}=\frac{20x}{9x}=\frac{20}{9}\cdot\frac{x}{x}=\frac{20}{9}\cdot 1=\frac{20}{9}$

***)** Polynomin ja murtolausekkeen välisessä kertolaskussa **vain ja ainoastaan** murtoluvun **osoittaja** kerrotaan kyseisellä kokonaisluvulla! Tämän voi todentaa kyseessä olevan laskutoimituksen kohdalla perustella seuraavasti: $2\cdot\frac{x}{y}=\frac{2}{1}\cdot\frac{x}{y}=\frac{2\cdot x}{1\cdot y}=\frac{2x}{y}$.

Esimerkki 4. Sievennä

a) $\frac{5x+1}{x-1}+\frac{x+3}{x-1}$ b) $\frac{2a-1}{a+2}-\frac{a}{b}$

Ratkaisu:

a) $\frac{5x+1}{x-1}+\frac{x+3}{x-1}=\frac{5x+1+x+3}{x-1}=\frac{5x+x+1+3}{x-1}=\frac{6x+4}{x-1}$

b) $^{b)}\frac{2a-1}{a+2}-{}^{a+2)}\frac{a}{b}=\frac{b\cdot(2a-1)}{b\cdot(a+2)}-\frac{(a+2)\cdot a}{(a+2)\cdot b}$

$$=\frac{b\cdot 2a+b\cdot(-1)}{b\cdot a+b\cdot 2}-\frac{a\cdot a+2\cdot a}{a\cdot b+2\cdot b}$$

$$=\frac{2ab-b}{ab+2b}-\frac{a^2+2a}{ab+2ab}=\frac{2ab-b-(a^2+2a)}{ab+2b}$$

$$= \frac{2ab - b - a^2 - 2a}{ab + 2b} = \frac{-a^2 + 2ab - 2a - b}{ab + 2b}$$

Esimerkki 5. Sievennä

a) $\frac{5x+2}{2y} \cdot \frac{a+2}{b-1}$ b) $\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2}$ *

Ratkaisu:

$$\text{a)}\ \frac{5x+2}{2y} \cdot \frac{a+2}{b-1} = \frac{(5x+2)\cdot(a+2)}{2y\cdot(b-1)} = \frac{5x\cdot a+5x\cdot 2+2\cdot a+2\cdot 2}{2y\cdot b+2y\cdot(-1)} = \frac{5ax+10x+2+4}{2by-2y}$$

$$= \frac{5ax+10x+6}{2by-2y}$$

$$\text{b)}\ \frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2} = \frac{2x+1}{y+1} \cdot \frac{2y+2}{6x+3} = \frac{(2x+1)\cdot(2y+2)}{(y+1)\cdot(6x+3)}$$

$$= \frac{2x\cdot 2y+2x\cdot 2+1\cdot 2y+1\cdot 2}{y\cdot 6x+y\cdot 3+1\cdot 6x+1\cdot 3} = \frac{4xy+4x+2y+2}{6xy+3y+6x+3}$$

$$= \frac{4xy+4x+2y+2}{6xy+6x+3y+3} = \frac{2\cdot(2xy+2x+y+1)}{3\cdot(2xy+2x+y+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(2xy+2x+y+1)}{(2xy+2x+y+1)} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Jokeri *) Milloin edellisen tehtävänannon mukainen osamäärä $\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2}$ on määritelty?

Ratkaisu:

Ensinnäkin meidän tulee olla varmoja siitä, että kyseisen osamäärän murtolausekkeet $\frac{2x+1}{y+1}$ ja $\frac{6x+3}{2y+2}$ ovat määriteltävissä. Murtolauseke on määritelty silloin, kun sen nimittäjä ei saa arvoa nolla, joten saamme tästä kaksi ehtoa ratkaisemalla nimittäjän nollakohdan:

1) $y + 1 = 0 \mid -1$

$y = -1$, joten tulee olla $\boldsymbol{y \neq -1}$, jotta voidaan määrittää $\frac{2x+1}{y+1}$

2) $2y + 2 = 0 \mid -2$

$2y = -2 \mid : 2$

$y = -1$, joten tulee olla $\boldsymbol{y \neq -1}$, jotta voidaan määrittää $\frac{6x+3}{2y+2}$ (sattumalta sama ehto kuin ensimmäinenkin ehto)

Lisäksi tulee huomioida myös se, että $\frac{6x+3}{2y+2}$ ei voi saada arvoa nolla, sillä se on jakajana. Ratkaistaan tämän nollakohdat, niin saamme vielä viimeisen ja kolmannenkin ehdon:

3)

$$\frac{6x+3}{2y+2} = 0 \qquad | \cdot (2y+2),\ \text{missä } y \neq -1$$

$$(2y+2) \cdot \frac{6x+3}{2y+2} = (2y+2) \cdot 0$$

$$6x + 3 = 0 \qquad | -3$$

$$6x = -3 \qquad | : 6$$

$$x = \frac{-3}{6}$$

$$x = \frac{3 \cdot (-1)}{3 \cdot 2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

, joten tulee olla $\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{2}}$**.**

Kokoamalla ehdot 1), 2) ja 3) saamme:

$\frac{2x+1}{y+1} : \frac{6x+3}{2y+2} = \frac{3}{2}$, kun $\boldsymbol{y \neq -1}$ ja $\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{2}}$**.**

Harjoitustehtäviä

163.Laske

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{2}-2$ d) $\frac{4}{5}+1\frac{2}{3}$

164.Laske

a) $\frac{4}{5}\cdot 2$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{7}:\frac{1}{2}$

165. Milloin murtolauseke **ei** ole määritelty?

a) $\frac{5}{x-3}$

b) $\frac{x}{x}$

c) $\frac{3x-4}{-4x+8}$

d) $\frac{3}{a+b}$

166.Olkoon $f(x,y)=\frac{x^2+3}{y-3}$. Laske kyseisen funktion arvo, kun

a) $x=0$ ja $y=0$
b) $x=1$ ja $y=1$
c) $x=2$ ja $y=2$
d) $x=3$ ja $y=3$.

167.Sievennä

a) $\frac{9x+1}{x-1}+\frac{2x-1}{x-1}$ b) $\frac{x+4}{a+b}+\frac{-x+3}{a+b}$

168.Sievennä

a) $\frac{-3x+1}{n}-\frac{x+2}{n}$ b) $\frac{-4a+13b}{-c+r}-\frac{-b+3a}{-c+r}$

169.Sievennä

a) $\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x-1}{x+2}$ b) $\frac{x-3y}{(a+b)}\cdot\left(-\frac{2x+y}{(a+b)}\right)$

170.Sievennä

a) $\frac{a+b}{a-b}:\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{3+x}{y+1}:\frac{-x+2}{-y}$

171.Sievennä

a) $\frac{9x+1}{x}+\frac{2x-1}{x+1}$ b) $\frac{4x+2}{x-1}-\frac{3x+7}{x+1}$

172.Ratkaise rationaaliyhtälö

$$\frac{2x+1}{x^2-x}=0$$

173.Ratkaise rationaaliyhtälö

$$\frac{x+2}{2x+4}=0$$

Tehtävien ratkaisuja

1. a) 12, 8 ja $\frac{8}{4}$
   b) kaikki
   c) -3, 12, -5, $\frac{8}{4}$ ja 8

2. a) esim. *pii*
   b) esim. $\frac{1}{2}$
   c) esim. $\frac{1}{3}$

3. a) kokonaisluvut
   b) luonnolliset luvut
   c) reaaliluvut

4. 888 + 88 + 8 + 8 + 8

5. (25, 0, 0), (20, 5, 0), (10, 10, 5), (10, 8, 7), (9, 9, 7) ja (9, 8, 8)

6.
a) 0, 0, 0
b) 2, 3, 4
c) 16, 24, 32
d) 24, 36, 48

7.
108, 54, 162

8.
66, 132, 121

9.
a) Esim. 39 ja 282
b) Koska 12 on luvun 3 monikerta, luvut ovat jaollisia kolmella

10.
a) Esim. 297 ja 8604
b) Koska 18 on luvun monikerta, ovat luvut jaollisia kolmella. Koska 18 on myös luvun 9 monikerta, luvut ovat jaollisia myös luvulla 9

12.
a) parillinen
b) parillinen
c) pariton
d) parillinen

13.
60

14.
a) Mies, 1990, M
b) Nainen, 1970, Y
c) Mies, 2002, 3
d) Nainen, 1899, R

15.
a) $3\frac{1}{3}$
b) $2\frac{3}{5}$
c) $7\frac{1}{7}$
d) $7\frac{6}{18} = 7\frac{1}{3}$

16.
a) $\frac{2}{6}$ ja $\frac{3}{6}$
b) $\frac{9}{15}$ ja $\frac{4}{15}$
c) $\frac{9}{18}$ ja $\frac{8}{18}$
d) $\frac{55}{77}$ ja $\frac{63}{77}$

17.
a) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{6}$

18.
a) $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$
b) $\frac{1}{40}$

19.
$\frac{2}{3}$

20.
a) $\frac{3}{x}$
b) $\frac{5}{b}$
c) $\frac{1}{y}$

21.
a) $\frac{5}{a}$
b) $\frac{3}{10x}$
c) $\frac{5}{6y}$

22.
a) 1

a) 1
c) 1
d) $\frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

23.
a) $\frac{13}{15}$
b) $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$

25.
a) 12 e
b) 190 g
c) $23\frac{1}{7}$ kg

26.
80 kolikkoa

27.
7 metriä
38.
a) 4
b) 6
c) 10

29.
a) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$
b) $\frac{25}{64}$

30.
a) $\frac{23}{18} = 1\frac{5}{18}$
b) $-\frac{7}{18}$
c) $\frac{10}{27}$
d) $\frac{8}{15}$

32.
$\frac{3}{16}$

34.
8:5

35.
2:7

36.
ei

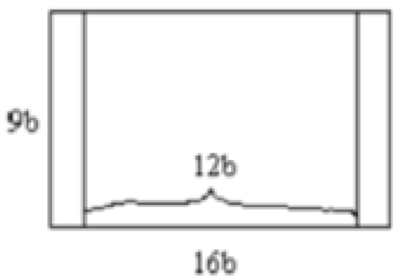
37.
a) 1:1
b) 1:3
c) 3:2

38.
a) 3:125
b) 100:7

39.
a) 3:1
b) 29:3
c) 49:23

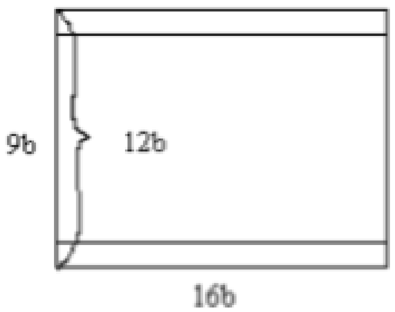
40.
56 %

41. Merkitään HDTV-television kuvaruudun korkeutta *9b* ja ruudun leveyttä *16b*. Jos vanhanmuotoinen kuva näkyy kokonaan pystysuunnassa (korkeus *9b*), on sen leveys $\frac{4}{3} \cdot 9b = 12b$.



Mustaksi jäävän alueen leveys on yhteensä $16b - 12b = 4b$. Mustaksi siten jää $\frac{4b}{16b} = \frac{1}{4}$ kuvaruudun leveydestä.

Jos vanhanmuotoinen kuva näkyy kokonaan vaakasuunnassa (leveys *16b*), on kuvan korkeus $\frac{3}{4} \cdot 16b = 12b$.



Ulkopuolelle jäävän kuva-alueen korkeus on $12b - 9b = 3b$. Ulkopuolelle siten jää $\frac{3b}{12b} = \frac{1}{4}$ kuvan korkeudesta.

Vastaus: Mustaksi jää $\frac{1}{4}$ kuvaruudun leveydestä ja ulkopuolelle jää $\frac{1}{4}$ kuvan korkeudesta.

42.
160 e ja 240 e

43.
6,80 e

44.
36, 54 ja 90 astetta

45.
Leevi saa 271,30 e ja Eevi 208,70 e

46.
Mehutiivistettä 1,5 l ja vettä 4,5 l

47. Merkitään Joukon tuntipalkkaa luvulla 100, jolloin Tapion tuntipalkka on 110 ja Matin 121.
Oikeat suhdeluvut saadaan kertomalla tuntimäärät tuntipalkkoja kuvaavilla luvuilla.
Jouko: $140 \cdot 100 = 14\ 000$,
Tapio: $160 \cdot 110 = 17\ 600$,
Matti: $200 \cdot 121 = 24\ 200$.
Suhdelukujen summa on 55 800, jolloin palkkiot ovat
Jouko: 2258 euroa,
Tapio: 2839 euroa ja
Matti: 3903 euroa.

48. Merkitään 40 %:sen liuoksen määrää a:lla. Liuoksessa on desinfiointiainetta 40 % eli 0,40a.
Merkitään 5 %:sen liuoksen määrää x:llä. Desinfiointiaineen määrä säilyy laimennettaessa.

$$0{,}05x = 0{,}40a$$

$$x = \frac{0{,}40}{0{,}04}a = 8a$$

Vettä on lisättävä $8a - a = 7a$. Siis sekoitussuhde on 1 : 7. 10 litraan tarvitaan kahdeksasosa eli 1,25 litraa liuosta ja loput 8,75 litraa vettä.

49.
a) 15 %
b) 12
c) 100

50.
1,5 %

51.
60 %

52.
30 %

53.
a) 31 kg

b) 52 kg

54.
8,4 l

55. Todellinen nopeus on mittarin näyttämästä nopeudesta $\frac{92\ km/h}{100\ km/h} = 0{,}92 = 92\ \%$.

Kun mittari näytti 85 km/h, oli todellinen nopeus $0{,}92 \cdot 85 \frac{km}{h} \approx 78\ km/h$.

56.
31,85 e

57.
25 %

58. Yhtiövastike ennen korotusta oli $64{,}5\ m^2 \cdot 2 \frac{e}{m^2} = 129\ e$.

Korotuksen jälkeen yhtiövastike oli $1{,}085 \cdot 129\ e \approx 139{,}97\ e$.

59.
a) 1020 e
b) 1061,20 e

60.
10 vuoden kuluttua

61.
a) 328 e
b) 35,6 %

62.
a) 20 %
b) 16,7 %

63.
7,1 %

64.
a) 16,7 %
b) 1,5 prosenttiyksikköä

65.
a) 1445,48 e
b) 15,6 %

66.
a) 24,2 %
b) 314 %
c) 75,8 %

67.
a) kasvoi 50 %
b) väheni 25 %
c) väheni 25 %

68. Vanha nettopalkka on $\frac{100-25}{100} \cdot 1170\ e = 877{,}5\ e$.

Uusi nettopalkka on $\frac{100-28}{100} \cdot 1300\ e = 936\ e$

a) Nettopalkan nousu $936\ e - 877{,}5\ e = 58{,}5\ e$.
b) Prosentuaalinen nousu $\frac{58{,}5\ e}{877{,}5\ e} \cdot 100\ \% \approx 6{,}7\ \%$.

69. Käytetyn maidon litrahinta oli ensimmäisellä viikolla $\frac{4{,}20\ mk}{0{,}8} = 5{,}25\ mk$.

Litrahinta toisella viikolla oli 5,0 mk. Toisella viikolla käytetty maito tuli halvemmaksi. Toisen viikon maito oli $\frac{5{,}25\ mk-5{,}0\ mk}{5{,}25\ mk} \cdot 100\ \% \approx 4{,}8\ \%$.

Vastaus: Toisen viikon maito oli 4,8 % edullisempaa.

70.
21,10 e

71. Osasto A:

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{48}{300} = 0{,}16 = 16\%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$

Osasto A:

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{4}{20} = 0{,}20 = 20\%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{114}{600} = 0{,}19 = 19\%$

Siis tyttöjen hyväksymisprosentit ovat 1 yksikköä suuremmat molemmilla osastoilla. Koko laitokseen pyrki 320 tyttöä, joista hyväksyttiin 52. Poikia pyrki 620, joista hyväksyttiin 117.

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{52}{320} = 0{,}1625 = 16{,}25\%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{117}{620} \approx 0{,}1887 = 18{,}87\%$

Siis poikien hyväksymisprosentti koko laitokseen oli suurempi kuin tyttöjen.

72. Värjätyn alueen ala A. Pienemmän ympyrän ala $B = \pi r^2 = \pi \cdot (5{,}0\ cm)^2 = 78{,}5\ cm^2$. Suuremman ympyrän ala C, jolloin

$$B = \frac{40}{100} C$$

$$C = \frac{100}{40} B = \frac{100}{40} 78{,}5\ cm^2 = 196\ cm^2$$

$$A = C - B = 196\ cm^2 - 78{,}5\ cm^2 \approx 118\ cm^2$$

73.
a) 28
b) 400

74.
6,6 ha

75.
1250 e

76.
15,5 %

77. Merkitään äänioikeutettujen määrää a:lla. Äänestäneiden määrä oli $0{,}71a$. Näistä 57 % äänesti KYLLÄ. KYLLÄ-äänien määrä oli $0{,}57 \cdot 0{,}71a = 0{,}4047a \approx 0{,}40a$ eli 40 % äänioikeutettujen määrästä.

78. Merkitään alkuperäistä perushintaa x (mk). Tällöin

$$1{,}12x = 22{,}30\ e$$

$$x = \frac{22{,}30\ e}{1{,}12} \approx 19{,}90\ e$$

Alennettu perushinta on $19{,}90\ e - 4{,}20\ e = 15{,}70\ e$.

Alennettu myyntihinta on $1{,}12 \cdot 15{,}70\ e \approx 17{,}60\ e$.

79. Merkitään todellista ajettua matkaa x:llä.

$$1{,}05 \cdot x = 205\ km$$

$$x = \frac{205\ km}{1{,}05} \approx 195{,}2\ km$$

$$2\ h\ 40\,\mathrm{min} \approx 2{,}67\ h$$

Keskinopeus oli $\frac{195,2\ km}{2,67\ h} \approx 73\ km/h.$

80. Merkitään edellisvuoden matkustajamäärää a:lla. Nykyinen matkustajamäärä on 0,77a. Seuraavan vuoden matkustajamäärä pitää olla taas a. Matkustajamäärä on siis suurempi edellisen vuoden matkustajamäärää

$$\frac{a - 0{,}77a}{0{,}77a} = \frac{(1 - 0{,}77)a}{0{,}77a} = \frac{0{,}23}{0{,}77} \approx 0{,}2987$$

Vastaus: Matkustajamäärän pitäisi kasvaa 30 %.

81. Merkitään alkuperäistä myyntihintaa a:lla, jolloin alkuperäinen myyntipalkkio on 0,25a. Laskenut myyntihinta on 0,92a, jolloin uusi myyntipalkkio on $0{,}31 \cdot 0{,}92a = 0{,}2852a$. Siis myyntipalkkio nousi.

82. Merkitään vuoden 1995 pesujauheiden kokonaismyyntiä a:lla. Kyseessä olevan pesujauheen myynti oli 0,15a. Vuonna 1996 kokonaismyynti oli 1,10a. Tarkasteltavan pesujauheen myynti oli $1{,}20 \cdot 0{,}15a = 0{,}18a$. Osuus koko myynnistä oli

$$\frac{0{,}18a}{1{,}10a} = \frac{0{,}18}{1{,}10} \approx 0{,}16 = 16\ \%$$

83.
a) 2^4
b) $(-10)^4$
c) a^3

84.
a) 100
b) $b * b * b$
c) $4 * 4 * 4 * 4 * 4$

85.
a) Ei
b) Ei
c) Kyllä

86.
a) -3
b) 2
c) a

87.
a) 32
b) -9
c) 1
d) -1

88.
a) $(-2)^3$
b) $(\frac{2}{3})^4$
c) $-(\frac{1}{3})^6$
d) $\frac{5^3}{7}$
e) $(1+x)^4$

89.
a) $(-5)^2 = 25$
b) $(-5)^3 = -125$

90.
a) 15
b) 7
c) 11
d) Perättäisten lukujen neliöiden erotus on yhtä suuri kuin samojen lukujen summa.
$1000^2 - 999^2 = 1000 + 999 = 1999$.

91.
9 ja 8

92.
a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 8$
d) $x = 3$

93.
a) $6x^3 * x^2 = 6x^5$
b) $3x^2 * 4x = 12x^3$
c) $x^4 * 5x^4 = 5x^8$

94.
a) $24x^2$
b) $-8y^3$

95.
a) $10a^8b^{10}$
b) x^8y^{10}

96.
a) 5
b) 1
c) 0

97.

a) 4

b) $\frac{1}{9}$

c) $-\frac{1}{49}$

d) $\frac{1}{5}$

98.

a) 1

b) 1

c) -1

d) 3

e) a^8

99.

a) $6x^3 \cdot x^2 = 6x^5$

b) $\frac{6x^3}{x^2} = 6x$

100.

9

101.

a) b^3

b) c^6

102.

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{y}{6}$

103.

a) $3a^5b^6$

b) $\frac{ab^5c^7}{8}$

104.

a) 10^6

b) y^8

c) 1

d) 1

e) 5

105.

a) k^{40}
b) x^{27}
c) t^{99}

106.
a) 2^6
b) 2^{21}
c) 2^{64}

107.
a) 3^7
b) 3^6
c) 3^{15}
d) 3^{11}

108.

$$a^3b^2$$

109.

$$\frac{1}{x^2}$$

110.
a) $\frac{7}{12}$
b) $\frac{1}{45}$

111.
a) epätosi, sillä $(3^2)^3 = 3^6$ ja $(3^3)^2 = 3^6$, joten $(3^2)^3 = (3^3)^2$.
b) tosi, sillä $(9^5)^0 = 1$ ja $(9^4)^{-1} = 9^{-4} = \frac{1}{9^4}$, joten $(9^5)^0 > (9^4)^{-1}$.
c) epätosi, sillä $(2^3)^4 = 2^{12}$ ja $(4^4)^2 = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$, joten $(2^3)^4 < (4^4)^2$.

112.

$$3^0 - 3^{-2} = 1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

113.
a) $16a^2$
b) $243a^5$
c) -1000
d) $100x^6y^8$

114.
a) 15^2
b) 10^{10}

115.

$$x^{16}y^{14}$$

116.

$$a^2b^4$$

117.
a) $(3x)^3 = 27x^3$
b) $(2a)^3 = 8a^3$
c) $(5y)^3 = 125y^3$

118.

$$-a^2b$$

119.
a) $\frac{4x^2}{25}$
b) $\frac{9x^2}{16}$

120.

$$(\frac{5m^3n^4}{5m^2n})^2 = (mn^3)^2 = m^2n^6$$

121.
a) -1
b) 4

122.
a) 8
b) $\frac{1}{49}$

123.

$$\frac{9b^2}{4a^8}$$

124.
a) epätosi
b) epätosi
c) tosi
d) epätosi

125.
a) 1
b) 0
c) 11

126.
157 m

127.
a) 5
b) 7
c) 9

128.
a) 0 tai 1
b) 4
c) $\frac{1}{9}$

129.
a) $\frac{3}{5}$
b) $1\frac{1}{2}$

130.
a) 7
b) 5

131.
a) 8
b) 8

132.
a) 2
b) 3

133.
x = 2

134.

$$\sqrt{2^2 + (\frac{8}{3})^2} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

135.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

136.

$9 - 4\sqrt{5} \approx 0{,}236$

137.

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $4y^6 + 3y^2 + 5y + 2$

c) $x^2 + 3y^2 - 3$ tai $3y^2 + x^2 - 3$

d) $2x^9 + 4y^5 - 5x^3 + 133y + 7$

138.

a) $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 + 2 + 1 = \mathbf{4}$

b) 2

c) 17

d) -8

139.

a) $20x^2$

b) $-4xy$

c) $-8a^2b$

d) $2xyz$

140.

a) $8a + 8b$

b) $-2a + 2b$

c) $-15a - 20b$

d) $12a - 10b$

141.

a) $5a + 2$

b) $9a - 4$

142.

a) $a^2 + 3a$

b) $12a^2 + 15a$

c) $6a^2 - 36a$

d) $a^3 - a^2$

143.

a) $x^2 + 4x + 3$

b) $n^2 + n - 2$

c) $-6y^2 + 14y - 8$

d) $-a^2 + ax + bx - ab$

144.

a) $2x^3 + 7x^2 - 11x + 2$

b) $3a^3 - 7a^2 + 8a - 12$

c) $6a^3 + 22a - 8a$

145.

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - b^2$

146. $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1 = (\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) + \boldsymbol{x}$

Eli tulos on lukujen $x + 1$ ja x summa, valittiinpa luku x miten tahansa!

147.
Suorakulmaisten kolmioiden alojen lausekkeet: $A_1 = \frac{a \cdot h}{2}$ ja $A_2 = \frac{b \cdot h}{2}$.

Tällöin $A = A_1 + A_2 = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(a+b)h}{2}$.

148.
a)$A_s(x,y) = xy$
b)$A_k(a,b) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 2ab$
c) $A(x,y,a,b) = A_s - A_k = xy - 2ab$
d) $A(60{,}28{,}6{,}6) = 60 \cdot 28 - 2 \cdot 6 \cdot 6 = 1608 \approx 1610$,
V: Kaukalon pinta-ala on n. 1610 $\boldsymbol{m^2}$

149.
a) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
b) $8x^3 - 84x^2 + 294x - 343$

150.
a) $x = 1$
b) $x = 2$

151.
a) $x =$
b) $x =$

152. a) $\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \\ 2 \cdot 0 + 1 \neq 0 \\ \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \neq 2 \\ 2 \cdot 1 + (-2) = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2 \\ 2 \cdot (-2) + 4 = 0 \end{cases}$

.: c)-kohta, kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{-2}$ ja $\boldsymbol{y} = \mathbf{4}$ toteuttaa yhtälöryhmän, muut eivät.

153. $x = 2$ ja $y = 8$.

154. $x = 1$ ja $y = 1$.

155. $(x,y) = (1{,}0)$

156. $x = -1$ ja $y = 0$.

157. Yhtälöparin yhtälöt (eli suorat) ovat samat, jonka voi todeta esim. seuraavasti:
$\begin{cases} x + y - 2 = 0 | \cdot 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} <==> \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 | + 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} <==> \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

Vastaus: Yhtälöparilla on aina ratkaisu, rippumatta muuttujista x ja y.

158. $4x - 2(2x + 1) - 6 = 0$

$-8 = 0$, joka on identtisesti epätosi. Täten suorat **eivät** leikkaa toisiansa.

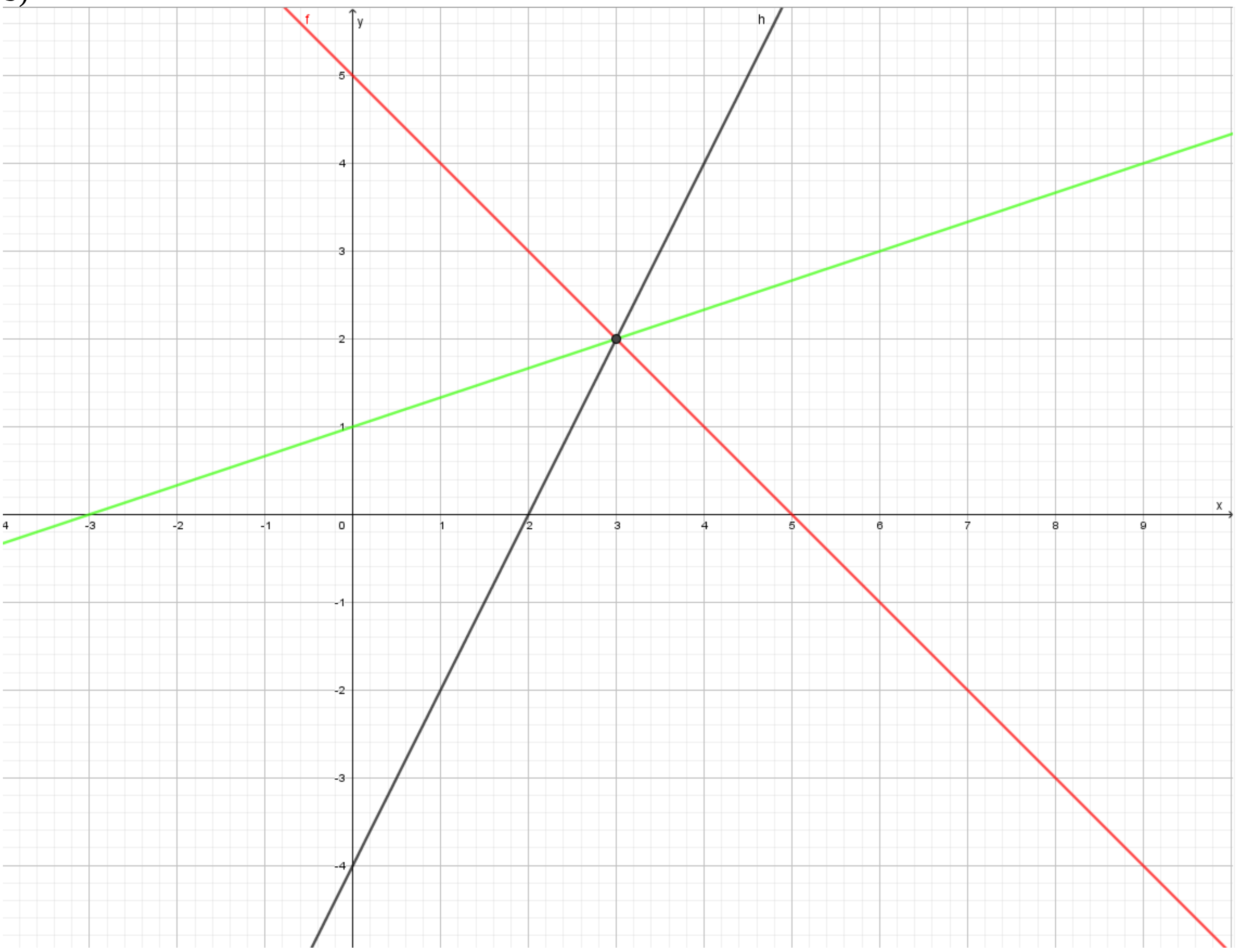
159. Irtokarkkeja myytiin 1290 kappaletta.

160. 2 tunnin ja 26 minuutin kuluttua kilpailun alkamisesta.

161.

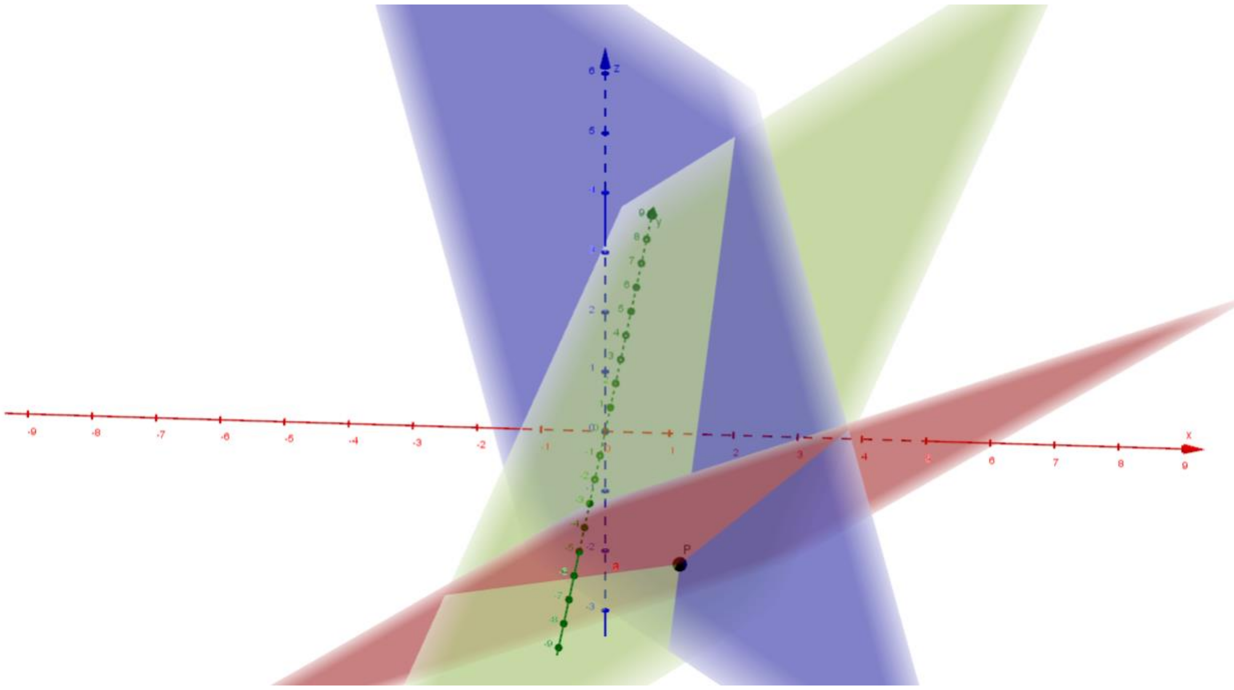
a) $\boldsymbol{x = 3}$ **ja** $\boldsymbol{y = 2}$. Voidaan ratkaista ensin esim. suorien $y + x = 5$ ja $y = \frac{1}{3}x + 1$ välinen yhtälöpari, josta saadaan $x = 3$ ja $y = 2$. Tämän jälkeen sijoitetaan kyseiset koordinaatit kolmanteen yhtälöön $y + 4 = 2x$, josta saadaan **identtisesti tosi** yhtälö $2 + 4 = 2 \cdot 3$.

b)



162. $x = 1$, $y = 2$ ja $z = -3$.

Geometrisesti tämä tarkoittaa yhtälöryhmän yhtälöiden leikkauspistettä. Kyseiset yhtälöt voidaan tulkita kolmiulotteisen avaruuden tasoina. Eli ratkaisu voidaan tulkita näiden tasojen leikkauspisteenä. Aiheeseen palataan lukion pitkän matematiikan vektorit -kurssilla, joten ei kannata todellakaan murehtia jos oheisen kuvan merkitys ei nyt aukea!



163. a) $\frac{31}{35}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{37}{15}$

164. a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{7}$

165. a) $x = 3$ b) $x = 0$ c) $x = 2$ d) $a = -b$

166. a) $f(0,0) = -1$ b) $f(1,1) = -2$
c) $f(2,2) = -7$ d) Nimittäjästä saa arvon 0 sijoituksella $y = 3$. Siispä, ei voida määrittää mitä on $f(3,3)$.

167. a) $\frac{11x}{x-1}$ b) $\frac{7}{a+b}$

168. a) $\frac{-4x-1}{n}$ b) $\frac{-7a+14b}{-c+r}$

169. a) $\frac{-3x+1}{n}$ b) $\frac{-2x^2+5xy+3y^2}{a+b}$

170. a) 1 (luku jaettuna itsellään) b) $\frac{-xy-3y}{-xy-x+2y+2}$

171. a) $\frac{11x^2+9x+1}{x^2+x}$ b) $\frac{x^2+2x+9}{x^2-1}$

172. $x = -\frac{1}{2}$

173. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Lähdeluettelo

[1] M. Toivola, T. Härkönen, *Avoin matematiikka 9. lk., osio*, saatavissa: http://avoinoppikirja.fi/tiedostot/ylakoulu/matematiikka/avoin_matematiikka_9lk_osio3.pdf (8.1.2019)

[2] L. Hellsten, *Polynomit*, saatavissa: https://opetus.tv/mab/mab1/polynomit/ (8.1.2019)

[3] S. Hassinen, O. Latva, J-P. Makkonen, M. Peltola, M. Pirttimaa ja A. Tolvanen, *Kuutio X*, Sanoma Pro, 2018

[4] J. Cederberg, *Polynomiyhtälöt*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa1/ensimmaisen-asteen-polynomiyhtalot/ (9.1.2019)

[5] J. Cederberg, *Rationaalilauseke*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa7/rationaalilauseke/ (9.1.2019)

[6] J. Cederberg, *Rationaalilauseke*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa4/yhtaloryhmat/ (9.1.2019)

[7] T. Metsänkylä, M. Näätänen, *Algebra*, saatavissa: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/algebra.pdf (11.2.2019)

[8] J. Cederberg, *Rationaaliyhtälöt*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa7/rationaaliyhtalo/ (11.2.2019)

[9] Saarijärven nuorisotalo, *Hiihtolomalla/talvilomalla nuorisotalo näin toimii!*, saatavissa: http://www.saarijarvennuorisotalo.com/wp-content/uploads/2017/02/hiihtoloma-2017.jpg (18.3.2019)

[10] J. Cederberg, *Yhtälöryhmät*, saatavissa: https://opetus.tv/maa/maa4/yhtaloryhmat/ (21.3.2019)